

### TD d'Algèbre Série n°1

**Exercice 1.** Traduire en terme de quantificateurs, les expressions suivantes :

1. Il existe un nombre entier relatif supérieur ou égale à tout nombre réel.
2. Il n'existe pas de nombres rationnels solutions de l'équation  $x^2 - 2 = 0$ .
3. Pour tout nombre complexe  $z$ . Si  $z$  est égal à son conjugué alors  $z$  est un nombre réel.
4. la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est positive.
5. La fonction  $f$  n'est pas croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2.** Donner la négation des propositions suivantes :

1.  $\forall x > 0, \quad \exists y \leq 0, \quad x^2 = y + 1$ .
2.  $\forall a \in \mathbb{N}, \quad \forall b \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{Q}, \quad a \leq c \leq b$ .
3.  $\forall x > 0, \quad x > 3 \implies x^2 > 9$ .

**Exercice 3.** 1. Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$   
2. En déduire que  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$

**Exercice 4.** Soit  $(u_n)$  une suite numérique définie par :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = 18 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+5)3^n$ .

**Exercice 5.** 1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante  $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5}$ .

2. Déterminer toutes les applications  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = x + f(y).$$

**Exercice 6.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois parties non vides d'un ensemble  $E$ .

1. Montrer que  $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$
2. Montrer que  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ .
3. Montrer que  $A \cup B = A \cap B \iff A = B$ .
4. Montrer que  $A \cap C = B \implies (A \setminus C) \cup B = A$ .

**Exercice 7.** Soit l'application  $f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$  définie par  $f(z) = \frac{iz - i}{z + 3}$ .  
Montrer que l'application  $f$  est bijective et donner son application réciproque.

**Exercice 8.** Soit l'application  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
$$x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

Montrer que l'application  $f$  réalise une bijective de  $[2, +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera puis donner sa bijection réciproque.

**Exercice 9.** Soit l'application  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$   
$$(x, y) \longmapsto xy$$

1. Est ce que  $f$  est une application injective ? surjective ? justifier.
2. Soit la paire  $A = \{-1, 2\}$  et le singleton  $B = \{0\}$ .  
Déterminer  $f(A^2)$  et  $f^{-1}(B)$ .

**Exercice 10.** Soit l'application  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$   
$$(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$$

Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice 11.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non nuls et une application  $f : E \longrightarrow F$ .

1. Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \implies (f(A) \subset f(B))$ .
2. Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .
3. Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .  
L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
4. Démontrer que

$$f \text{ est injective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

5. Démontrer que  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), (C \subset D) \implies (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$ .
6. Démontrer que  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
7. Démontrer que  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .
8. Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall D \in \mathcal{P}(F), f(A \cap f^{-1}(D)) = f(A) \cap D$ .

**Exercice 12.** On définit sur  $\mathbb{R}^{+*}$  la relation binaire  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x \mathcal{R} y \iff \ln^2(x) - \ln^2(y) = \ln(x) - \ln(y).$$

1. Vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe de  $e$ .

**Exercice 13.** On définit sur l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  noté  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  la relation  $\mathcal{R}$  par

$$f \mathcal{R} g \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq g(x).$$

Vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

## Corrigés de la Série n°1

### Corrigé de l'exercice 1.

Traduire en terme de quantificateurs, les expressions suivantes :

1) Il existe un nombre entier relatif supérieur ou égale à tout nombre réel.

$$\exists n \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \geq x.$$

2) Il n'existe pas de nombres rationnels solutions de l'équation  $x^2 - 2 = 0$ .

La négation de cette proposition est :

il existe des nombres rationnels solutions de l'équation  $x^2 - 2 = 0$ . On la traduit par :

$\exists x \in \mathbb{Q}, \quad x^2 - 2 = 0$ . Pour traduire la proposition proposée, il suffit d'écrire la négation de la proposition sous forme quantifiée. On obtient alors :  $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x^2 - 2 \neq 0$ .

3) Pour tout nombre complexe  $z$ . Si  $z$  est égal à son conjugué alors  $z$  est un nombre réel.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = \bar{z} \implies z \in \mathbb{R}.$$

4) la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est positive se traduit par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ .

5) La fonction  $f$  n'est pas croissante sur  $\mathbb{R}$ .

On traduit  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y \implies f(x) \leq f(y)$ .

Il suffit maintenant de traduire la négation de cette proposition quantifiée.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y \text{ et } f(x) \geq f(y).$$

### Corrigé de l'exercice 2.

Donner la négation des propositions suivantes :

1) la négation de  $\forall x > 0, \quad \exists y \leq 0, \quad x^2 = y + 1$  est  $\exists x > 0, \quad \forall y \leq 0, \quad x^2 \neq y + 1$ .

2) la négation de  $\forall a \in \mathbb{N}, \quad \forall b \in \mathbb{N}, \quad \exists c \in \mathbb{Q}, \quad a \leq c \leq b$  est :

$$\exists a \in \mathbb{N}, \quad \exists b \in \mathbb{N}, \quad \forall c \in \mathbb{Q}, \quad c < a \text{ ou } c > b.$$

3) la négation de  $\forall x > 0, \quad x > 3 \implies x^2 > 9$  est  $\exists x > 0, \quad x > 3 \text{ et } x^2 \leq 9$ .

### Corrigé de l'exercice 3.

1) Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$ .

Soit  $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ .

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b} \iff \frac{3a-b}{4} &\geq 4a^2 \geq (3a-b)(a+b) \\ &\iff a^2 \geq 3a^2 + 3ab - ba - b^2 \\ &\iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\iff (a-b)^2 \geq 0, \text{ ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

Donc  $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$ .

2) En déduire que  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}$ .

Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}^{+*}$ .

D'après la question précédente, on a  $\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3x-y}{4}, \frac{y^2}{y+z} \geq \frac{3y-z}{4}$ , et  $\frac{z^2}{z+x} \geq \frac{3z-x}{4}$ .

En faisant la somme membre à membre de ces trois inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} &\geq \frac{3x-y}{4} + \frac{3y-z}{4} + \frac{3z-x}{4} \\ &\geq \frac{2x+2y+2z}{4} \\ \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} &\geq \frac{x+y+z}{2}. \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 4.

Soit  $(u_n)$  une suite numérique définie par :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = 18 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n.$$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+5)3^n$ .

• Initialisation.

Pour  $n = 0$ , on a  $(0+5) \times 3^0 = 5 \times 1 = 5 = u_0$ .

Pour  $n = 1$ , on a  $(1+5) \times 3^1 = 6 \times 3 = 18 = u_1$ .

Donc la propriété est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

• Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. On suppose que la propriété est vraie pour  $n$  et  $n+1$  c'est-à-dire  $u_n = (n+5)3^n$  et  $u_{n+1} = (n+1+5)3^{n+1} = (n+6)3^{n+1}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6u_{n+1} - 9u_n \\ &= 6(n+6)3^{n+1} - 9(n+5)3^n \\ &= [6(n+6)3 - 9(n+5)] 3^n \\ &= (18n + 108 - 9n - 45)3^{n+1} \\ &= (9n + 63)3^n = 9(n+7)3^n \\ u_{n+2} &= (n+7)3^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour  $n+2$ .

• Conclusion. D'après le principe du raisonnement par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+5)3^n$ .

**Corrigé de l'exercice 5.**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante  $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5}$ .

• Analyse : soit  $x \in \mathbb{R}$  solution de l'équation. Alors

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5} &\implies x^2 - 3x = 3x - 5 \\ &\implies x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\implies x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 5. \end{aligned}$$

• Synthèse : si  $x = 1$  alors  $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{-2}$  impossible. Donc 1 n'est pas une solution.

si  $x = 5$  alors  $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{10}$  et  $\sqrt{3x - 5} = \sqrt{10}$ . Donc  $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5}$ .

D'où 5 est une solution de l'équation.

• Conclusion : L'équation admet une solution unique 5 et donc  $S = \{5\}$ .

**Autre méthode** : On commence par déterminer l'ensemble de définition  $D$  de l'équation.

$$\begin{aligned} x \in D &\iff x^2 - 3x \geq 0 \quad \text{et} \quad 3x - 5 \geq 0 \\ &\iff x(x-3) \geq 0 \quad \text{et} \quad x \geq \frac{5}{3} \\ &\iff x \in ]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[ \quad \text{et} \quad x \in [\frac{5}{3}, +\infty[ \\ x \in D &\iff x \in [3, +\infty[. \end{aligned}$$

Donc  $D = [3, +\infty[$ .

Soit  $x \in D$  alors

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{3x - 5} &\iff x^2 - 3x = 3x - 5 \\ &\iff x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 5, \end{aligned}$$

et puisque  $1 \notin D$  et  $5 \in D$  alors la seule solution de l'équation est 5.

2) Déterminer toutes les applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = x + f(y) \quad (\text{E})$$

• Analyse : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application vérifiant l'égalité (E).

En prenant  $y = 0$ , on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + f(0)$ .

On pose  $f(0) = \lambda$  donc on a  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \lambda$ .

• Synthèse : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une

constante.

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ .  $f(x+y) = x+y+\lambda = x+f(y)$ .

Donc  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x+y) = x+f(y)$ .

• Conclusion : Les seules applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant (E) sont les applications  $x \rightarrow x + \lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Corrigé de l'exercice 6.**

Soient  $A, B$  et  $C$  trois parties non vides d'un ensemble  $E$ .

1) Montrer que  $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$ .

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap \overline{B} \\ &= \overline{B} \cap A \quad (\cap \text{ est commutative}) \\ &= \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} \quad (A = \overline{\overline{A}}) \\ A \setminus B &= \overline{B \setminus A}. \end{aligned}$$

2) Montrer que  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ .

$$\begin{aligned} A \cup (B \setminus C) &= A \cup (B \cap \overline{C}) \quad (B \setminus C = B \cap \overline{C}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C}) \quad (\cup \text{ est distributive par rapport à } \cap) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup A) \quad (\cup \text{ est commutative}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup \overline{\overline{A}}) \quad (A = \overline{\overline{A}}) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{C \cap \overline{A}} \quad (\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \text{ loi de Morgan}) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(C \setminus A)} \quad (C \setminus A = C \cap \overline{A}) \\ A \cup (B \setminus C) &= (A \cup B) \setminus (C \setminus A) \quad (X \setminus Y = X \cap \overline{Y}). \end{aligned}$$

3) Montrer que  $A \cup B = A \cap B \iff A = B$ .

•  $\implies$ ) Supposons que  $A \cup B = A \cap B$ .

Soit  $x \in A$  alors  $x \in A \cup B$ . Or  $A \cup B = A \cap B$  donc  $x \in B$ .

On a  $\forall x \in A$ ,  $x \in B$ . Donc  $A \subset B$ .

Par symétrie ( $A$  et  $B$  jouent le même rôle), on déduit que  $B \subset A$ . et par suite  $A = B$ .

D'où  $A \cup B = A \cap B \implies A = B$ .

•  $\impliedby$ ) Réciproquement supposons que  $A = B$ .

On a  $A \cap B = A \cap A = A$  et  $A \cup B = A \cup A = A$ . Donc  $A \cap B = A \cup B$ .

D'où  $A = B \implies A \cup B = A \cap B$ .

Par suite  $A \cup B = A \cap B \iff A = B$ .

4) Montrer que  $A \cap C = B \implies (A \setminus C) \cup B = A$ .

Supposons que  $A \cap C = B$ .

$$\begin{aligned} (A \setminus C) \cup B &= (A \cap \overline{C}) \cup (A \cap C) \\ &= A \cap (\overline{C} \cup C) \\ &= A \cap E \\ (A \setminus C) \cup B &= A. \end{aligned}$$

Donc  $A \cap C = B \implies (A \setminus C) \cup B = A$ .

**Corrigé de l'exercice 7.**

Soit l'application  $f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$  définie par  $f(z) = \frac{iz - i}{z + 3}$ .

Montrer que l'application  $f$  est bijective et donner son application réciproque.

Pour montrer que  $f$  est bijective, il suffit de montrer que

$$\forall z' \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \quad \exists! z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}, \quad f(z) = z'.$$

$$\begin{aligned}
 f(z) = z' &\iff \frac{iz - i}{z + 3} = z' \\
 &\iff iz - i = z'(z + 3) \\
 &\iff iz - z'z = i + 3z' \\
 &\iff z(i - z') = i + 3z' \\
 f(z) = z' &\iff z = \frac{i + 3z'}{i - z'}.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 z = -3 &\iff \frac{i + 3z'}{i - z'} = -3 \\
 &\iff i + 3z' = -3i + 3z' \\
 &\iff 4i = 0, \text{ absurde.}
 \end{aligned}$$

Donc  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-3\}$ . On a montré que  $\forall z' \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$  l'équation  $f(z) = z'$  admet une solution unique dans  $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ . Donc  $f$  est bijective et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned}
 f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-3\} \\
 z' &\longmapsto \frac{i + 3z'}{i - z'}.
 \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 8.

Soit l'application  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

Montrer que l'application  $f$  réalise une bijection de  $[2, +\infty[$  vers un intervalle  $J$  que l'on déterminera puis donner sa bijection réciproque.

• Domaine de définition de  $f$ .

$$x \in D_f \iff x^2 - 4x + 5 \geq 0.$$

On a  $\Delta = -4 < 0$  et donc  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 > 0$ .

D'où  $D_f = \mathbb{R}$ .

• Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 (x - 2)^2 \geq 0 &\implies (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \\
 &\implies x^2 - 4x + 5 \geq 1 \\
 &\implies \sqrt{x^2 - 4x + 5} \geq 1 \\
 &\implies f(x) \geq 1.
 \end{aligned}$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [1, +\infty[$ .

• Montrons que  $f$  est bijective de  $[2, +\infty[$  vers  $J = [1, +\infty[$ .

Soit  $y \in [1, +\infty[$ . Cherchons  $x \in [2, +\infty[$  unique tel que  $f(x) = y$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) = y &\iff \sqrt{(x - 2)^2 + 1} = y \\
 &\iff (x - 2)^2 = y^2 - 1 \\
 &\iff x - 2 = \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{ou} \quad x - 2 = -\sqrt{y^2 - 1} \\
 f(x) = y &\iff x = 2 + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{ou} \quad x = 2 - \sqrt{y^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

• Si  $y = 1$  alors  $x = 2 \in [2, +\infty[$ .

$$\begin{aligned}
 y > 1 &\implies \sqrt{y^2 - 1} > 0 \quad \text{et} \quad -\sqrt{y^2 - 1} < 0 \\
 &\implies 2 + \sqrt{y^2 - 1} > 2 \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{y^2 - 1} < 2 \\
 &\implies 2 + \sqrt{y^2 - 1} \in [2, +\infty[ \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{y^2 - 1} \notin [2, +\infty[.
 \end{aligned}$$

Donc  $\forall y \in [1, +\infty[, \exists! x \in [2, +\infty[, f(x) = y$ .

D'où  $f$  est bijective de  $[2, +\infty[$  vers  $[1, +\infty[$  et sa bijection réciproque est :

$$f^{-1} : [1, +\infty[ \longrightarrow [2, +\infty[ \\ y \longmapsto 2 + \sqrt{y^2 - 1}$$

### Corrigé de l'exercice 9.

Soit l'application  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  .  
 $(x, y) \longmapsto xy$

1) Est ce que  $f$  est une application injective ? surjective ? justifier.

•  $f$  est injective signifie :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = f((a, b)) \implies (x, y) = (a, b)$ .

C'est-à-dire :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, xy = ab \implies x = a$  et  $y = b$ .

On a  $f((3, 4)) = f((2, 6))$  et  $(3, 4) \notin (2, 6)$ .

Donc  $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = f((a, b))$  et  $(x, y) \notin (a, b)$ .

D'où  $f$  n'est pas injective.

•  $f$  est surjective signifie :  $\forall z \in \mathbb{R}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = z$ .

C'est-à-dire :  $\forall z \in \mathbb{R}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = z$ .

On prend  $(x, y) = (1, z)$  par exemple, alors  $\forall z \in \mathbb{R}, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = z$ .

D'où  $f$  est surjective.

2) Soit la paire  $A = \{-1, 2\}$  et le singleton  $B = \{0\}$ .

3) Déterminer  $f(A^2)$  et  $f^{-1}(B)$ .

• On a  $A^2 = \{(-1, -1), (-1, 2), (2, -1), (2, 2)\}$ .

Donc  $f(A^2) = \{f((-1, -1)), f((-1, 2)), f((2, -1)), f((2, 2))\} = \{1; -2; 4\}$ .

• On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) \in B\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\} \\ f^{-1}(B) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \text{ ou } y = 0\} \end{aligned}$$

On peut écrire cet ensemble de différentes façons :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{(x, 0), (0, y) / x, y \in \mathbb{R}\} \\ f^{-1}(B) &= \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ f^{-1}(B) &= (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 10.

Soit l'application  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$$

Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Il suffit de montrer que  $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x', y')$ .

Soit  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} f((x, y)) = (x', y') &\iff (x + y, x - y) = (x', y') \\ &\iff \begin{cases} x + y = x' & L_1 \\ x - y = y' & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x = x' + y' & L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ 2y = x' - y' & L_2 \longleftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \\ f((x, y)) = (x', y') &\iff \begin{cases} x = \frac{x' + y'}{2} \\ y = \frac{x' - y'}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet une solution unique.

On a donc montrer que :  $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2, \exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x', y')$ .

D'où  $f$  est bijective et sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est définie par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x', y') &\longmapsto \left(\frac{x' + y'}{2}, \frac{x' - y'}{2}\right). \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 11.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non nuls et une application  $f : E \longrightarrow F$ .

1) Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \implies (f(A) \subset f(B))$ .

Soit  $A \in \mathcal{P}(E), B \in \mathcal{P}(E)$ . Supposons que  $A \subset B$ .

Soit  $y \in f(A)$  alors  $\exists x \in A$  tel que  $f(x) = y$ .

Puisque  $A \subset B$  alors  $\exists x \in B$  tel que  $f(x) = y$ . Donc  $y \in f(B)$ .

On a montré que  $\forall y \in f(A), y \in f(B)$ . Donc  $f(A) \subset f(B)$ .

D'où  $(A \subset B) \implies (f(A) \subset f(B))$ .

Finalemnt  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), (A \subset B) \implies (f(A) \subset f(B))$ .

2) Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ . Montrons  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  par double inclusion.

• Soit  $y \in f(A \cup B)$  alors  $\exists x \in (A \cup B)$ , tel que  $f(x) = y$ .

Si  $x \in A$  alors  $y = f(x) \in f(A)$  donc  $y \in f(A) \cup f(B)$ .

Si  $x \notin A$  alors  $x \in B$  donc  $y = f(x) \in f(B)$  donc  $y \in f(A) \cup f(B)$ .

On a montré que  $\forall y \in f(A \cup B), y \in f(A) \cup f(B)$  ce qui signifie que  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ .

• Soit  $y \in (f(A) \cup f(B))$  alors  $y \in f(A)$  ou  $y \in f(B)$ .

Si  $y \in f(A)$  alors  $\exists x \in A$  tel que  $f(x) = y$ . Mais puisque  $x \in (A \cup B)$  alors  $y \in f(A \cup B)$ .

Si  $y \notin f(A)$  alors  $y \in f(B)$ . Donc  $\exists x \in B$  tel que  $f(x) = y$ . Mais puisque  $x \in (A \cup B)$  alors  $y \in f(A \cup B)$ .

Donc  $\forall y \in (f(A) \cup f(B)), y \in f(A \cup B)$  ce qui signifie que  $(f(A) \cup f(B)) \subset f(A \cup B)$ .

• On a  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$  et  $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$  donc  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

Finalemnt  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

3) Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $B \in \mathcal{P}(E)$ .

Soit  $y \in f(A \cap B)$  alors  $\exists x \in (A \cap B)$  tel qu  $f(x) = y$ .

On a  $x \in A$  et  $x \in B$ . Donc  $y \in f(A)$  et  $y \in f(B)$  et par suite  $y \in f(A) \cap f(B)$ .

On a montré que  $\forall y \in f(A \cap B), y \in f(A) \cap f(B)$  ce qui signifie que  $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$ .

Finalemnt  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

• L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

La réponse est non. Prenons par exemple  $E = \{0; 1\}$  et  $F = \{0\}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 0$ . Considérons les partie  $A = \{0\}$  et  $B = \{1\}$  de  $E$ .

On a  $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$  et  $f(A) \cap f(B) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\}$ .

Il est clair que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  et  $(f(A) \cap f(B)) \not\subset f(A \cap B)$ .

4) Démontrer que

$$f \text{ est injective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

•  $\implies$ ) Supposons que  $f$  est injective.

Soit  $A \in \mathcal{P}(E), B \in \mathcal{P}(E)$ . On sait d'après la question précédente que  $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$ .

Soit  $y \in (f(A) \cap f(B))$ , alors  $y \in f(A)$  et  $y \in f(B)$ .

Donc  $\exists x \in A$  tel que  $y = f(x)$  et  $\exists x' \in B$  tel que  $y = f(x')$ .

On déduit que  $f(x) = f(x')$  et puisque  $f$  est injective alors  $x = x'$  et par suite  $x \in (A \cap B)$ .

On a montré que  $\forall y \in f(A) \cap f(B), \exists x \in (A \cap B)$  tel que  $y = f(x)$ .

Donc  $\forall y \in f(A) \cap f(B), y \in f(A \cap B)$ .

D'où  $(f(A) \cap f(B)) \subset (f(A \cap B))$  et par suite  $f(A \cap B) = (f(A) \cap f(B))$ .

Finalemnt

$$f \text{ est injective} \implies \forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

•  $\impliedby$ ) Supposons que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

Soit  $x, x' \in E$  tels que  $x \neq x'$ . On pose  $A = \{x\}$  et  $B = \{x'\}$ .

On a  $A \cap B = \emptyset$ ,  $f(A) = \{f(x)\}$  et  $f(B) = \{f(x')\}$ .

On sait que  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ . Donc  $f(\emptyset) = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$

C'est-à-dire  $\emptyset = \{f(x)\} \cap \{f(x')\}$ . Donc  $f(x) \neq f(x')$ .

On a  $\forall x, x' \in E, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$ , ce qui signifie que  $f$  est injective.

Ainsi on a montré que

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \implies f \text{ est injective.}$$

• Conclusion :

$$f \text{ est injective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$



5) Démontrer que  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), (C \subset D) \implies (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$ .

Soit  $C \in \mathcal{P}(F)$  et  $D \in \mathcal{P}(F)$ . Supposons que  $C \subset D$ .

Soit  $x \in f^{-1}(C)$  alors  $f(x) \in C$ . Or  $C \subset D$  donc  $f(x) \in D$  et par suite  $x \in f^{-1}(D)$ .

On a  $\forall x \in f^{-1}(C), x \in f^{-1}(D)$  ce qui signifie que  $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ .

Ainsi on a montré que  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), (C \subset D) \implies (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$ .

6) Démontrer que  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .

Soit  $C \in \mathcal{P}(F)$  et  $D \in \mathcal{P}(F)$ . Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in (C \cup D) \\ &\iff f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \\ x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D). \end{aligned}$$

Donc  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .

7) Démontrer que  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .

Soit  $C \in \mathcal{P}(F)$  et  $D \in \mathcal{P}(F)$ . Soit  $x \in E$ .

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in (C \cap D) \\ &\iff f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{aligned}$$

Donc  $\forall C \in \mathcal{P}(F), \forall D \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .

8) Démontrer que  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall D \in \mathcal{P}(F), f(A \cap f^{-1}(D)) = f(A) \cap D$ .

Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $D \in \mathcal{P}(F)$ .

• Montrons d'abord que  $f(A \cap f^{-1}(D)) \subset (f(A) \cap D)$ .

Soit  $y \in f(A \cap f^{-1}(D))$ . Alors  $\exists x \in A \cap f^{-1}(D)$  tel que  $y = f(x)$ .

On a  $x \in A$  et  $x \in f^{-1}(D)$ . Donc  $f(x) \in f(A)$  et  $f(x) \in D$ .

On déduit que  $y \in f(A) \cap D$  et  $y \in D$ . D'où  $y \in f(A) \cap D$ .

On a montré que  $\forall y \in f(A \cap f^{-1}(D)), y \in f(A) \cap D$ , ce qui signifie que  $f(A \cap f^{-1}(D)) \subset (f(A) \cap D)$ .

• Montrons que  $(f(A) \cap D) \subset f(A \cap f^{-1}(D))$ .

Soit  $y \in (f(A) \cap D)$ . Alors  $y \in f(A)$  et  $y \in D$ .

Puisque  $y \in f(A)$  alors  $\exists x \in A$  tel que  $y = f(x)$ .

D'autre part, on a  $y \in D$  c'est-à-dire  $f(x) \in D$ . Donc  $x \in f^{-1}(D)$ .

On a  $x \in A$  et  $x \in f^{-1}(D)$ . Donc  $x \in (A \cap f^{-1}(D))$ .

Et puisque  $y = f(x)$  alors  $y \in (f(A \cap f^{-1}(D)))$ .

On a montré que  $\forall y \in (f(A) \cap D), y \in (f(A \cap f^{-1}(D)))$ .

Donc  $(f(A) \cap D) \subset (f(A \cap f^{-1}(D)))$ .

• Conclusion :  $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall D \in \mathcal{P}(F), f(A \cap f^{-1}(D)) = f(A) \cap D$ .

### Corrigé de l'exercice 12.

On définit sur  $\mathbb{R}^{+*}$  la relation binaire  $\mathcal{R}$  par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x \mathcal{R} y \iff \ln^2(x) - \ln^2(y) = \ln(x) - \ln(y).$$

1) Vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

•  $\mathcal{R}$  réflexive : Soit  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ . On a  $\ln^2(x) - \ln^2(x) = \ln(x) - \ln(x)$ . Donc  $x \mathcal{R} x$ .

On a vérifié que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, x \mathcal{R} x$ .

D'où  $\mathcal{R}$  est réflexive.

•  $\mathcal{R}$  est symétrique : Soit  $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ .

$$\begin{aligned} x \mathcal{R} y &\implies \ln^2(x) - \ln^2(y) = \ln(x) - \ln(y) \\ &\implies \ln^2(y) - \ln^2(x) = \ln(y) - \ln(x) \\ x \mathcal{R} y &\implies y \mathcal{R} x. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x$ .

D'où  $\mathcal{R}$  est symétrique.

•  $\mathcal{R}$  est transitive : Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}^{+*}$ .

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\implies \ln^2(x) - \ln^2(y) = \ln(x) - \ln(y) \text{ et } \ln^2(y) - \ln^2(z) = \ln(y) - \ln(z) \\ &\implies \ln^2(x) - \ln(x) = \ln^2(y) - \ln(y) \text{ et } \ln^2(y) - \ln(y) = \ln^2(z) - \ln(z) \\ &\implies \ln^2(x) - \ln(x) = \ln^2(z) - \ln(z) \\ &\implies \ln^2(x) - \ln^2(z) = \ln(x) - \ln(z) \\ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\implies x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^{+*}, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$ .

Donc  $\mathcal{R}$  est transitive.

Conclusion :  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique et transitive, donc  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

**Autre méthode** Dans la définition de la relation  $\mathcal{R}$ , on sépare les variables  $x$  et  $y$ .

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}, \quad x\mathcal{R}y \iff \ln^2(x) - \ln(x) = \ln^2(y) - \ln(y) \iff f(x) = f(y),$$

avec  $f$  est l'application définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$ .

$\mathcal{R}$  est une relation binaire associée à l'application  $f$ .

D'après le cours, la relation associée à une application est une relation d'équivalence (voir les exemples 9. 6) page 17 et 11. 3) page 18 du polycopié du cours).

2) Déterminer la classe de  $e$ .

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \{x \in \mathbb{R}^{+*} / x\mathcal{R}e\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{+*} / \ln^2(x) - \ln^2(e) = \ln(x) - \ln(e)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{+*} / \ln^2(x) - 1 = \ln(x) - 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{+*} / \ln^2(x) - \ln(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{+*} / \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{+*} / \ln(x) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{+*} / x = 1 \text{ ou } x = e\} \\ \bar{e} &= \{1, e\}. \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 13.

On définit sur l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  noté  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  la relation  $\mathcal{R}$  par

$$f\mathcal{R}g \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq g(x).$$

Vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre.

• réflexivité : Soit  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ . On a  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x)$ . Donc  $f\mathcal{R}f$ .

On a  $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f\mathcal{R}f$ . Donc  $\mathcal{R}$  est réflexive.

• Anti-symétrie : Soit  $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

$$\begin{aligned} f\mathcal{R}g \text{ et } g\mathcal{R}f &\implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \text{ et } g(x) \leq f(x) \\ &\implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) \\ f\mathcal{R}g \text{ et } g\mathcal{R}f &\implies f = g. \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f\mathcal{R}g \text{ et } g\mathcal{R}f \implies f = g$ .

Donc  $\mathcal{R}$  est anti-symétrique.

• Transitivité : Soit  $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

$$\begin{aligned} f\mathcal{R}g \text{ et } g\mathcal{R}h &\implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \text{ et } g(x) \leq h(x) \\ &\implies \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq h(x) \\ f\mathcal{R}g \text{ et } g\mathcal{R}h &\implies f\mathcal{R}h \end{aligned}$$

On a montré que  $\forall f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f\mathcal{R}g \text{ et } g\mathcal{R}h \implies f\mathcal{R}h$ .

D'où  $\mathcal{R}$  est transitive.

Conclusion :  $\mathcal{R}$  est réflexive, anti-symétrique et transitive, donc  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre.

L'ordre est-il total? L'ordre ici est partiel puisque il existe des éléments dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  qui ne sont pas comparables. Par exemple  $\cos$  et  $\sin$ . On a  $\cos \not\mathcal{R} \sin$  et  $\sin \not\mathcal{R} \cos$ .

**TD : Série n°2**

**Exercice 1.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :  $e^z = -\sqrt{5}i$ ,  $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z^2 - 4z + 13 = 0$ ,  $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$ ,  $z^2 - (1-2i)z + 1 - 7i = 0$ ,  $z^{2n} - iz^n - 1 + i = 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 2.** Soit les polynômes  $P_n(X) = (X+1)^{2n} + (X+2)^n - 1$  et  $Q(X) = X^2 + 3X + 2$ . Montrer que le polynôme  $P_n$  est divisible par le polynôme  $Q$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 3.** Effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- (1)  $A = 2X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 5X + 6$ ,  $B = X^2 - 3X + 1$ .
- (2)  $A = 2X^3 - 6X^2 + 2X - 6$ ,  $B = X^2 + 1$ .
- (3)  $A = X^7 + 2X^4 + X + 1$ ,  $B = X^2 + X$ .
- (4)  $A = X^4 + X^3 + 2X + 9$ ,  $B = X^5 - 3X$ .

**Exercice 4.** Soit dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme :

$$P(X) = (i-1)X^3 - (5i-11)X^2 - (43+i)X + 9 + 37i.$$

1. Vérifier que  $i$  est un zéro de  $P$ .
2. Déterminer les nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $P(X) = (X-i)(aX^2 + bX + c)$ .
3. En déduire toutes les racines de  $P$ .

**Exercice 5.** On considère le polynôme  $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ .

1. Montrer que 2 est une racine de  $P$ . Préciser son ordre de multiplicité.
2. Factoriser le polynôme  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3. En déduire la factorisation du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 6.** Soit le polynôme  $P(X) = X^4 + X^2 + 6X + 4$ .

1. Montrer que  $-1$  est une racine de  $P$ . Préciser son ordre de multiplicité.
2. En utilisant la formule de Taylor, vérifier que  $P(X) = (X+1)^2(X^2 - 2X + 4)$ .
3. En déduire la factorisation de  $P$  en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 7.** Soit  $n \geq 2$ . Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme  $P_n(X) = X^n$ , par le polynôme  $X^2 - 4X + 3$ .

**Exercice 8.** Factoriser en produit de polynômes irréductibles

1.  $X^4 + X^2 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2.  $X^8 + X^4 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
3.  $X^6 + 9X^3 + 8$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .
4.  $X^3 + X^2 + X + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .
5.  $X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 9.** Effectuer la division suivant les puissances croissantes de  $A$  par  $B$  dans les cas suivants :

- (1)  $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ ,  $B = X^2 + X + 1$  à l'ordre 2.
- (2)  $A = X^2 + 1$ ,  $B = X + 1$  à l'ordre 3.
- (3)  $A = X^3 + 5X$ ,  $B = X^3 + 1$  à l'ordre 3.
- (4)  $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ ,  $B = X^3 + X^2 + 1$  à l'ordre 4.

## Corrigé de la Série n°2

### Corrigé de l'exercice 1.

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :  $e^z = -\sqrt{5}i$ ,  $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z^2 - 4z + 13 = 0$ ,  
 $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$  et  $z^2 - (1-2i)z + 1 - 7i = 0$ .  
 $z^{2n} - iz^n - 1 + i = 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $re^{i\theta}$  et  $\rho e^{i\alpha}$  deux nombres complexes non nuls. On a

$$re^{i\theta} = \rho e^{i\alpha} \iff r = \rho \quad \text{et} \quad \theta \equiv \alpha \quad [2\pi]$$

On pose  $z = x + iy$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} e^z = -i\sqrt{5} &\iff e^x e^{iy} = \sqrt{5}e^{-i\pi/2} \\ &\iff e^x = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad y \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \\ &\iff x = \ln(\sqrt{5}) \quad \text{et} \quad (\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que } z = \frac{\ln 5}{2} + (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est  $S = \{z = \frac{\ln 5}{2} + (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

$$\begin{aligned} e^z = 1 + i\sqrt{3} &\iff e^x e^{iy} = 2e^{i\pi/3} \\ &\iff e^x = 2 \quad \text{et} \quad y \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\ &\iff x = \ln 2 \quad \text{et} \quad (\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que } z = \ln 2 + (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)i \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est  $S = \{z = \ln 2 + (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

On peut utiliser le résultat du cours : les solutions de l'équation  $e^z = \rho e^{i\alpha}$  sont

$$z = \ln(\rho) + i(\alpha + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En effet : si pose  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} e^z = \rho e^{i\alpha} &\iff e^x e^{iy} = \rho e^{i\alpha} \\ &\iff e^x = \rho \quad \text{et} \quad y \equiv \alpha \quad [2\pi] \\ e^z = \rho e^{i\alpha} &\iff x = \ln(\rho) \quad \text{et} \quad (\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = \alpha + 2k\pi) \end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation  $z = -i\sqrt{5}$  c-à-d l'équation  $z = \sqrt{5}e^{-i\pi/2}$  sont

$$z = \ln(\sqrt{5}) + (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i = \frac{\ln(5)}{2} + (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de  $e^z = 1 + i\sqrt{3}$  c-à-d l'équation  $z = 2e^{i\pi/3}$  sont

$$z = \ln 2 + (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)i \mid k \in \mathbb{Z}.$$

Le discriminant de l'équation  $z^2 - 4z + 13 = 0$  est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2.$$

Donc les solutions sont  $z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$  et  $z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$ .

Ainsi l'ensemble solution est  $S = \{2+3i; 2-3i\}$ .

Le discriminant de l'équation  $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$  est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1+i)^2 - 4 \times 13i = 2i - 52i = -50i = 25 \times (-2i) = [5(1-i)]^2.$$

Donc les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{1+i+5(1-i)}{2} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i.$$

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{1+i-5(1-i)}{2} = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est  $S = \{3-2i, -2+3i\}$

**Remarque :** en utilisant les deux identités utiles suivantes  $(1+i)^2 = 2i$  et  $(1-i)^2 = -2i$ , on peut déterminer assez rapidement les racines carrées de  $\Delta$  dans le cas particulier où  $\Delta = bi$  avec  $b \in \mathbb{R}$ . En effet

$$\text{Si } b > 0 \text{ alors } \Delta = bi = \frac{b}{2} \cdot 2i = \frac{b}{2} (1+i)^2 = \left[ \sqrt{\frac{b}{2}} (1+i) \right]^2.$$

$$\text{Si } b < 0 \text{ alors } \Delta = bi = \frac{-b}{2} \cdot (-2i) = \frac{-b}{2} (1-i)^2 = \left[ \sqrt{\frac{-b}{2}} (1-i) \right]^2.$$

Le discriminant de l'équation  $z^2 - (1-2i)z + 1-7i = 0$  est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1-2i)^2 - 4(1-7i) = 1-4-4i-4+28i = -7+24i$$

Cherchons les racines carrées de  $\Delta$ . Posons  $\delta = x+iy$  avec  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta &\iff (x+iy)^2 = -7+24i \\ &\iff x^2 - y^2 = -7 \quad \text{et} \quad 2xy = 24 \end{aligned}$$

D'autre part  $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$ .

On a donc 3 équations

$$\begin{cases} (1) & x^2 - y^2 = -7, \\ (2) & x^2 + y^2 = 25, \\ (2) & 2xy = 24. \end{cases}$$

$$(1)+(2) : \quad 2x^2 = 18 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3.$$

$$(2)-(1) : \quad y^2 = 32 \iff y^2 = 16 \iff y = \pm 4.$$

$$(3) : \quad xy = 12 > 0, \text{ donc } x \text{ et } y \text{ ont même signe.}$$

D'où  $\delta = 3+4i$  ou  $\delta = -3-4i$ .

On peut déterminer les racines carrées de  $-7+24i$  facilement en remarquant que :

$$\Delta = -7+24i = 9+2 \times 3 \times 4i - 16 = 3^2 + 2 \times 3 \times 4i + (4i)^2 = (3+4i)^2.$$

Par suite les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2} = \frac{1-2i+3+4i}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i.$$

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2} = \frac{1-2i-3-4i}{2} = \frac{-2-6i}{2} = -1-3i.$$

Résoudre l'équation  $z^{2n} - iz^n - 1 + i = 0$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On pose  $z^n = u$ , l'équation devient  $u^2 - iu - 1 + i = 0$ .

En utilisant la remarque du cours : les solutions de l'équation  $z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha\beta = 0$  sont  $\alpha$  et  $\beta$ .

$$u^2 - iu - 1 + i = 0 \iff u^2 - [(-1+i) + 1]u + (-1+i) \times 1 = 0$$

$$u^2 - iu - 1 + i = 0 \iff u = -1+i \text{ ou } u = 1$$

$$z^{2n} - iz^n - 1 + i = 0 \iff z^n = -1+i \text{ ou } z^n = 1.$$

Donc les solutions de l'équation sont les racines n<sup>ième</sup> de  $-1 + i$  et de l'unité.

$$\begin{aligned} -1 + i &= \sqrt{2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left[ -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] \\ -1 + i &= \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^n = -1 + i &\iff z^n = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} \\ z^n = -1 + i &\iff z = z_k = (\sqrt{2})^{\frac{1}{n}} e^{i \left( \frac{3\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n} \right)} \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$z^n = 1 \iff z = z'_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

D'où  $S = \{(\sqrt{2})^{\frac{1}{n}} e^{i \left( \frac{3\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}, e^{i \frac{2k\pi}{n}} / k = 0, 1, \dots, n-1\}$ .

### Corrigé de l'exercice 2.

Pour montrer que le polynôme  $Q$  divise le polynôme  $P_n$ , il suffit de vérifier que toutes les racines de  $Q$  sont aussi racine de  $P_n$  avec au moins le même ordre de multiplicité.

On a  $Q(x) = X^2 + 3X + 2 = X^2 + (1+2)X + 1 \times 2 = (X+1)(X+2)$ .

Donc  $-1$  et  $-2$  sont des racines simples de  $Q$ .

On a  $P_n(-1) = 0^{2n} + 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$  et  $P_n(-2) = (-1)^{2n} + 0^n - 1 = 1 - 1 = 0$ .

Donc  $-1$  et  $-2$  sont des racines au moins simples du polynôme  $P_n$ .

D'où on déduit que le polynôme  $Q$  divise le polynôme  $P_n$  pour tout entier  $n$ .

### Corrigé de l'exercice 3.

Effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , c'est déterminer deux polynômes  $Q$  et  $R$  tels que  $A = BQ + R$  avec  $R = 0$  ou  $0 \leq d^0 R < d^0 B$ .

1) Effectuons la division euclidienne de  $A = 2X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 5X + 6$  par  $B = X^2 - 3X + 1$ .

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 5X + 6 & X^2 - 3X + 1 \\ \underline{2X^4 - 6X^3 + 2X^2} & 2X^2 + 3X + 9 \\ 3X^3 + 0X^2 - 5X + 6 & \\ \underline{3X^3 - 9X^2 + 3X} & \\ 9X^2 - 8X + 6 & \\ \underline{9X^2 - 27X + 9} & \\ 19X - 3 & \end{array}$$

Donc le quotient est  $Q = 2X^2 + 3X + 9$  et le reste est  $R = 19X - 3$ .

On a bien  $d^0 R = 1 < 2 = d^0 B$  et  $A = B(2X^2 + 3X + 9) + (-19X - 3)$ .

2) Effectuons la division euclidienne de  $A = 2X^3 - 6X^2 + 2X - 6$  par  $B = X^2 + 1$ .

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 6X^2 + 2X - 6 & X^2 + 1 \\ \underline{2X^3 + 0X^2 + 2X} & 2X - 6 \\ -6X^2 + 0X - 6 & \\ \underline{-6X^2} & \\ -6 & \\ 0 & \end{array}$$

Donc le quotient est  $Q = 2X - 6$  et le reste est  $R = 0$ .

Donc  $B$  divise  $A$  et  $A = B(2X - 6)$ .

3) Effectuons la division euclidienne de  $A = X^7 + 2X^4 + X + 1$  par  $B = X^2 + X$ .

$$\begin{array}{r|l}
 X^7 + 0X^6 + 0X^5 + 2X^4 + 0X^3 + 0X^2 + X + 1 & X^2 + X \\
 \hline
 X^7 + X^6 & X^5 - X^4 + X^3 + X^2 - X + 1 \\
 \hline
 -X^6 & 2X^4 + X + 1 \\
 -X^6 - X^5 & \\
 \hline
 & X^5 + 2X^4 + X + 1 \\
 & X^5 + X^4 \\
 \hline
 & X^4 + X + 1 \\
 & X^4 + X^3 \\
 \hline
 & -X^3 + X + 1 \\
 & -X^3 - X^2 \\
 \hline
 & X^2 + X + 1 \\
 & X^2 + X \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

Donc le quotient est  $Q = X^5 - X^4 + X^3 + X^2 - X + 1$  et le reste est  $R = 1$ .

On a  $d^0 R = 0 < 2 = d^0 B$  et  $A = B(X^5 - X^4 + X^3 + X^2 - X + 1) + 1$ .

4) Effectuons la division euclidienne de  $A = X^4 + X^3 + 2X + 9$  par  $B = X^5 - 3X$ .

On  $d^0 A = 4 < 5 = d^0 B$  donc  $A = B \times 0 + A$ .

Le quotient est  $Q = 0$  et le reste est  $R = A = X^4 + X^3 + 2X + 9$ .

#### Corrigé de l'exercice 4.

Soit dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme :

$$P(X) = (i - 1)X^3 - (5i - 11)X^2 - (43 + i)X + 9 + 37i.$$

1) Vérifier que  $i$  est un zéro de  $P$ .

$$\begin{aligned}
 P(i) &= (i - 1)i^3 - (5i - 11)i^2 - (43 + i)i + 9 + 37i \\
 &= 1 + i + 5i - 11 - 43 + 1 + 9 + 37i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc  $i$  est un zéro de  $P$ .

2) Déterminer les nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tels que  $P(X) = (X - i)(aX^2 + bX + c)$ .

Une première méthode consiste à effectuer une division euclidienne de  $P$  par  $X - i$ .

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 (i - 1)X^3 - (5i - 11)X^2 - (43 + i)X + (9 + 37i) \\
 -(i - 1)X^3 - (1 + i)X^2 \\
 \hline
 (10 - 6i)X^2 - (43 + i)X \\
 -(10 - 6i)X^2 + (6 + 10i)X \\
 \hline
 (-37 + 9i)X + (9 + 37i) \\
 -(-37 + 9i)X - (9 + 37i) \\
 \hline
 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 X \quad -i \\
 \hline
 (i - 1)X^2 + (10 - 6i)X + (-37 + 9i)
 \end{array}
 \end{array}$$

Donc  $P(X) = (X - i)[(i - 1)X^2 + (10 - 6i)X + (-37 + 9i)]$ .

Une deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
 (X - i)(aX^2 + bX + c) &= aX^3 + bX^2 + cX - iaX^2 - ibX - ic \\
 P(X) &= aX^3 + (b - ia)X^2 + (c - ib)X - ic.
 \end{aligned}$$

Donc par identification, on a

$$\begin{cases}
 a = i - 1 \\
 b - ia = -5i + 11 \\
 c - ib = -43 - i \\
 -ic = 9 + 37i.
 \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} a = i - 1 \\ b = -5i + 11 + i(i - 1) = 10 - 6i \\ c = (9 + 37i)i = 9i - 37. \end{cases}$$

3) En déduire toutes les racines de  $P$ .

$$P(X) = 0 \iff x - i = 0 \quad \text{ou} \quad (i - 1)X^2 + (10 - 6i)X + (-37 + 9i) = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (10 - 6i)^2 - 4(i - 1)(-37 + 9i) \\ &= 100 - 36 - 120i + 148i + 36 - 148 + 36i \\ &= -48 + 64i \\ &= 16(-3 + 4i) \end{aligned}$$

Cherchons les racines carrées de  $-3 + 4i$ .

Soit  $u = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$u^2 = (x + iy)^2 = -3 + 4i \iff \begin{cases} (1) & x^2 - y^2 = -3, \\ (2) & x^2 + y^2 = 5, \\ (2) & 2xy = 4. \end{cases}$$

$$(1)+(2) : 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1.$$

$$(2)-(1) : 2y^2 = 8 \iff y^2 = 4 \iff y = \pm 2.$$

$$(3) : xy = 2 > 0 \text{ donc } x \text{ et } y \text{ ont même signe.}$$

Donc les racines carrées de  $-3 + 4i$  sont  $1 + 2i$  et  $-1 - 2i$  et  $\Delta = [4(1 + 2i)]^2 = \delta^2$ .

Par suite

$$X_1 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-(10 - 6i) + 4(1 + 2i)}{2(i - 1)} = 5 - 2i \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-(10 - 6i) - 4(1 + 2i)}{2(i - 1)} = 3 + 4i$$

D'où les racines de  $P$  sont  $i$ ,  $5 - 2i$  et  $3 + 4i$ .

### Corrigé de l'exercice 5.

On considère le polynôme  $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ .

1) Montrer que 2 est une racine de  $P$ . Préciser son ordre de multiplicité.

On a  $P(2) = 2^4 - 3 \times 2^3 + 2^2 + 4 = 16 - 24 + 4 + 4 = 0$ . Donc 2 est une racine du polynôme  $P$ .

On a  $P'(X) = 4X^3 - 9X^2 + 2X$ . Donc  $P'(2) = 4 \times 2^3 - 9 \times 2^2 + 2 \times 2 = 32 - 36 + 4 = 0$ .

On a  $P''(X) = 12X^2 - 18X + 2$ . Donc  $P''(-1) = 12 \times 2^2 - 18 \times 2 + 2 = 48 - 36 + 2 = 14$ .

Puisque  $P(2) = P'(2) = 0$  et  $P''(2) \neq 0$ . Donc 2 est une racine d'ordre de multiplicité 2.

2) Factoriser le polynôme  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Puisque 2 est une racine d'ordre 2 du polynôme  $P$  alors  $(X - 2)^2$  divise  $P$ .

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 3X^3 + X^2 + 0X + 4 & X^2 - 4X + 4 \\ X^4 - 4X^3 + 4X^2 & X^2 + X + 1 \\ \hline X^3 - 3X^2 + 0X + 4 & \\ X^3 - 4X^2 + 4X & \\ \hline X^2 - 4X + 4 & \\ X^2 - 4X + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Donc  $P(X) = (X - 2)^2(X^2 + X + 1)$ . C'est la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  puisque c'est le produit du polynôme  $(X - 2)$  de degré 1 un polynôme  $(X^2 + X + 1)$  de degré 2 avec discriminant négatif.

3) En déduire la factorisation du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

On sait que le polynôme  $X^2 + X + 1$  admet deux racines conjuguées  $j$  et  $\bar{j}$ .

Donc  $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$ .

D'où  $P(X) = (X - 2)^2(X - j)(X - \bar{j})$ .



### Corrigé de l'exercice 5.

Soit le polynôme  $P(X) = X^4 + X^2 + 6X + 4$ .

1) Montrer que  $-1$  est une racine de  $P$ . Préciser son ordre de multiplicité.

On a  $P(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 + 6(-1) + 4 = 1 + 1 - 6 + 4 = 0$ .

Donc  $-1$  est une racine du polynôme  $P$ .

On a  $P'(X) = 4X^3 + 2X + 6$ . Donc  $P'(-1) = 4(-1)^3 + 2(-1) + 6 = -4 - 2 + 6 = 0$ .

On a  $P''(X) = 12X^2 + 2$ . Donc  $P''(-1) = 12(-1)^2 + 2 = 12 + 2 = 14$ .

Puisque  $P(-1) = P'(-1) = 0$  et  $P''(-1) \neq 0$ . Donc  $-1$  est une racine d'ordre de multiplicité 2.

2) En utilisant la formule de Taylor, vérifier que  $P(X) = (X + 1)^2(X^2 - 2X + 4)$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $P$  un polynôme de degré  $n$ . La formule de Taylor donne

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + \frac{P''(a)}{2!}(X - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n.$$

On écrit la formule de Taylor appliquée au polynôme  $P$  au point  $a = -1$ . On obtient

$$P(X) = \underbrace{P(-1)}_{=0} + \underbrace{P'(-1)}_{=0}(X + 1) + \frac{P''(-1)}{2!}(X + 1)^2 + \frac{P^{(3)}(-1)}{3!}(X + 1)^3 + \frac{P^{(4)}(-1)}{4!}(X + 1)^4.$$

On a  $P^{(3)}(X) = 24X$  et  $P^{(4)}(X) = 24$ . Donc  $P^{(3)}(-1) = -24$  et  $P^{(4)}(-1) = 24$ . D'où :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{14}{2}(X + 1)^2 - \frac{24}{6}(X + 1)^3 + \frac{24}{24}(X + 1)^4 \\ &= 7(X + 1)^2 - 4(X + 1)^3 + (X + 1)^4 \\ &= (X + 1)^2 [7 - 4(X + 1) + (X + 1)^2] \\ &= (X + 1)^2 (7 - 4X - 4 + X^2 + 2X + 4) \\ P(X) &= (X + 1)^2 (X^2 + 2X + 4). \end{aligned}$$

3) En déduire la factorisation de  $P$  en produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .

On résout l'équation  $z^2 + 2z + 4 = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

Le discriminant est  $\Delta = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 = \delta^2$ . Donc les solutions sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}i \\ z_2 &= \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{2} = -1 - \sqrt{3}i \quad (z_2 = \overline{z_1}). \end{aligned}$$

Par suite

$$X^2 + 2X + 4 = (X - z_1)(X - z_2) = (X + 1 - \sqrt{3}i)(X + 1 + \sqrt{3}i).$$

D'où on obtient  $P(X) = (X + 1)^2(X + 1 - \sqrt{3}i)(X + 1 + \sqrt{3}i)$ .

C'est la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}$  puisque  $P$  est le produit de polynômes de degré 1.

On peut factoriser directement le polynôme  $X^2 + 2X + 4$ , en effet

$$\begin{aligned} X^2 + 2X + 4 &= (X^2 + 2X + 1) + 3 \\ &= (X + 1)^2 - (\sqrt{3}i)^2 \\ X^2 + 2X + 4 &= (X + 1 - \sqrt{3}i)(X + 1 + \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 7.

Soit  $n \geq 2$ . Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme

$P_n(X) = X^n$ , par le polynôme  $X^2 - 4X + 3$ .

La division euclidienne de  $P_n(X)$  par  $X^2 - 4X + 3$  s'écrit :

$$P_n(X) = (X^2 - 4X + 3)Q(X) + R(X) \quad \text{avec } R = 0 \quad \text{ou } d^0 R < 2.$$

Donc le polynôme reste est de la forme  $R(X) = aX + b$  tel que  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

D'autre part,  $X^2 - 4X + 3 = X^2 - (1 + 3)X + 1 \times 3 = (X - 1)(X - 3)$ .

Donc  $P_n(X) = (X - 1)(X - 3)Q(X) + R(X)$ .

En substituant à  $X$  les valeurs 1 et 3 les racine du polynôme  $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$ , on obtient  $P_n(1) = R(1)$  et  $P_n(3) = R(3)$  c'est-à-dire  $1^n = a + b$  et  $3^n = 3a + b$ .

On résout donc le système

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ 3a + b = 3^n \end{cases}$$

On trouve facilement  $a = \frac{3^n - 1}{2}$  et  $b = \frac{3 - 3^n}{2}$  et donc  $R(X) = \frac{3^n - 1}{2} \cdot X + \frac{3 - 3^n}{2}$ .

### Corrigé de l'exercice 8.

1) Factorisation de  $X^4 + X^2 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

On résout dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 + z^2 + 1 = 0$ . On pose  $Z = z^2$ , l'équation devient  $Z^2 + Z + 1 = 0$ .

Les solutions sont données par  $Z_1 = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  et  $Z_2 = \bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ .

Donc  $z^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  ou  $z^2 = \bar{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ .

•  $z^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \iff z = e^{\frac{i\pi}{3}}$  ou  $z = -e^{\frac{i\pi}{3}}$ .

•  $z^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \iff z = e^{-\frac{i\pi}{3}}$  ou  $z = -e^{-\frac{i\pi}{3}}$ .

(Les racine carrées de  $re^{i\theta}$  sont  $\sqrt{r}e^{i\theta/2}$  et  $-\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ ).

Dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}})(X + e^{-\frac{i\pi}{3}}).$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$  :

On utilise les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) &= X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \\ (X + e^{i\theta})(X + e^{-i\theta}) &= X^2 + 2\cos(\theta)X + 1 \end{aligned}$$

Donc en regroupant les polynômes qui ont des racines conjuguées on obtient :

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{-\frac{i\pi}{3}}) \\ &= (X^2 - 2\cos(\pi/3)X + 1)(X^2 + 2\cos(\pi/3)X + 1) \\ &= (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1). \end{aligned}$$

Autre méthode qui n'utilise pas la factorisation dans  $\mathbb{C}[X]$ .

$$\begin{aligned} X^4 + X^2 + 1 &= (X^4 + 2X^2 + 1) - X^2 \\ &= (X^2 + 1)^2 - X^2 \\ &= (X^2 + 1 - X)(X^2 + 1 + X) \end{aligned}$$

2) Factorisation de  $X^8 + X^4 + 1 = 0$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

D'après 1) on sait que :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

Donc

$$\begin{aligned} X^8 + X^4 + 1 &= (X^2)^4 + (X^2)^2 + 1 \\ &= (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) \\ &= (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^4 - X^2 + 1). \end{aligned}$$

Il reste à factoriser  $X^4 - X^2 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ . Pour cela, on peut utiliser les racines complexes comme dans 1) ou bien mieux utiliser l'astuce suivant :

$$\begin{aligned} X^4 - X^2 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2 \\ &= (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 \\ &= (X^2 + 1 - \sqrt{3}X)(X^2 + 1 + \sqrt{3}X) \end{aligned}$$

Ainsi dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).$$

$X^8 + X^4 + 1$  est le produit de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  puisque se sont des trinômes de discriminants strictement négatif.

3) Factorisation de  $X^6 + 9X^3 + 8 = 0$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis  $\mathbb{R}[X]$ .

On résout dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^6 + 9z^3 + 8 = 0$ . On pose  $Z = z^3$ , l'équation devient  $Z^2 + 9Z + 8 = 0$ . On a  $\Delta = 49 > 0$  donc l'équation admet deux racines réelles  $Z_1 = -1$  et  $Z_2 = -8$ .

Donc  $z^3 = -1$  ou  $z^3 = -8$ .

**Méthode 1 :**

•  $z^3 = -1 \iff z^3 = (-1)^3 \iff \left(\frac{z}{-1}\right)^3 = 1$ .

Donc  $\frac{z}{-1}$  est une racine cubique de l'unité.

Or on sait que les racines cubiques de l'unité sont 1,  $j$  et  $j^2$ .

Donc  $\frac{z}{-1} = 1$  ou  $\frac{z}{-1} = j$  ou  $\frac{z}{-1} = j^2$ .

c-a-d  $z = -1$  ou  $z = -j$  ou  $z = -j^2$ .

•  $z^3 = -8 \iff z^3 = (-2)^3 \iff \left(\frac{z}{-2}\right)^3 = 1$ .

Donc  $\frac{z}{-2}$  est une racine cubique de l'unité.

Or on sait que les racines cubiques de l'unité sont 1,  $j$  et  $j^2$ .

Donc  $\frac{z}{-2} = 1$  ou  $\frac{z}{-2} = j$  ou  $\frac{z}{-2} = j^2$ .

c-a-d  $z = -2$  ou  $z = -2j$  ou  $z = -2j^2$ .

Ainsi dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$X^6 + 9X^3 + 8 = (X + 1)(X + j)(X + j^2)(X + 2)(X + 2j)(X + 2j^2).$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$  : On regroupe les polynômes qui ont des racines conjuguées et on utilise le fait que  $j^3 = 1$  et  $1 + j + j^2 = 0$ .

$$\begin{aligned}(X + j)(X + j^2) &= X^2 + j^2X + jX + j^3 \\ &= X^2 + (j^2 + j)X + j^3 \\ &= X^2 - X + 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(X + 2j)(X + 2j^2) &= X^2 + 2j^2X + 2jX + 4j^3 \\ &= X^2 + 2(j^2 + j)X + 4j^3 \\ &= X^2 - 2X + 4.\end{aligned}$$

Ainsi dans  $\mathbb{R}[X]$

$$X^8 + 9X^4 + 8 = (X + 1)(X + 2)(X^2 - X + 1)(X^2 - 2X + 4).$$

**Méthode 2 :**

Les solutions de l'équation  $X^6 + 9X^3 + 8 = 0$  sont les racines cubiques de  $-1 = 1e^{i\pi}$  et de  $-8 = 8e^{i\pi}$ .

Donc les solutions sont  $\sqrt[3]{1}e^{i(\pi/3+2k\pi/3)}$ ,  $\sqrt[3]{8}e^{i(\pi/3+2k\pi/3)}$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

C'est-à-dire  $z_k = e^{i(\pi/3+2k\pi/3)}$ ,  $z'_k = 2e^{i(\pi/3+2k\pi/3)}$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

On obtient alors  $z_0 = e^{i\pi/3}$ ,  $z_1 = e^{i\pi} = -1$ ,  $z_2 = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3}$ .

et  $z'_0 = 2e^{i\pi/3}$ ,  $z'_1 = 2e^{i\pi} = -2$ ,  $z'_2 = 2e^{i5\pi/3} = 2e^{-i\pi/3}$ .

Par suite dans  $\mathbb{C}[X]$ ,  $X^6 + 9X^3 + 8 = (X - e^{i\pi/3})(X + 1)(X - e^{-i\pi/3})(X - 2e^{i\pi/3})(X + 2)(X - 2e^{-i\pi/3})$

En regroupant les polynômes ayant des racines conjuguées, on obtient

$$\begin{aligned}X^6 + 9X^3 + 8 &= (X + 1)(X + 2)(X - e^{i\pi/3})(X - e^{-i\pi/3})(X - 2e^{i\pi/3})(X - 2e^{-i\pi/3}) \\ &= (X + 1)(X + 2)(X^2 - 2\cos(\pi/3)X + 1)(X^2 - 4\cos(\pi/3)X + 4) \\ X^6 + 9X^3 + 8 &= (X + 1)(X + 2)(X^2 - X + 1)(X^2 - 2X + 4)\end{aligned}$$

4) Factorisation de  $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

$$P(X) = 0 \iff \begin{cases} \frac{X^4 - 1}{X - 1} = 0, \\ X \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X^4 = 1, \\ X \neq 1 \end{cases}$$

Donc les racines de  $P$  sont les racine quatrième de l'unité différentes de 1.

Pour determiner les racines carrées de l'unité, on peut utiliser la méthode generale (voir cours) ou bien remarquer que

$$\begin{aligned} z^4 = 1 &\iff (z^2)^2 = 1 \\ &\iff z^2 = 1 \quad \text{ou} \quad z^2 = -1 \\ &\iff z = 1 \quad \text{ou} \quad z = -1 \quad \text{ou} \quad z = i \quad \text{ou} \quad z = -i \end{aligned}$$

Donc les racines de  $P$  sont  $-1, i, -i$  et par suite puisque  $P$  est unitaire alors

Dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P(X) = (X + 1)(X - i)(X + i).$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$  :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X + 1)(X - i)(X + i) \\ &= (X + 1)(X^2 - i^2) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1). \end{aligned}$$

5 Factorisation de  $P(X) = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .  
La méthode est semblable a celle du cas precedent.

$$P(X) = 0 \iff \begin{cases} \frac{X^8-1}{X-1} = 0, \\ X \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} X^8 = 1, \\ X \neq 1 \end{cases}$$

Donc les racines de  $P$  sont les racine huitième de l'unité différentes de 1.

Les racines huitième de l'unité sont les nombres complexes  $z_k$  tels que

$$z_k = e^{\frac{i2k\pi}{8}}, \quad k \in \{0; 1; 2; \dots; 7\}.$$

Donc les racines de  $P$  sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\frac{i\pi}{4}} & z_2 &= e^{\frac{i2\pi}{8}} = i & z_3 &= e^{\frac{i3\pi}{4}} \\ z_4 &= e^{i\pi} = -1 & z_5 &= e^{\frac{i5\pi}{4}} = e^{-\frac{i3\pi}{4}} & z_6 &= e^{\frac{i6\pi}{8}} = -i \\ z_7 &= e^{\frac{i7\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{aligned}$$

Donc dans  $\mathbb{C}[X]$  :

$$P(X) = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - i)(X - e^{\frac{i3\pi}{4}})(X + 1)(X - e^{-\frac{i3\pi}{4}})(X + i)(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}).$$

Dans  $\mathbb{R}[X]$  et après regroupement des polynômes de racines conjuguées on obtient

$$\begin{aligned} P(X) &= (X + 1)(X - i)(X + i)(X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{-\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{i3\pi}{4}})(X - e^{-\frac{i3\pi}{4}}) \\ &= (X + 1)(X^2 - i^2)(X^2 - 2\cos(\pi/4)X + 1)(X^2 - 2\cos(3\pi/4)X + 1) \\ P(X) &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1). \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 9.

Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre  $h$  de  $A$  par  $B$  c'est déterminer deux polynômes  $Q$  et  $R$  tels que  $A = BQ + X^{h+1}R$  avec  $Q = 0$  ou  $d^0Q \leq h$ .

1) Division suivant les puissances croissantes de  $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$  par  $B = X^2 + X + 1$  à l'ordre 2.

$$\begin{array}{r|l} 1 & -2X & +0X^2 & +X^3 & +X^4 & 1 & +X & +X^2 \\ 1 & +X & +X^2 & & & 1 & -3X & +2X^2 \\ \hline & -3X & -X^2 & +X^3 & +X^4 & & & \\ & -3X & -3X^2 & -3X^3 & & & & \\ \hline & & 2X^2 & +4X^3 & +X^4 & & & \\ & & 2X^2 & +2X^3 & +2X^4 & & & \\ \hline & & & 2X^3 & -X^4 & & & \end{array}$$

Donc le quotient est  $Q = 1 - 3X + 2X^2$  et le reste est  $2X^3 - X^4 = X^3(2 - X) = X^{2+1}R$ .  
On a  $d^0 Q \leq 2$  et  $A = B(1 - 3X + 2X^2) + X^3(2 - X)$ .

2) Division suivant les puissances croissantes de  $A = X^2 + 1$  par  $B = X + 1$  à l'ordre 3.

$$\begin{array}{r|l}
 1 + 0X + X^2 & 1 + X \\
 1 + X & 1 - X + 2X^2 - 2X^3 \\
 \hline
 -X + X^2 & \\
 -X - X^2 & \\
 \hline
 2X^2 & \\
 2X^2 + 2X^3 & \\
 \hline
 -2X^3 & \\
 -2X^3 - 2X^4 & \\
 \hline
 2X^4 & 
 \end{array}$$

Donc le quotient est  $Q = -2X^3 + 2X^2 - X + 1 + 2X^4$  et le reste est  $2X^4 = X^{3+1}R$ .  
On a  $d^0 Q \leq 3$  et  $A = B(-2X^3 + 2X^2 - X + 1) + 2X^4$ .

3) Division suivant les puissances croissantes de  $A = X^3 + 5X$  par  $B = X^3 + 1$  à l'ordre 3..

$$\begin{array}{r|l}
 5X + X^3 & 1 + X^3 \\
 5X + 5X^4 & 5X + X^3 \\
 \hline
 X^3 - 5X^4 & \\
 X^3 + X^6 & \\
 \hline
 -5X^4 - X^6 & 
 \end{array}$$

Donc le quotient  $Q = 5X + X^3$  et le reste est  $-5X^4 - X^6 = X^4(-5 - X^2) = X^{3+1}R$ .  
On a  $d^0 Q \leq 3$  et  $A = B(5X + X^3) + X^4(-5 - X^2)$ .

4) Division suivant les puissances croissantes de  $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$  par  $B = X^3 + X^2 + 1$  à l'ordre 4..

$$\begin{array}{r|l}
 1 + 0X + 0X^2 + X^3 - 2X^4 + 0X^5 + X^6 & 1 + X^2 + X^3 \\
 1 + X^2 + X^3 & 1 - X^2 - 2X^4 \\
 \hline
 -X^2 - 2X^4 + X^6 & \\
 -X^2 - X^4 - X^5 & \\
 \hline
 -X^4 + X^5 + X^6 & \\
 -X^4 - X^6 - X^7 & \\
 \hline
 X^5 + 2X^6 + X^7 & 
 \end{array}$$

Donc le quotient est  $Q = 1 - X^2 - X^4$  et le reste est  $X^5 + 2X^6 + X^7 = X^5(1 + 2X + X^2) = X^{4+1}R$ .  
On a  $d^0 Q \leq 4$  et  $A = B(1 - X^2 - X^4) + X^5(1 + 2X + X^2)$ .

**TD : Série n°3**

**Exercice 1.** Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  puis dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles

$$F(X) = \frac{1}{X^2 + 4}, \quad G(X) = \frac{X^6 + 3}{X^5 - X}, \quad \text{et} \quad H(X) = \frac{1}{(X^2 + 2X + 1)(X^3 - 1)}.$$

**Exercice 2.** Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions suivantes :

$$F(X) = \frac{X^5}{(X^2 + 1)^2}, \quad G(X) = \frac{X^3 + X + 1}{X^4(X + 1)^3}, \quad H(X) = \frac{X^5 + 1}{X^2(X - 1)^2},$$

$$K(X) = \frac{X^4 + X^2 + 1}{(X - 1)(X^2 + 3)}, \quad L(X) = \frac{X^2 + 3}{(X - 1)^3(X^2 + 2)}.$$

**Exercice 3.** Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions suivantes :

$$F(X) = \frac{X^3 - 4X + 5}{X^2 - 4}, \quad G(X) = \frac{(X^2 + 1)^2}{(X - 1)^6}, \quad H(X) = \frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2}$$

$$K(X) = \frac{3X^5 - 5X^4 + 4X^2 - 11X + 1}{(X^2 + X + 1)^6}, \quad L(X) = \frac{X^2}{(X^2 + X + 1)^{2021}}.$$

**Exercice 4.** Soit la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{X^n - 1}, \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que

$$F(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k}{X - w_k} \quad \text{avec} \quad w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

**Exercice 5.** Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Calculer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
2. En déduire la limite de  $u_n$ .

**cours en ligne**  
**Sites.google.com/site/saborpcmath/**  
**par whatsapp: 0638148874**  
**FACEBOOK: SABOR PC**

**TD : Série n°3**

**Corrigé de l'exercice 1.**

• Décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$  puis dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simples de  $F(X) = \frac{1}{X^2 + 4}$ .

- Il est clair que  $F$  est une fraction irréductible dans  $\mathbb{C}(X)$ .
- $F$  possède 2 zéros simples  $2i$  et  $-2i$ . Donc la décomposition en éléments simples de  $F$  s'écrit

$$F(X) = \frac{a}{X - 2i} + \frac{b}{X + 2i}.$$

- En multipliant les deux membres par  $(X - 2i)$  puis on substitue à  $X$  la valeur  $2i$ , on obtient alors  $a = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}$ .

- En multipliant les deux membres par  $(X + 2i)$  puis on substitue à  $X$  la valeur  $-2i$ , on obtient alors  $a = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4}$ .

$$\text{Donc } F(X) = \frac{-i}{4(X - 2i)} + \frac{i}{4(X + 2i)}.$$

• **Remarque** La décomposition de la fraction rationnelle  $\frac{1}{(X - a)(X - b)}$  où  $a \neq b$  s'écrit

$$\boxed{\frac{1}{(X - a)(X - b)} = \frac{(X - a) - (X - b)}{(b - a)(X - a)(X - b)} = \frac{1}{(b - a)} \left( \frac{1}{X - b} - \frac{1}{X - a} \right)}$$

Ce résultat peut-être par la suite utilisé directement.

- Dans  $\mathbb{R}(X)$ ,  $G(X)$  est déjà un élément simple de deuxième espèce puisque  $G(X) = \frac{0X + 1}{X^2 + 4}$ .

• Décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$  puis dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simples de  $G(X) = \frac{X^6 + 3}{X^5 - X} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .

- On a  $Q(X) = X(X^4 - 1)$ . Les zéros de  $Q$  sont 0 et les racines 4<sup>ième</sup> de l'unité. Ils ne sont pas des zéros de  $P$ . Donc  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux et par suite la fraction  $G$  est irréductible dans  $\mathbb{C}(X)$ .

- Puisque  $d^0 P = 6 > 5 = d^0 Q$ , alors la partie polynômiale de  $G$  est le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

$$\begin{array}{r|l} X^6 & +3 \\ X^6 - X^2 & \\ \hline & X^2 + 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} X^5 - X \\ X \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } G(X) = X + \frac{X^2 + 3}{X^5 - X}.$$

- $G$  possède 5 pôles simples 0, 1, -1,  $i$  et  $-i$ . Soit  $\alpha$  un des pôles alors le coefficient de l'élément simple  $\frac{1}{X - \alpha}$  dans la décomposition vaut

$$\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = \frac{\alpha^6 + 3}{5\alpha^4 - 1}.$$

Donc pour  $\alpha = 0$ , on obtient -3. Pour  $\alpha = \pm 1$ , on obtient 1 et pour  $\alpha = \pm i$ , on obtient  $\frac{1}{2}$ .

D'où

$$\boxed{G(X) = X - \frac{3}{X} + \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} + \frac{1}{2(X - i)} + \frac{1}{2(X + i)}}$$

• Dans  $\mathbb{R}(X)$ , la décomposition en éléments simples s'obtient à partir de la décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$  en regroupant les éléments simples ayant des pôles conjugués.

$$\begin{aligned} G(X) &= X - \frac{3}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X-i)} + \frac{1}{2(X+i)} \\ G(X) &= X - \frac{3}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{X+i+X-i}{2(X-i)(X+i)} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{G(X) = X - \frac{3}{X} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} + \frac{X}{X^2+1}}$$

• Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  puis dans  $\mathbb{R}(X)$  de  $H(X) = \frac{1}{(X^2+2X+1)(X^3-1)}$ .

• On pose  $H(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ . Il est clair que  $H$  est une fraction irréductible.

• On factorise le polynôme  $Q$  pour déterminer les pôles de  $F$ .

On a  $Q(X) = (X+1)^2(X-1)(X^2+X+1)$ . Donc  $H$  possède dans  $\mathbb{C}$ , 3 pôles simples 1,  $j$  et  $j^2$  et un pôle double  $-1$ .

• On a  $d^0P = 0 < 5 = d^0Q$ , donc la partie polynomiale  $E$  de  $H$  est nulle.

Donc la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$  s'écrit alors

$$H(X) = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-j} + \frac{e}{X-j^2}.$$

On multiplie les deux membres de l'égalité par  $(X+1)^2$  et on évalue en  $X = -1$ , on obtient

$$a = \frac{1}{(-1)^3 - 1} = -\frac{1}{2}.$$

On multiplie les deux membres de l'égalité par  $X+1$  et on évalue en  $X = 1$ , on obtient

$$c = \frac{1}{(1+1)^2(1^2+1+1)} = \frac{1}{12}.$$

On a  $Q'(X) = 2(X+1)(X^3-1) + 3X^2(X+1)^2$ . Donc

$$\begin{aligned} Q'(j) &= 2(j+1)(j^3-1) + 3j^2(j+1)^2 \\ &= 3j^2(-j^2)^2 \quad \text{car } j^3 = 1 \quad \text{et } j^2 + j + 1 = 0 \\ &= 3j^6 \\ &= 3(j^3)^2 \\ &= 3 \quad \text{car } j^3 = 1. \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} Q'(j^2) &= 2(j^2+1)((j^2)^3-1) + 3(j^2)^2(j^2+1)^2 \\ &= 2(j^2+1)(j^3)^2-1 + 3j^4(-j)^2 \quad \text{car } j^2 + j + 1 = 0 \\ &= 3(j)^6 \quad \text{car } j^3 = 1 \\ &= 3(j^3)^2 \\ &= 3 \quad \text{car } j^3 = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$d = \frac{P(j)}{Q'(j)} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad e = \frac{P(j^2)}{Q'(j^2)} = \frac{1}{3}.$$

Pour déterminer  $b$ , on multiplie par  $X$  et on fait tendre  $X \rightarrow +\infty$ , on obtient alors

$$0 = 0 + b + c + d + e. \text{ D'où } b = -c - d - e = \frac{-1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}.$$

Finalement la décomposition de  $H$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  s'écrit :

$$\boxed{H(X) = -\frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{3}{4(X+1)} + \frac{1}{12(X-1)} + \frac{1}{3(X-j)} + \frac{1}{3(X-j^2)}}.$$



Dans  $\mathbb{R}(X)$ , la décomposition en éléments simples s'obtient à partir de la décomposition dans  $\mathbb{C}(X)$  en regroupant les éléments simples ayant des pôles conjugués.

$$\begin{aligned} H(X) &= -\frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{3}{4(X+1)} + \frac{1}{12(X-1)} + \frac{1}{3(X-j)} + \frac{1}{3(X-j^2)} \\ &= -\frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{3}{4(X+1)} + \frac{1}{12(X-1)} + \frac{X-j^2+X-j}{3(X-j)(X-j^2)} \\ H(X) &= -\frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{3}{4(X+1)} + \frac{1}{12(X-1)} + \frac{2X-(j^2+j)}{3(X^2-(j^2+j)X+j^3)} \end{aligned}$$

Finalement

$$H(X) = -\frac{1}{2(X+1)^2} - \frac{3}{4(X+1)} + \frac{1}{12(X-1)} + \frac{2X+1}{3(X^2+X+1)}.$$

### Corrigé de l'exercice 2.

- Décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simple de  $F(X) = \frac{X^5}{(X^2+1)^2} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
- $P$  admet 0 comme seul zéro de multiplicité 2 et  $Q$  admet  $i$  et  $-i$  comme zéros de multiplicité 2.  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}$ , donc  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$  et par conséquent  $F$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .
- On a  $d^0P = 5 > 4 = d^0Q$ . La partie polynomiale  $E$  de la fraction  $F$  est égale au quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

$$\begin{array}{r|l} X^5 & X^4 + 2X^2 + 1 \\ X^5 + 2X^3 + X & X \\ \hline -2X^3 - X & \end{array}$$

Donc  $X^5 = X(X^2+1)^2 + (-2X^3-X)$  et par suite la partie polynomiale est  $E(X) = X$  et on a

$$F(X) = \frac{X^5}{(X^2+1)^2} = X + \frac{-2X^3-X}{(X^2+1)^2}.$$

- $F$  n'admet pas de pôles dans  $\mathbb{R}$ . La décomposition de  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  est de la forme

$$F(X) = X + \frac{aX+b}{(X^2+1)^2} + \frac{cX+d}{(X^2+1)}. \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- $F$  étant une fonction impaire :  $F(-X) = -F(X)$ , donc

$$-X + \frac{-aX+b}{(X^2+1)^2} + \frac{-cX+d}{(X^2+1)} = -X + \frac{-aX-b}{(X^2+1)^2} + \frac{-cX-d}{(X^2+1)}$$

L'unicité de la décomposition entraîne que  $b = -b$  et  $d = -d$  et donc  $b = d = 0$ .

D'où

$$F(X) = X + \frac{aX}{(X^2+1)^2} + \frac{cX}{(X^2+1)}.$$

- Calcul de  $a$ .

On multiplie les deux membres de l'égalité par  $(X^2+1)^2$  et on substitue à  $X$  la valeur  $i$ , on obtient  $i^5 = ai$ , donc  $a = i^4 = 1$ .

- Calcul de  $c$ .

on transfère les éléments connus à gauche et on simplifie :

$$\begin{aligned}\frac{X^5}{(X^2+1)^2} - X - \frac{X}{(X^2+1)^2} &= \frac{cX}{X^2+1} \\ \frac{-2X^3 - X}{(X^2+1)^2} - \frac{X}{(X^2+1)^2} &= \frac{cX}{X^2+1} \\ \frac{-2X^3 - 2X}{(X^2+1)^2} &= \frac{cX}{X^2+1} \\ \frac{-2X(X^2+1)}{(X^2+1)^2} &= \frac{cX}{X^2+1} \\ \frac{-2X}{X^2+1} &= \frac{cX}{X^2+1}\end{aligned}$$

Par identification, on trouve  $c = -2$ .

Autre méthode pour déterminer  $c$  : on a

$$\begin{aligned}F(X) - X &= \frac{X}{(X^2+1)^2} + \frac{cX}{X^2+1} \\ \frac{-2X^3 - X}{(X^2+1)^2} &= \frac{X}{(X^2+1)^2} + \frac{cX}{X^2+1}.\end{aligned}$$

On multiplie par  $X$  et on fait tendre  $X \rightarrow +\infty$ , on trouve que  $-2 = 0 + c$ , donc  $c = -2$ .

Finalement

$$F(X) = X + \frac{X}{(X^2+1)^2} - \frac{2X}{X^2+1}.$$

**Autre méthode** Puisque  $Q$  est de la forme  $(X^2 + aX + b)^m$  avec  $X^2 + aX + b$  sans racines réelles ( $\Delta < 0$ ), alors il suffit d'effectuer des divisions euclidiennes successives des numérateurs par  $X^2 + 1$ .

$$\begin{array}{r|l} X^5 & X^2 + 1 \\ X^5 + X^3 & X^3 - X \\ \hline -X^3 & \\ -X^3 - X & \\ \hline X & \end{array}$$

$$\text{Donc } X^5 = (X^2 + 1)(X^3 - X) + X. \text{ Donc } F(X) = \frac{X^5}{(X^2 + 1)^2} = \frac{X^3 - X}{X^2 + 1} + \frac{X}{(X^2 + 1)^2} \quad (1).$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 - X & X^2 + 1 \\ X^3 + X & X \\ \hline -2X & \end{array}$$

$$\text{Donc } X^3 - X = (X^2 + 1)X - 2X. \text{ Donc } \frac{X^3 - X}{X^2 + 1} = X - \frac{2X}{X^2 + 1} \quad (2).$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$F(X) = X - \frac{2X}{X^2 + 1} + \frac{X}{(X^2 + 1)^2}$$

• Décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simple de  $G(X) = \frac{X^3 + X + 1}{X^4(X + 1)^3} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .

• Les zéros de  $Q$  sont 0 de multiplicité 4 et  $-1$  de multiplicité 3. Comme  $P(0) = 1 \neq 0$  et  $P(-1) = -1 \neq 0$  alors  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}$ , donc  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$  et par conséquent  $G$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .

• On a  $d^0 P = 3 < 7 = d^0 Q$ , donc la partie entière  $E$  est nulle.  $E = 0$ .

- Les pôles de  $G$  dans  $\mathbb{R}$  sont 0 de multiplicité 4 et  $-1$  de multiplicité 3.
- La décomposition en éléments simples de  $G$  est de la forme

$$G(X) = \frac{a_1}{(X+1)^3} + \frac{a_2}{(X+1)^2} + \frac{a_3}{X+1} + \frac{b_1}{X^4} + \frac{b_2}{X^3} + \frac{b_3}{X^2} + \frac{b_4}{X}.$$

- La partie polaire relative au pôle  $-1$  de multiplicité 3 :  
On a

$$G(X) = \frac{P(X)}{(X+1)^3 Q_1(X)}.$$

On pose  $X+1=Y$  c-à-d  $Y=X-1$  (changement d'indéterminée).

Donc  $P(X) = (Y-1)^3 + (Y-1) + 1 = Y^3 - 3Y^2 + 3Y - 1 + Y = Y^3 - 3Y^2 + 4Y - 1$

et  $Q_1(X) = (Y-1)^4 = Y^4 - 4Y^3 + 6Y^2 - 4Y + 1$ .

On effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre  $2 = 3 - 1$  de  $P(X)$  par  $Q_1(X)$  en négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 3.

$$\begin{array}{r|l} -1 + 4Y - 3Y^2 + \dots & 1 - 4Y + 6Y^2 + \dots \\ -1 + 4Y - 6Y^2 & -1 + 3Y^2 \\ \hline & 3Y^2 + \dots \end{array}$$

La partie polaire relative au pôle  $-1$  est donc

$$\frac{-1}{(X+1)^3} + \frac{3}{X+1}.$$

- La partie polaire relative au pôle 0 de multiplicité 4.

on a  $G(X) = \frac{P(X)}{X^4 Q_2(X)}$ . on effectue la division euclidienne de  $P(X)$  par  $Q_2(X)$  à l'ordre  $3 = 4 - 1$  en négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 4.

$$\begin{array}{r|l} 1 + X + X^3 & 1 + 3X + 3X^2 + X^3 \\ 1 + 3X + 3X^2 + X^3 & 1 - 2X + 3X^2 - 3X^3 \\ \hline & -2X - 3X^2 \\ & -2X - 6X^2 - 6X^3 + \dots \\ \hline & 3X^2 + 6X^3 + \dots \\ & 3X^2 + 9X^3 + \dots \\ \hline & -3X^3 + \dots \end{array}$$

la partie polaire relative au pôle 0 est donc

$$\frac{1}{X^4} - \frac{2}{X^3} + \frac{3}{X^2} - \frac{3}{X}.$$

Finalement

$$G(X) = \frac{-1}{(X+1)^3} + \frac{3}{X+1} + \frac{1}{X^4} - \frac{2}{X^3} + \frac{3}{X^2} - \frac{3}{X}.$$

- Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction  $H(X) = \frac{X^5 + 1}{X^2(X-1)^2} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
- Les racines de  $Q$  sont 0 et 1 de multiplicité 2. On a  $P(0) = 1 \neq 0$  et  $P(1) = 2 \neq 0$ , donc  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}$ . D'où  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$  et par conséquent  $H$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .
- $d^0 P = 5 > 4 = d^0 Q$ . La partie entière de  $H$  est le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

$$\begin{array}{r|l} X^5 & 1 \mid X^4 - 2X^3 + X^2 \\ X^5 - 2X^4 + X^3 & X + 2 \\ \hline & 2X^4 - X^3 \\ & 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 \\ \hline & 3X^3 - 2X^2 + 1 \end{array}$$

On a donc  $E(X) = X + 2$  et  $P(X) = (X + 2)Q(X) + 3X^3 - 2X^2 + 1$ , ce qui entraîne que

$$H(X) = X + 2 + \frac{3X^3 - 2X^2 + 1}{X^2(X - 1)^2}.$$

•  $H$  admet dans  $\mathbb{R}$  deux pôles de multiplicité 2 : 0 et 1. Donc la décomposition en éléments simples de  $H$  est de la forme

$$H(X) = X + 2 + \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X - 1)^2} + \frac{d}{X - 1}.$$

On pose

$$\begin{aligned} H_1(X) &= H(X) - (X + 2) = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X - 1)^2} + \frac{d}{X - 1} \\ H_1(X) &= \frac{3X^3 - 2X^2 + 1}{X^2(X - 1)^2} = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{(X - 1)^2} + \frac{d}{X - 1}. \end{aligned}$$

• On multiplie les deux membres de l'égalité par  $X^2$  et on évalue en  $X = 0$ , on obtient :  $a = 1$  ou bien

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 H_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{(x - 1)^2} = 1.$$

• On multiplie les deux membres de l'égalité par  $(X - 1)^2$  et on évalue en  $X = 1$ , on obtient :  $c = 2$ , ou bien

$$c = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 H_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2} = 2.$$

• On multiplie les deux membres de l'égalité par  $x$  et on fait tendre  $x \rightarrow +\infty$ , on obtient :  $3 = 0 + b + 0 + d$  donc  $b + d = 3$ . Il suffit maintenant d'évaluer en une valeur particulière (différente des pôles) par exemple

$$H_1(-1) = -1 = 1 - b + \frac{c}{4} - \frac{d}{2} = 1 - b + \frac{1}{2} - \frac{d}{2}, \text{ donc } b + \frac{d}{2} = \frac{5}{2}. \text{ ou bien encore } 2b + d = 5.$$

On résout le système linéaire

$$\begin{cases} b + d = 3 \\ 2b + d = 5. \end{cases} \implies \begin{cases} d = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Finalement

$$H(X) = X + 2 + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X} + \frac{2}{(X - 1)^2} + \frac{1}{X - 1}.$$

• Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction  $K(X) = \frac{X^4 + X^2 + 1}{(X - 1)(X^2 + 3)} = \frac{P(X)}{Q(X)}.$

• Les zéros de  $Q$  sont  $1, \sqrt{3}i$  et  $-\sqrt{3}i$ .  $P(1) = 3 \neq 0$ ,  $P(\sqrt{3}i) = P(-\sqrt{3}i) \neq 0$ . Donc  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}$ . D'où  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$  et par conséquent  $K$  est une fraction irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .

• On a  $d^0 P = 4 \geq 3 = d^0 Q$ . La partie entière  $E$  est la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

$$\begin{array}{r|l} X^4 & +X^2 & +1 & X^3 -X^2 +3X -3 \\ X^4 -X^3 +3X^2 -3X & & & X & +1 \\ \hline & X^3 -2X^2 & 3X +1 & & \\ & X^3 -X^2 +3X -3 & & & \\ \hline & -X^2 & +4 & & \end{array}$$

On a donc  $E(X) = X + 1$  et  $P(X) = (X + 1)Q(X) + (-X^2 + 4)$  de qui entraîne :

$$K(X) = X + 1 + \frac{-X^2 + 4}{(X - 1)(X^2 + 3)} = \frac{P(X)}{Q(X)}.$$

Par suite La décomposition en éléments simples de  $K$  est de la forme :

$$K(X) = X + 1 + \frac{a}{X - 1} + \frac{bX + c}{X^2 + 3}.$$

On pose

$$\begin{aligned} K_1(X) &= K(X) - (X+1) = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+3} \\ K_1(X) &= \frac{-X^2+4}{(X-1)(X^2+3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+3}. \end{aligned}$$

• Calcul du coefficient  $a$  relative au pôle simple 1 : On multiplie les deux membres de l'égalité par  $X-1$  et on évalue en  $X=1$ , on obtient  $a = \frac{3}{4}$ , ou bien

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)K_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2+4}{x^2+3} = \frac{3}{4}.$$

• Calcul de  $c$  et  $d$ . On multiplie les deux membres de l'égalité par  $X^2+3$  et on évalue en  $X = i\sqrt{3}$  ( $i\sqrt{3}$  racine de  $X^2+3$ ), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt{3}i-1} &= \sqrt{3}bi+c \\ \frac{-7(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} &= \sqrt{3}bi+c \\ \frac{-7-7\sqrt{3}i}{4} &= c+\sqrt{3}bi. \end{aligned}$$

Donc

$$c = \frac{-7}{4} \quad \text{et} \quad \sqrt{3}b = \frac{-7\sqrt{3}}{4}$$

D'où :

$$c = \frac{-7}{4} \quad \text{et} \quad b = \frac{-7}{4}.$$

Finalement

$$K(X) = X+1 + \frac{\frac{3}{4}}{X-1} + \frac{\frac{-7}{4}X - \frac{7}{4}}{X^2+3}.$$

ou encore

$$K(X) = X+1 + \frac{3}{4(X-1)} - \frac{7X+7}{4(X^2+3)}$$

- Décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction  $L(X) = \frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
- Les polynômes  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}[X]$ , donc ils premiers entre eux et par suite la fraction  $L$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .
- On a  $d^0 P = 2 < 5 = d^0 Q$ , donc la partie entière  $E$  est nulle.  $E = 0$ .
- On a  $L(X) = \frac{P(X)}{(X-1)^3 Q_1(X)}$  avec  $Q_1(X) = X^2+2$ . On pose  $Y = X-1$ , donc  $P(X) = X^2+3 = (Y+1)^2+3 = 4+2Y+Y^2$  et  $Q_1(X) = X^2+2 = (Y+1)^2+2 = 3+2Y+Y^2$ .
- Effectuons la division suivant les puissances croissantes de  $P(X)$  par  $Q_1(X)$  à l'ordre 2.

$$\begin{array}{r|l} 4 + 2Y + Y^2 & 3 + 2Y + Y^2 \\ 4 + \frac{8}{3}Y + \frac{4}{3}Y^2 & \frac{4}{3} - \frac{2}{9}Y + \frac{1}{27}Y^2 \\ \hline -\frac{2}{3}Y - \frac{1}{3}Y^2 & \\ -\frac{2}{3}Y - \frac{4}{9}Y^2 - \frac{2}{9}Y^3 & \\ \hline \frac{1}{9}Y^2 + \frac{2}{9}Y^3 & \\ \frac{1}{9}Y^2 + \frac{2}{27}Y^3 + \frac{1}{27}Y^4 & \\ \hline \frac{4}{27}Y^3 - \frac{1}{27}Y^4 & \end{array}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 4 + 2Y + Y^2 &= (3 + 2Y + Y^2) \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{9}Y + \frac{1}{27}Y^2 \right) + \frac{1}{27}Y^3(4 - Y) \\ \frac{4 + 2Y + Y^2}{Y^3(3 + 2Y + Y^2)} &= \frac{(3 + 2Y + Y^2) \left( \frac{4}{3} - \frac{2}{9}Y + \frac{1}{27}Y^2 \right) + \frac{1}{27}Y^3(4 - Y)}{Y^3(3 + 2Y + Y^2)} \\ L(Y + 1) &= \frac{4}{3Y^3} - \frac{2}{9Y^2} + \frac{1}{27Y} + \frac{4 - Y}{27(3 + 2Y + Y^2)} \\ L(X) &= \frac{4}{3(X - 1)^3} - \frac{2}{9(X - 1)^2} + \frac{1}{27(X - 1)} + \frac{4 - (X - 1)}{27(X^2 + 2)} \end{aligned}$$

D'où

$$L(X) = \frac{4}{3(X - 1)^3} - \frac{2}{9(X - 1)^2} + \frac{1}{27(X - 1)} + \frac{5 - X}{27(X^2 + 2)}$$

### Corrigé de l'exercice 3.

- Decomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simple la fraction  $F(X) = \frac{X^3 - 4X + 5}{X^2 - 4} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
- La fraction  $F$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$  puisque les polynômes  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}$ . En effet, les zéros de  $Q$  sont 2 et -2 et on a  $P(2) = 9 \neq 0$  et  $P(-2) = 1 \neq 0$ .

On a

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{X^3 - 4X + 5}{X^2 - 4} \\ &= \frac{X(X^2 - 4) + 5}{X^2 - 4} \\ &= \frac{X(X^2 - 4)}{X^2 - 4} + \frac{5}{X^2 - 4} \\ &= X + \frac{5}{(X + 2)(X - 2)} \\ F(X) &= X + \frac{5}{4} \left( \frac{1}{X - 2} - \frac{1}{X + 2} \right) \quad \text{car} \quad \frac{1}{(X - a)(X - b)} = \frac{1}{b - a} \left( \frac{1}{X - b} - \frac{1}{X - a} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$F(X) = X + \frac{5}{4(X - 2)} - \frac{5}{4(X + 2)}$$

- Decomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simple la fraction  $G(X) = \frac{(X^2 + 1)^2}{(X - 1)^6} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
- Le seul zéro de  $Q$  est 1 et ce n'est pas un zéro de  $P$ . Les polynômes  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}$ , donc  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$  et par conséquent la fraction  $G$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .
- On a  $d^0 P = 4 < 6 = d^0 Q$ , donc la partie polynomiale  $E$  de  $F$  est nulle.  $E = 0$ .
- La fraction  $F$  admet un seul pôle 1 de multiplicité 6. Donc la décomposition de  $G$  en éléments simples s'écrit :

$$G(X) = \frac{a}{(X - 1)^6} + \frac{b}{(X - 1)^5} + \frac{c}{(X - 1)^4} + \frac{d}{(X - 1)^3} + \frac{e}{(X - 1)^2} + \frac{f}{(X - 1)}.$$

- On fait le changement d'indéterminée  $Y = X - 1 \iff X = Y + 1$ .

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{[(Y + 1)^2 + 1]^2}{Y^6} = \frac{(Y^2 + 2Y + 2)^2}{Y^6} \\ &= \frac{Y^4 + 4Y^3 + 4Y^2 + 4Y^2 + 8Y + 4}{Y^6} \\ &= \frac{4 + 8Y + 8Y^2 + 4Y^3 + Y^4}{Y^6} \\ &= \frac{4}{Y^6} + \frac{8}{Y^5} + \frac{8}{Y^4} + \frac{4}{Y^3} + \frac{1}{Y^2} \end{aligned}$$

Finalement

$$G(X) = \frac{4}{(X-1)^6} + \frac{8}{(X-1)^5} + \frac{8}{(X-1)^4} + \frac{4}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

- Decomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simple la fraction  $H(X) = \frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
- On a  $Q(X) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ . Puisque 1 et 2 ne sont pas des zéros de  $P$ . Donc  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux et par suite la fraction  $H$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .
- la décomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simples de  $H$  est

$$H(X) = a + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{X \rightarrow +\infty} H(X) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2} = 1 \\ b &= \lim_{X \rightarrow 1} (X-1)H(X) = \lim_{X \rightarrow 1} \frac{X^2 + 3X + 5}{X-2} = -9 \\ c &= \lim_{X \rightarrow 2} (X-2)H(X) = \lim_{X \rightarrow 2} \frac{X^2 + 3X + 5}{X-1} = 15. \end{aligned}$$

Donc

$$H(X) = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}$$

- Decomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simples la fraction

$$K(X) = \frac{3X^5 - 5X^4 + 4X^2 - 11X + 1}{(X^2 + X + 1)^6} = \frac{P(X)}{Q(X)}.$$

- Les zéros de  $Q$  sont  $j$  et  $\bar{j} = j^2$  de multiplicité 6.

$$\begin{aligned} P(j) &= 3j^5 - 5j^4 + 4j^2 - 11j + 1 = 3j^2 - 5j + 4j^2 - 11j + 1 \quad \text{car } j^3 = 1 \\ &= 7j^2 - 16j + 1 = 7(-1-j) - 16j + 1 \quad \text{car } j^2 + j + 1 = 0 \\ P(j) &= -23j - 6 \neq 0. \end{aligned}$$

Puisque le polynôme  $P$  est à coefficients réels, alors

$$P(\bar{j}) = \overline{P(j)} = \overline{-23j - 6} = -23\bar{j} - 6 \neq 0.$$

Donc  $P$  et  $Q$  n'ont pas de zéros communs dans  $\mathbb{C}$ . D'où  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$  et par conséquent la fraction  $K$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .

- Puisque  $Q$  est de la forme  $(X^2 + aX + b)^m$  avec  $X^2 + aX + b$  sans racines réelles ( $\Delta < 0$ ), alors il suffit d'effectuer des divisions euclidiennes successives des numérateurs par  $X^2 + X + 1$ .

$$\begin{array}{r|l} 3X^5 - 5X^4 & +4X^2 - 11X + 1 \\ 3X^5 - 3X^4 + 3X^3 & \\ \hline -8X^4 - 3X^3 & +4X^2 - 11X + 1 \\ -8X^4 - 8X^3 - 8X^2 & \\ \hline 5X^3 + 12X^2 - 11X + 1 & \\ 5X^3 + 5X^2 + 5X & \\ \hline -23X & -6 \end{array}$$

On déduit que :  $P(X) = (X^2 + X + 1)(3X^3 - 8X^2 + 5X + 7) + (-23X - 6)$ , ce qui entraîne :

$$K(X) = \frac{3X^3 - 8X^2 + 5X + 7}{(X^2 + X + 1)^5} + \frac{-23X - 6}{(X^2 + X + 1)^6}.$$

$$\begin{array}{r|l} 3X^3 & -8X^2 & +5X & +7 & | & X^2 & +X & +1 \\ 3X^3 & +3X^2 & +3X & & & 3X & -11 & \\ \hline & -11X^2 & +2X & +7 & & & & \\ & -11X^2 & -11X & -11 & & & & \\ \hline & & 13X & +18 & & & & \end{array}$$

On déduit que  $3X^3 - 8X^2 + 5X + 7 = (X^2 + X + 1)(3X - 11) + (13X + 18)$ , ce qui entraîne

$$\frac{3X^3 - 8X^2 + 5X + 7}{(X^2 + X + 1)^5} = \frac{3X - 11}{(X^2 + X + 1)^4} + \frac{13X + 18}{(X^2 + X + 1)^5}.$$

Finalement

$$K(X) = \frac{3X - 11}{(X^2 + X + 1)^4} + \frac{13X + 18}{(X^2 + X + 1)^5} + \frac{-23X - 6}{(X^2 + X + 1)^6}.$$

- Decomposition dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simple la fraction  $L(X) = \frac{X^2}{(X^2 + X + 1)^{2021}} = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
- $P$  a pour racine 0 et les racines de  $Q$  sont  $j$  et  $j^2$ .  $P$  et  $Q$  n'ont pas de racines communs dans  $\mathbb{C}$ , donc  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux dans  $\mathbb{R}[X]$  et par conséquent  $L$  est irréductible dans  $\mathbb{R}(X)$ .
- La méthode qu'on va utilisé pour cet exemple est la même que celle utilisée pour la fraction  $K$ . C'est-à-dire la division du numérateur par  $X^2 + X + 1$ . Mais ici, c'est plus simple

$$X^2 = (X^2 + X + 1) - X - 1$$

Donc

$$L(X) = \frac{X^2}{(X^2 + X + 1)^{2021}} = \frac{(X^2 + X + 1) - X - 1}{(X^2 + X + 1)^{2021}}.$$

Finalement

$$L(X) = \frac{1}{(X^2 + X + 1)^{2020}} + \frac{-X - 1}{(X^2 + X + 1)^{2021}}.$$

#### **Corrigé de l'exercice 4.**

Soit la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{X^n - 1}, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que

$$F(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k}{X - w_k} \quad \text{avec } w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Il suffit de décomposer la fraction rationnelle  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ .

$F$  a exactement  $n$  pôles simples qui sont les racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité données par la formule

$$w_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

La décomposition de  $F$  en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  s'écrit alors

$$F(X) = \frac{\alpha_0}{X - w_0} + \frac{\alpha_1}{X - w_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{X - w_{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - w_k}, \quad \text{où } \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Si on pose  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$  alors

$$\alpha_k = \frac{P(w_k)}{Q'(w_k)} = \frac{1}{nw_k^{n-1}} = \frac{w_k}{nw_k^n} = \frac{w_k}{n}, \quad \text{car } w_k^n = 1.$$



Finalement

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{\frac{w_0}{n}}{X - w_0} + \frac{\frac{w_1}{n}}{X - w_1} + \dots + \frac{\frac{w_{n-1}}{n}}{X - w_{n-1}} \\ &= \frac{w_0}{n(X - w_0)} + \frac{w_1}{n(X - w_1)} + \dots + \frac{w_{n-1}}{n(X - w_{n-1})} \\ F(X) &= \frac{1}{n} \left( \frac{w_0}{X - w_0} + \frac{w_1}{X - w_1} + \dots + \frac{w_{n-1}}{X - w_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

$$F(X) = \frac{1}{n} \left( \frac{w_0}{X - w_0} + \frac{w_1}{X - w_1} + \dots + \frac{w_{n-1}}{X - w_{n-1}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k}{X - w_k}.$$

- Pour  $n = 3$ , les racines cubiques de l'unité sont  $1, j$  et  $j^2$ . On obtient donc

$$\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{X - w_k} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{X - 1} + \frac{j}{X - j} + \frac{j^2}{X - j^2} \right).$$

- Pour  $n = 4$ , les racines 4<sup>ièmes</sup> de l'unité sont  $1, -1, i$  et  $-i$ . On obtient donc

$$\frac{1}{X^4 - 1} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \frac{w_k}{X - w_k} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{X - 1} - \frac{1}{X + 1} + \frac{i}{X - i} - \frac{i}{X + i} \right).$$

---

### Corrigé de l'exercice 5.

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

1) Calcul de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

Soit la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$

Décomposons  $F$  en éléments simples sur  $\mathbb{R}(X)$ . On a  $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$ .

Puisque les pôles de  $F$  sont simples, alors

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}. \\ b &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)F(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x(x+2)} = -1. \\ c &= \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)F(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) - \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}
 \end{aligned}$$

Finalement on a

$$u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

2) Limite de  $(u_n)$ .  
 Il est évident que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{4}.$$

**TD : Série n°4**

**Exercice 1.** Soit les matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $B$  est une matrice nilpotente d'ordre 3.
2. En déduire  $A^p$  pour tout entier naturel  $p$ .

**Exercice 2.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$ .
2. En déduire que  $A$  est une matrice inversible et déterminer son inverse.

**Exercice 3.** On considère les trois matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = Q.M.Q.$$

1. Calculer  $Q_2$ . En déduire que  $Q$  est inversible et expliciter  $Q^{-1}$ .
2. calculer  $D$  (on vérifiera que  $D$  est une matrice diagonale). Justifier que  $M = Q.D.Q$
3. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = Q.D^n.Q$
4. Expliciter les neufs coefficients de la matrice  $M^n$ .

**Exercice 4.** Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ -2x + 4y + z = 10 \\ 2x - 2y + z = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10 \end{cases} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5.$$

**Exercice 5.** Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 2 & -3 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres complexes.}$$

**Exercice 6.** Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer en utilisant la méthode de Gauss que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .
2. En déduire l'unique solution du système linéaire  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$  où  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
3. Par la méthode de Gauss et en discutant suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , résoudre le système linéaire suivant  $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + z = m \end{cases}$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**cours en ligne**  
**Sites.google.com/site/saborpcmath/**  
**par whatsapp: 0638148874**  
**FACEBOOK: SABOR PC**

Corrigé TD Série n°4

---

**Corrigé de l'exercice 1.**

1) Montrer que  $B$  est une matrice nilpotente d'ordre 3.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $B^2 \neq 0$  et  $B^3 = 0$ , donc  $B$  est nilpotente et son ordre de nilpotence est 3.

2) Calcul de  $A^p$  pour tout entier naturel  $p$ .

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A &= 3I_3 + B \end{aligned}$$

On sait que  $I_3 B = B I_3 = B$ , donc  $B$  et  $I_3$  commutent et par suite on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned} A^p &= (3I_3 + B)^p \\ &= \sum_{k=0}^p C_p^k (3I_3)^{p-k} B^k \\ &= C_p^0 (3I_3)^p B^0 + C_p^1 (3I_3)^{p-1} B + C_p^2 (3I_3)^{p-2} B^2 + C_p^3 (3I_3)^{p-3} B^3 + \dots \\ &\quad + C_p^{p-1} (3I_3)^1 B^{p-1} + C_p^p (3I_3)^0 B^p \\ A^p &= 3^p I_3 + p 3^{p-1} B + \frac{p(p-1)}{2} 3^{p-2} B^2, (\text{car } B^i = 0, \forall i \geq 3) \end{aligned}$$

$$A^p = \begin{pmatrix} 3^p & 0 & 0 \\ 0 & 3^p & 0 \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p 3^{p-1} & 2p 3^{p-1} \\ 0 & 0 & p 3^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p(p-1)}{2} 3^{p-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^p = \begin{pmatrix} 3^p & p 3^{p-1} & 2p 3^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} 3^{p-2} \\ 0 & 3^p & p 3^{p-1} \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}$$

## Corrigé de l'exercice 2.

1) Calcul de  $A^2$ .

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) Montrons que  $A$  est inversible

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 3I_4 + 2A$$

$$\begin{aligned} A^2 = 3I_4 + 2A &\iff A^2 - 2A = 3I_4 \\ &\iff (A - 2I_4)A = 3I_4 \\ &\iff \frac{1}{3}(A - 2I_4)A = I_4. \end{aligned}$$

Donc  $A$  est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_4)$$

Ou encore

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

### Corrigé de l'exercice 3.

1) Calculer  $Q^2$ . En déduire que  $Q$  est inversible et expliciter  $Q^{-1}$ .

$$\begin{aligned} Q^2 &= Q \cdot Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Q^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc  $Q^2 = I_3$ .

On a  $Q \cdot Q = I_3$  donc  $Q$  est inversible et son inverse est  $Q^{-1} = Q$ .

2) Calculer  $D$  (on vérifiera que  $D$  est une matrice diagonale). Justifier que  $M = QDQ$ .

$$\begin{aligned} D &= Q \cdot M \cdot Q \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que  $D$  est bien une matrice diagonale.

$$\begin{aligned}
 D = Q.M.Q &\implies Q^{-1}.D = Q^{-1}.Q.M.Q \\
 &\implies Q^{-1}.D = I_3.M.Q \\
 &\implies Q^{-1}.D = M.Q \\
 &\implies Q^{-1}.D.Q^{-1} = M.Q.Q^{-1} \\
 &\implies Q^{-1}.D.Q^{-1} = M.I_3 \\
 &\implies Q^{-1}.D.Q^{-1} = M
 \end{aligned}$$

Or on sait que  $Q^{-1} = Q$  donc  $\boxed{Q.D.Q = M}$ .

3) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ$ .

Initialisation : pour  $n = 0$ , on

$$\begin{aligned}
 Q.D^0.Q &= Q.I_3.Q \\
 &= Q.Q \\
 &= I_3 \\
 Q.D^0.Q &= M^0
 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Hérédité : soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé.

Supposons que  $M^n = QD^nQ$  et montrons que  $M^{n+1} = QD^{n+1}Q$ ?

$$\begin{aligned}
 M^{n+1} &= M^n.M \\
 &= Q.D^n.Q.Q.D.Q \\
 &= Q.D^n.I_3.D.Q \\
 &= Q.D^n.D.Q \\
 M^{n+1} &= Q.D^{n+1}.Q
 \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = QD^nQ$ .

4) Expliciter les neuf coefficients de la matrice  $M^n$ .

$$\begin{aligned}
 M^n &= Q.D^n.Q \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & (\frac{1}{2})^n & (\frac{1}{4})^n \\ 0 & -(\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 M^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 - 2(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

#### Corrigé de l'exercice 4.

$$\begin{cases} x - 2y - z = -5 \\ -2x + 4y + z = 10 \\ 2x - 2y + z = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$



$$\begin{cases}
x - 2y - z = -5 \\
\phantom{x - 2y - } - z = 0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\
\phantom{x - 2y - } 2y + 3z = 6 & L_3 \longleftrightarrow L_2
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x - 2y - z = -5 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\
\phantom{x - 2y - } 2y + 3z = 6 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\
\phantom{x - 2y - } z = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x - 2y = -5 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
\phantom{x - 2y - } 2y = 6 & L_2 \leftarrow 1/2L_2 \\
\phantom{x - 2y - } z = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x = 1 \\
\phantom{x = } y = 3 \\
\phantom{x = } z = 0
\end{cases}$$

Donc le système admet une solution unique  $(1, 3, 0)$ .

•

$$\begin{cases}
3x - y + z = 5 & L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
2x + y - z = 1 \\
x - y + z = 2 \\
4x + y + z = 3
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x - y + z = 2 \\
2x + y - z = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
3x - y + z = 5 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\
4x + y + z = 3 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x - y + z = 2 \\
\phantom{x - y + } 3y - 3z = -3 & L_2 \leftarrow 1/3L_2 \\
\phantom{x - y + } 2y - 2z = -1 \\
\phantom{x - y + } 5y - 3z = -5
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x - y + z = 2 \\
\phantom{x - y + } y - z = -1 \\
\phantom{x - y + } 2y - 2z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
\phantom{x - y + } 5y - 3z = -5 & L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x - y + z = 2 \\
\phantom{x - y + } y - z = -1 \\
\phantom{x - y + } 0 = 1 \\
\phantom{x - y + } z = 0
\end{cases}$$

Le système est donc incompatible à cause de la troisième ligne. Par conséquent  $S = \emptyset$ .

•

$$\begin{cases}
-3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4 & L_1 \longleftrightarrow L_2 \\
x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\
8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8 \\
-x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\
-3x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 4 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\
8x_1 - 24x_2 + 4x_3 - 12x_4 - 4x_5 = -8 & L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1 \\
-x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = 10 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\
x_3 - x_5 = 4 \\
-4x_3 - 4x_4 + 12x_5 = -8 & L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\
x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 10 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\
x_3 - x_5 = 4 \\
-4x_4 + 8x_5 = 8 & L_3 \leftarrow -1/4L_3 \\
-3x_4 + 6x_5 = 6
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\
x_3 - x_5 = 4 \\
x_4 - 2x_5 = -2 \\
-3x_4 + 6x_5 = 6 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\
x_3 - x_5 = 4 \\
x_4 - 2x_5 = -2 \\
0 = 0
\end{cases}$$

On élimine la quatrième ligne. il nous reste donc 3 colonnes pivots à savoir  $x_1$ ,  $x_3$  et  $x_4$ . Ce sont des inconnues principales et les autres inconnues  $x_2$  et  $x_5$  des inconnues auxiliaires (ou inconnues libres ou paramètres). On exprimera les inconnues principales en fonction des inconnues auxiliaires.

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_5 = -2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
x_3 - x_5 = 4 \\
x_4 - 2x_5 = -2
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_1 - 3x_2 - 3x_5 = -6 \\
x_3 - x_5 = 4 \\
x_4 - 2x_5 = -2
\end{cases}$$

Finalement on obtient

$$\begin{cases}
x_1 = -6 + 3x_2 + 3x_5 \\
x_3 = 4 + x_5 \\
x_4 = -2 + 2x_5
\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions et l'ensemble des solution est :

$$S = \{(-6 + 3x_2 + 3x_5, x_2, 4 + x_5, -2 + 2x_5, x_5) / (x_2, x_5) \in \mathbb{R}^2\}.$$

### Corrigé de l'exercice 5.

• On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (-12) = 22.$$

Puisque  $\det(A) \neq 0$ , alors d'après un théorème du cours, la matrice  $A$  est inversible et sa matrice inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Pour des matrices  $M$  de taille  $n \geq 2$ , on va utiliser un théorème du cours qui consiste à transformer par des opérations élémentaires sur les lignes la matrice  $(M, I_n)$  en la matrice  $(I_n, N)$ . Dans ce cas  $M^{-1} = N$

•

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow 1/2L_2 \\ L_3 \longleftarrow 1/5L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 3/2L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 & -1/10 & -7/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 & -1/10 & -7/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $B$  est donc inversible et sa matrice inverse est :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 3/10 & -1/10 & -7/10 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -7 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

•

$$\begin{pmatrix} i & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \longleftrightarrow -iL_1 \\ L_2 \longleftarrow -iL_2 \\ L_3 \longleftarrow -iL_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & 3i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \longleftrightarrow L_1 - 3iL_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + 2iL_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 & -i & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_1 + 2iL_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i & 2 & -3i+4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Donc la matrice  $C$  est inversible et sa matrice inverse est aussi triangulaire supérieure

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 2 & -3+4i \\ 0 & -i & 2 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

•

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_4$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_2$$

$$L_4 \longleftarrow L_4 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 1 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \longleftarrow -L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_4 \longleftarrow L_4 - 2L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_4$$

---


$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 4 & 2 & -11 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \quad .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} .$$

Donc la matrice  $D$  est inversible et sa matrice inverse est

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix} .$$

•

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & c & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - bL_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 & -b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - cL_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ac-b & -c & 1 \end{pmatrix} .$$

Donc  $E$  est inversible et sa matrice inverse est

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix} .$$


---

### Exercice 6.

a). Montrer en utilisant la méthode du pivot de Gauss que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

On considère les deux matrices  $A$  et  $I_3$  l'une à côté de l'autre.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les deux opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdot \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue les deux opérations  $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$  et  $L_3 \leftarrow -2L_3 + L_2$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On effectue l'opération  $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$ , on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalement, on effectue l'opération  $L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2$ , on arrive à

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice  $A$  est inversible et sa matrice inverse est

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

b). En déduire l'unique solution du système linéaire  $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

Il suffit d'utiliser l'écriture matricielle du système et le fait que  $A$  est inversible (système de Cramer)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 0 + 3 \\ 4 + 2 - 9 \\ 2 + 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\iff x = 2, y = -3, z = -2 \end{aligned}$$

Donc le système admet une solution unique  $(2, -3, -2)$ .

2). Par la méthode du pivot de Gauss, et en discutant suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ ,

résoudre le système linéaire suivant  $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + z = m \end{cases}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + z = m \end{cases} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3y - 3z = -3 \\ y - z = m - 2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = -1 \\ y - z = m - 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \\ 0 = m - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $m \neq 1$  alors l'équation  $L_3$  serait impossible et donc le système n'admet pas de solutions.  $S = \emptyset$ .

Si  $m = 1$  alors l'équation  $L_3$  devient  $0 = 0$ . On élimine cette troisième équation et on obtient un système à 2 équations et 3 inconnus.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Finalement, on obtient  $x = 1 - z$  et  $y = -1 + z$ .

Le système admet donc une infinité de solutions.  $S = \{(1 - z, -1 + z, z) / z \in \mathbb{R}\}.$

**cours en ligne**  
**Sites.google.com/site/saborpcmath/**  
**par whatsapp: 0638148874**  
**FACEBOOK: SABOR PC**