

ESTATICA

PROBLEMAS RESUELTOS

Ph.D. Genner Villarreal Castro

PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008

Lima – Perú

2011

La Estática, es una ciencia de la Mecánica Teórica, que estudia el equilibrio de diversos elementos o sistemas estructurales sometidos a la acción externa de cargas puntuales y distribuidas, así como de momentos.

Por lo general, los textos base de Estática, son muy voluminosos y, principalmente, se centran en la descripción teórica, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje a través de trabajos domiciliarios e investigación, conducentes a un mejor dominio de la materia.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos en la resolución de problemas aplicados en prácticas calificadas y exámenes, así como en la realización de sus trabajos domiciliarios.

Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, resolviendo para ello 125 problemas tipos en forma seria y con el rigor científico, propiciando de manera más amena la convivencia con la Estática.

En el presente libro, se tratan temas que en la mayoría de programas de las universidades se analizan y que son muy importantes en la formación profesional de los ingenieros civiles.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Estática en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de resolución de problemas; así como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 5 capítulos y bibliografía.

En el primer capítulo se analizan las diversas formas de las fuerzas y momentos, a las cuales están sometidas las estructuras.

En el segundo capítulo se estudian el equilibrio de estructuras simples, estructuras con rótulas intermedias, estructuras compuestas y estructuras espaciales.

En el tercer capítulo se calculan los centroides en alambres y áreas, así como, los momentos de inercia de áreas planas y de perfiles metálicos.

En el cuarto capítulo se analizan diversos tipos de armaduras, a través del método de los nudos y método de las secciones.

En el quinto capítulo se calculan las fuerzas internas y se grafican los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para vigas, pórticos, arcos y estructuras espaciales.

El presente texto está dirigido a estudiantes de ingeniería civil y docentes que imparten los cursos de Estática; así como, a ingenieros civiles, postgraduandos e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Estática de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego; quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro y con su energía renovada me permitieron culminar con éxito este trabajo.

De manera muy especial, dedico el presente libro a la Ing. Leyda Yudith Suárez Rondón, una linda venezolana, quien con su inteligencia, comprensión, apoyo constante, dulzura y belleza espiritual

conquistó mi corazón, rogando a Dios Todopoderoso nos conceda la oportunidad de seguir compartiendo nuestras vidas, para continuar aportando al desarrollo integral de la sociedad.

Ph.D. Genner Villarreal Castro
genner_vc@rambler.ru

Lima, Julio del 2011

CAPITULO 1

FUERZAS Y MOMENTOS

1.1 OPERACIONES CON VECTORES

PROBLEMA 1.1 ¿Será correcto afirmar que los dos sistemas mostrados son equivalentes?

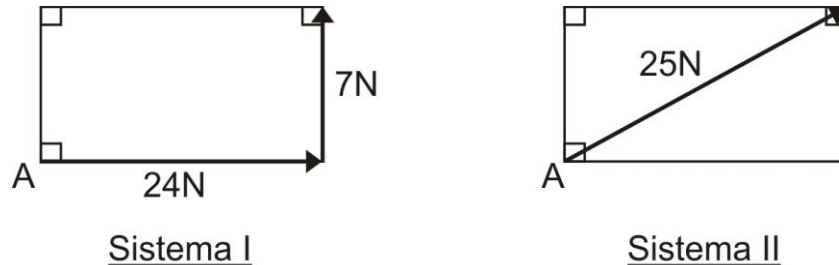


Fig. 1.1

Solución:

Para que ambos sistemas, sean equivalentes, las fuerzas del sistema I debieron estar orientadas tal como se muestra en la figura 1.2, que lo denominaremos como Sistema III, cuyo valor de la resultante lo determinamos por la ley del paralelogramo.

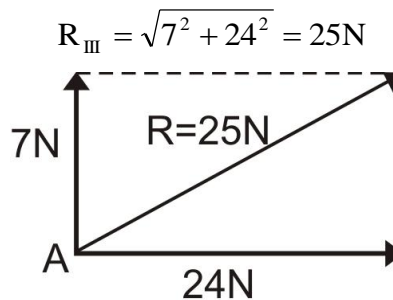


Fig. 1.2

En consecuencia, los sistemas I y II no son equivalentes, a pesar que la resultante del sistema I tiene la misma dirección y sentido que la fuerza única del sistema II.

PROBLEMA 1.2 Si $P = 76kN$ y $Q = 52kN$, determine en forma analítica la resultante de **P** y **Q**

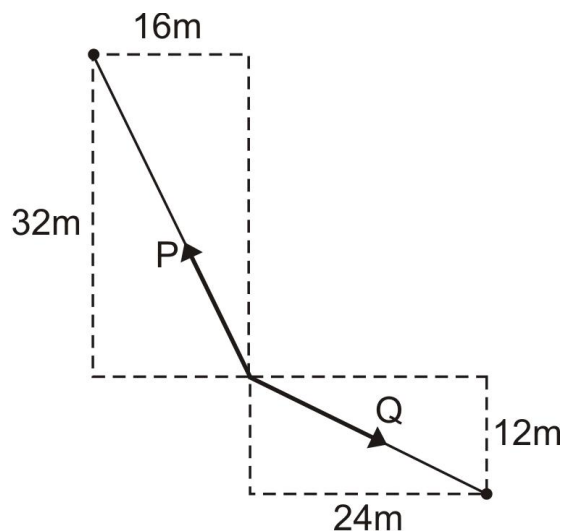


Fig. 1.3

Solución:

Calculamos el ángulo que forma el vector **P** con la vertical y el ángulo que forma el vector **Q** con la horizontal.

$$\alpha = \arctg\left(\frac{16}{32}\right) = 26,56^\circ$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{12}{24}\right) = 26,56^\circ$$

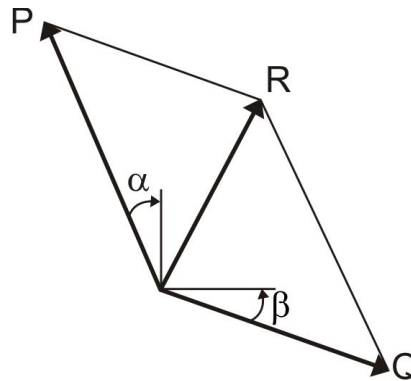


Fig. 1.4

De esta manera, el ángulo que forman los vectores **P** y **Q** es $\theta = 2.26,56 + 90 = 143,12^\circ$ y la resultante se calculará por la fórmula:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta} = \sqrt{76^2 + 52^2 + 2.76.52. \cos 143,12^\circ} = 46,45 \text{ kN}$$

Para determinar el ángulo que forma la resultante con **Q**, aplicamos la ley de senos (figura 1.5):

$$\frac{R}{\sin 36,88^\circ} = \frac{P}{\sin \gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 79,09^\circ$$

El ángulo que formará la resultante con el eje horizontal será de $52,53^\circ$.

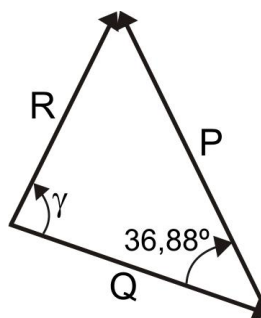


Fig. 1.5

PROBLEMA 1.3 Para la estructura mostrada en la figura 1.6, se pide:

- Descomponer la fuerza de 360 lb en componentes a lo largo de los cables AB y AC. Considerar $\alpha = 55^\circ$ y $\beta = 30^\circ$.
- Si los cables de soporte AB y AC están orientados de manera que las componentes de la fuerza de 360 lb a lo largo de AB y AC son de 185 lb y 200 lb, respectivamente. Determinar los ángulos α y β .

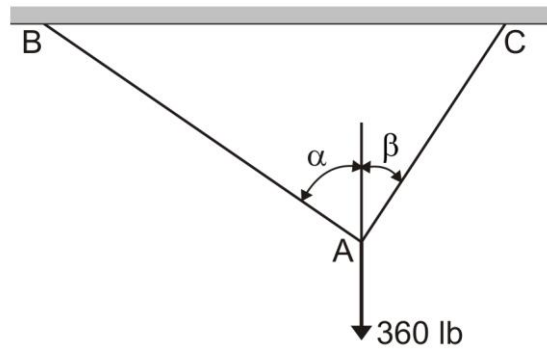


Fig. 1.6

Solución:

- a) Como la estructura debe de encontrarse en equilibrio, por lo tanto, aplicamos el triángulo de fuerzas, mostrado en la figura 1.7

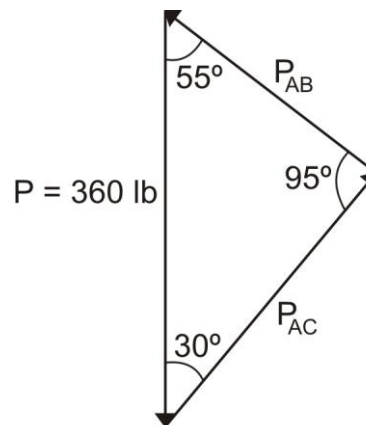


Fig. 1.7

Aplicamos la ley de senos y obtenemos los valores de las fuerzas en los cables AB y AC

$$\frac{P_{AB}}{\sin 30^\circ} = \frac{360}{\sin 95^\circ} \Rightarrow P_{AB} = 180,69 \text{ lb}$$

$$\frac{P_{AC}}{\sin 55^\circ} = \frac{360}{\sin 95^\circ} \Rightarrow P_{AC} = 296,02 \text{ lb}$$

- b) Analizamos el triángulo de fuerzas, mostrado en la figura 1.8 y aplicamos la ley de senos para determinar los ángulos α y β

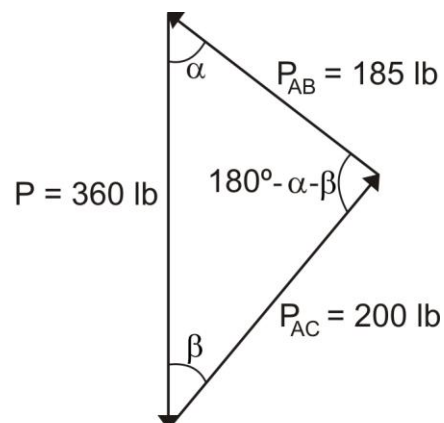


Fig. 1.8

$$\frac{185}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{200}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = 1,08\operatorname{sen}\beta \quad (a)$$

$$\frac{360}{\operatorname{sen}[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{200}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha + 1,08\cos\beta = 1,944 \quad (b)$$

Aplicamos en la ecuación (a) el principio que $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ y $\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta}$, reemplazando luego $\cos\beta$ de la ecuación (b) en la ecuación (a), obteniendo:

$$\alpha = 21,6^\circ$$

$$\beta = 19,9^\circ$$

PROBLEMA 1.4 La longitud del vector posición \mathbf{r} es de 2,40m (figura 1.9). Determine:

- La representación rectangular del vector posición \mathbf{r}
- Los ángulos entre \mathbf{r} y cada uno de los ejes coordenados positivos

Solución:

- Descomponemos \mathbf{r} en dos componentes como se muestra en la figura 1.10. Por trigonometría obtenemos:

$$r_z = r \cos 40^\circ = 2,4 \cos 40^\circ = 1,84\text{m}$$

$$r_{xy} = r \operatorname{sen} 40^\circ = 2,4 \operatorname{sen} 40^\circ = 1,54\text{m}$$

En forma análoga, descomponemos r_{xy} en r_x y r_y :

$$r_x = r_{xy} \cos 50^\circ = 0,99\text{m}$$

$$r_y = r_{xy} \operatorname{sen} 50^\circ = 1,18\text{m}$$

Por lo tanto, la representación rectangular de \mathbf{r} es:

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k} = 0,99\mathbf{i} + 1,18\mathbf{j} + 1,84\mathbf{k}$$

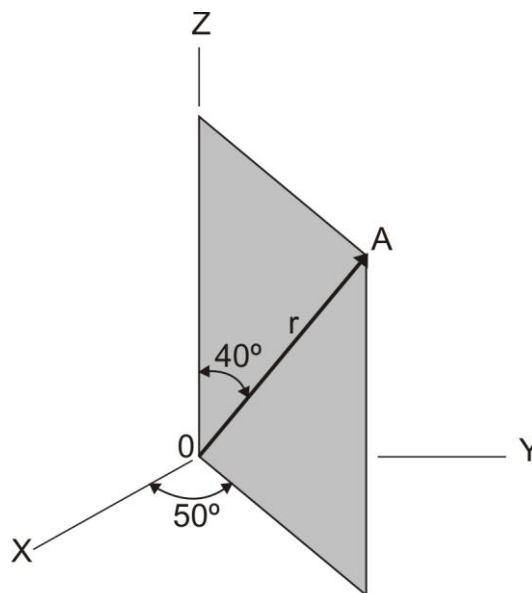


Fig. 1.9

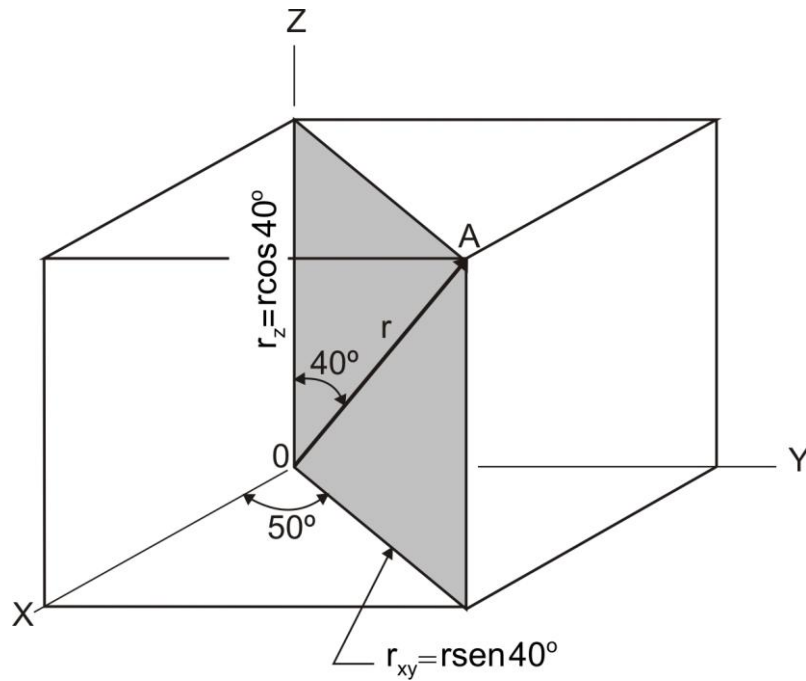


Fig. 1.10

b) Los ángulos entre r y los ejes coordenados, los calculamos por las siguientes ecuaciones:

$$\theta_x = \arccos\left(\frac{r_x}{r}\right) = \arccos\left(\frac{0,99}{2,4}\right) = 65,6^\circ$$

$$\theta_y = \arccos\left(\frac{r_y}{r}\right) = \arccos\left(\frac{1,18}{2,4}\right) = 60,5^\circ$$

$$\theta_z = \arccos\left(\frac{r_z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{1,84}{2,4}\right) = 40,0^\circ$$

Dichos ángulos se muestran en la figura 1.11 y como se puede apreciar, no fue necesario calcular θ_z , porque ya estaba dado en la figura 1.9

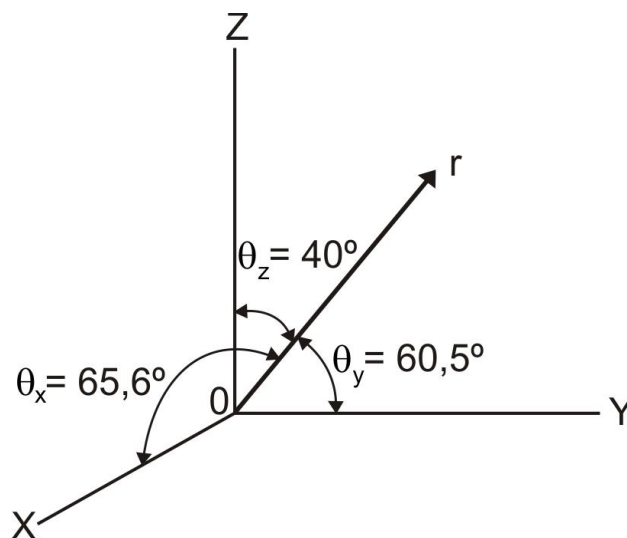


Fig. 1.11

PROBLEMA 1.5 Encuentre la representación rectangular de la fuerza **F** cuya magnitud es de 240N

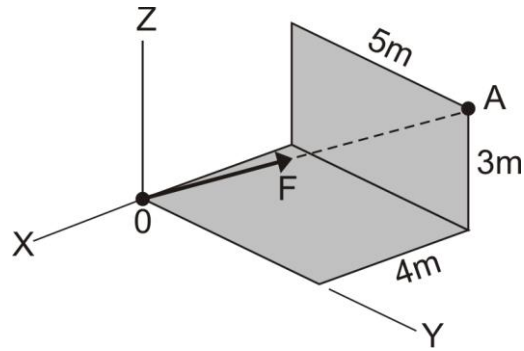


Fig. 1.12

Solución:

Como se conocen las coordenadas de los puntos O y A sobre la línea de acción de **F**, entonces escribimos el vector OA (vector de O hasta A) en forma rectangular (figura 1.13), expresado en metros:

$$\mathbf{OA} = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

Luego, el vector unitario de O hasta A será:

$$\lambda = \frac{\mathbf{OA}}{|\mathbf{OA}|} = \frac{-4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 3^2}} = -0,566\mathbf{i} + 0,707\mathbf{j} + 0,424\mathbf{k}$$

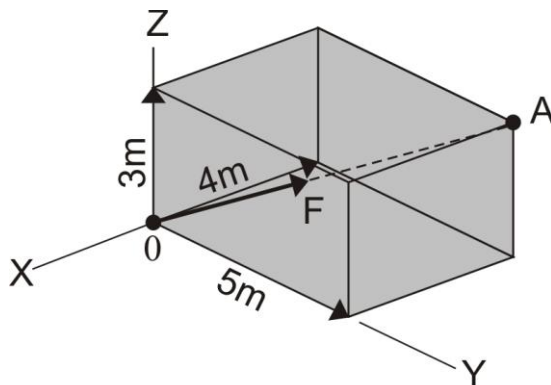


Fig. 1.13

Asimismo, se tendrá:

$$\mathbf{F} = 240(-0,566\mathbf{i} + 0,707\mathbf{j} + 0,424\mathbf{k}) = -135,84\mathbf{i} + 169,68\mathbf{j} + 101,76\mathbf{k}$$

Las componentes rectangulares de **F** se muestran en la figura 1.14

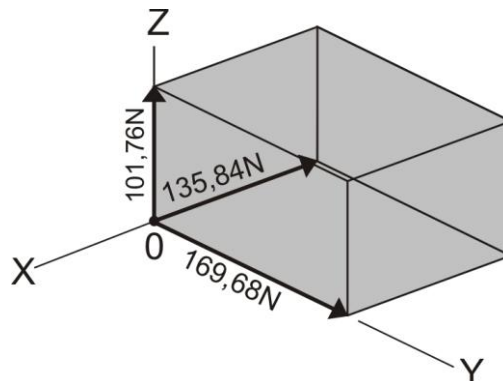


Fig. 1.14

PROBLEMA 1.6 Dado los vectores:

$$\mathbf{A} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad (\text{N})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad (\text{m})$$

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k} \quad (\text{m})$$

Determinar:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- La componente ortogonal de \mathbf{B} en la dirección de \mathbf{C}
- El ángulo entre \mathbf{A} y \mathbf{C}
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
- Un vector unitario λ perpendicular a \mathbf{A} y \mathbf{B}
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$

Solución:

- a) Aplicamos la siguiente ecuación, obteniendo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 6(0) + 4(1) + (-1)(3) = 1 \text{ N.m}$$

El signo positivo, indica que el ángulo entre \mathbf{A} y \mathbf{B} es menor que 90°

- b) Si θ es el ángulo entre \mathbf{B} y \mathbf{C} , se obtiene de la ecuación:

$$B \cos \theta = \vec{B} \cdot \frac{\vec{C}}{C} = (\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{1(-1) + 3(4)}{\sqrt{21}} = 2,40 \text{ m}$$

- c) Si α es el ángulo entre \mathbf{A} y \mathbf{C} , se encuentra de la siguiente ecuación:

$$\cos \alpha = \lambda_A \cdot \lambda_C = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{A \cdot C} = \frac{6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-1)^2}} \cdot \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{6(2) + 4(-1) + (-1)(4)}{\sqrt{53} \sqrt{21}}$$

$$\cos \alpha = 0,1199 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 83,1^\circ$$

- d) El producto cruz de \mathbf{A} y \mathbf{B} es:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \quad (\text{m})$$

- e) El producto cruz $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es perpendicular a \mathbf{A} y \mathbf{B} . Por lo tanto, un vector unitario en esa dirección se obtiene dividiendo $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, que fue evaluado anteriormente, entre su magnitud:

$$\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \frac{13\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{13^2 + (-18)^2 + 6^2}} = 0,565\mathbf{i} - 0,783\mathbf{j} + 0,261\mathbf{k}$$

Como el negativo de este vector es también un vector unitario que es perpendicular a \mathbf{A} y \mathbf{B} , se obtiene:

$$\lambda = \pm(0,565\mathbf{i} - 0,783\mathbf{j} + 0,261\mathbf{k})$$

- f) El triple producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ se evalúa usando la ecuación:

$$A \times B \cdot C = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 68 \text{ N.m}^2$$

PROBLEMA 1.7 Determinar **a**, **b** y **c**; tal que $(a; 3; 5) \times (20; -30; -60) = (b; 400; c)$

Solución:

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 3 & 5 \\ 20 & -30 & -60 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -30 & -60 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & 5 \\ 20 & -60 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & 3 \\ 20 & -30 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = -30i - (-60a - 100)j + (-30a - 60)k$$

Por dato del problema:

$$A \times B = bi + 400j + ck$$

Luego:

$$b = -30$$

$$400 = 60a + 100 \Rightarrow a = 5$$

$$c = -30(5) - 60 = -210$$

1.2 FUERZAS CONCURRENTES

PROBLEMA 1.8 Si **R** es la resultante de las fuerzas **P** y **Q**, determine P y Q

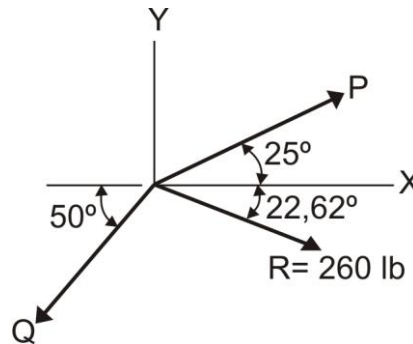


Fig. 1.15

Solución:

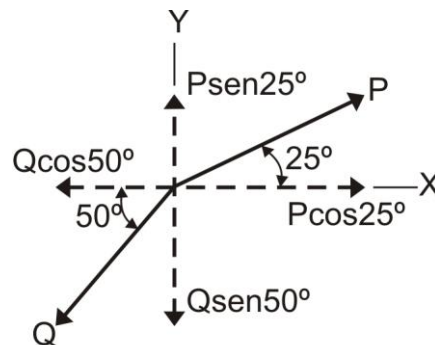


Fig. 1.16

De acuerdo a la figura 1.16, las representaciones rectangulares de **P** y **Q** son:

$$\vec{P} = P \cos 25^\circ \mathbf{i} + P \sin 25^\circ \mathbf{j}$$

$$\vec{Q} = -Q \cos 50^\circ \mathbf{i} - Q \sin 50^\circ \mathbf{j}$$

La resultante de **P** y **Q** se encuentra sumando sus componentes:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (P \cos 25^\circ - Q \cos 50^\circ) \mathbf{i} + (P \sin 25^\circ - Q \sin 50^\circ) \mathbf{j} \quad (a)$$

Según dato del problema, expresamos la resultante **R** en función de sus componentes rectangulares:

$$\vec{R} = 260 \cos 22,62^\circ \mathbf{i} - 260 \sin 22,62^\circ \mathbf{j} = 240 \mathbf{i} - 100 \mathbf{j} \quad (b)$$

Igualemos las ecuaciones (a) y (b) y obtenemos:

$$P = 588 \text{ lb}$$

$$Q = 455 \text{ lb}$$

PROBLEMA 1.9 La fuerza **R** es la resultante de las fuerzas **P₁**, **P₂** y **P₃** que actúan sobre la placa rectangular de 0,6m x 1m. Determinar **P₁** y **P₂** si **R** = 40kN y **P₃** = 20kN

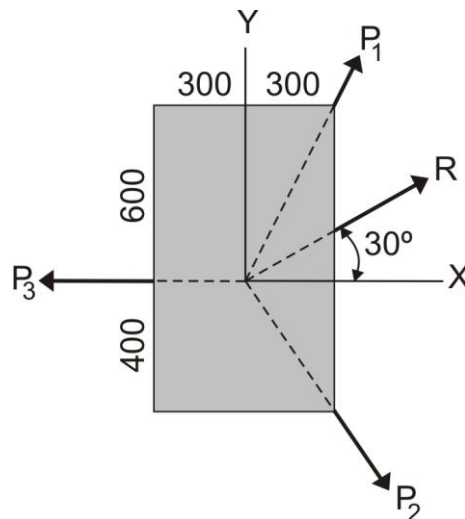


Fig. 1.17

Solución:

Este problema lo podemos resolver de 2 formas:

1ra FORMA:

$$R_x = \sum F_x \quad \Rightarrow \quad P_1 \cos 63,43^\circ + P_2 \cos 53^\circ - 20 = 40 \cos 30^\circ$$

$$0,45P_1 + 0,60P_2 = 54,64 \quad (a)$$

$$R_y = \sum F_y \quad \Rightarrow \quad P_1 \sin 63,43^\circ - P_2 \sin 53^\circ = 40 \sin 30^\circ$$

$$0,89P_1 - 0,80P_2 = 20 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$P_1 = 62,32 \text{ kN}$$

$$P_2 = 44,33 \text{ kN}$$

2da FORMA:

Escribimos las fuerzas en forma vectorial:

$$\vec{P}_1 = P_1 \cos 63,43^\circ \mathbf{i} + P_1 \sin 63,43^\circ \mathbf{j}$$

$$\vec{P}_2 = P_2 \cos 53^\circ \mathbf{i} - P_2 \sin 53^\circ \mathbf{j}$$

$$\vec{P}_3 = -20\mathbf{i}$$

$$\vec{R} = 40 \cos 30^\circ \mathbf{i} + 40 \sin 30^\circ \mathbf{j}$$

Como la fuerza resultante \vec{R} se determinará de la ecuación vectorial:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$$

$$40 \cos 30^\circ \mathbf{i} + 40 \sin 30^\circ \mathbf{j} = (P_1 \cos 63,43^\circ + P_2 \cos 53^\circ - 20)\mathbf{i} + (P_1 \sin 63,43^\circ - P_2 \sin 53^\circ)\mathbf{j}$$

De esta manera, se obtienen las ecuaciones:

$$P_1 \cos 63,43^\circ + P_2 \cos 53^\circ - 20 = 40 \cos 30^\circ$$

$$P_1 \sin 63,43^\circ - P_2 \sin 53^\circ = 40 \sin 30^\circ$$

Estas ecuaciones, son las mismas que (a) y (b), obteniendo los mismos resultados, es decir:

$$P_1 = 62,32 \text{ kN}$$

$$P_2 = 44,33 \text{ kN}$$

PROBLEMA 1.10 Un pequeño aro tiene una carga vertical de peso P y está sostenido por dos cuerdas AB y BC, la última de las cuales soporta en su extremo libre un peso $P_Q = 100 \text{ N}$, como se observa en la figura. Determinar la magnitud del peso de la carga P y la tensión de la cuerda AB, si el sistema se encuentra en equilibrio.

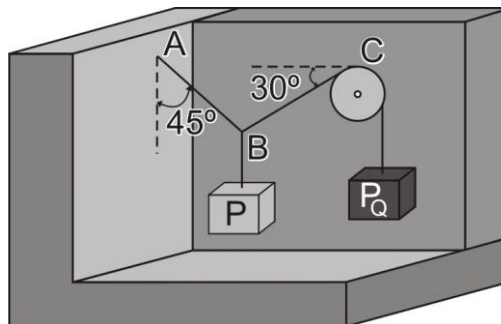


Fig. 1.18

Solución:

Efectuamos un corte y analizamos el equilibrio del nudo B

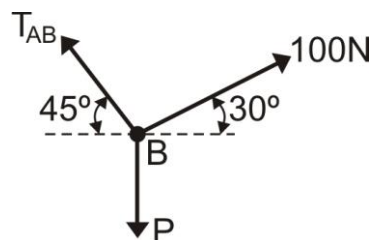


Fig. 1.19

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 100 \cos 30^\circ - T_{AB} \cos 45^\circ = 0 \quad \therefore \quad T_{AB} = 122,47 \text{ N}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 100 \sin 30^\circ + 122,47 \sin 45^\circ - P = 0 \quad \therefore \quad P = 136,60 \text{ N}$$

PROBLEMA 1.11 Sea **R** la resultante de las tres fuerzas mostradas. Si $P_1 = 110 \text{ lb}$, $P_2 = 200 \text{ lb}$ y $P_3 = 150 \text{ lb}$, determinar:

- La magnitud de **R**
- Los cosenos directores de **R**
- El punto en que la línea de acción de **R** interseca al plano YZ

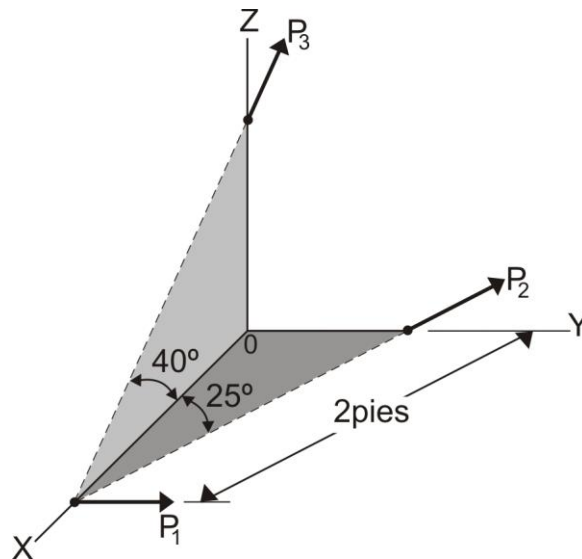


Fig. 1.20

Solución:

- Las fuerzas son concurrentes en el punto A (figura 1.21), por lo que pueden sumarse inmediatamente. Como las fuerzas no se encuentran en un plano coordenado, conviene usar notación vectorial.

Un método para expresar cada una de las fuerzas en notación vectorial es usar la forma $\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario en la dirección de la fuerza.

De esta manera, se tendrá:

$$P_1 = 110\mathbf{j}$$

$$P_2 = 200\lambda_{AC} = 200 \frac{\mathbf{AC}}{|\mathbf{AC}|} = 200 \left(\frac{-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \tan 25^\circ}{\sqrt{(-2)^2 + (2\mathbf{j} \tan 25^\circ)^2}} \right) = -181,26\mathbf{i} + 84,52\mathbf{j}$$

$$P_3 = 150\lambda_{AB} = 150 \frac{\mathbf{AB}}{|\mathbf{AB}|} = 150 \left(\frac{-2\mathbf{i} + 2\mathbf{k} \tan 40^\circ}{\sqrt{(-2)^2 + (2\mathbf{k} \tan 40^\circ)^2}} \right) = -114,90\mathbf{i} + 96,42\mathbf{k}$$

La fuerza resultante estará dada por:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = (-181,26 - 114,90)\mathbf{i} + (110 + 84,52)\mathbf{j} + 96,42\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = -296,16\mathbf{i} + 194,52\mathbf{j} + 96,42\mathbf{k}$$

La magnitud de la resultante **R** es:

$$R = \sqrt{(-296,16)^2 + (194,52)^2 + (96,42)^2} = 367,21 \text{ lb}$$

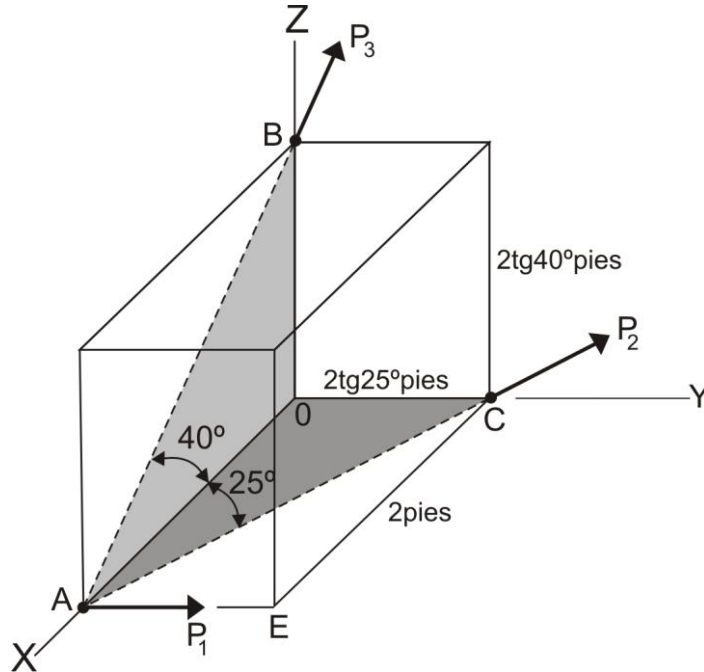


Fig. 1.21

- b) El vector unitario λ en la dirección de **R** es:

$$\lambda = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{-296,16\mathbf{i} + 194,52\mathbf{j} + 96,42\mathbf{k}}{367,21} = -0,807\mathbf{i} + 0,530\mathbf{j} + 0,263\mathbf{k}$$

Los cosenos directores de **R** y los ángulos entre **R** y los ejes coordenados son:

$$\cos \theta_x = -0,807 \quad \Rightarrow \quad \theta_x = 143,8^\circ$$

$$\cos \theta_y = 0,530 \quad \Rightarrow \quad \theta_y = 58^\circ$$

$$\cos \theta_z = 0,263 \quad \Rightarrow \quad \theta_z = 74,8^\circ$$

- c) Sea D el punto en que la línea de acción de la resultante **R** interseca al plano YZ. La distancia horizontal e y la distancia vertical h, mostradas en la figura 1.22, pueden determinarse por proporciones:

$$\frac{e}{194,52} = \frac{h}{96,42} = \frac{2}{296,16}$$

De donde:

$$e = 1,314 \text{ pies}$$

$$h = 0,651 \text{ pies}$$

De la figura 1.18, las coordenadas del punto D son:

$$x_D = 0$$

$$y_D = e = 1,314 \text{ pies}$$

$$z_D = h = 0,651 \text{ pies}$$

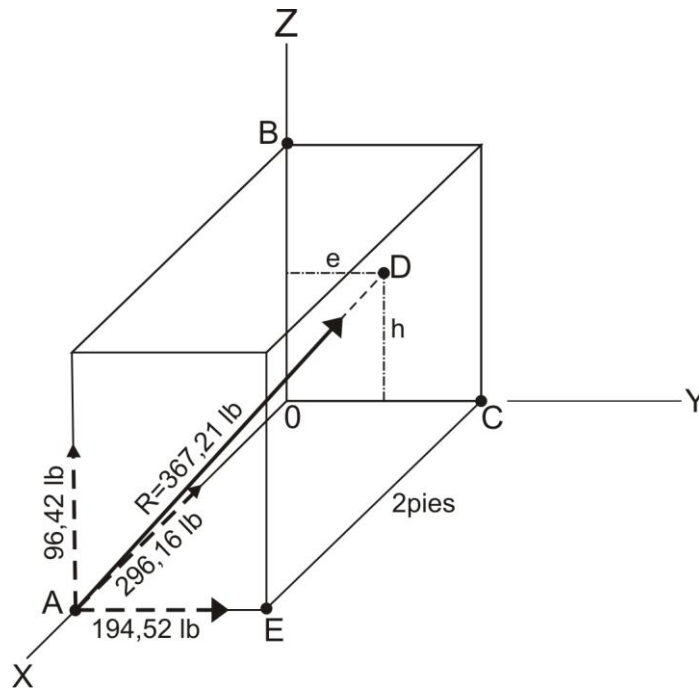


Fig. 1.22

PROBLEMA 1.12 Tres tensiones T_1, T_2, T_3 , generadas en cables, actúan en el punto A del mástil OA. Si la fuerza resultante de las tres tensiones es $\vec{R} = -400\vec{k}$ (N), determinar la magnitud de cada tensión en los cables.

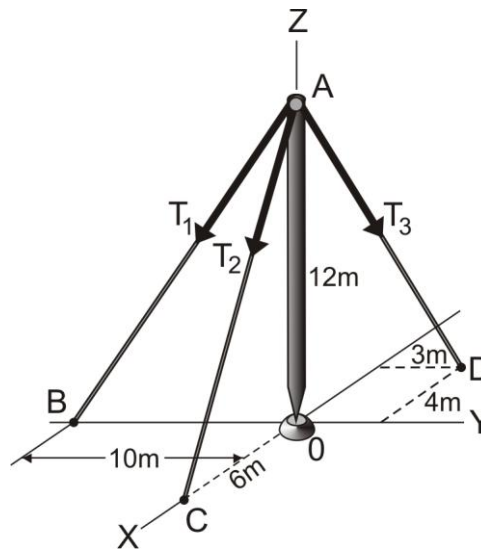


Fig. 1.23

Solución:

Se sabe que $\vec{F} = F\lambda$

Luego, analizamos cada cable en forma separada.

CABLE AB:

$$\lambda_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{-10\vec{j} - 12\vec{k}}{\sqrt{(-10)^2 + (-12)^2}} = -0,64\vec{j} - 0,768\vec{k}$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \cdot \lambda_{AB} = -0,64jT_1 - 0,768kT_1$$

CABLE AC:

$$\lambda_{AC} = \frac{AC}{|AC|} = \frac{6i - 12k}{\sqrt{6^2 + (-12)^2}} = 0,447i - 0,894k$$

$$\vec{T}_2 = T_2 \cdot \lambda_{AC} = 0,447iT_2 - 0,894kT_2$$

CABLE AD:

$$\lambda_{AD} = \frac{AD}{|AD|} = \frac{-4i + 3j - 12k}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-12)^2}} = -0,308i + 0,231j - 0,923k$$

$$\vec{T}_3 = T_3 \cdot \lambda_{AD} = -0,308iT_3 + 0,231jT_3 - 0,923kT_3$$

Determinamos la resultante de la acción de las tres fuerzas:

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = (0,447T_2 - 0,308T_3)i + (-0,64T_1 + 0,231T_3)j + (-0,768T_1 - 0,894T_2 - 0,923T_3)k$$

Por condición del problema:

$$\vec{R} = -400k$$

Esto significa que:

$$0,447T_2 - 0,308T_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0,689T_3$$

$$-0,64T_1 + 0,231T_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 0,361T_3$$

$$-0,768T_1 - 0,894T_2 - 0,923T_3 = -400$$

Reemplazamos valores en esta última ecuación y obtenemos:

$$T_3 = 220,24N$$

$$T_2 = 151,74N$$

$$T_1 = 79,50N$$

1.3 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A UN PUNTO. TEOREMA DE VARIGNON

PROBLEMA 1.13 Una placa rectangular delgada está sostenida por los soportes de bisagra en A y B y por dos cables PQ y RS, cuyas tensiones son 200N y 300N, respectivamente.

- Determinar el momento de la fuerza ejercida por el cable PQ respecto al punto A
- Determinar el ángulo que forma el cable RS con la línea RT

Solución:

- La fuerza en el cable PQ lo denotamos como P y en forma vectorial es:

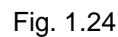
$$P = 200 \frac{PQ}{|PQ|} = 200 \frac{-0,4i + 0,3j - 0,8k}{\sqrt{(-0,4)^2 + 0,3^2 + (-0,8)^2}} = 200 \frac{-0,4i + 0,3j - 0,8k}{\sqrt{0,89}}$$

$$P = -84,8i + 63,6j - 169,6k$$

Para el momento, respecto a "A", elegimos un vector r_{AP} que va desde A hasta P (punto que pertenece a la línea de acción PQ)

$$r_{AP} = 0,8k$$

$$\mathbf{M}_{A(P)} = \mathbf{r}_{AP} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0,8 \\ -84,8 & 63,6 & -169,6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & 0,8 \\ 63,6 & -169,6 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 0 & 0,8 \\ -84,8 & -169,6 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -84,8 & 63,6 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{A(P)} = -50,88\mathbf{i} - 67,84\mathbf{j} \text{ (N.m)}$$


- $$\mathbf{r}_{RT} = 0,4\mathbf{i} - 0,8\mathbf{k}$$

$$\cos \alpha = \lambda_{\text{RS}} \cdot \lambda_{\text{RT}} = \frac{\text{RS}}{|\text{RS}|} \cdot \frac{\text{RT}}{|\text{RT}|} = \frac{0,4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 0,8\mathbf{k}}{\sqrt{0,4^2 + 1^2 + (-0,8)^2}} \cdot \frac{0,4\mathbf{i} - 0,8\mathbf{k}}{\sqrt{0,4^2 + (-0,8)^2}} = 0,667$$

$$\alpha = \arccos(0,667) = 48,16^\circ$$

The diagram shows a 3D frame structure in a Cartesian coordinate system with X, Y, and Z axes. The structure consists of a horizontal base plate and a vertical rectangular plate. The base plate has a width of 300 mm along the X-axis and a depth of 240 mm along the Z-axis. The vertical plate is attached to the base plate and has a height of 240 mm along the Y-axis. A cable is attached to the base plate at point C (bottom-left corner) and to the vertical plate at point D (top-right corner). The cable is represented by a curved line. The supports are: a roller support at point A (bottom-left corner of the base plate), a roller support at point B (bottom-right corner of the base plate), and a ball-and-socket joint at point D. The dimensions are: 300 mm (X-axis), 240 mm (Y-axis), 240 mm (Z-axis), 80 mm (distance from the Y-axis to point D along the Y-axis), and 80 mm (distance from the Z-axis to point D along the Z-axis).

Fig. 1.25

Solución:

La fuerza en el cable CD lo denotamos como P y en forma vectorial es:

$$\vec{P} = P \cdot \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} = P \cdot \frac{-0,3\mathbf{i} + 0,24\mathbf{j} - 0,32\mathbf{k}}{\sqrt{(-0,3)^2 + 0,24^2 + (-0,32)^2}} = (-0,6\mathbf{i} + 0,48\mathbf{j} - 0,64\mathbf{k})P$$

Para el momento respecto a "A", elegimos un vector \mathbf{r}_{AC} que va desde A hasta el punto C (punto que pertenece a la línea de acción CD)

$$\mathbf{r}_{AC} = 0,3\mathbf{i} + 0,08\mathbf{k}$$

Luego:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,3 & 0 & 0,08 \\ -0,6P & 0,48P & -0,64P \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & 0,08 \\ 0,48P & -0,64P \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 0,3 & 0,08 \\ -0,6P & -0,64P \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 0,3 & 0 \\ -0,6P & 0,48P \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -0,0384P\mathbf{i} + 0,144P\mathbf{j} + 0,144P\mathbf{k}$$

De donde:

$$P = 200\text{N}$$

PROBLEMA 1.15 La puerta batiente se mantiene en la posición mostrada en la figura, por medio de dos cables AB y AC y, además, por las bisagras mostradas. Si las tensiones en los cables son $T_1 = 30\text{lb}$ y $T_2 = 90\text{lb}$. Determinar:

- La magnitud de la fuerza resultante
- El momento de la fuerza tensional T_1 respecto al punto C

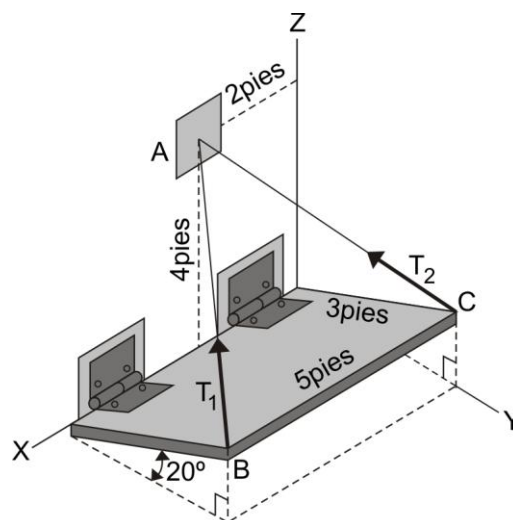


Fig. 1.26

Solución:

- Determinamos las coordenadas de los puntos A, B y C, de acuerdo a la figura 1.27

$$A (2; 0; 4)$$

$$B (5; 2,819; 1,026)$$

$$C (0; 2,819; 1,026)$$



Fig. 1.27

Luego:

$$\lambda_{BA} = \frac{-3i - 2,819j + 2,974k}{\sqrt{(-3)^2 + (-2,819)^2 + 2,974^2}} = -0,591i - 0,555j + 0,585k$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \cdot \lambda_{BA} = 30 \cdot (-0,591i - 0,555j + 0,585k) = -17,73i - 16,65j + 17,55k$$

$$\lambda_{CA} = \frac{2i - 2,819j + 2,974k}{\sqrt{2^2 + (-2,819)^2 + 2,974^2}} = 0,438i - 0,618j + 0,652k$$

$$\vec{T}_2 = T_2 \cdot \lambda_{CA} = 90 \cdot (0,438i - 0,618j + 0,652k) = 39,42i - 55,62j + 58,68k$$

En consecuencia:

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 21,69i - 72,27j + 76,23k$$

La magnitud de la fuerza resultante:

$$|\vec{R}| = \sqrt{21,69^2 + (-72,27)^2 + 76,23^2} = 107,26 \text{ lb}$$

- b) Para el momento respecto a C, elegimos un vector r_{CB} que va desde C hasta B (punto que pertenece a la línea de acción de la tensión T_1)

$$r_{CB} = 5i$$

$$M_C = r_{CB} \times T_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 0 & 0 \\ -17,73 & -16,65 & 17,55 \end{vmatrix}$$

$$M_C = i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -16,65 & 17,55 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -17,73 & 17,55 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -17,73 & -16,65 \end{vmatrix} = -87,75j - 83,25k \text{ (lb.pie)}$$

PROBLEMA 1.16 Si las magnitudes de las fuerzas $P = 100 \text{ N}$ y $Q = 250 \text{ N}$ (figura 1.28), determinar:

- Los momentos de **P** y **Q** respecto a los puntos O y C
- Las distancias perpendiculares entre los puntos O y C y las fuerzas **P** y **Q**

Solución:

En este caso es conveniente utilizar la forma vectorial:

$$P = 100 \frac{AB}{|AB|} = 100 \left(\frac{-0,5i - 0,6j + 0,36k}{0,860} \right) = -58,1i - 69,8j + 41,9k \text{ (N)}$$

$$Q = 250 \frac{DB}{|DB|} = 250 \left(\frac{-0,5i + 0,36k}{0,616} \right) = -202,9i + 146,1k \text{ (N)}$$

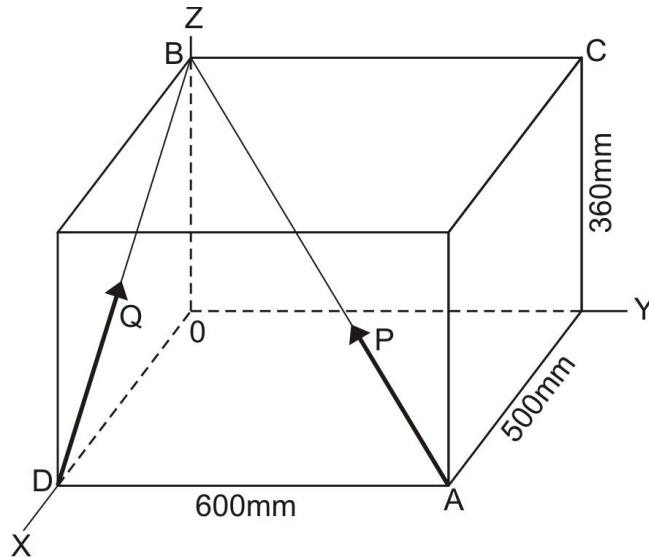


Fig. 1.28

Para el caso de los momentos respecto al punto O, elegimos un vector r_{OB} que va del punto O hasta B (punto que pertenece a la línea de acción de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q}) y para el caso de los momentos respecto al punto C, elegimos el vector r_{CB} que va del punto C hasta el punto B, escribiéndolos en forma vectorial:

$$r_{OB} = 0,36\mathbf{k} \text{ (m)}$$

$$r_{CB} = -0,6\mathbf{j} \text{ (m)}$$

Ahora, determinamos los valores de los momentos respecto a los puntos O y C, posteriormente las distancias requeridas.

a) El momento de \mathbf{P} respecto al punto O será:

$$M_{O(P)} = r_{OB} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0,36 \\ -58,1 & -69,8 & 41,9 \end{vmatrix} = 25,1\mathbf{i} - 20,9\mathbf{j} \text{ (N.m)}$$

El momento de \mathbf{P} respecto al punto C es:

$$M_{C(P)} = r_{CB} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -0,6 & 0 \\ -58,1 & -69,8 & 41,9 \end{vmatrix} = -25,1\mathbf{i} - 34,9\mathbf{k} \text{ (N.m)}$$

El momento de \mathbf{Q} respecto al punto O será:

$$M_{O(Q)} = r_{OB} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0,36 \\ -202,9 & 0 & 146,1 \end{vmatrix} = -73,0\mathbf{j} \text{ (N.m)}$$

El momento de \mathbf{Q} respecto al punto C es:

$$M_{C(Q)} = r_{CB} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -0,6 & 0 \\ -202,9 & 0 & 146,1 \end{vmatrix} = -87,7\mathbf{i} - 121,7\mathbf{k} \text{ (N.m)}$$

b) La distancia perpendicular del punto O a la línea de acción de **P** puede determinarse por:

$$d_{OP} = \frac{M_{O(P)}}{P} = \frac{\sqrt{25,1^2 + (-20,9)^2}}{100} = 0,327\text{m}$$

La distancia perpendicular del punto C a la línea de acción de **P** es:

$$d_{CP} = \frac{M_{C(P)}}{P} = \frac{\sqrt{(-25,1)^2 + (-34,9)^2}}{100} = 0,430\text{m}$$

La distancia perpendicular del punto O a la línea de acción de **Q** puede determinarse por:

$$d_{OQ} = \frac{M_{O(Q)}}{Q} = \frac{\sqrt{(-73,0)^2}}{250} = 0,292\text{m}$$

La distancia perpendicular del punto C a la línea de acción de **Q** es:

$$d_{CQ} = \frac{M_{C(Q)}}{Q} = \frac{\sqrt{(-87,7)^2 + (-121,7)^2}}{250} = 0,600\text{m}$$

PROBLEMA 1.17 Si el momento combinado de las dos fuerzas, cada una de magnitud $P = 100\text{N}$, respecto al punto "H" es cero. Se pide:

- Determinar la distancia "d" que localiza a "H"
- Determinar el ángulo que forman las líneas EC y EB

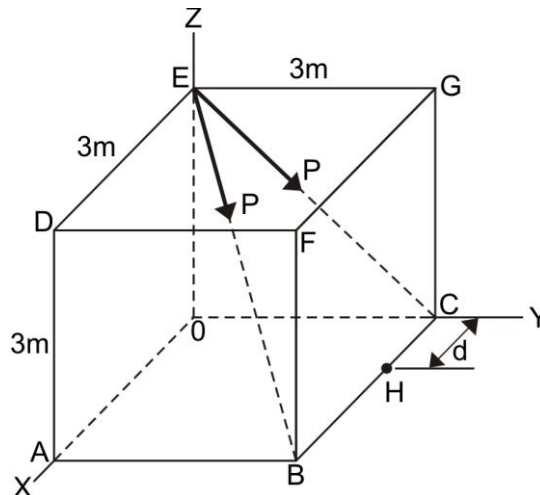


Fig. 1.29

Solución:

- Calculamos los momentos respecto al punto "H"

$$P_{EC} = P_1 = 100 \cdot \frac{EC}{|EC|} = 100 \cdot \frac{3j - 3k}{\sqrt{3^2 + (-3)^2}} = 70,71j - 70,71k$$

$$r_{HC} = -d \cdot i$$

$$M_H^{P_1} = r_{HC} \times P_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -d & 0 & 0 \\ 0 & 70,71 & -70,71 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 70,71 & -70,71 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -d & 0 \\ 0 & -70,71 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -d & 0 \\ 0 & 70,71 \end{vmatrix}$$

$$M_H^{P_1} = -70,71dj - 70,71dk$$

$$P_{EB} = P_2 = 100 \cdot \frac{EB}{|EB|} = 100 \cdot \frac{3i + 3j - 3k}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2}} = 57,73i + 57,73j - 57,73k$$

$$r_{HB} = (3-d)i$$

$$M_H^{P_2} = r_{HB} \times P_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ (3-d) & 0 & 0 \\ 57,73 & 57,73 & -57,73 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 57,73 & -57,73 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} (3-d) & 0 \\ 57,73 & -57,73 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} (3-d) & 0 \\ 57,73 & 57,73 \end{vmatrix} = (3-d) \cdot (57,73)j + (57,73) \cdot (3-d)k$$

Luego, por condición del problema:

$$M_H^{P_1} + M_H^{P_2} = 0$$

$$-70,71d + (3-d) \cdot (57,73) = 0$$

$$d = 1,348m$$

b) Determinamos el ángulo que forman las líneas EC y EB

$$r_{EC} = 3j - 3k$$

$$r_{EB} = 3i + 3j - 3k$$

$$\cos \alpha = \lambda_{EC} \cdot \lambda_{EB} = \frac{EC}{|EC|} \cdot \frac{EB}{|EB|} = \frac{3j - 3k}{\sqrt{18}} \cdot \frac{3i + 3j - 3k}{\sqrt{27}} = \frac{9 + 9}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{27}} = 0,8165$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos(0,8165) = 35,26^\circ$$

PROBLEMA 1.18 Determinar el momento de la fuerza de 50kN respecto al punto A (figura 1.30).

- Usar el método vectorial.
- Usar el método escalar colocando las componentes rectangulares de la fuerza en los puntos B, C y D.

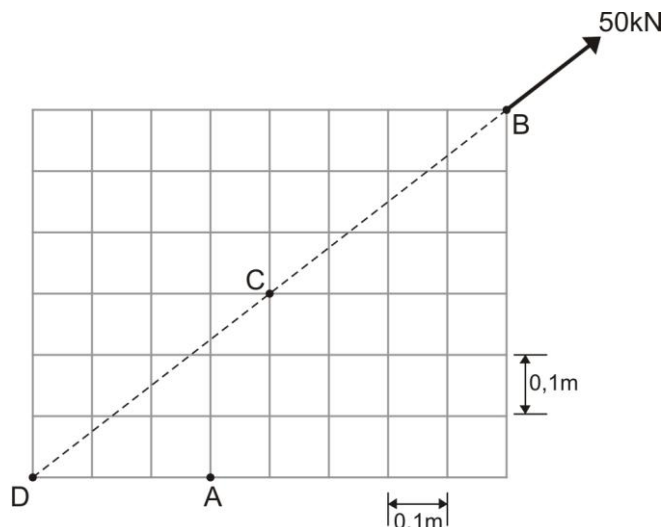


Fig. 1.30

Solución:

- a) Escribimos la fuerza en forma vectorial, escogiendo el punto D como inicio del eje de coordenadas en el plano XY, pudiendo apreciar que el rectángulo es de 0,6m x 0,8m, es decir, el ángulo ADB es 37° .

$$F = 50 \cos 37^\circ i + 50 \sin 37^\circ j = 40i + 30j \text{ (kN)}$$

Elegimos el vector r del punto A al punto D, por facilidad de cálculo, siendo:

$$r = r_{AD} = -0,3i \text{ (m)}$$

Usando la forma de determinante para el producto cruz, el momento respecto al punto A es:

$$M_A = r \times F = r_{AD} \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -0,3 & 0 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \end{vmatrix} = k[(-0,3)(30)] = -9k \text{ (kN.m)}$$

La magnitud de M_A es 9kN.m y la dirección de M_A es en la dirección de Z negativo, que por la regla de la mano derecha significa que el momento respecto al punto A es horario.

- b) En este problema el cálculo escalar es tan conveniente como el método vectorial, porque las distancias perpendiculares entre A y cada una de las componentes de fuerza (figura 1.31) pueden determinarse por inspección.

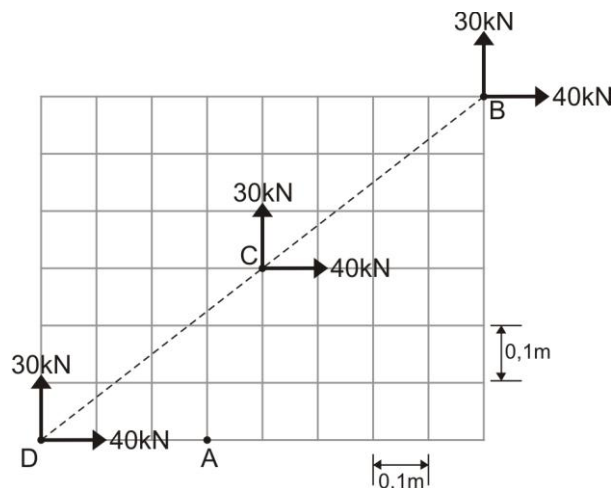


Fig. 1.31

Como primer caso, analizamos cuando las componentes están colocadas en el punto B:

$$M_A = (30)(0,5) - (40)(0,6) = -9 \text{ kN.m (sentido horario)}$$

Luego, analizamos el caso cuando las componentes están colocadas en el punto C:

$$M_A = (30)(0,1) - (40)(0,3) = -9 \text{ kN.m (sentido horario)}$$

Finalmente, analizamos el caso cuando las componentes han sido colocadas en el punto D:

$$M_A = -(30)(0,3) = -9 \text{ kN.m (sentido horario)}$$

Como se puede apreciar, los resultados son los mismos, lo que implica que si tenemos un sistema coordenado, lógicamente es mucho más fácil aplicar el método escalar, descomponiendo la fuerza en sus componentes rectangulares y aplicarlo en cualquier punto de la línea de acción de la fuerza, que los resultados serán los mismos, como se ha demostrado en este problema.

PROBLEMA 1.19 En la siguiente figura, considerando que el peso W de la barra es de 100kg, evaluar el momento de giro en el punto A.

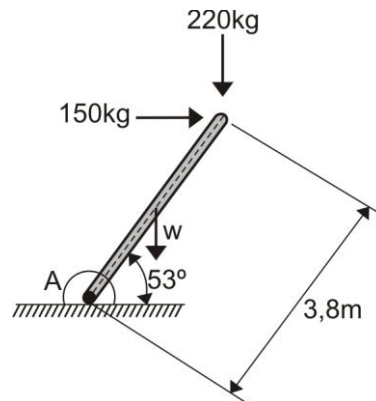


Fig. 1.32

Solución:

Como se sabe, la ubicación del peso debe ser en la parte media de la barra, calculando las distancias respectivas, que se muestran en la figura 1.33,a y 1.33,b

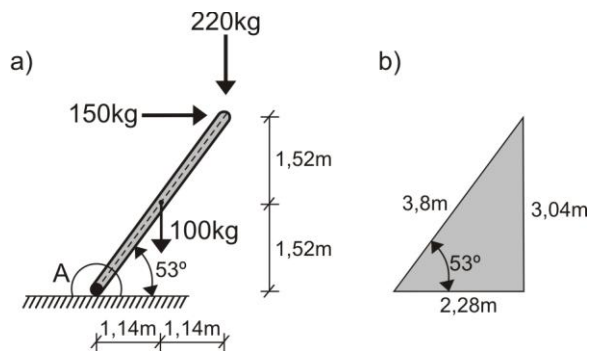


Fig. 1.33

Evaluamos el momento en el apoyo A

$$M_A = -150.(3,04) - 220.(2,28) - 100.(1,14) = -1071,6\text{kg.m}$$

El sentido es horario por ser negativo

PROBLEMA 1.20 Determinar la relación a/b , sabiendo que el momento en la base A del poste es nulo.

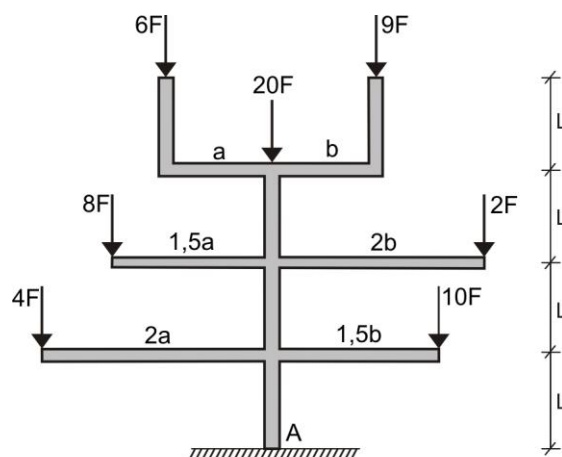


Fig. 1.34

Solución:

Como el momento respecto a un punto es fuerza x distancia, aplicamos este concepto al presente problema.

$$M_A = -9F.(b) - 2F.(2b) - 10F.(1,5b) + 6F.(a) + 8F.(1,5a) + 4F.(2a) = -28Fb + 26Fa$$

Por condición del problema:

$$-28Fb + 26Fa = 0$$

De donde:

$$\frac{a}{b} = 1,077$$

PROBLEMA 1.21 La fuerza F actúa sobre las tenazas del brazo de robot. Los momentos de F respecto a los puntos A y B son de 120N.m y 60N.m respectivamente, ambos en sentido antihorario. Determinar F y el ángulo θ

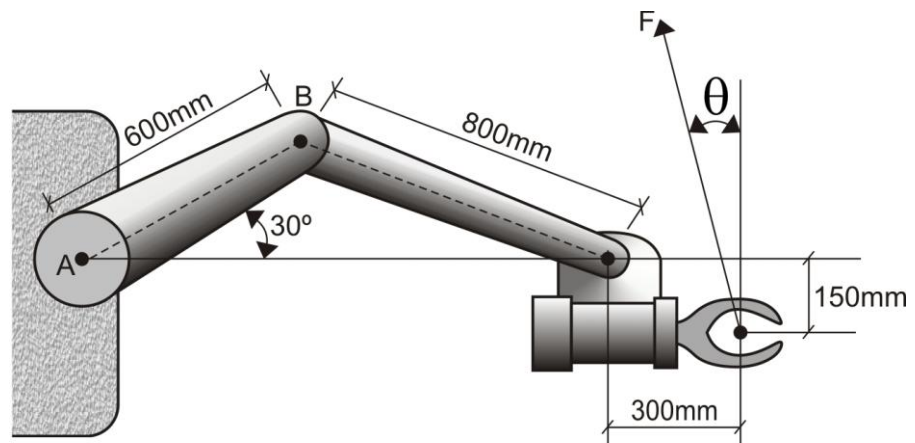


Fig. 1.35

Solución:

Efectuamos los momentos respecto a los puntos A y B, descomponiendo la fuerza F y calculando por geometría las distancias:

PUNTO "A":

$$F \cos \theta . (1561,23) - F \sin \theta . (150) = 120000 \quad (a)$$

PUNTO "B":

$$F \cos \theta . (1041,62) - F \sin \theta . (450) = 60000 \quad (b)$$

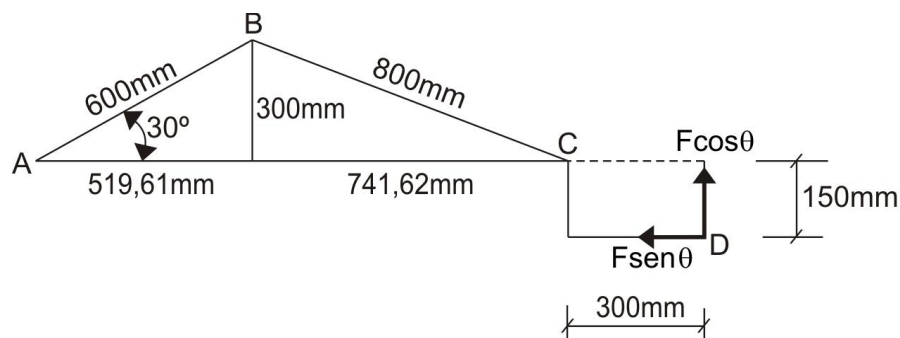


Fig. 1.36

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$F \sin \theta = 57,33 \quad (c)$$

$$F \cos \theta = 82,37 \quad (d)$$

Dividimos (c) entre (d) y obtenemos:

$$\operatorname{tg} \theta = 0,696$$

$$\theta = \arctg(0,696) = 34,84^\circ$$

Luego:

$$F = \frac{57,33}{\sin 34,84^\circ} = 100,35 \text{ N}$$

1.4 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO A LOS EJES CARTESIANOS

PROBLEMA 1.22 En la figura mostrada, la fuerza \mathbf{F}_2 es paralela al plano XZ, determinar el momento resultante respecto a cada uno de los ejes coordenados.

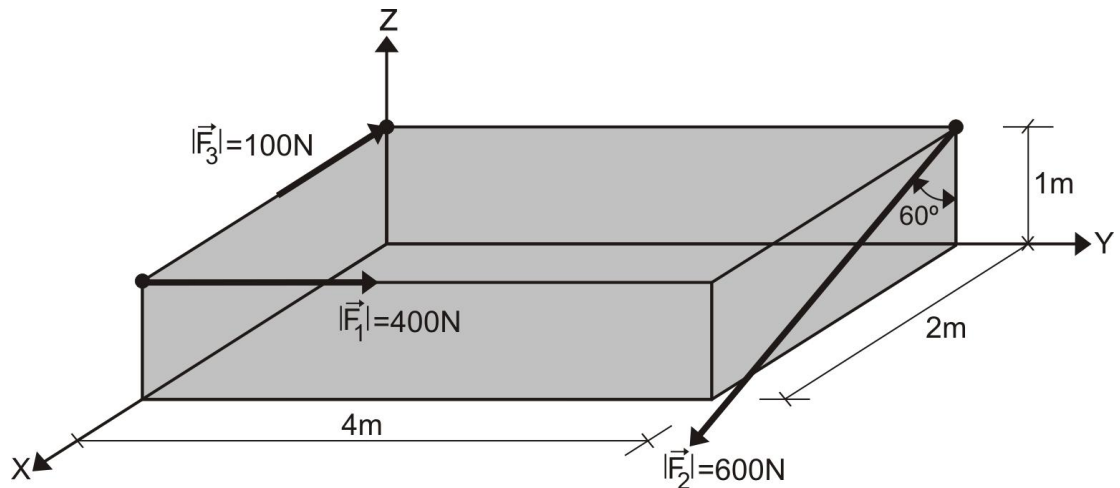


Fig. 1.37

Solución:

Proyectamos la fuerza \mathbf{F}_2 en los ejes OX y OZ (figura 1.38)

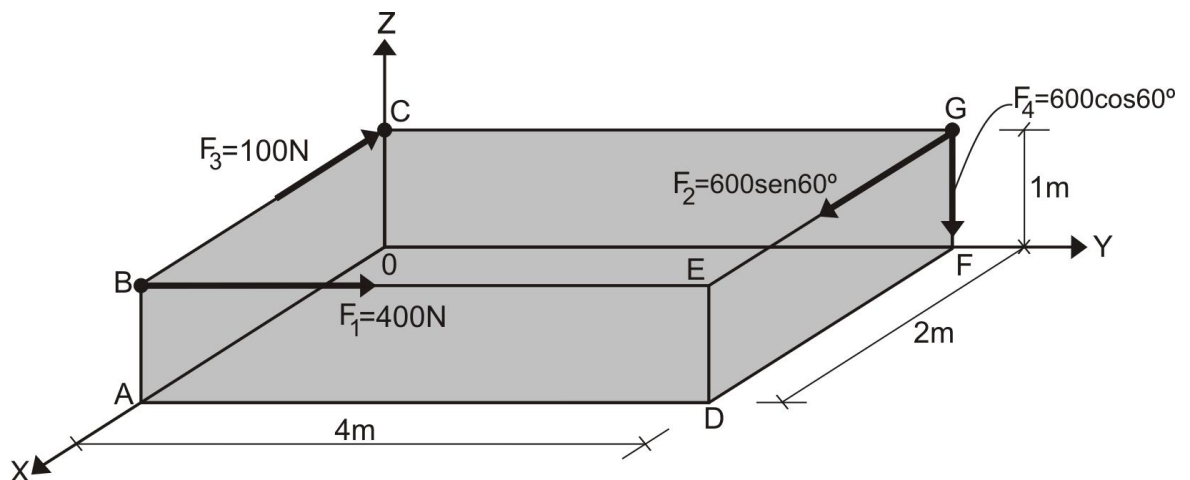


Fig. 1.38

Resolvemos el problema de las dos formas: escalar y vectorial

METODO ESCALAR:

Proyectamos las fuerzas en los planos YZ (momento respecto al eje OX), XZ (momento respecto al eje OY), XY (momento respecto al eje OZ)

EJE OX (PLANO YZ):

Calculamos el momento respecto al eje OX

$$M_x = -400 \cdot 1 - 600 \cos 60^\circ (4) = -1600 \text{ N.m}$$

Como el signo es negativo, el sentido del momento es horario, tal como se muestra en la figura 1.39

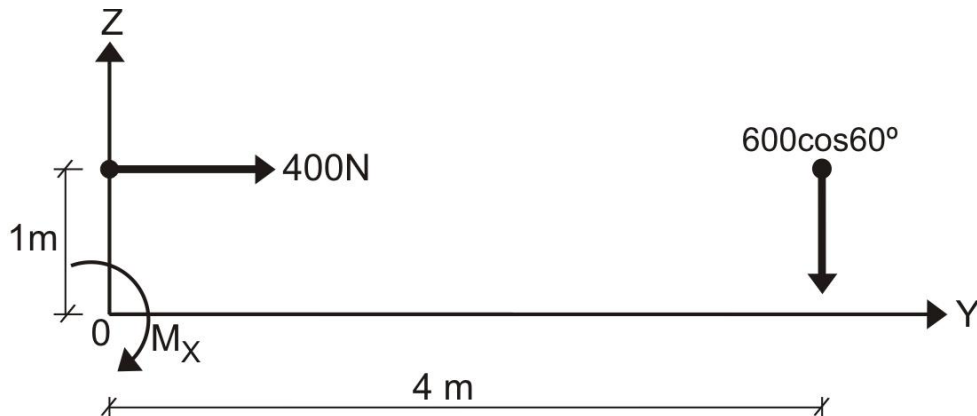


Fig. 1.39

EJE OY (PLANO XZ):

Efectuamos un proceso análogo al caso anterior.

$$M_y = 600 \sin 60^\circ (1) - 100 (1) = 419,61 \text{ N.m}$$

El sentido del momento es antihorario, por ser positivo su valor (figura 1.40)

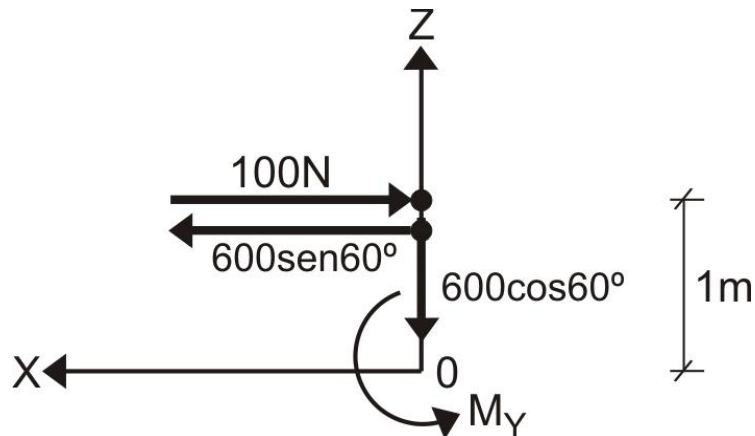


Fig. 1.40

EJE OZ (PLANO XY):

$$M_z = -600 \sin 60^\circ (4) + 400 (2) = -1278,46 \text{ N.m}$$

El sentido del momento es horario, por ser negativo su valor (figura 1.41)

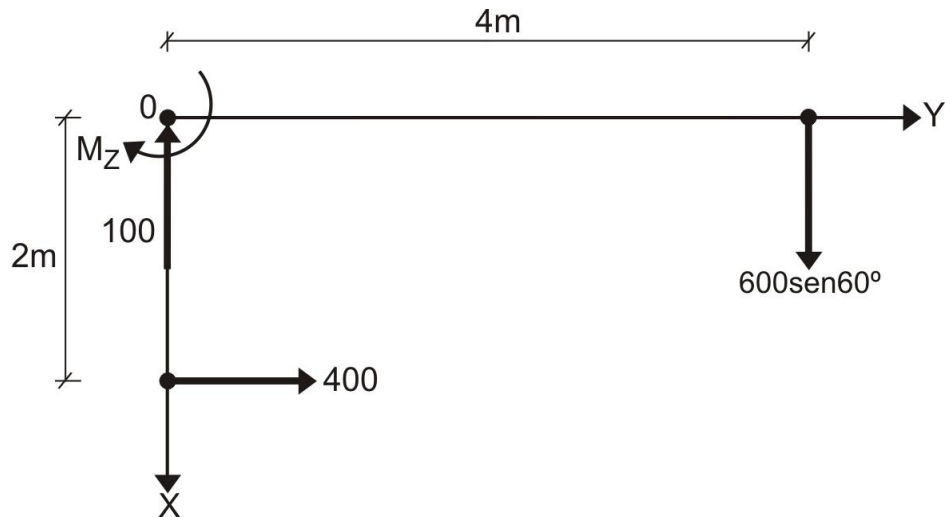


Fig. 1.41

METODO VECTORIAL:

EJE OX:

$$M_{OA}^{F_3} = r_{OC} \times F_3 \cdot \lambda_{OA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Donde:

$r_{OC} = k$ (radio-vector que se inicia en O e interseca la fuerza)

$$F_3 = -100i$$

$$\lambda_{OA} = \frac{2i}{\sqrt{2^2}} = i \quad (\text{vector unitario en la direcci3n del eje OX})$$

Como se podr3 apreciar, no era necesario calcular dicho momento, ya que se sabe por propiedades que el momento de una fuerza respecto a un eje paralelo a la acci3n de la misma es cero.

$$M_{OA}^{F_1} = r_{OB} \times F_1 \cdot \lambda_{OA} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 400 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -400$$

$$M_{OA}^{F_2} = r_{OG} \times F_2 \cdot \lambda_{OA} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 600 \sin 60^\circ & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Tampoco era necesario su c3lculo, debido a la misma propiedad que el de la fuerza F_3

$$M_{OA}^{F_4} = r_{OF} \times F_4 \cdot \lambda_{OA} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -600 \cos 60^\circ \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2400 \cos 60^\circ = -1200$$

Luego:

$$M_X = -400 - 1200 = -1600 \text{ N.m}$$

Como el signo es negativo, indica que su orientaci3n es en sentido horario.

EJE OY:

Por propiedad se sabe, que \mathbf{F}_1 no genera momento por ser paralelo al eje OY y \mathbf{F}_4 tampoco genera momento por intersectar el eje.

Calculamos los momentos que generan las fuerzas \mathbf{F}_3 y \mathbf{F}_2

$$M_{OF}^{F_3} = r_{OC} \times F_3 \cdot \lambda_{OF} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -100$$

Donde:

$$\lambda_{OF} = \frac{4\mathbf{j}}{\sqrt{4^2}} = \mathbf{j}$$

$$M_{OF}^{F_2} = r_{OG} \times F_2 \cdot \lambda_{OF} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 600\text{sen}60^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 600\text{sen}60^\circ$$

Luego:

$$M_Y = -100 + 600\text{sen}60^\circ = 419,61\text{N.m}$$

El sentido del momento es antihorario

EJE OZ:

La fuerza \mathbf{F}_3 intersecta el eje y no genera momento y la fuerza \mathbf{F}_4 tampoco genera momento por ser paralela al eje.

Calculamos los momentos que generan las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2

$$M_{OC}^{F_1} = r_{OB} \times F_1 \cdot \lambda_{OC} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 800$$

$$M_{OC}^{F_2} = r_{OG} \times F_2 \cdot \lambda_{OC} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 600\text{sen}60^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2400\text{sen}60^\circ$$

Luego:

$$M_Z = 800 - 2400\text{sen}60^\circ = -1278,46\text{N.m}$$

El sentido del momento es horario.

PROBLEMA 1.23 Para la figura mostrada, determinar la fuerza resultante y el momento resultante respecto a cada uno de los ejes coordenados, donde la fuerza de 2kN es paralela al plano XZ, la fuerza de 4kN es vertical y la fuerza de 7kN es paralela al plano YZ

Solución:

Descomponemos la fuerza de 7kN en los ejes OY y OZ, y calculamos las proyecciones de la resultante en los ejes OX, OY y OZ.

$$R_X = \sum F_X = -2$$

$$R_Y = \sum F_Y = 7\text{sen}60^\circ = 6,062$$

$$R_Z = -4 - 7\cos 60^\circ = -7,5$$

Luego, la fuerza resultante es:

$$R = -2i + 6,062j - 7,5k$$

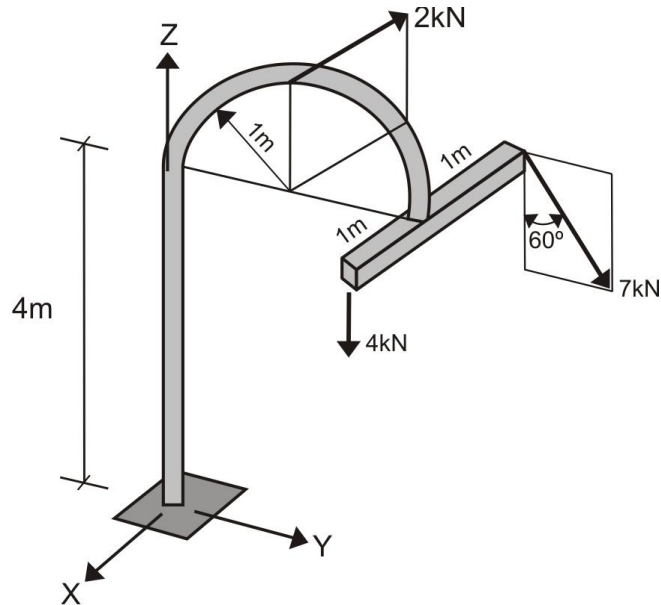


Fig. 1.42

Ahora, calculamos los momentos respecto a los ejes coordenados.

METODO ESCALAR:

EJE OX (PLANO YZ):

$$M_x = -4.(2) - 7\cos 60^\circ.(2) - 7\text{sen}60^\circ.(4) = -39,25\text{kN.m}$$

El signo negativo indica que su orientación es en sentido horario

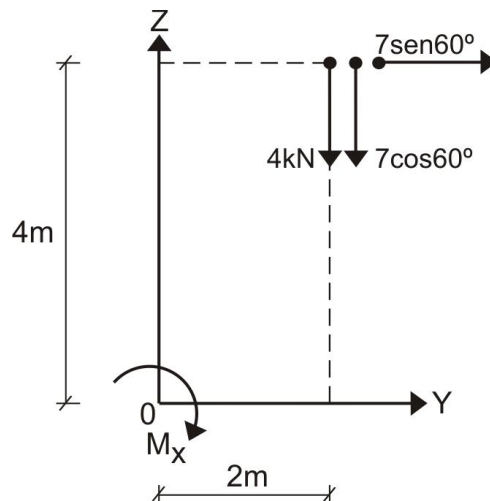


Fig. 1.43

EJE OY (PLANO XZ):

$$M_Y = -7\cos 60^\circ.(1) + 4.(1) - 2.(5) = -9,5\text{kN.m}$$

Una vez más el signo negativo indica que va en sentido horario.

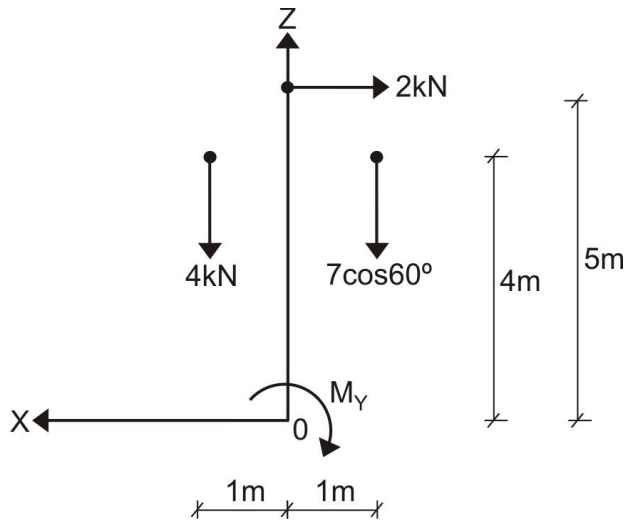


Fig. 1.44

EJE OZ (PLANO XY):

$$M_z = -7\text{sen}60^\circ \cdot (1) + 2 \cdot (1) = -4,06\text{kN}\cdot\text{m}$$

La orientación del momento es en sentido horario.

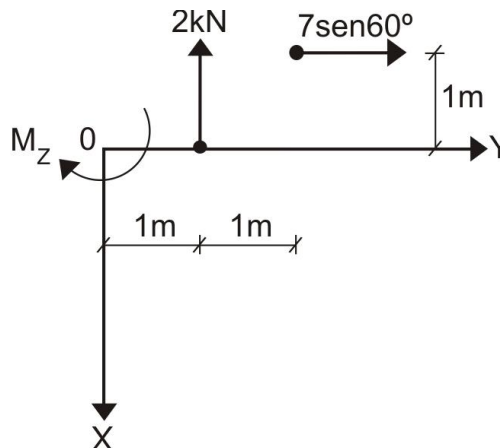


Fig. 1.45

METODO VECTORIAL:

Codificamos las fuerzas de la figura 1.42, de la siguiente manera:

$$F_1 = 2\text{kN} \text{ (punto D)}$$

$$F_2 = 4\text{kN} \text{ (punto E)}$$

$$F_3 = 7\text{kN} \text{ (punto G)}$$

Calculamos los momentos respecto a los ejes coordenados.

EJE OX:

$$M_{OX}^{F_1} = 0$$

$$M_{OX}^{F_2} = r_{OE} \times F_2 \cdot \lambda_{OX} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$r_{OE} = i + 2j + 4k$$

$$\lambda_{OX} = i$$

$$F_2 = -4k$$

$$M_{OX}^{F_3} = r_{OG} \times F_3 \cdot \lambda_{OX} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 7\sin 60^\circ & -7\cos 60^\circ \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -14\cos 60^\circ - 28\sin 60^\circ = -31,25$$

$$r_{OG} = -i + 2j + 4k$$

$$F_3 = 7\sin 60^\circ j - 7\cos 60^\circ k$$

Luego:

$$M_X = -8 - 31,25 = -39,25 \text{ kN.m}$$

La orientación del momento es en sentido horario.

EJE OY:

$$M_{OY}^{F_1} = r_{OD} \times F_1 \cdot \lambda_{OY} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$r_{OD} = j + 5k$$

$$\lambda_{OY} = j$$

$$F_1 = -2i$$

$$M_{OY}^{F_2} = r_{OE} \times F_2 \cdot \lambda_{OY} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{OY}^{F_3} = r_{OG} \times F_3 \cdot \lambda_{OY} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 7\sin 60^\circ & -7\cos 60^\circ \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7\cos 60^\circ = -3,5$$

Luego:

$$M_Y = -10 + 4 - 3,5 = -9,5 \text{ kN.m}$$

El momento va en sentido horario.

EJE OZ:

$$M_{OZ}^{F_1} = r_{OD} \times F_1 \cdot \lambda_{OZ} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\lambda_{OZ} = k$$

$$M_{OZ}^{F_3} = r_{OG} \times F_3 \cdot \lambda_{OZ} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 7\sin 60^\circ & -7\cos 60^\circ \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7\sin 60^\circ = -6,06$$

Luego:

$$M_z = 2 - 6,06 = -4,06 \text{ kN.m}$$

El momento va en sentido horario.

PROBLEMA 1.24 Se aplican a la pieza compuesta ABDE las cuatro fuerzas mostradas en la figura, donde la fuerza de 50N es vertical, la fuerza de 250N paralela al eje X, las fuerzas de 300N y 120N son paralelas al eje Y. Determinar la fuerza resultante y el momento resultante de todas las fuerzas respecto a los ejes coordenados.

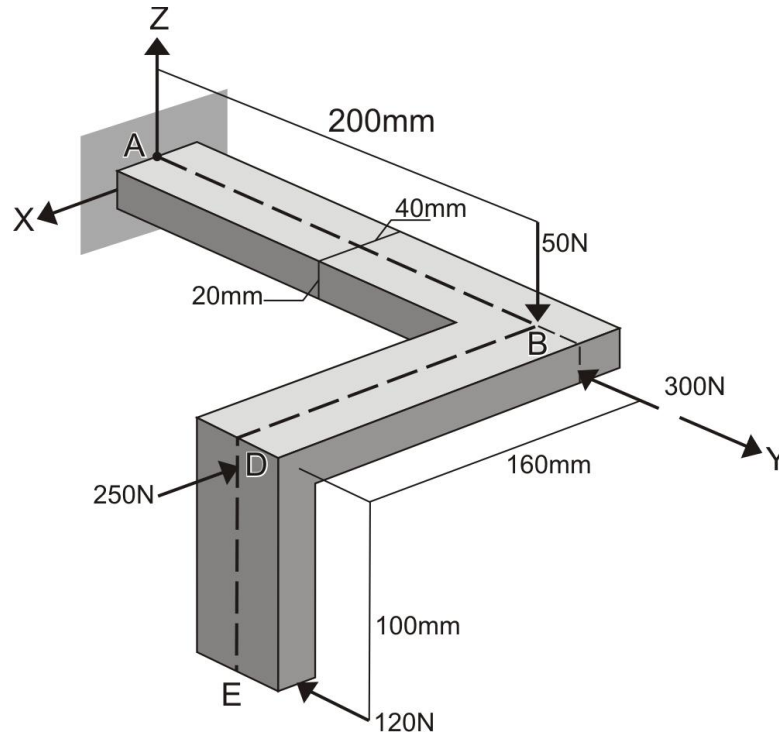


Fig. 1.46

Solución:

Proyectamos las fuerzas en cada eje, calculando su resultante parcial respecto a cada eje.

$$R_x = -250$$

$$R_y = -300 - 120 = -420$$

$$R_z = -50$$

Luego, la fuerza resultante es:

$$\mathbf{R} = -250\mathbf{i} - 420\mathbf{j} - 50\mathbf{k}$$

Ahora, analizamos los momentos respecto a los ejes coordenados:

METODO ESCALAR:

EJE OX (PLANO YZ):

$$M_x = -50 \cdot 200 - 120 \cdot 100 = -22000 \text{ N.mm} = -22 \text{ N.m}$$

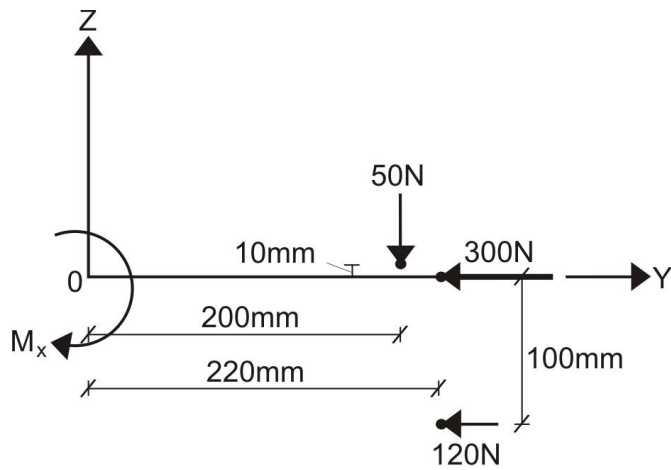


Fig. 1.47

EJE OY (PLANO XZ):

$$M_Y = 0$$

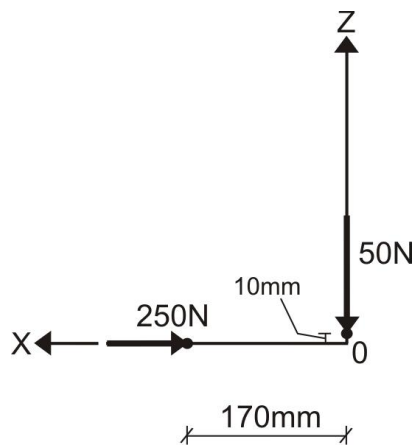


Fig. 1.48

EJE OZ (PLANO XY):

$$M_Z = -120 \cdot 160 + 250 \cdot 200 = 30800 \text{ N}\cdot\text{mm} = 30,8 \text{ N}\cdot\text{m}$$

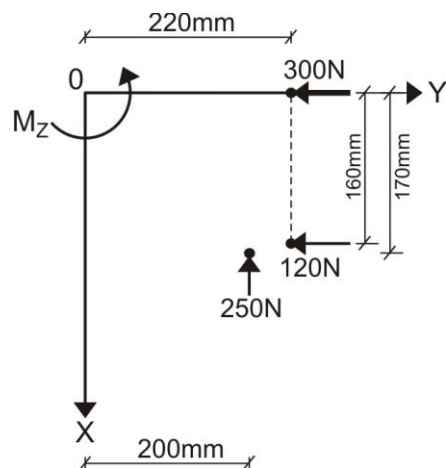


Fig. 1.49

METODO VECTORIAL:

Escribimos las fuerzas en forma vectorial, asumiendo que los módulos de las fuerzas son $F_1 = 50\text{N}$;

$F_2 = 300\text{N}$; $F_3 = 250\text{N}$ y $F_4 = 120\text{N}$

$$\vec{F}_1 = -50\mathbf{k}$$

$$\vec{F}_2 = -300\mathbf{j}$$

$$\vec{F}_3 = -250\mathbf{i}$$

$$\vec{F}_4 = -120\mathbf{j}$$

Luego:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -250\mathbf{i} - 420\mathbf{j} - 50\mathbf{k}$$

Ahora, determinamos los momentos respecto a los ejes coordenados:

EJE OX:

$$M_{OX}^{F_1} = r_{OF_1} \times F_1 \cdot \lambda_X = \begin{vmatrix} 0 & 200 & 10 \\ 0 & 0 & -50 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -50 \cdot 200 = -10000 \text{ N.mm}$$

$$M_{OX}^{F_2} = r_{OF_2} \times F_2 \cdot \lambda_X = \begin{vmatrix} 0 & 220 & 0 \\ 0 & -300 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{OX}^{F_3} = r_{OF_3} \times F_3 \cdot \lambda_X = \begin{vmatrix} 170 & 200 & 0 \\ -250 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{OX}^{F_4} = r_{OF_4} \times F_4 \cdot \lambda_X = \begin{vmatrix} 160 & 220 & -100 \\ 0 & -120 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-120) \cdot (-100) = -12000 \text{ N.mm}$$

Luego:

$$M_X = M_{OX}^{F_1} + M_{OX}^{F_2} + M_{OX}^{F_3} + M_{OX}^{F_4} = -10000 - 12000 = -22000 \text{ N.mm} = -22 \text{ N.m}$$

EJE OY:

$$M_{OY}^{F_1} = r_{OF_1} \times F_1 \cdot \lambda_Y = \begin{vmatrix} 0 & 200 & 10 \\ 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{OY}^{F_2} = r_{OF_2} \times F_2 \cdot \lambda_Y = \begin{vmatrix} 0 & 220 & 0 \\ 0 & -300 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{OY}^{F_3} = r_{OF_3} \times F_3 \cdot \lambda_Y = \begin{vmatrix} 170 & 200 & 0 \\ -250 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{OY}^{F_4} = r_{OF_4} \times F_4 \cdot \lambda_Y = \begin{vmatrix} 160 & 220 & -100 \\ 0 & -120 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Luego:

$$M_Y = M_{OY}^{F_1} + M_{OY}^{F_2} + M_{OY}^{F_3} + M_{OY}^{F_4} = 0$$

EJE OZ:

$$M_{OZ}^{F_1} = r_{OF_1} \times F_1 \cdot \lambda_Z = \begin{vmatrix} 0 & 200 & 10 \\ 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{OZ}^{F_2} = r_{OF_2} \times F_2 \cdot \lambda_Z = \begin{vmatrix} 0 & 220 & 0 \\ 0 & -300 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{OZ}^{F_3} = r_{OF_3} \times F_3 \cdot \lambda_Z = \begin{vmatrix} 170 & 200 & 0 \\ -250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-250) \cdot (200) = 50000 \text{ N.mm}$$

$$M_{OZ}^{F_4} = r_{OF_4} \times F_4 \cdot \lambda_Z = \begin{vmatrix} 160 & 220 & -100 \\ 0 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 160 \cdot (-120) \cdot 1 = -19200 \text{ N.mm}$$

Luego:

$$M_Z = M_{OZ}^{F_1} + M_{OZ}^{F_2} + M_{OZ}^{F_3} + M_{OZ}^{F_4} = 50000 - 19200 = 30800 \text{ N.mm} = 30,8 \text{ N.m}$$

PROBLEMA 1.25 Una fuerza única P actúa sobre el punto C en dirección perpendicular al mango BC , el cual es paralelo al eje X . Determinar el valor del ángulo α y el momento M_X de la fuerza P con respecto al eje X , cuando $\theta = 70^\circ$, sabiendo que $M_Y = -20 \text{ N.m}$ y $M_Z = -37,5 \text{ N.m}$

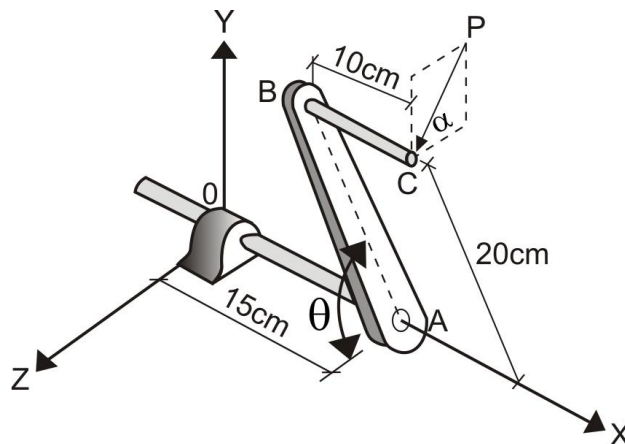


Fig. 1.50

Solución:

Resolvemos el problema por ambos métodos.

METODO ESCALAR:

EJE OX (PLANO YZ):

$$M_x = 0,2\text{sen}70^\circ \cdot (P \cos \alpha) + 0,2 \cos 70^\circ \cdot (P \text{sen} \alpha)$$

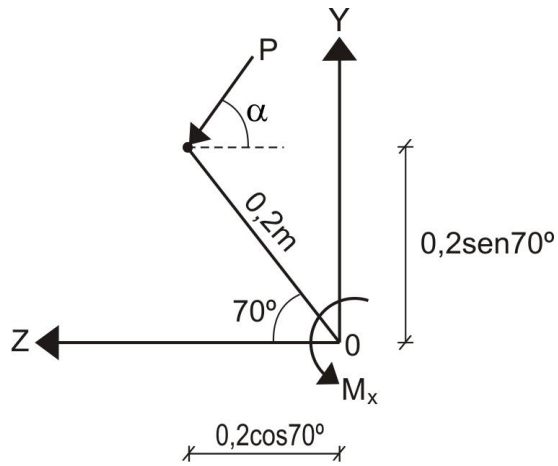


Fig. 1.51

EJE OY (PLANO XZ):

$$M_y = -P \cos \alpha \cdot (0,25) = -0,25P \cos \alpha$$

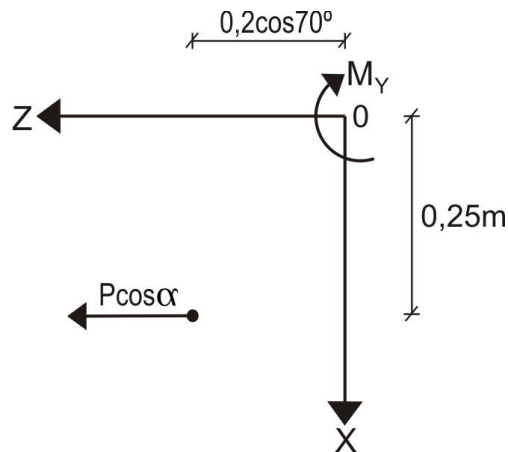


Fig. 1.52

EJE OZ (PLANO XY):

$$M_z = -0,25P \text{sen} \alpha$$

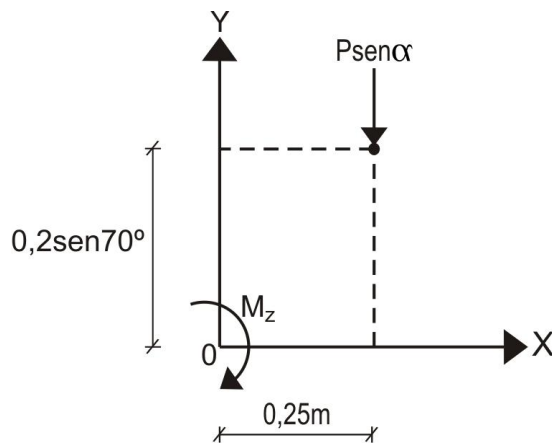


Fig. 1.53

Por datos del problema:

$$-0,25P \cos \alpha = -20 \quad (a)$$

$$-0,25P \sin \alpha = -37,5 \quad (b)$$

Dividimos (b) entre (a) y obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,875$$

Luego:

$$\alpha = \arctg(1,875) = 61,93^\circ$$

Reemplazamos el valor obtenido en la ecuación (a):

$$P = \frac{20}{0,25 \cos 61,93^\circ} = 170 \text{ N}$$

Ahora, determinamos el momento respecto al eje "X"

$$M_x = 0,2 \sin 70^\circ \cdot (170) \cdot \cos 61,93^\circ + 0,2 \cos 70^\circ \cdot (170) \cdot \sin 61,93^\circ = 25,29 \text{ N.m}$$

El sentido del momento es antihorario.

METODO VECTORIAL:

Trazamos un vector \vec{r}_{OC} , siendo:

$$\vec{r}_{OC} = 0,25\vec{i} + 0,2 \sin 70^\circ \vec{j} + 0,2 \cos 70^\circ \vec{k}$$

$$\vec{P} = (-P \sin \alpha) \vec{j} + (P \cos \alpha) \vec{k}$$

Luego:

$$M_O = \vec{r}_{OC} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,25 & 0,2 \sin 70^\circ & 0,2 \cos 70^\circ \\ 0 & -P \sin \alpha & P \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$M_O = \vec{i} \begin{vmatrix} 0,2 \sin 70^\circ & 0,2 \cos 70^\circ \\ -P \sin \alpha & P \cos \alpha \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0,25 & 0,2 \cos 70^\circ \\ 0 & P \cos \alpha \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0,25 & 0,2 \sin 70^\circ \\ 0 & -P \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$M_O = (0,2 \sin 70^\circ P \cos \alpha + 0,2 \cos 70^\circ P \sin \alpha) \vec{i} + (-0,25 P \cos \alpha) \vec{j} + (-0,25 P \sin \alpha) \vec{k}$$

Siendo:

$$M_x = 0,2 \sin 70^\circ P \cos \alpha + 0,2 \cos 70^\circ P \sin \alpha$$

$$M_y = -0,25 P \cos \alpha$$

$$M_z = -0,25 P \sin \alpha$$

Por datos del problema:

$$-0,25P \cos \alpha = -20 \quad (a)$$

$$-0,25P \sin \alpha = -37,5 \quad (b)$$

Dividimos (b) entre (a) y obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,875$$

Luego:

$$\alpha = \arctg(1,875) = 61,93^\circ$$

Reemplazamos el valor obtenido en la ecuación (a):

$$P = \frac{20}{0,25 \cos 61,93^\circ} = 170\text{N}$$

Ahora, determinamos el momento respecto al eje "X"

$$M_x = 0,2 \sin 70^\circ \cdot (170) \cdot \cos 61,93^\circ + 0,2 \cos 70^\circ \cdot (170) \cdot \sin 61,93^\circ = 25,29\text{N.m}$$

Como se podrá apreciar se obtienen los mismos resultados por ambos métodos.

1.5 CUPLA O PAR DE FUERZAS

PROBLEMA 1.26 ¿Será correcto afirmar que los dos sistemas mostrados son equivalentes?

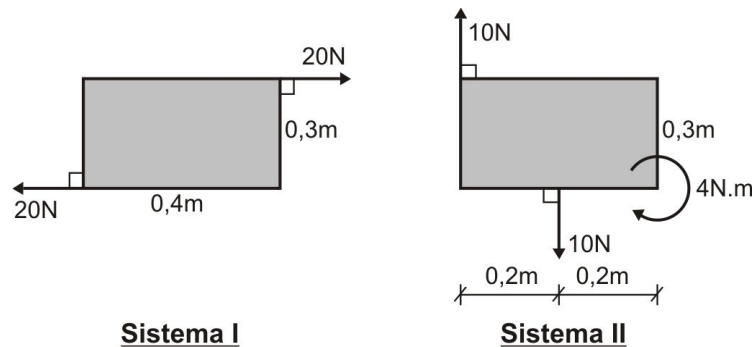


Fig. 1.54

Solución:

Calculamos los momentos que generan ambos sistemas, ya que se trata de cuplas o pares de fuerzas, cuyas proyecciones como fuerzas en los ejes X e Y son ceros.

SISTEMA I:

$$M_I = -20 \cdot 0,3 = -6\text{N.m}$$

SISTEMA II:

$$M_{II} = -10 \cdot 0,2 - 4 = -6\text{N.m}$$

Efectivamente, ambos sistemas son equivalentes, ya que generan el mismo momento. Hay que aclarar, que sistema equivalente no es lo mismo que igual, ya que generan diferentes efectos.

PROBLEMA 1.27 Los trabajadores del sector petrolero pueden ejercer entre 220N y 550N con cada mano sobre el volante de una válvula (una mano en cada lado). Si para cerrar la válvula se requiere un par de momento de 140N.m, determinar el intervalo del diámetro "d" que debe tener el volante.



Fig. 1.55

Solución:

Analizamos cada caso, es decir:

FUERZA 220N:

Se sabe:

$$Fd = M$$

Reemplazamos valores:

$$220d = 140$$

Obtenemos:

$$d = 0,636\text{m}$$

FUERZA 550N:

Analizamos en forma análoga al caso anterior:

$$550d = 140$$

$$d = 0,254\text{m}$$

Luego, el intervalo en el cual puede variar el diámetro del volante es:

$$0,254\text{m} \leq d \leq 0,636\text{m}$$

PROBLEMA 1.28 La placa delgada en forma de paralelogramo mostrado en la figura, se somete a la acción de dos pares de fuerzas (cuplas), determinar:

- El momento formado por las dos fuerzas de 210N, indicando su sentido.
- La distancia perpendicular entre las fuerzas de 120N, si el par resultante de los dos pares es nulo.

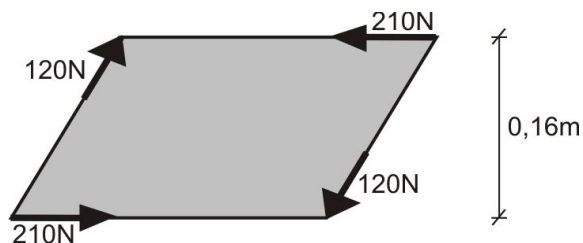


Fig. 1.56

Solución:

- El momento del par formado por las dos fuerzas de 210N es:

$$M_{210} = 210 \cdot 0,16 = 33,6\text{N.m}$$

La orientación del momento es sentido antihorario.

- Por dato del problema:

$$M_{120} + M_{210} = 0$$

$$-120d + 33,6 = 0$$

$$d = 0,28\text{m}$$

Siendo "d" la distancia perpendicular entre las fuerzas de 120N

PROBLEMA 1.29 Si el sistema mostrado es equivalente a un par $M = 16\text{T.m}$, determinar el valor de α tal que F sea mínimo y luego estimar el valor de F mínimo.

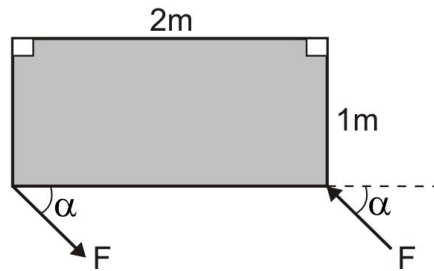


Fig. 1.57

Solución:

En la figura 1.58 se muestra la distancia "d" que separa ambas fuerzas F

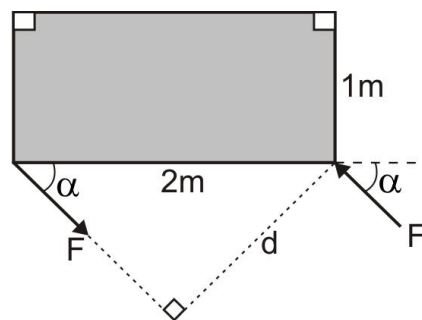


Fig. 1.58

Se sabe que:

$$M = F.d$$

Reemplazamos valores:

$$16 = F.(2\text{sen}\alpha)$$

$$F = \frac{8}{\text{sen}\alpha}$$

El valor de F será mínimo, cuando el denominador, es decir $\text{sen}\alpha$, sea máximo, esto es:

$$F_{\text{mín}} \rightarrow \text{sen}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Luego:

$$F_{\text{mín}} = 8\text{T}$$

1.6 TRASLACION DE FUERZAS. PAR DE TRANSPORTE

PROBLEMA 1.30 Trasladar todas las fuerzas mostradas al punto B y expresarlas como una sola fuerza más un momento. En su respuesta debe incluir la dirección de la fuerza.

Solución:

Como se sabe, el resultado de trasladar una fuerza hacia otro punto, generará un momento más la acción de la fuerza en dicho sentido, por ello, el equivalente de un sistema de fuerzas, será la suma de las proyecciones de las fuerzas en los ejes vertical y horizontal más el momento resultante de todas ellas.

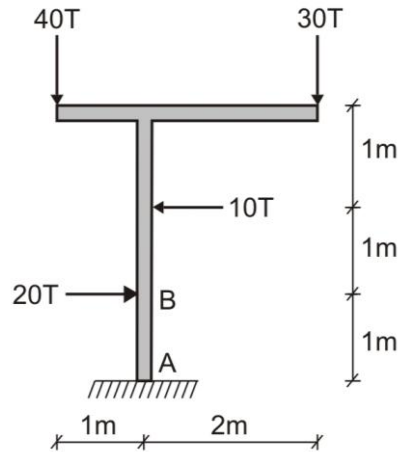


Fig. 1.59

En base a lo indicado anteriormente, calculamos las proyecciones de las fuerzas en el punto B y determinamos la resultante de las mismas.

$$F_{RV}^B = 30 + 40 = 70T \downarrow$$

$$F_{RH}^B = 20 - 10 = 10T \rightarrow$$

$$F_R^B = \sqrt{(F_{RV}^B)^2 + (F_{RH}^B)^2} = \sqrt{70^2 + 10^2} = 70,71T$$

Determinamos el ángulo α que forma la fuerza resultante F_R^B con el eje horizontal

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{RV}^B}{F_{RH}^B} = \frac{70}{10} = 7 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctg(7) = 81,87^\circ$$

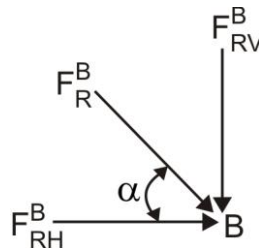


Fig. 1.60

Ahora, calculamos el momento resultante:

$$M_B = -30 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 40 \cdot 1 = -10T.m$$

Esquematizamos los resultados obtenidos en la figura 1.61

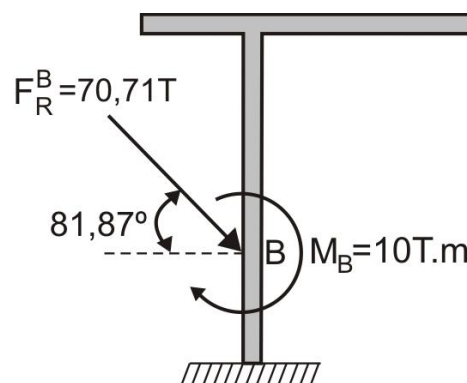


Fig. 1.61

PROBLEMA 1.31 Trasladar todas las fuerzas mostradas al punto B y expresarlas como una sola fuerza más un momento. En su respuesta debe incluir la dirección de la fuerza.

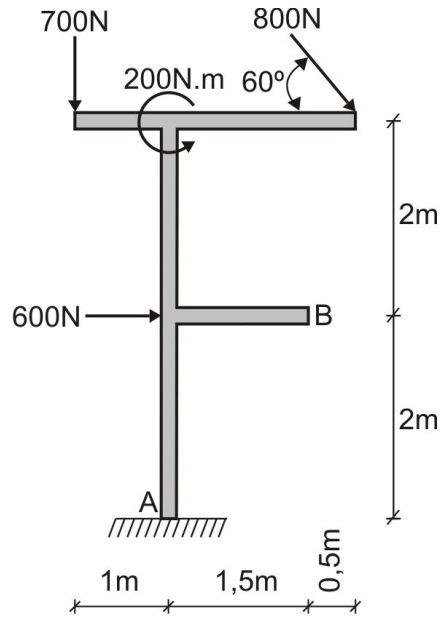


Fig. 1.62

Solución:

Calculamos las proyecciones de las fuerzas en el punto B y determinamos la resultante de las mismas.

$$F_{RV}^B = 700 + 800\sin 60^\circ = 1392,82\text{N} \downarrow$$

$$F_{RH}^B = 600 + 800\cos 60^\circ = 1000\text{N} \rightarrow$$

$$F_R^B = \sqrt{(F_{RV}^B)^2 + (F_{RH}^B)^2} = \sqrt{1392,82^2 + 1000^2} = 1714,63\text{N}$$

Determinamos el ángulo α que forma la fuerza resultante F_R^B con el eje horizontal.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{RV}^B}{F_{RH}^B} = \frac{1392,82}{1000} = 1,3928 \Rightarrow \alpha = \arctg(1,3928) = 54,32^\circ$$

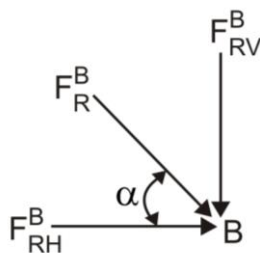


Fig. 1.63

Ahora, calculamos el momento resultante:

$$M_B = -800\sin 60^\circ \cdot (0,5) - 800\cos 60^\circ \cdot (2) + 700 \cdot (2,5) + 200 = 803,59\text{N.m}$$

Esquematisamos los resultados obtenidos en la figura 1.64

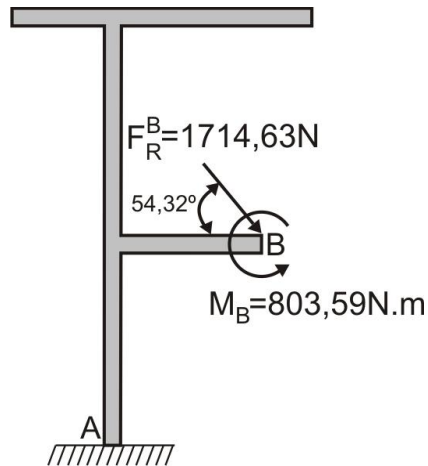


Fig. 1.64

1.7 REDUCCION DE FUERZAS PARALELAS

PROBLEMA 1.32 En la figura 1.65 se muestra una platea de cimentación, donde actúan las cuatro columnas, sabiendo que la fuerza resultante actúa en el punto (3; 3,5) m del plano XY. Determinar los módulos de las fuerzas P y Q

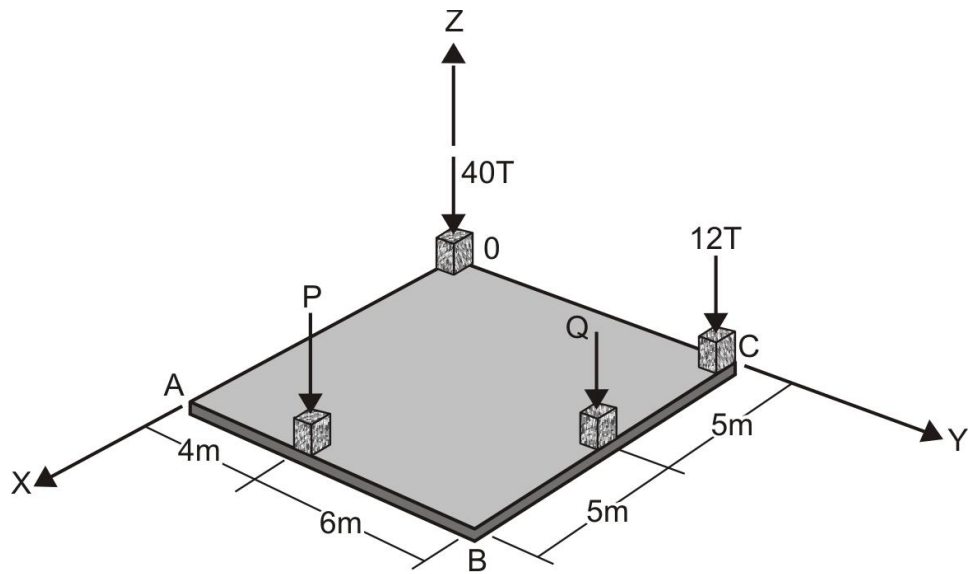


Fig. 1.65

Solución:

Calculamos el valor de la resultante:

$$R = P + Q + 40 + 12 = (P + Q + 52) \downarrow$$

Aplicamos el Teorema de Varignon para fuerzas paralelas, sabiendo que por condición del problema, la ubicación de la fuerza resultante es la mostrada en la figura 1.66

$$\begin{aligned}
 1) \quad M_X^R &= \sum_{i=1}^4 M_X^{F_i} \\
 -(P + Q + 52) \cdot (3,5) &= -P \cdot (4) - Q \cdot (10) - 12 \cdot (10) \\
 0,5P + 6,5Q &= 62 \quad (a)
 \end{aligned}$$

2)

$$M_Y^R = \sum_{i=1}^4 M_Y^{F_i}$$

$$(P + Q + 52) \cdot (3) = P \cdot (10) + Q \cdot (5)$$

$$7P + 2Q = 156$$

(b)

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$P = 20T$$

$$Q = 8T$$

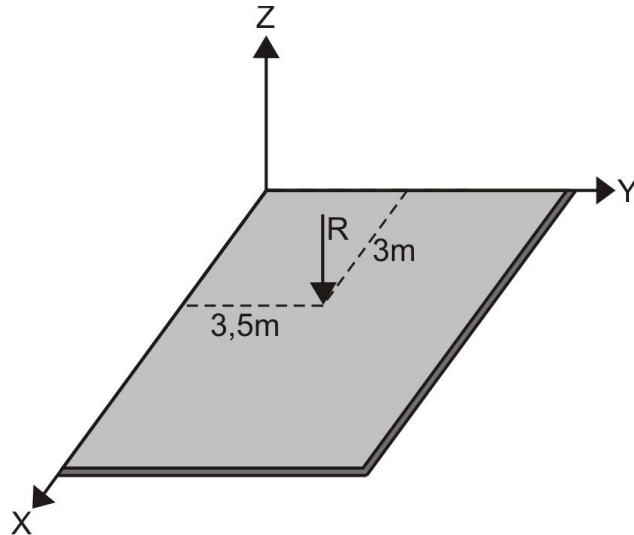


Fig. 1.66

PROBLEMA 1.33 La figura muestra una platea de cimentación, donde se encuentran apoyadas las columnas con las fuerzas indicadas. Determinar los módulos de P y Q, de tal manera que el centro de presión pase por (2,4; 0,8) m.

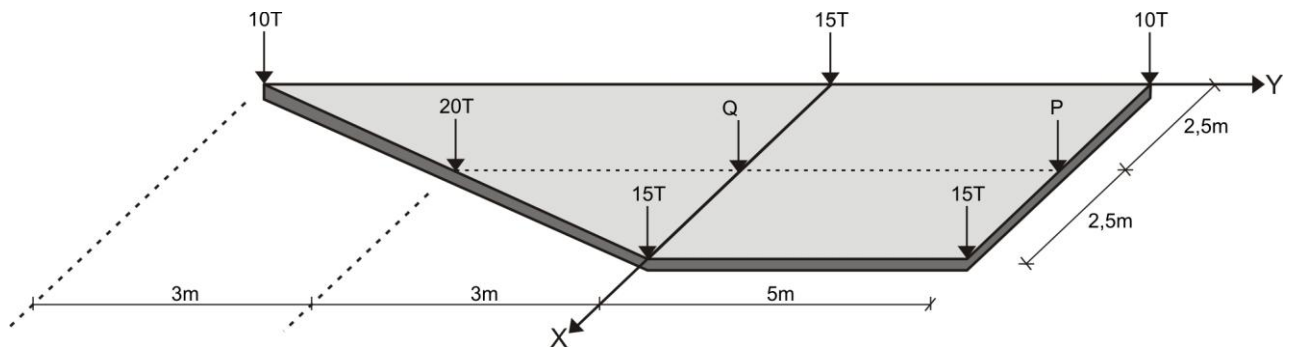


Fig. 1.67

Solución:

Calculamos el valor de la resultante:

$$R = \sum_{i=1}^8 F_i = 15 \cdot (3) + 20 + 2 \cdot (10) + P + Q = (85 + P + Q) \downarrow$$

Aplicamos el Teorema de Varignon, sabiendo que el centro de presión es el lugar donde se ubica la resultante.

$$1) \quad M_X^R = \sum_{i=1}^8 M_X^{F_i}$$

$$-(85 + P + Q) \cdot 0,8 = -(10 + P + 15) \cdot 5 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 6$$

$$4,2P - 0,8Q = 63 \quad (a)$$

$$2) \quad M_Y^R = \sum_{i=1}^8 M_Y^{F_i}$$

$$(85 + P + Q) \cdot 2,4 = (20 + P + Q) \cdot 2,5 + 30 \cdot 5$$

$$P + Q = 40 \quad (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$P = 19T$$

$$Q = 21T$$

PROBLEMA 1.34 La figura muestra una platea de cimentación que tiene la forma de un hexágono regular ABCDEF (en planta) de 6m de lado, sobre la cual se encuentran 6 columnas. Determinar los valores de P y Q, de modo que la fuerza resultante pase por el centro O de la platea.

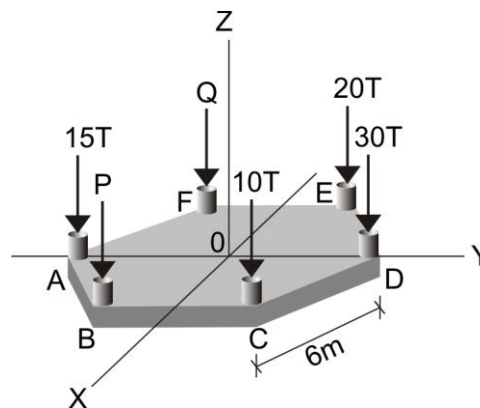


Fig. 1.68

Solución:

Un hexágono regular es aquel que tiene todos sus ángulos internos iguales y son de 120° . También se puede definir, como una figura formada por 6 triángulos equiláteros (figura 1.69)

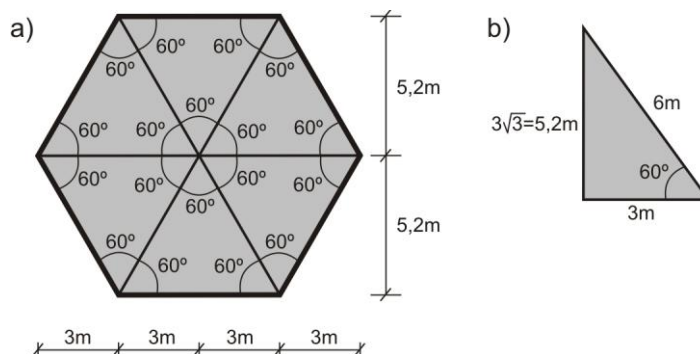


Fig. 1.69

Aplicamos el Teorema de Varignon:

$$1) \quad M_X^R = \sum_{i=1}^6 M_X^{F_i}$$

$$0 = -20.3 - 10.3 - 30.6 + 15.6 + P.(3) + Q.(3)$$

$$P + Q = 60 \quad (a)$$

$$2) \quad M_Y^R = \sum_{i=1}^6 M_Y^{F_i}$$

$$0 = P.(5,2) + 10.5,2 - 20.5,2 - Q.(5,2)$$

$$P - Q = 10 \quad (b)$$

Resolvemos (a) y (b), obteniendo:

$$P = 35T$$

$$Q = 25T$$

1.8 FUERZAS DISTRIBUIDAS

PROBLEMA 1.35 Determinar la resultante de la carga distribuida que actúa sobre la barra ABC e indicar su dirección, sentido y ubicación.

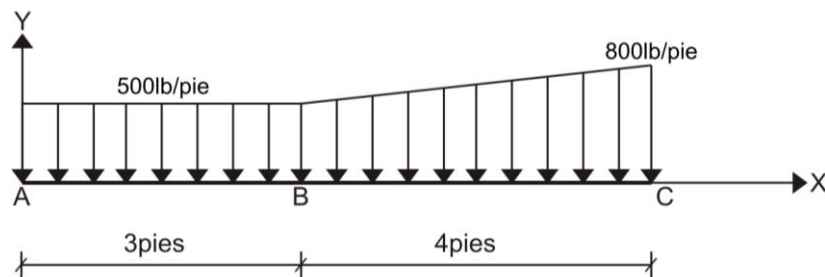


Fig. 1.70

Solución:

Calculamos las resultantes de cada acción de la carga distribuida sobre una línea, sabiendo que dicho valor es igual al área de la figura. Para ello, dividimos en 3 figuras geométricas: 2 rectángulos y 1 triángulo.

RECTANGULO EN EL TRAMO AB:

$$R_1 = 500.3 = 1500\text{lb} \downarrow$$

Está ubicada en el centro del tramo AB (centro de gravedad del rectángulo formado por la carga distribuida de 500lb/pie con el tramo AB)

RECTANGULO EN EL TRAMO BC:

$$R_2 = 500.4 = 2000\text{lb} \downarrow$$

Está ubicada en el centro del tramo BC (centro de gravedad del rectángulo formado por la carga distribuida de 500lb/pie con el tramo BC)

TRIANGULO EN EL TRAMO BC:

$$R_3 = \frac{1}{2}.300.4 = 600\text{lb} \downarrow$$

Está ubicada a una distancia de $2/3$ de la longitud del tramo BC respecto al punto B (centro de gravedad del triángulo formado por la diferencia de 800lb/pie y 500lb/pie con el tramo BC), es decir, a una distancia $2,67\text{pie}$ respecto al punto B o a una distancia $1,33\text{pie}$ respecto al punto C.

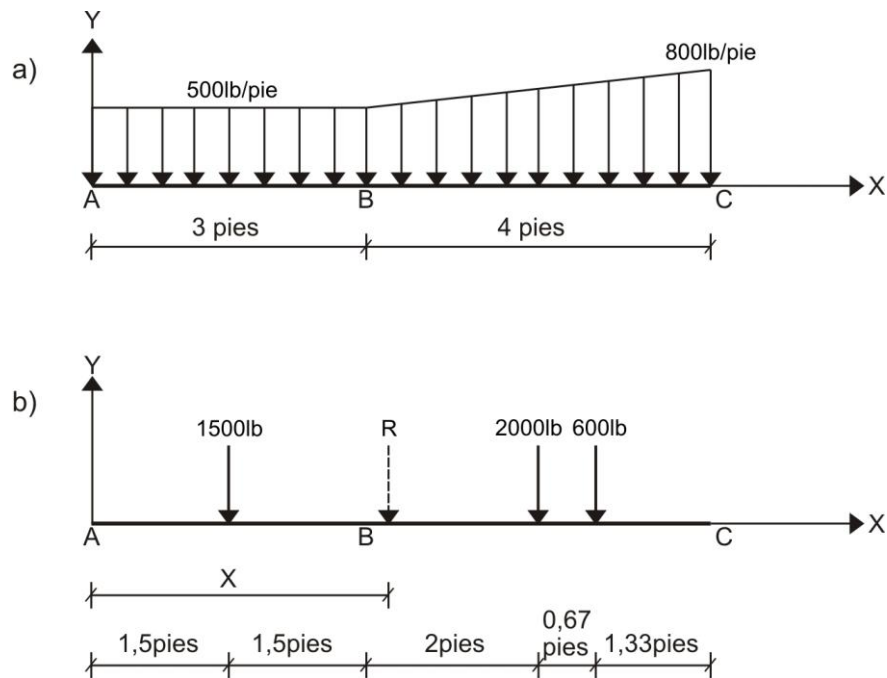


Fig. 1.71

Calculamos la resultante del sistema de fuerzas distribuidas:

$$R = \sum_{i=1}^3 F_Y = 1500 + 2000 + 600 = 4100\text{lb} \downarrow$$

Para determinar la ubicación de la resultante, aplicamos el Teorema de Varignon:

$$M_Z^R = \sum_{i=1}^3 M_Z^{F_i}$$

$$-Rx = -1500.(1,5) - 2000.(5) - 600.(5,67)$$

$$-4100x = -15652$$

$$x = 3,82\text{pie}$$

PROBLEMA 1.36 La resultante de las dos cargas distribuidas triangulares es un par antihorario de 60kN.m . Determinar la intensidad de la carga w_0

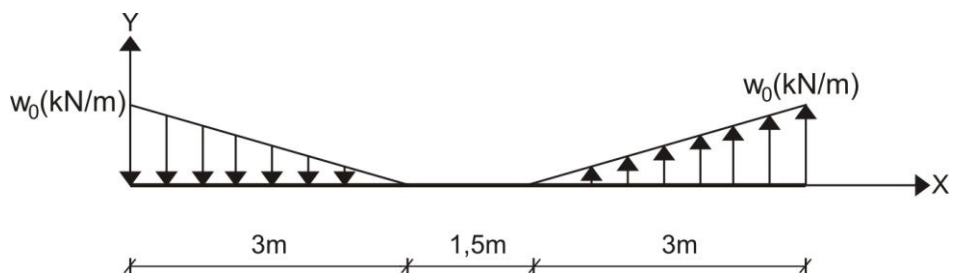


Fig. 1.72

Solución:

Determinamos las resultantes y orientamos sus direcciones de acuerdo a lo mostrado en la figura 1.73

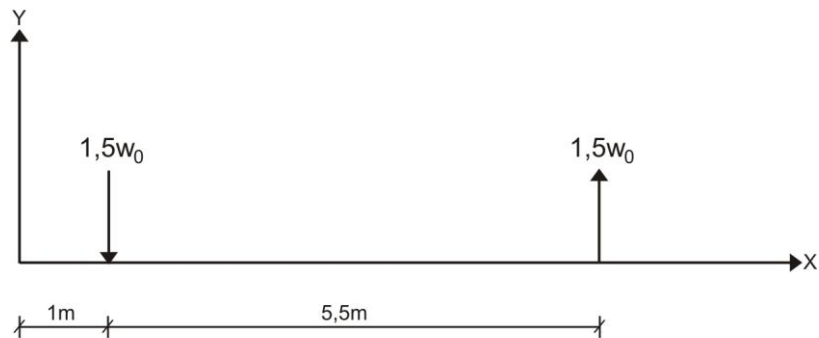


Fig. 1.73

Calculamos el valor de w_0 , aplicando el concepto de cupla o par de fuerzas

$$1,5w_0 \cdot (5,5) = 60$$

$$w_0 = 7,27 \text{ kN/m}$$

PROBLEMA 1.37 Para la platea de cimentación mostrada en la figura, determine la resultante del sistema de fuerzas, así como su ubicación y sentido, si todas las cargas distribuidas son lineales.

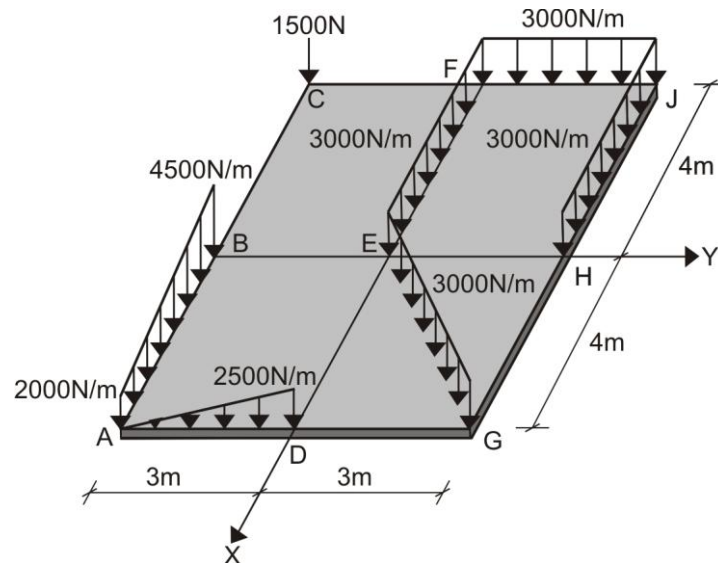


Fig. 1.74

Solución:

Calculamos la ubicación y valor de las resultantes parciales de cada tramo.

TRAMO FJ:

$$R_1 = 3000 \cdot 3 = 9000 \text{ N}$$

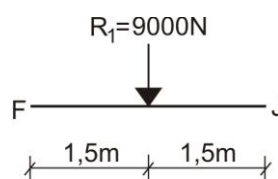


Fig. 1.75

TRAMO EF, HJ:

$$R_2 = 3000 \cdot 4 = 12000\text{N}$$

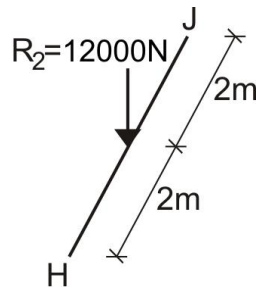


Fig. 1.76

TRAMO EG:

$$R_3 = 3000 \cdot 5 = 15000\text{N}$$

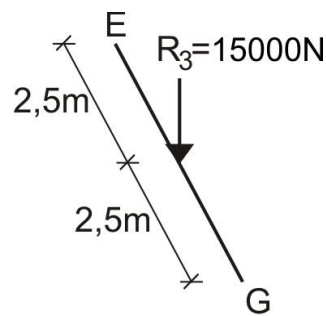


Fig. 1.77

TRAMO AD:

$$R_4 = \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (2500) = 3750\text{N}$$

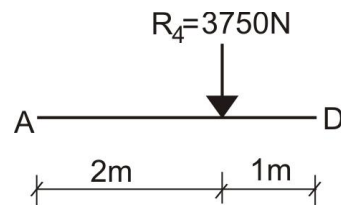


Fig. 1.78

TRAMO AB:

$$R_5 = 2000 \cdot 4 = 8000\text{N}$$

$$R_6 = \frac{1}{2} \cdot (4) \cdot (2500) = 5000\text{N}$$

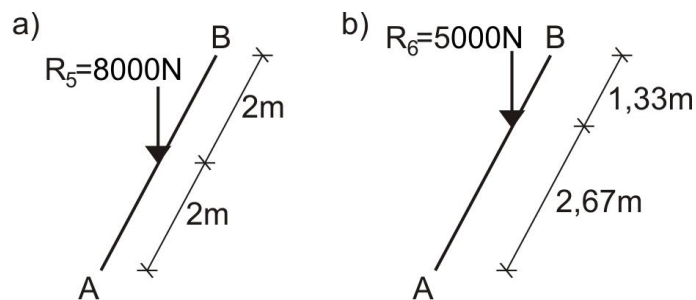


Fig. 1.79

Calculamos el valor de la resultante:

$$R = \sum_{i=1}^8 R_i = 1500 + 9000 + 12000 \cdot 2 + 5000 + 8000 + 15000 + 3750 = 66250 \text{ N} \downarrow$$

Aplicamos las cargas a la platea de cimentación, tal como se muestra en la figura 1.80

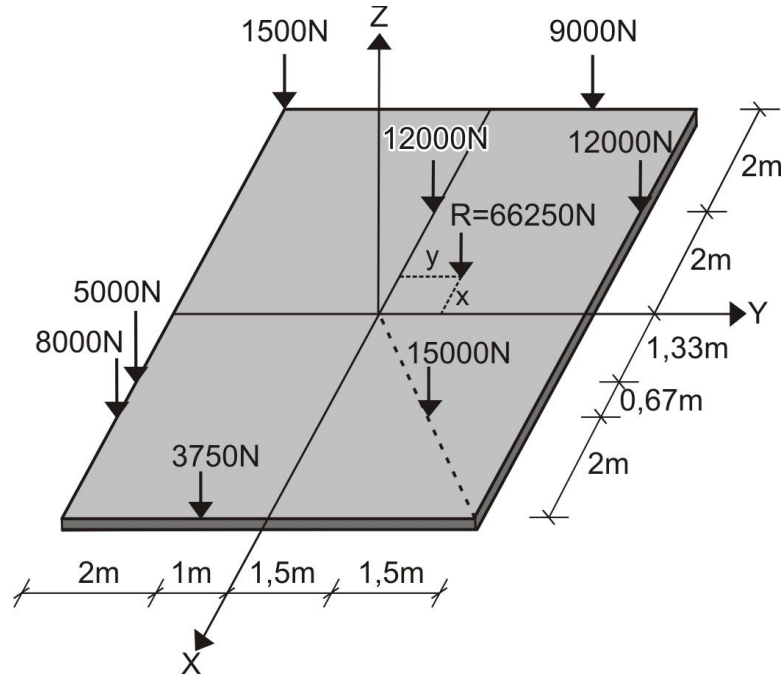


Fig. 1.80

Para determinar la ubicación de la resultante, utilizamos el Teorema de Varignon.

$$1) \quad M_X^R = \sum_{i=1}^8 M_X^{F_i}$$

$$-66250y = -9000 \cdot 1,5 - 15000 \cdot 1,5 - 12000 \cdot 3 + 3750 \cdot 1 + 1500 \cdot 3 + 5000 \cdot 3 + 8000 \cdot 3$$

$$y = 0,373 \text{ m}$$

$$2) \quad M_Y^R = \sum_{i=1}^8 M_Y^{F_i}$$

$$-66250x = -12000 \cdot 2 - 12000 \cdot 2 - 1500 \cdot 4 - 9000 \cdot 4 + 5000 \cdot 1,33 + 8000 \cdot 2 + 15000 \cdot 2 + 3750 \cdot 4$$

$$x = 0,337 \text{ m}$$

Esto quiere decir, que la ubicación de la resultante es la misma que la mostrada en la figura 1.80

PROBLEMA 1.38 Sabiendo que la abscisa de las coordenadas del centro de presión del conjunto de cargas distribuidas es 1,073m. Determinar el valor de "a"

Solución:

Determinamos las resultantes de la acción de cada carga distribuida sobre superficie:

CARGA TRIANGULAR:

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot (3000) \cdot (a) \cdot (1,5) = 2250a$$

CARGA RECTANGULAR:

$$P_2 = 3000 \cdot (1,5) \cdot (2) = 9000$$

CARGA SEMICIRCULAR:

$$P_3 = 3000 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (1)^2 = 4712,39$$

Calculamos el valor de la resultante:

$$R = \sum_{i=1}^3 P_i = 2250a + 9000 + 4712,39 = (2250a + 13712,39) \downarrow$$

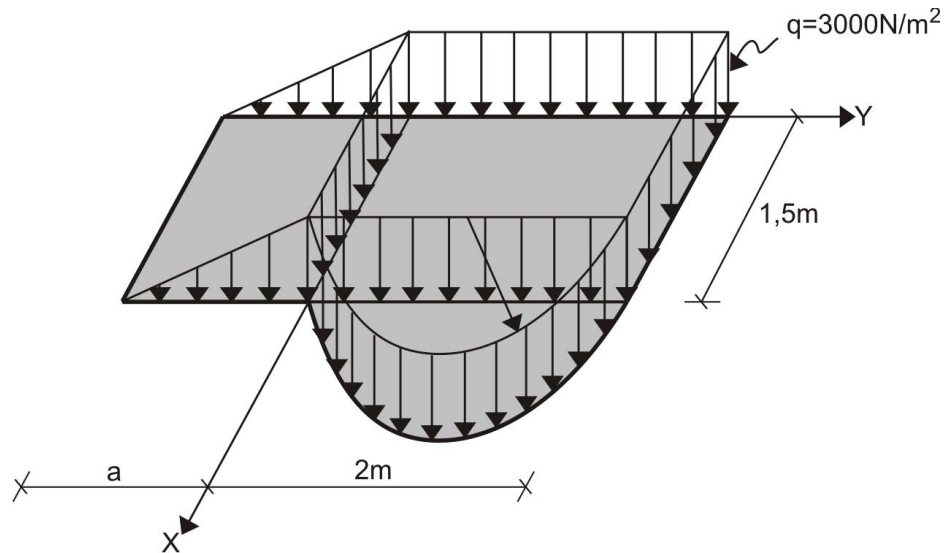


Fig. 1.81

Ahora, aplicamos las fuerzas (figura 1.82) y el Teorema de Varignon:

$$M_Y^R = \sum_{i=1}^3 M_Y^{P_i}$$

$$(2250a + 13712,39) \cdot 1,073 = 2250a \cdot (0,75) + 9000 \cdot (0,75) + 4712,39 \cdot (1,924)$$

$$a = 1,518\text{m}$$

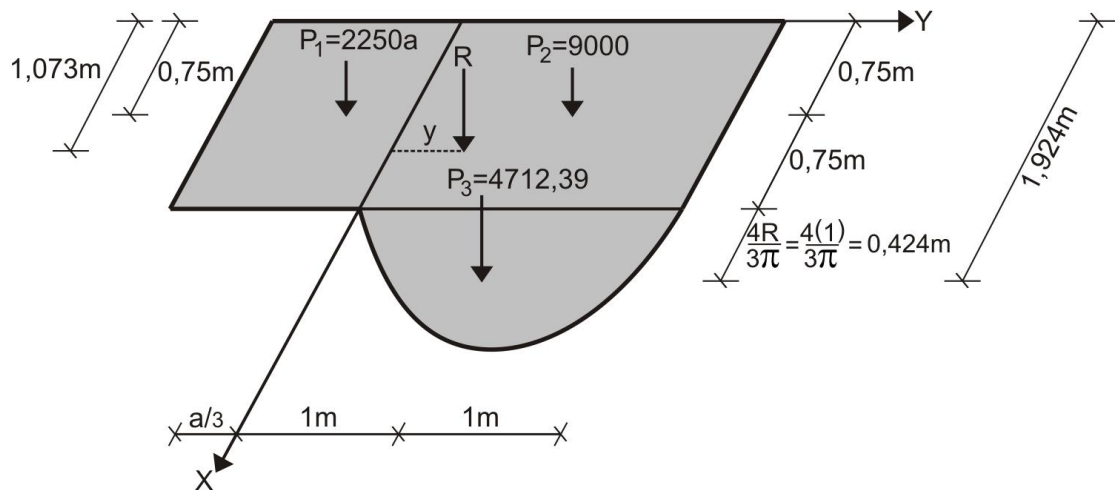


Fig. 1.82

PROBLEMA 1.39 Para la platea de cimentación mostrada en la figura, se sabe que además de la carga distribuida $w = 2T/m^2$; existe una carga puntual vertical dirigida hacia abajo de magnitud $P = 16T$ ubicada en $(2; 0; 2)$ y que CD es paralelo al eje OZ. Determinar la resultante del sistema y su ubicación.

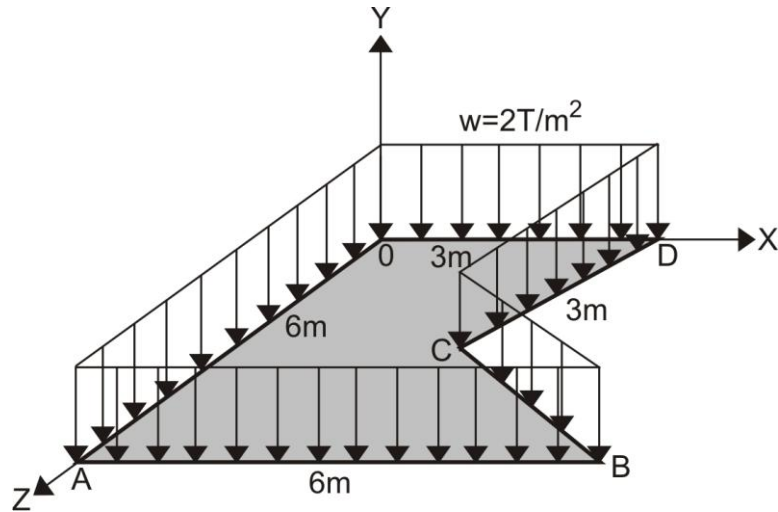


Fig. 1.83

Solución:

Calculamos las resultantes de las cargas distribuidas en las zonas rectangular y triangular

SECTOR RECTANGULAR:

$$R_1 = 3.6.2 = 36T$$

SECTOR TRIANGULAR:

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot 3.3.2 = 9T$$

Ubicamos las fuerzas resultantes y la carga $P = 16T$, de acuerdo a lo indicado en el problema

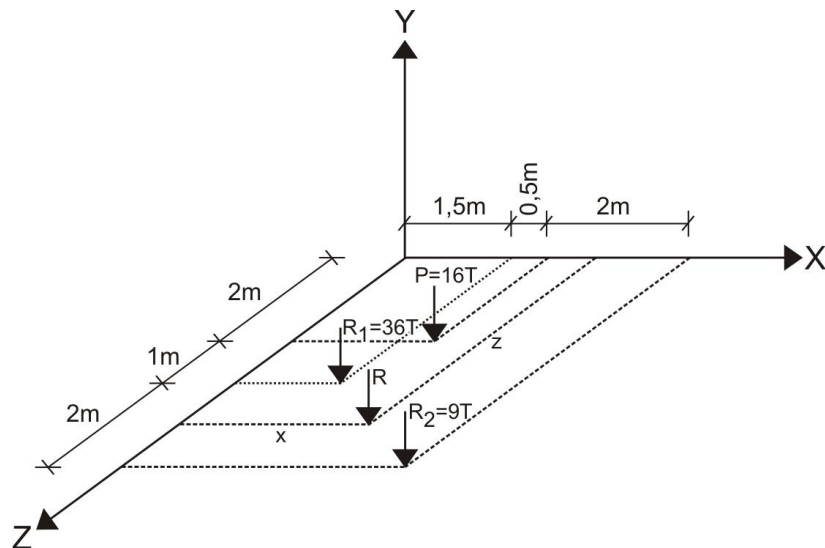


Fig. 1.84

Calculamos la resultante del sistema de fuerzas:

$$R = 36 + 16 + 9 = 61T \downarrow$$

Aplicamos el Teorema de Varignon, teniendo en cuenta los ejes coordenados:

$$1) \quad M_X^R = \sum_{i=1}^3 M_X^{F_i}$$

$$61.z = 16.2 + 36.3 + 9.5$$

$$z = 3,03\text{m}$$

$$2) \quad M_Z^R = \sum_{i=1}^3 M_Z^{F_i}$$

$$-61.x = -16.2 - 36.1,5 - 9.4$$

$$x = 2\text{m}$$

En consecuencia, las coordenadas del centro de presión son (2; 0; 3,03) m.

PROBLEMA 1.40 Determinar las coordenadas del centro de presión de las fuerzas distribuidas mostradas en la figura, donde el cilindro circular hueco de 1,5m de radio se encuentra en la parte central correspondiente a las fuerzas distribuidas uniforme sobre una superficie de la zona positiva de los ejes X, Y, Z

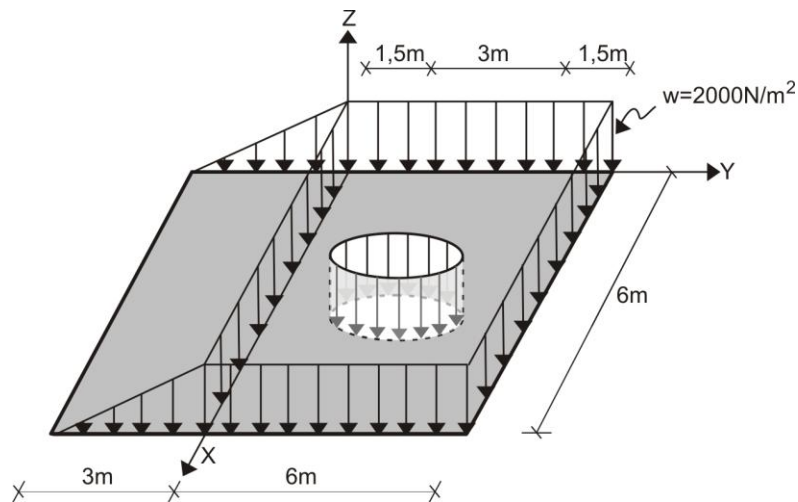


Fig. 1.85

Solución:

Calculamos las resultantes de la carga distribuida triangular y la carga rectangular con círculo interior

CARGA TRIANGULAR:

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2000 = 18000\text{N}$$

CARGA RECTANGULAR CON CIRCULO INTERIOR:

$$R_2 = (6 \cdot 6 - \pi \cdot 1,5^2) \cdot 2000 = 57862,83\text{N}$$

Ubicamos las fuerzas resultantes en la figura 1.86 y determinamos el valor de la resultante:

$$R = 18000 + 57862,83 = 75862,83\text{N} \downarrow$$

Aplicamos el Teorema de Varignon:

$$M_X^R = \sum_{i=1}^2 M_X^{F_i}$$

$$-75862,83.y = -57862,83.3 + 18000.1$$

De donde:

$$y = 2,05\text{m}$$

Luego, las coordenadas del centro de presión son (3; 2,05; 0) m.

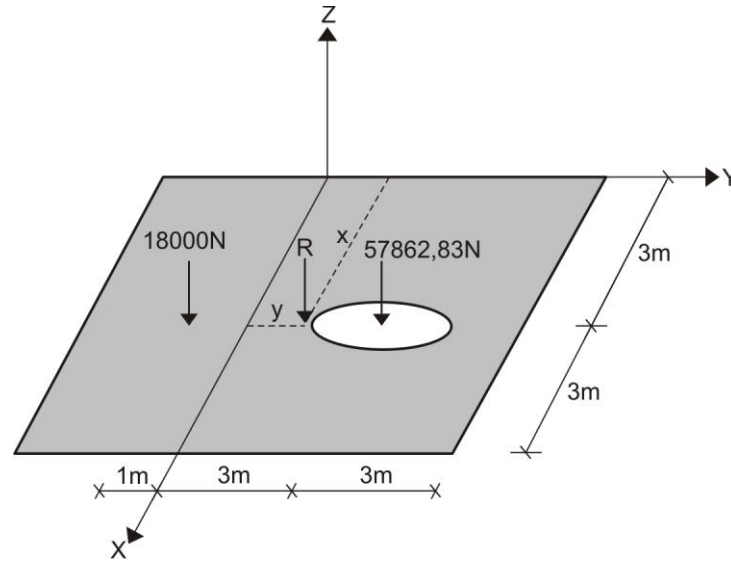


Fig. 1.86

CAPITULO 2 EQUILIBRIO

2.1 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

PROBLEMA 2.1 Dibuje el diagrama de cuerpo libre (DCL) debidamente acotado para:

- a) La viga isostática ABC

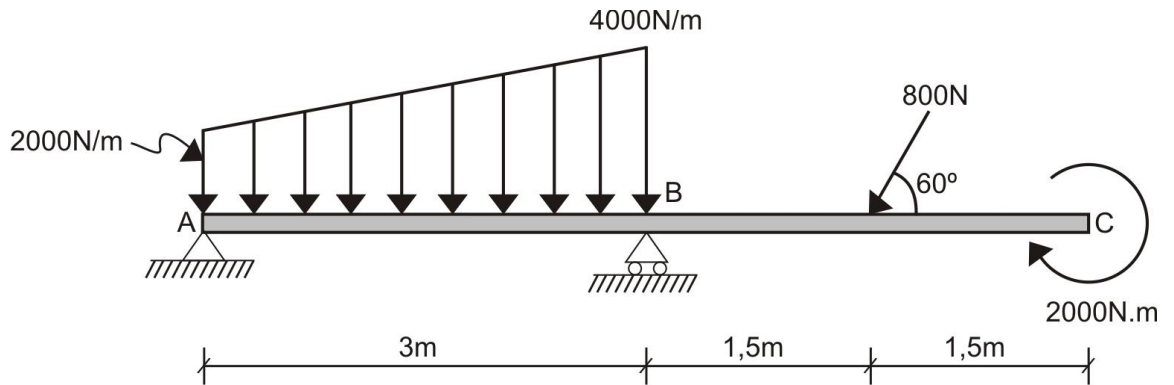


Fig. 2.1

- b) La viga hiperestática AB

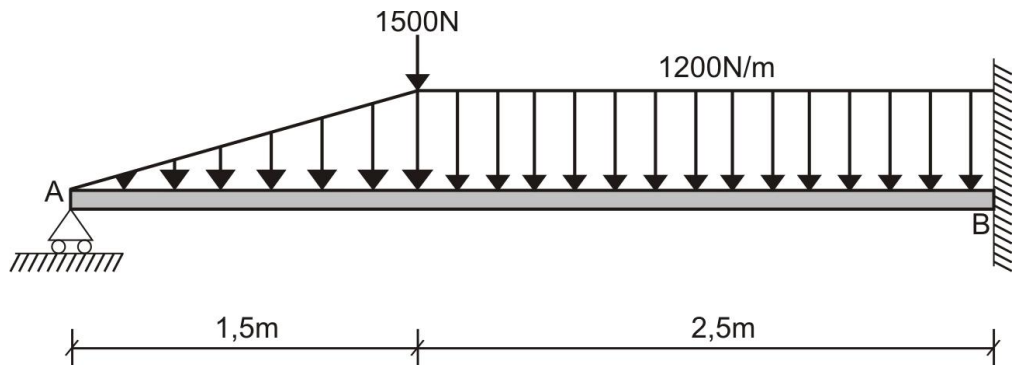


Fig. 2.2

Solución:

Se denomina diagrama de cuerpo libre (DCL), al esquema resultante de eliminar los apoyos, fuerzas distribuidas y cargas puntuales inclinadas, reemplazándolos por sus reacciones y fuerzas equivalentes resultantes de las cargas distribuidas o componentes de las cargas puntuales inclinadas.

Hay que recordar, que un apoyo simple posee 1 reacción, el apoyo fijo posee 2 reacciones y el empotramiento 3 reacciones (2 fuerzas y 1 momento).

También hay que aclarar, que una viga es isostática, cuando se puede resolver su equilibrio por las ecuaciones simples de la estática e hiperestática, cuando no se puede resolver por las ecuaciones simples de la estática y necesita ecuaciones adicionales de compatibilidad.

- a) Calculamos la resultante de la carga trapezoidal, dividiéndola en una carga uniformemente distribuida y otra carga triangular.

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA:

$$R_1 = 2000 \cdot 3 = 6000\text{N} \downarrow$$

CARGA TRIANGULAR:

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot 2000 \cdot 3 = 3000 \text{ N} \downarrow$$

Luego, descomponemos la carga puntual inclinada.

CARGA INCLINADA:

$$R_{3X} = 800 \cos 60^\circ = 400 \text{ N} \leftarrow$$

$$R_{3Y} = 800 \sin 60^\circ = 692,82 \text{ N} \downarrow$$

Ubicamos las cargas resultantes en los centros de gravedad para las distribuidas y en el punto de acción de las mismas para las puntuales descompuestas, tal como se muestra en la figura 2.3. Nótese, que el momento queda igual.

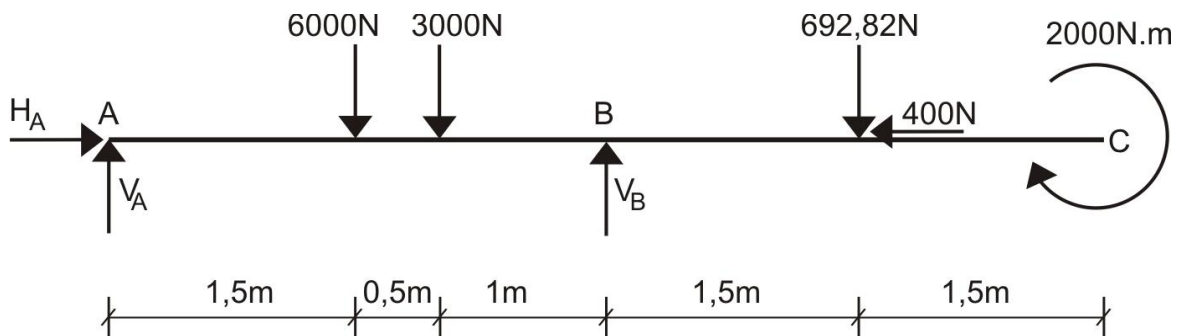


Fig. 2.3

b) Efectuamos en forma análoga con la viga hiperestática AB

CARGA TRIANGULAR:

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot 1200 \cdot 1,5 = 900 \text{ N} \downarrow$$

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA:

$$R_2 = 2,5 \cdot 1200 = 3000 \text{ N} \downarrow$$

Con estos valores, esquematizamos el DCL de la viga hiperestática.

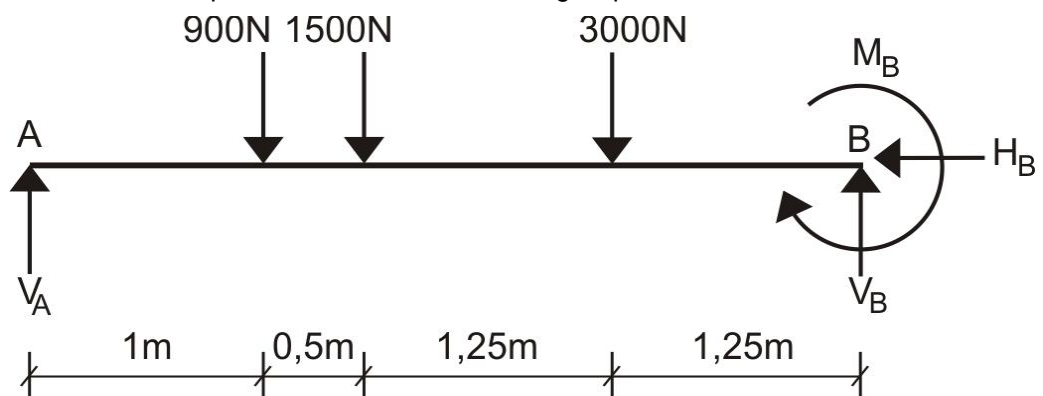


Fig. 2.4

PROBLEMA 2.2 Para la viga mostrada en equilibrio, cuyo peso es 300N, donde en A existe un empotramiento, dibuje su diagrama de cuerpo libre (DCL) debidamente acotado.

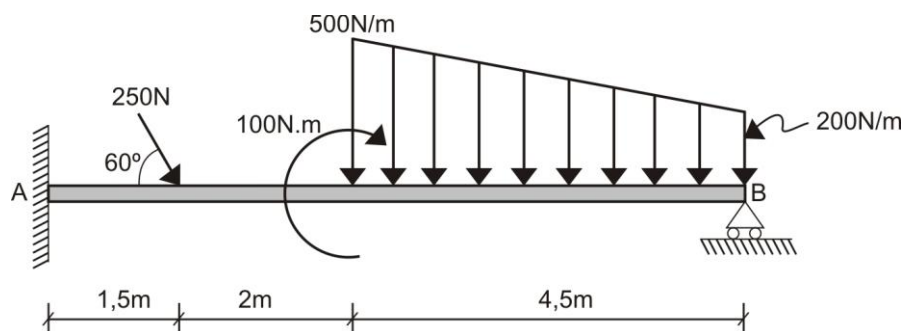


Fig. 2.5

Solución:

Calculamos las resultantes de la carga trapezoidal, dividiéndola en uniformemente distribuida y triangular.

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA:

$$R_1 = 200 \cdot (4,5) = 900\text{N} \downarrow$$

CARGA TRIANGULAR:

$$R_2 = \frac{1}{2} \cdot (4,5) \cdot (300) = 675\text{N} \downarrow$$

Luego, el DCL será el mostrado en la figura 2.6

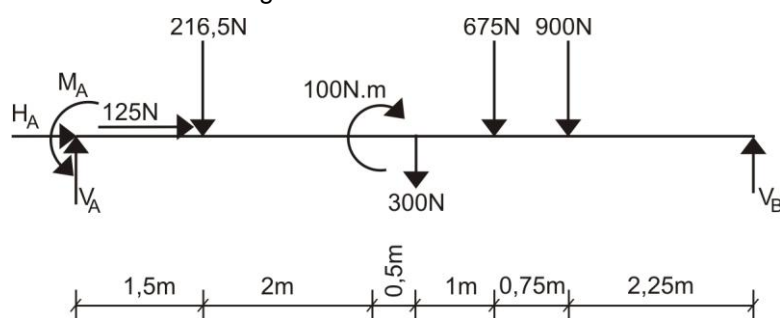
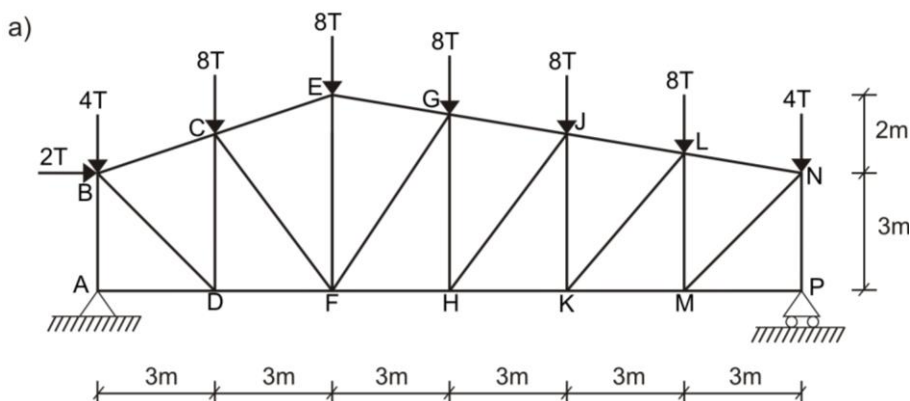


Fig. 2.6

Como se puede apreciar, el peso se ubica en el centro de la viga.

2.2 CALCULO DE REACCIONES DE ESTRUCTURAS SIMPLES

PROBLEMA 2.3 Determinar las reacciones en los apoyos de las siguientes armaduras:



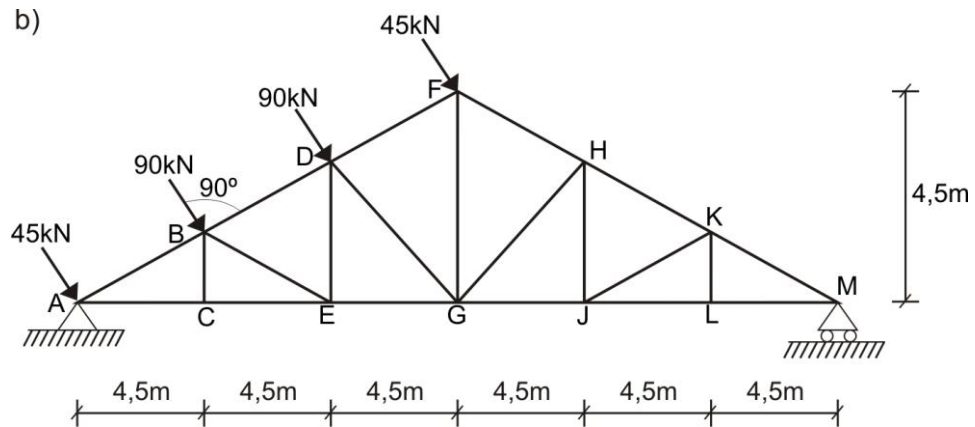


Fig. 2.7

Solución:

- a) Esquematizamos las reacciones como se muestra en la figura 2.8, calculando sus valores por las ecuaciones simples de equilibrio estático en el plano.

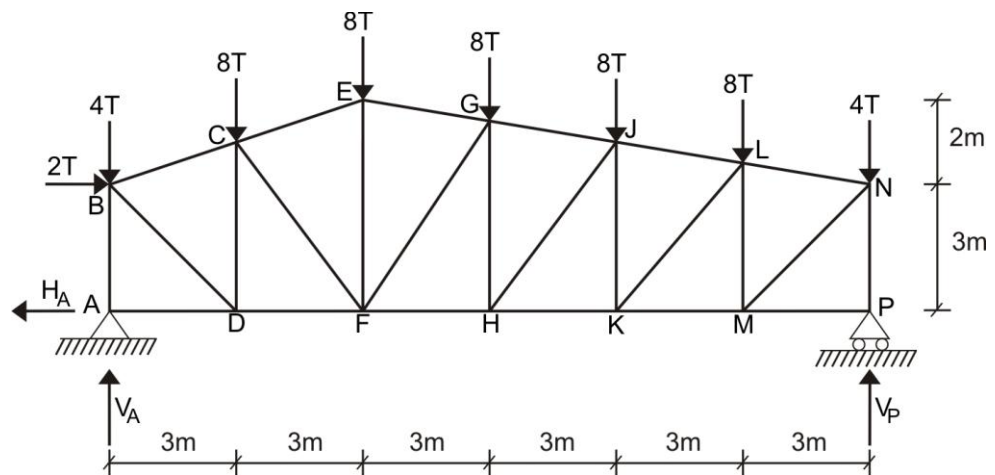


Fig. 2.8

Para determinar el momento en A, aplicamos el concepto de momento respecto de un punto y recordando que la orientación del momento es positiva en sentido antihorario y negativa en sentido horario.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_P \cdot (18) - 2 \cdot (3) - 8 \cdot (3) - 8 \cdot (6) - 8 \cdot (9) - 8 \cdot (12) - 8 \cdot (15) - 4 \cdot (18) = 0$$

$$V_P = 24,33T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 24,33 - 4 \cdot (2) - 8 \cdot (5) = 0$$

$$V_A = 23,67T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 2 - H_A = 0$$

$$H_A = 2T \leftarrow$$

- b) Esquematizamos las reacciones como se muestra en la figura 2.9

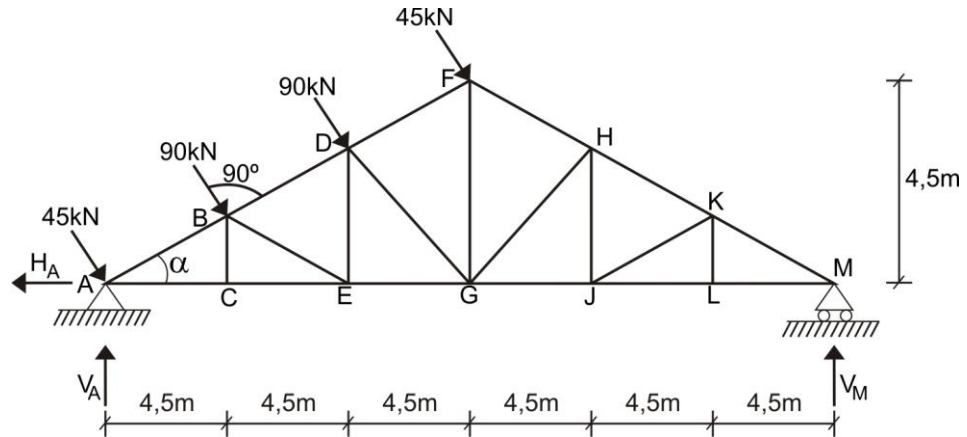


Fig. 2.9

Para calcular las reacciones, previamente, será necesario calcular el valor del ángulo α

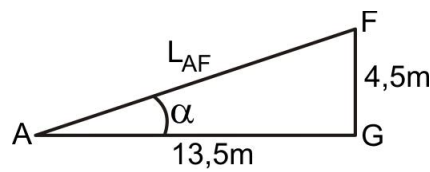


Fig. 2.10

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4,5}{13,5} \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{1}{3}\right) \therefore \alpha = 18,435^\circ$$

Ahora, determinamos la longitud del tramo AF

$$L_{AF} = \sqrt{13,5^2 + 4,5^2} = 14,23\text{m}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_M \cdot (27) - 90 \cdot (4,743) - 90 \cdot (9,486) - 45 \cdot (14,23) = 0$$

$$V_M = 71,147\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 71,147 - 2 \cdot (45 \cos 18,435^\circ) - 2 \cdot (90 \cos 18,435^\circ) = 0$$

$$V_A = 184,997\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_A + 2 \cdot (45 \sin 18,435^\circ) + 2 \cdot (90 \sin 18,435^\circ) = 0$$

$$H_A = 85,382\text{kN} \leftarrow$$

Nótese, que para la sumatoria de fuerzas proyectadas en los ejes horizontal y vertical, se tuvo que descomponer las fuerzas de 45kN y 90kN en dichos ejes.

PROBLEMA 2.4 Sabiendo que la viga homogénea AD pesa W, determinar la distancia "x" tal que la componente de reacción en el apoyo B sea el doble de la componente de reacción en C

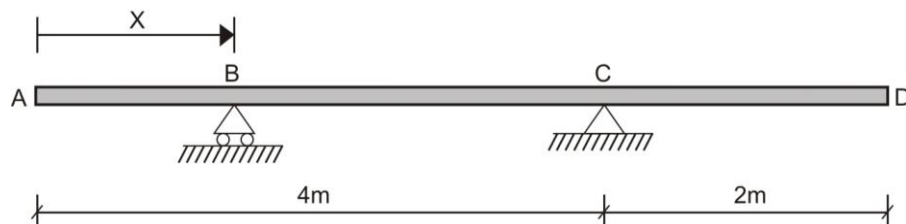


Fig. 2.11

Solución:

Por condición del problema, sabemos que $V_B = 2V_C$, entonces analizamos el equilibrio de la viga.

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B + V_C = W \quad \therefore \quad V_C = \frac{W}{3} \uparrow$$

$$V_B = \frac{2W}{3} \uparrow$$

Luego, esquematizamos las reacciones en la viga y determinamos la distancia "x"

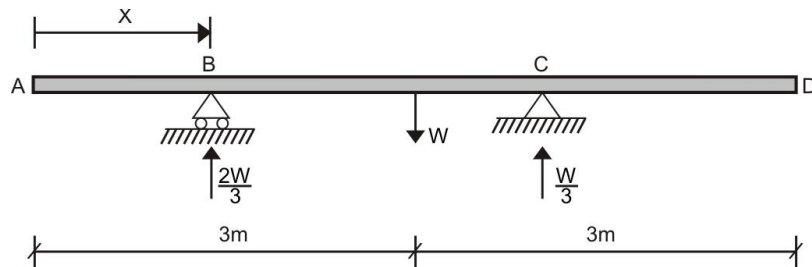


Fig. 2.12

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2W}{3} \cdot (x) - W \cdot (3) + \frac{W}{3} \cdot (4) = 0 \quad \therefore \quad x = 2,5m$$

PROBLEMA 2.5 Determinar el peso de la viga y las componentes de reacción en el apoyo A, si la reacción en B es 14,44kN

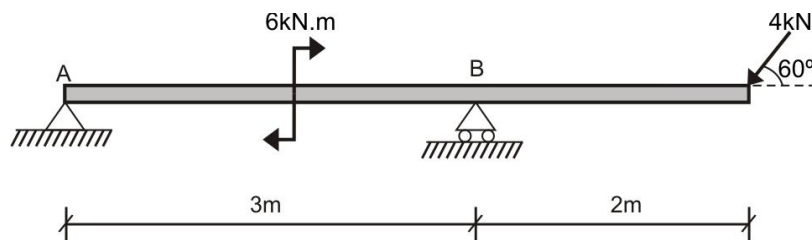


Fig. 2.13

Solución:

Esquematizamos el peso de la viga como P y lo ubicamos en el centro de la misma, analizando el equilibrio de la estructura.

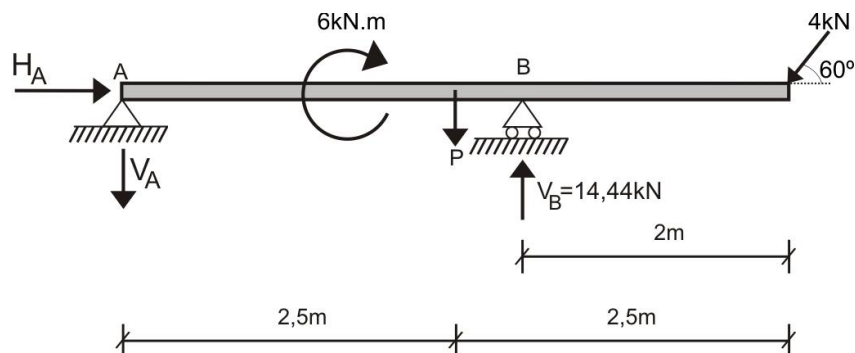


Fig. 2.14

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 14,44 \cdot (3) - P \cdot (2,5) - 6 - 4 \sin 60^\circ \cdot (5) = 0 \quad \therefore \quad P = 8kN$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 4 \cos 60^\circ = 0 \quad \therefore \quad H_A = 2kN \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_A + 14,44 - 8 - 4\text{sen}60^\circ = 0 \quad \therefore \quad V_A = 2,97\text{kN} \downarrow$$

PROBLEMA 2.6 Determinar las reacciones en los apoyos de las siguientes vigas:

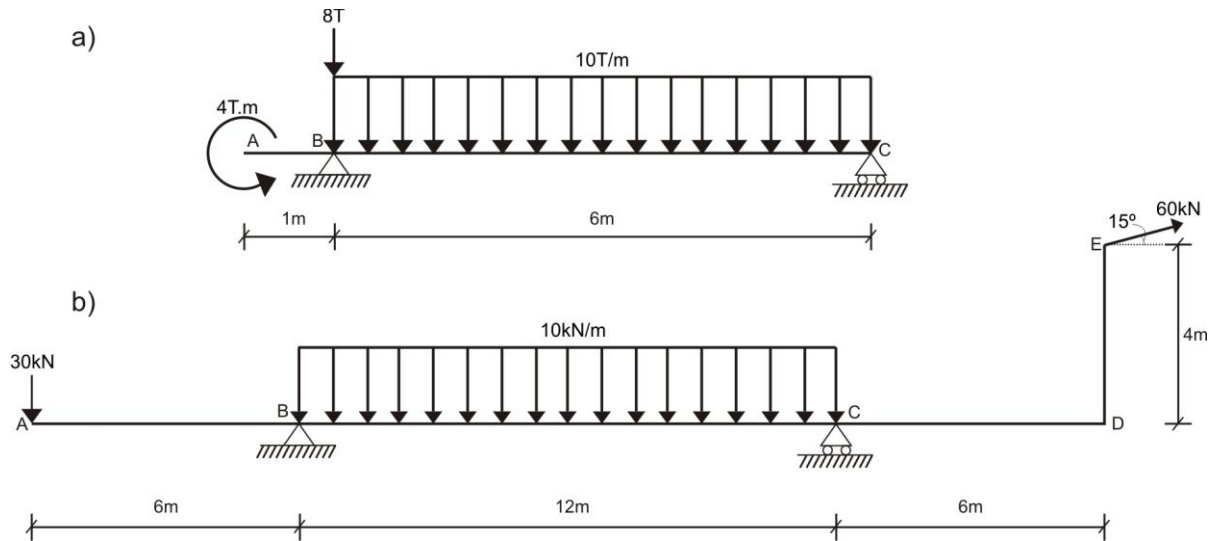


Fig. 2.15

Solución:

a) Esquematizamos las reacciones, como se muestra en la figura 2.16 y calculamos sus reacciones

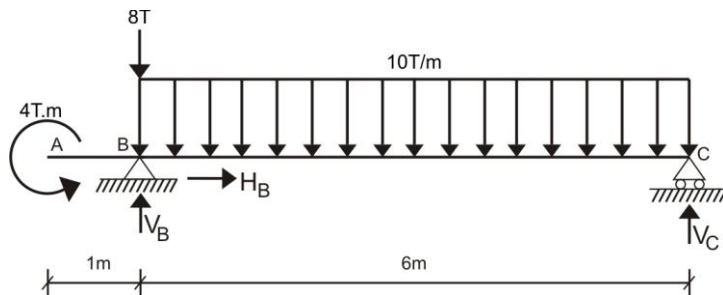


Fig. 2.16

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C \cdot (6) - 10 \cdot (6) \cdot (3) + 4 = 0 \quad \therefore \quad V_C = 29,33T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B + 29,33 - 8 - 10 \cdot (6) = 0 \quad \therefore \quad V_B = 38,67T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 0$$

b) Esquematizamos sus reacciones (figura 2.17) y determinamos sus valores, descomponiendo la carga puntual de 60kN en sus fuerzas horizontal y vertical.

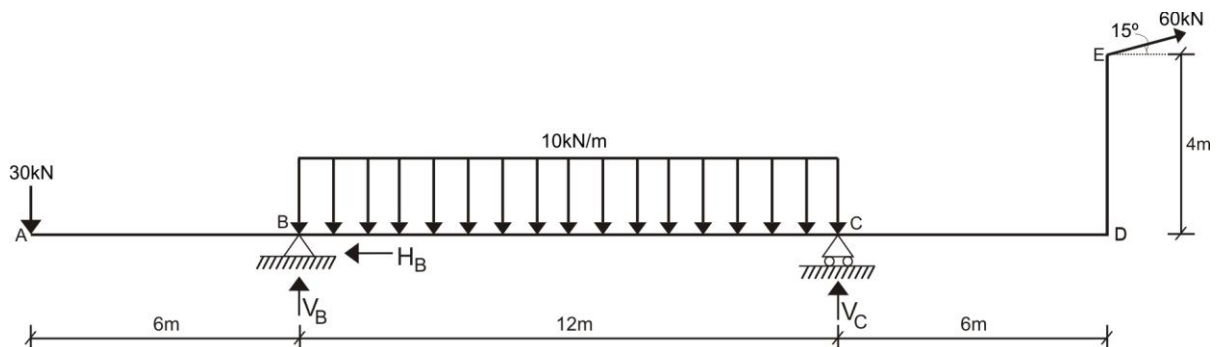


Fig. 2.17

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_C \cdot (12) + 30 \cdot (6) - 10 \cdot (12) \cdot 6 + (60 \sin 15^\circ) \cdot (18) - (60 \cos 15^\circ) \cdot (4) = 0$$

$$V_C = 41,02 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_B + 41,02 - 30 - 10 \cdot (12) + 60 \sin 15^\circ = 0$$

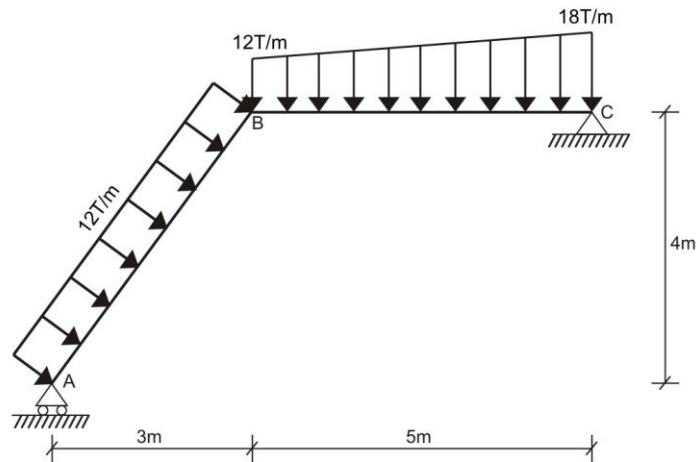
$$V_B = 93,45 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_B + 60 \cos 15^\circ = 0$$

$$H_B = 57,95 \text{ kN} \leftarrow$$

PROBLEMA 2.7 Determinar las reacciones en los apoyos de las siguientes barras de eje quebrado:

a)



b)

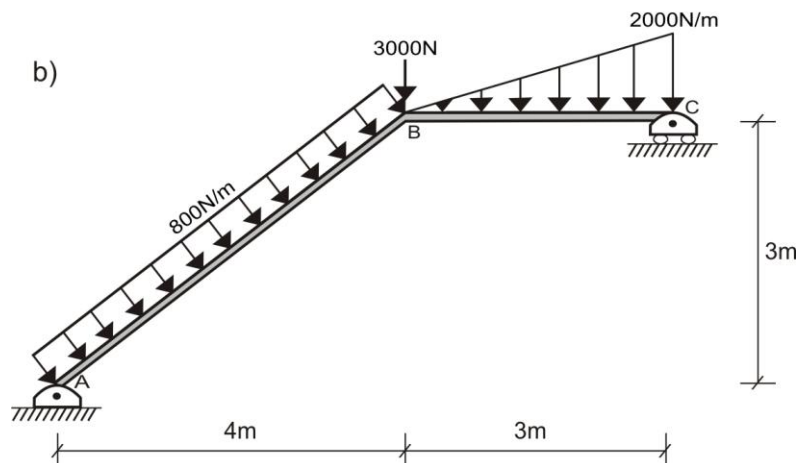


Fig. 2.18

Solución:

- a) Calculamos las resultantes de la acción de la carga uniformemente distribuida de 12T/m y la carga trapezoidal, dividiendo esta última en 2 resultantes parciales de una uniformemente distribuida y otra triangular, esquematizando todas las cargas y reacciones de la barra de eje quebrado en la figura 2.19

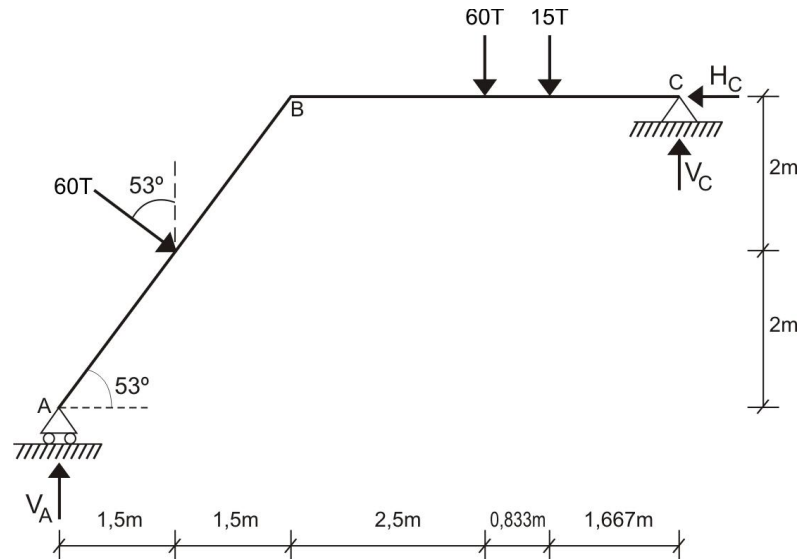


Fig. 2.19

Determinamos las reacciones por las ecuaciones de equilibrio estático:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -V_A \cdot (8) + 60 \cos 53^\circ \cdot (6,5) + 60 \sin 53^\circ \cdot (2) + 60 \cdot (2,5) + 15 \cdot (1,667) = 0$$

$$V_A = 63,125T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 63,125 + V_C - 60 \cos 53^\circ - 60 - 15 = 0$$

$$V_C = 47,875T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 60 \sin 53^\circ - H_C = 0$$

$$H_C = 48T \leftarrow$$

- b) Orientamos las reacciones en los apoyos como se muestra en la figura 2.20 y determinamos sus valores mediante el equilibrio estático.

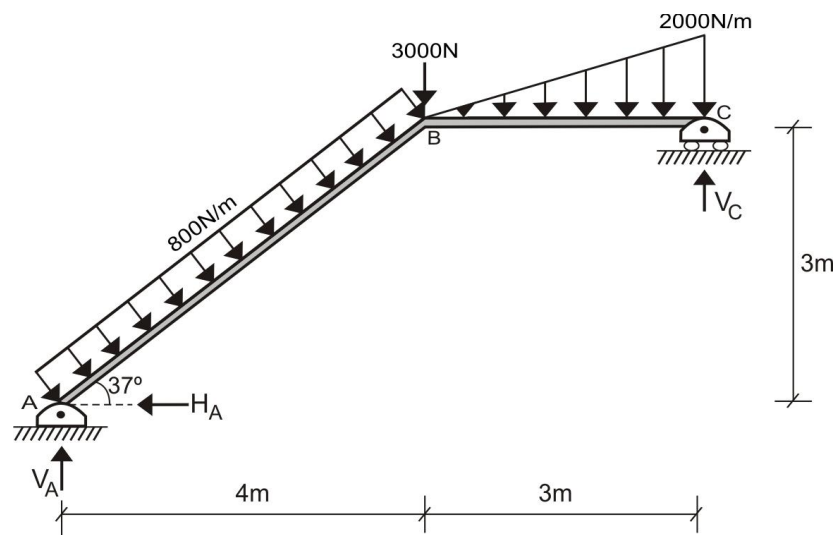


Fig. 2.20

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C \cdot (7) - 800 \cdot (5) \cdot (2,5) - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (2000) \cdot (6) - 3000 \cdot (4) = 0$$

$$V_C = 5714,28N \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 5714,28 - 800.(5).\cos 37^\circ - 3000 - \frac{1}{2}.(3).(2000) = 0$$

$$V_A = 3485,72\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 800.(5).\sin 37^\circ - H_A = 0$$

$$H_A = 2400\text{N} \leftarrow$$

PROBLEMA 2.8 En la siguiente estructura en equilibrio se tiene una barra doblada ABC, la cual pesa 330kgf, determinar las componentes de reacción en los apoyos A y C

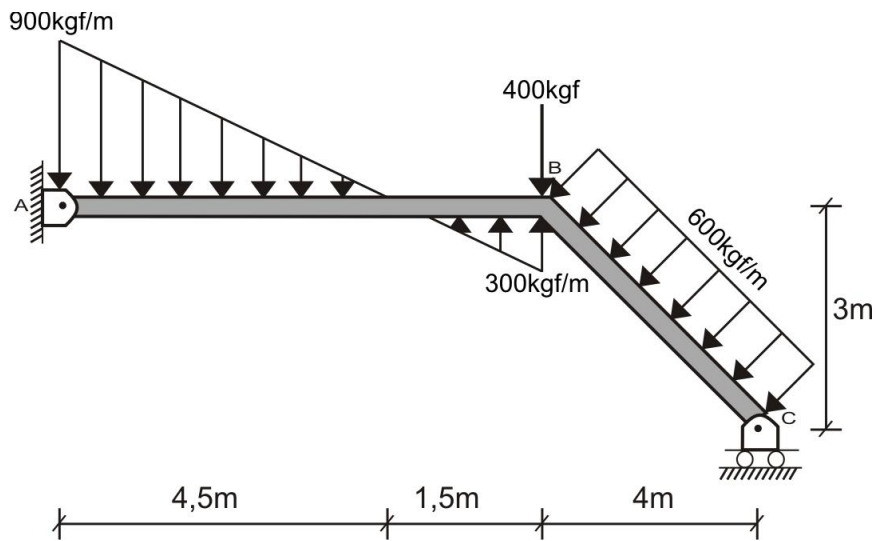


Fig. 2.21

Solución:

Como el peso total es 330kgf, determinamos los pesos en los tramos AB y BC, dividiéndolo en forma proporcional a su longitud, obteniendo:

$$P_{AB} = 180\text{kgf}$$

$$P_{BC} = 150\text{kgf}$$

Calculamos las resultantes de las cargas distribuidas y ubicamos dichas resultantes en el DCL de la viga doblada ABC, tal como se muestra en la figura 2.22

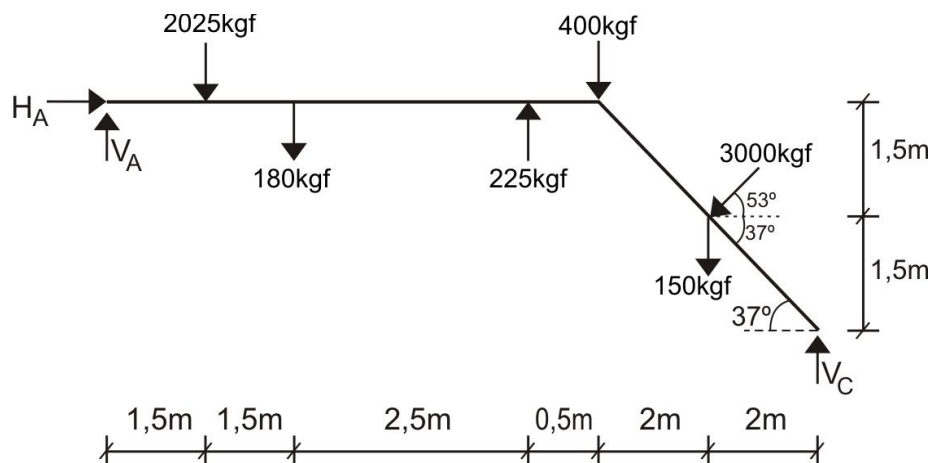


Fig. 2.22

Calculamos las reacciones en los apoyos, aplicando las ecuaciones de equilibrio estático en el plano

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_C \cdot (10) - 2025 \cdot (1,5) - 180 \cdot (3) + 225 \cdot (5,5) - 400 \cdot (6) - 150 \cdot (8) - 3000 \cos 53^\circ \cdot (1,5) - 3000 \sin 53^\circ \cdot (8) = 0$$

$$V_C = 2784 \text{ kgf} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 2784 + 225 - 2025 - 180 - 400 - 150 - 3000 \sin 53^\circ = 0$$

$$V_A = 2146 \text{ kgf} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 3000 \cos 53^\circ = 0$$

$$H_A = 1800 \text{ kgf} \rightarrow$$

PROBLEMA 2.9 Determinar las reacciones en los apoyos A y C de la estructura mostrada en la figura 2.23

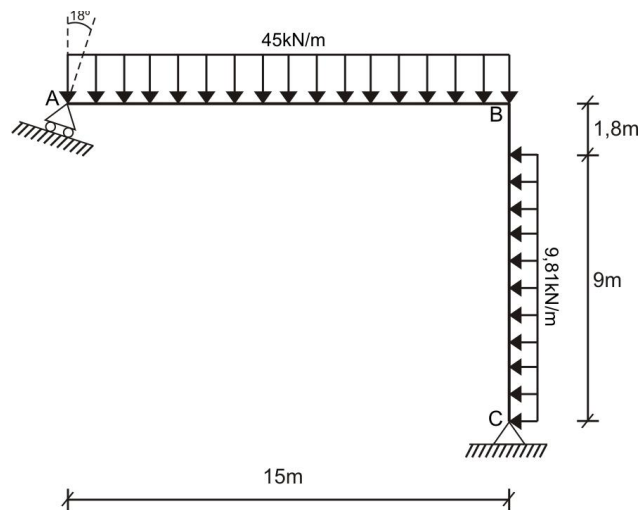


Fig. 2.23

Solución:

Proyectamos la reacción R_A en la horizontal y vertical (figura 2.24) y analizamos el equilibrio de la estructura.

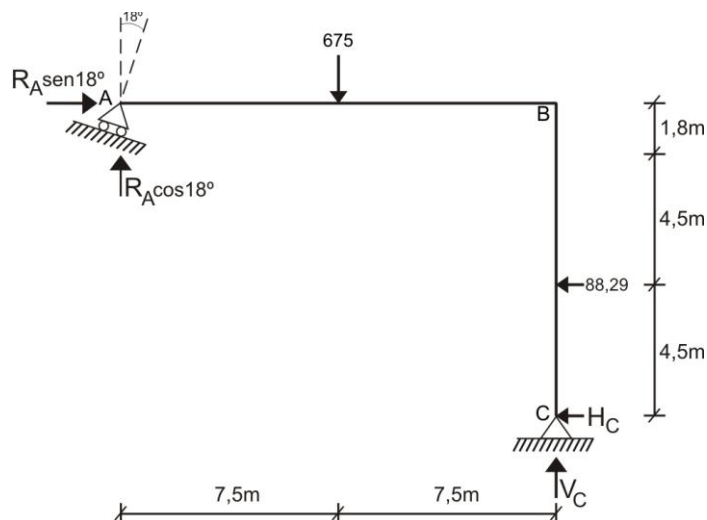


Fig. 2.24

$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -R_A \cos 18^\circ \cdot (15) - R_A \sin 18^\circ \cdot (10,8) + 675 \cdot (7,5) + 88,29 \cdot (4,5) = 0$$

$$R_A = 310,216 \text{ kN}$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C + 310,216 \cos 18^\circ - 675 = 0$$

$$V_C = 379,967 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -H_C - 88,29 + 310,216 \sin 18^\circ = 0$$

$$H_C = 7,572 \text{ kN} \leftarrow$$

Nótese, que la reacción R_A forma un ángulo de 18° con la vertical

PROBLEMA 2.10 Determinar las reacciones en los apoyos de los siguientes pórticos, considerando para el caso b) que la carga de 10kN y el momento de 8kN.m dividen a la barra CD en tres tramos iguales.

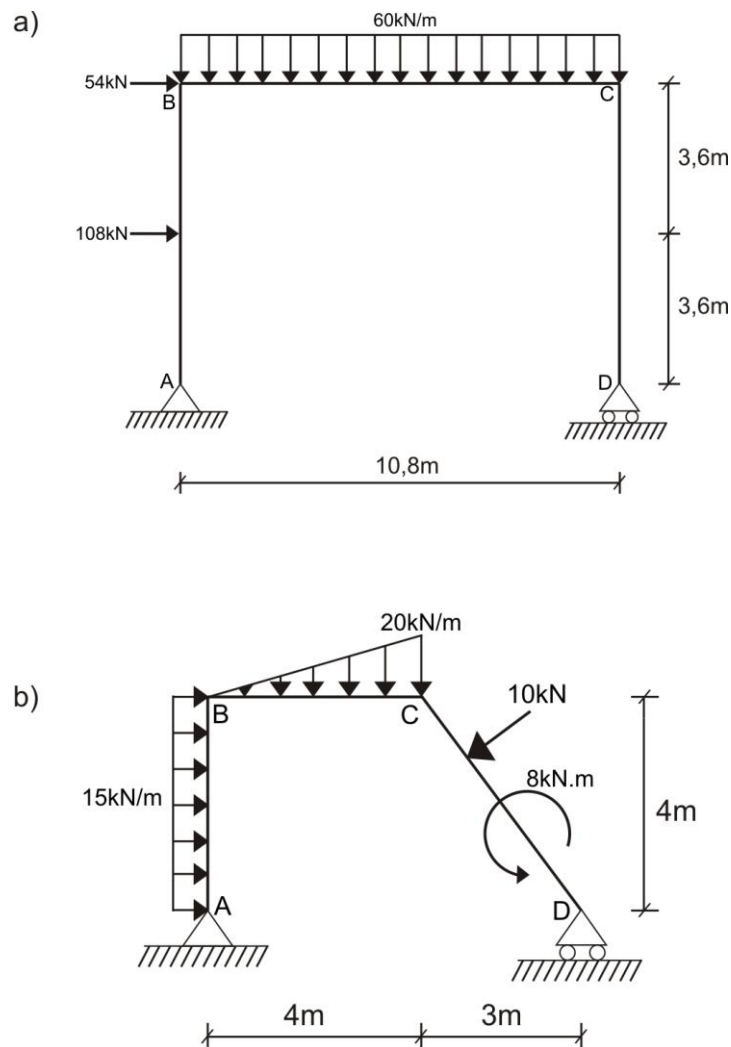


Fig. 2.25

Solución:

- a) Orientamos las reacciones en los apoyos, como se muestra en la figura 2.26, calculando las reacciones por las ecuaciones de equilibrio estático.

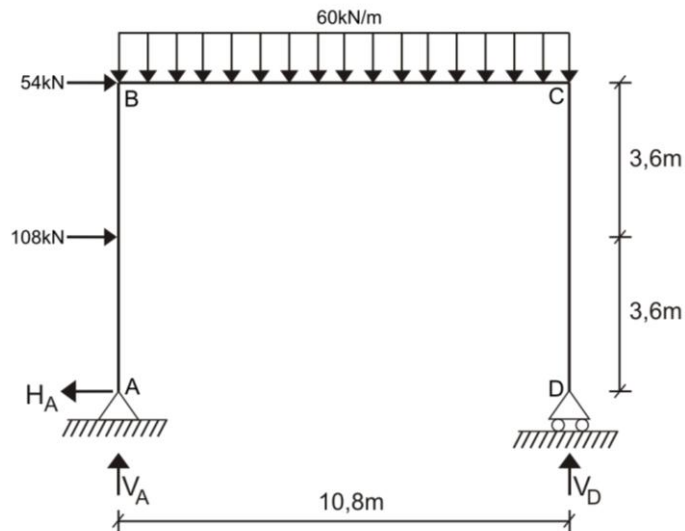


Fig. 2.26

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D \cdot (10,8) - 60 \cdot (10,8) \cdot (5,4) - 54 \cdot (7,2) - 108 \cdot (3,6) = 0$$

$$V_D = 396 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 396 - 60 \cdot (10,8) = 0$$

$$V_A = 252 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_A + 108 + 54 = 0$$

$$H_A = 162 \text{ kN } \leftarrow$$

- b) Esquematizamos las reacciones en los apoyos, tal como se muestra en la figura 2.27 y calculamos sus valores por el equilibrio estático.

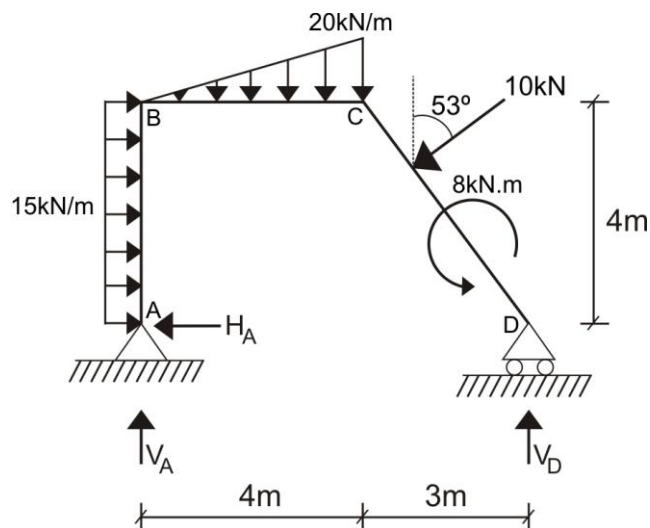


Fig. 2.27

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$V_D \cdot (7) - 15 \cdot (4) \cdot (2) - \frac{1}{2} \cdot (4) \cdot (20) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \right) - 10 \cos 53^\circ \cdot (5) + 10 \sin 53^\circ \cdot \left(\frac{8}{3} \right) + 8 = 0$$

$$V_D = 32,476 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 32,476 - \frac{1}{2} \cdot (4) \cdot (20) - 10 \cos 53^\circ = 0$$

$$V_A = 13,524 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_A - 10 \sin 53^\circ + 15 \cdot (4) = 0$$

$$H_A = 52 \text{ kN} \leftarrow$$

2.3 CALCULO DE REACCIONES DE ESTRUCTURAS CON ROTULAS INTERMEDIAS

PROBLEMA 2.11 Determinar las reacciones en los apoyos A, C y D, sabiendo que en B existe una rótula.

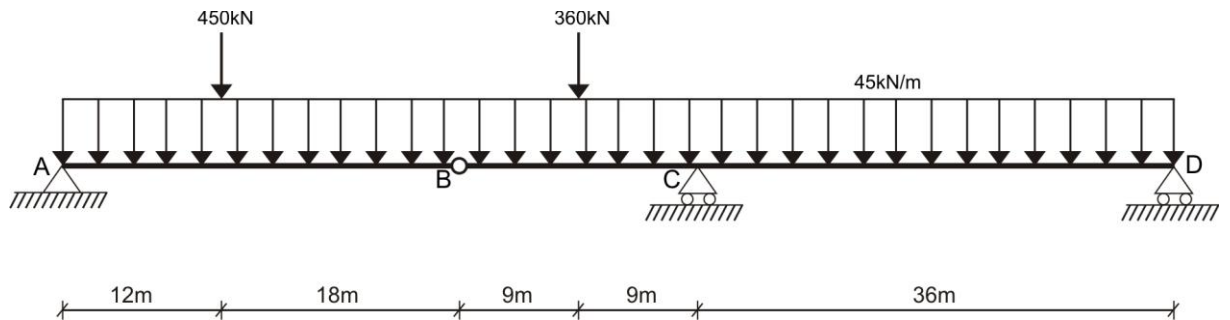


Fig. 2.28

Solución:

Efectuamos un corte en la rótula B y analizamos el equilibrio en el tramo AB de la viga, sabiendo que en una rótula existen 2 fuerzas internas.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot (30) - 450 \cdot (12) - 45 \cdot (30) \cdot (15) = 0$$

$$V_B = 855 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 855 - 450 - 45 \cdot (10) = 0$$

$$V_A = 945 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = H_B$$

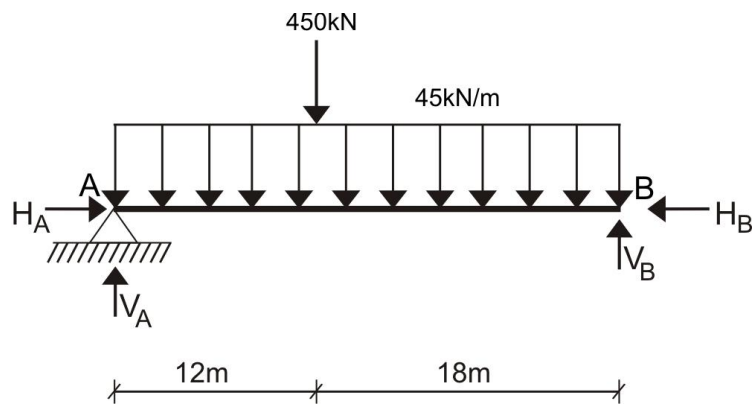


Fig. 2.29

Ahora, analizamos el equilibrio del tramo BCD de la viga.

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_C \cdot (36) + 855 \cdot (54) + 45 \cdot (54) \cdot (27) + 360 \cdot (45) = 0$$

$$V_C = 3555 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3555 + V_D - 855 - 360 - 45 \cdot (54) = 0$$

$$V_D = 90 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 0$$

De esta manera, se cumplirá que $H_A = H_B = 0$

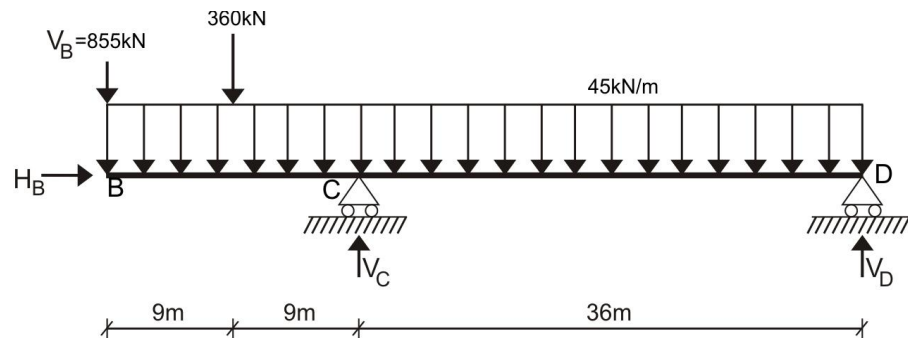


Fig. 2.30

Ahora, comprobamos el equilibrio de toda la viga, incorporando, para ello, las reacciones obtenidas en el cálculo previo.

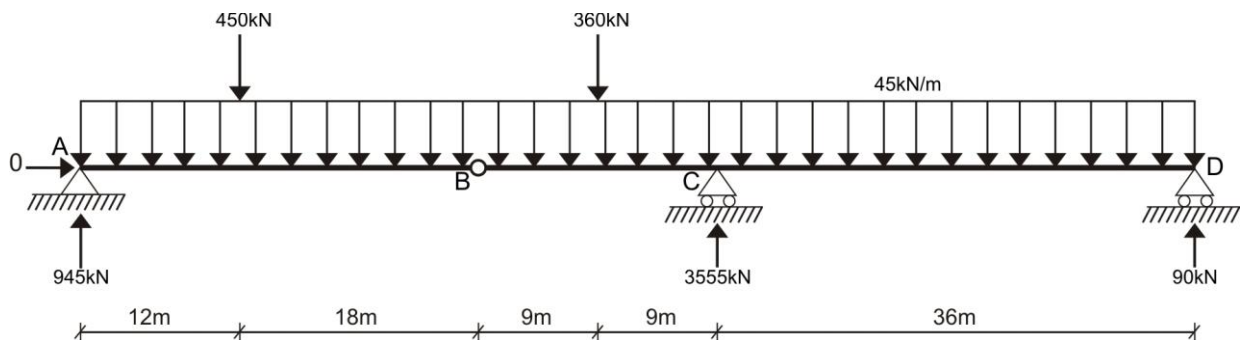


Fig. 2.31

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 945 + 3555 + 90 - 450 - 360 - 45 \cdot (84) = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3555 \cdot (18) + 90 \cdot (54) + 450 \cdot (18) - 945 \cdot (30) - 360 \cdot (9) - 45 \cdot (84) \cdot (12) = 0$$

De esta manera, se ha comprobado el correcto cálculo de las reacciones en los apoyos.

PROBLEMA 2.12 Sabiendo que el siguiente sistema se encuentra en equilibrio, donde en C y E existen rótulas, determinar las componentes de reacción en los apoyos A, B, D y F

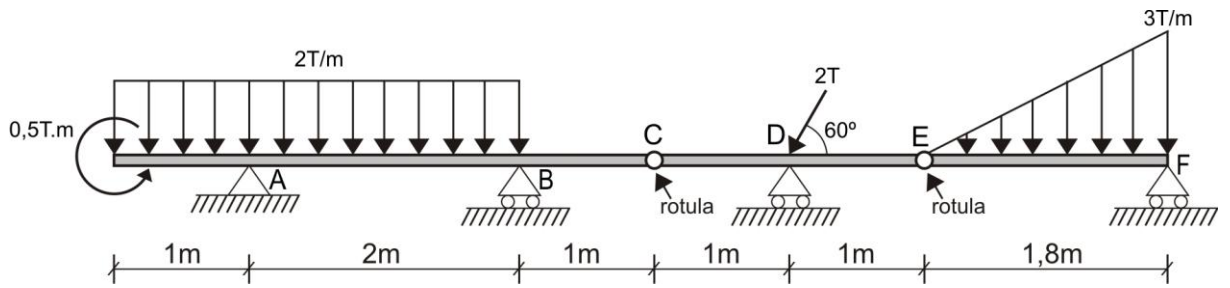


Fig. 2.32

Solución:

Analizamos en forma consecutiva los tramos EF, CDE y ABC

TRAMO EF:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_E = 0$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow V_F \cdot (1,8) - \frac{1}{2} \cdot (1,8) \cdot (3) \cdot (1,2) = 0 \quad \therefore V_F = 1,8T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_E + 1,8 - \frac{1}{2} \cdot (1,8) \cdot (3) = 0 \quad \therefore V_E = 0,9T \uparrow$$

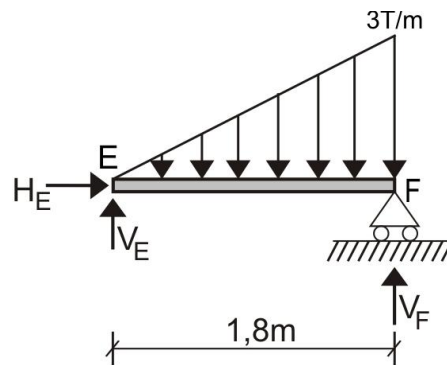


Fig. 2.33

TRAMO CDE:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_C - 2 \cos 60^\circ = 0 \quad \therefore H_C = 1T \rightarrow$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow V_D \cdot (1) - 2 \sin 60^\circ \cdot (1) - 0,9 \cdot (2) = 0 \quad \therefore V_D = 3,53T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 3,53 - V_C - 2 \sin 60^\circ - 0,9 = 0 \quad \therefore V_C = 0,9T \downarrow$$

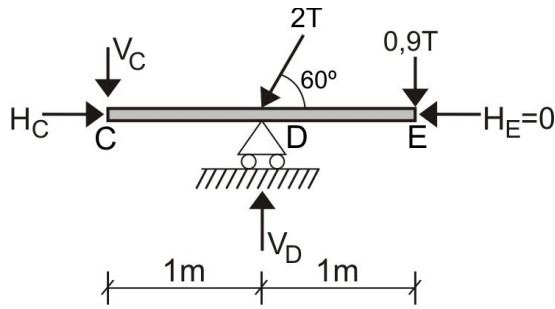


Fig. 2.34

TRAMO ABC:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 1 = 0 \quad \therefore H_A = 1T \rightarrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B \cdot (2) + 0.9 \cdot (3) + 0.5 - 2 \cdot (3) \cdot (0.5) = 0 \quad \therefore V_B = 0.1T \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 0.1 - 2 \cdot (3) + 0.9 = 0 \quad \therefore V_A = 5.2T \uparrow$$

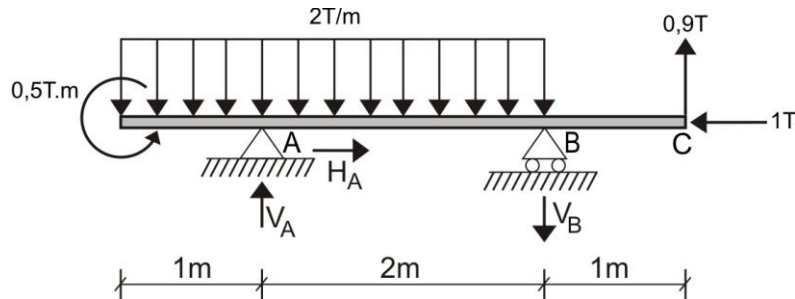


Fig. 2.35

Ahora, comprobamos el equilibrio de toda la viga, incorporando las reacciones obtenidas en el cálculo previo.

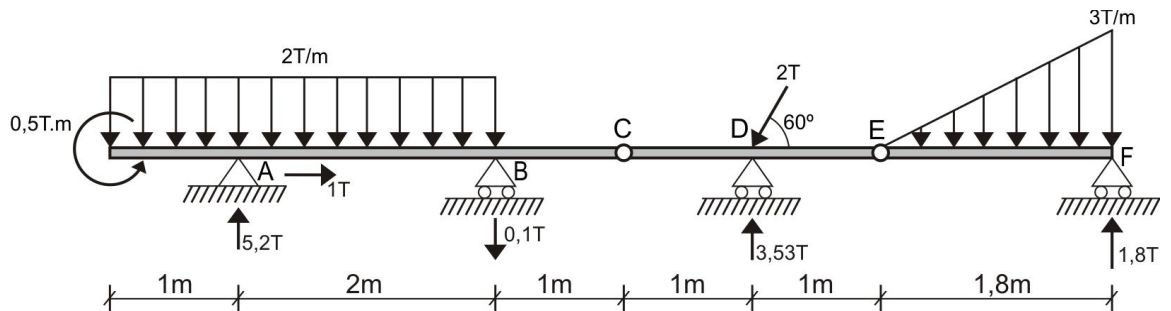


Fig. 2.36

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 1 - 2 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 5.2 - 0.1 + 3.53 + 1.8 - 2 \cdot (3) - 2 \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot (1.8) \cdot (3) = 0$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow -3.53 \cdot (2.8) + 0.1 \cdot (4.8) - 5.2 \cdot (6.8) + 0.5 + 2 \cdot (3) \cdot (6.3) + 2 \sin 60^\circ \cdot (2.8) + \frac{1}{2} \cdot (1.8) \cdot (3) \cdot (0.6) = 0$$

De esta manera, se ha comprobado el correcto cálculo de las reacciones en los apoyos.

PROBLEMA 2.13 En el sistema mostrado en equilibrio, las barras AB y BC pesan 200kgf y 100kgf, determinar las componentes de reacción en los apoyos A y C

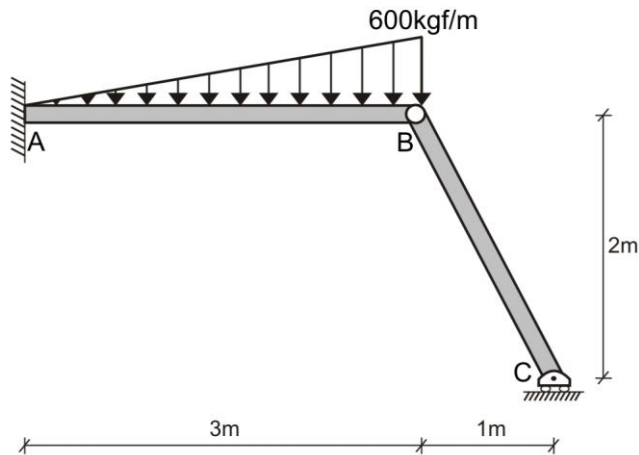


Fig. 2.37

Solución:

Como se sabe, la resultante del peso de una estructura, se ubica en el propio centro de la misma y en este caso, por ser B una rótula, efectuamos un corte en dicha rótula y analizamos el equilibrio de los tramos BC y AB

TRAMO BC:

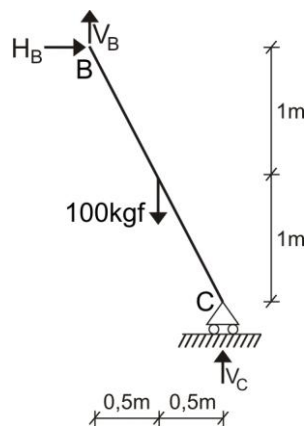


Fig. 2.38

$$\sum M_B^{\text{der}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C \cdot (1) - 100 \cdot (0,5) = 0 \quad \therefore \quad V_C = 50 \text{kgf} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B + 50 - 100 = 0 \quad \therefore \quad V_B = 50 \text{kgf} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 0$$

TRAMO AB:

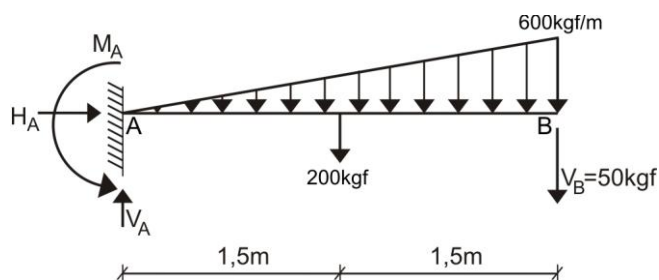


Fig. 2.39

Como se podrá apreciar, en la rótula B, la fuerza interna V_B del tramo AB es igual que la del tramo BC, pero en sentido opuesto.

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - 200 - 50 - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (600) = 0$$

$$V_A = 1150 \text{kgf} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A - 50 \cdot (3) - 200 \cdot (1,5) - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (600) \cdot (2) = 0$$

$$M_A = 2250 \text{kgf} \cdot \text{m}$$

El momento M_A va orientado en el mismo sentido que la figura 2.39

PROBLEMA 2.14 En el sistema en equilibrio mostrado en la figura, se tienen dos barras dobladas ABC de peso despreciable y CDE cuyo peso es 60kgf. Determinar las componentes de reacción en los apoyos A y E

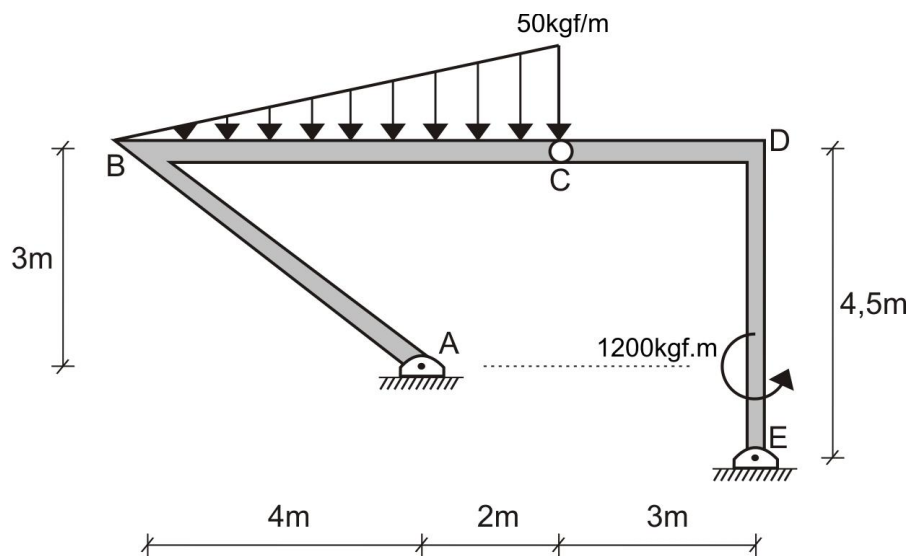


Fig. 2.40

Solución:

Distribuimos las reacciones y pesos en forma proporcional a su longitud y analizamos todo el sistema (figura 2.41,a):

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E \cdot (5) - H_E \cdot (1,5) - \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (50) \cdot (0) - 24 \cdot (3,5) - 36 \cdot (5) + 120 = 0$$

$$5V_E - 1,5H_E = 144 \quad (a)$$

Ahora, analizamos la parte derecha de la estructura, es decir derecha de la rótula C (figura 2.41,b):

$$\sum M_C^{\text{der}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E \cdot (3) - H_E \cdot (4,5) - 24 \cdot (1,5) - 36 \cdot (3) + 120 = 0$$

$$3V_E - 4,5H_E = 24 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$V_E = 34\text{kgf} \uparrow$$

$$H_E = 17,33\text{kgf} \leftarrow$$

Retornamos al sistema general (figura 2.41,a), analizando el equilibrio final:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 17,33 = 0$$

$$H_A = 17,33\text{kgf} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 34 - \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (50) - 24 - 36 = 0$$

$$V_A = 176\text{kgf} \uparrow$$

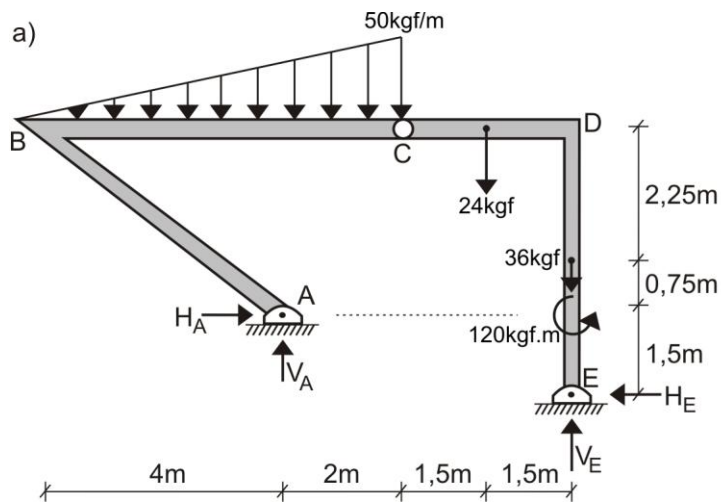
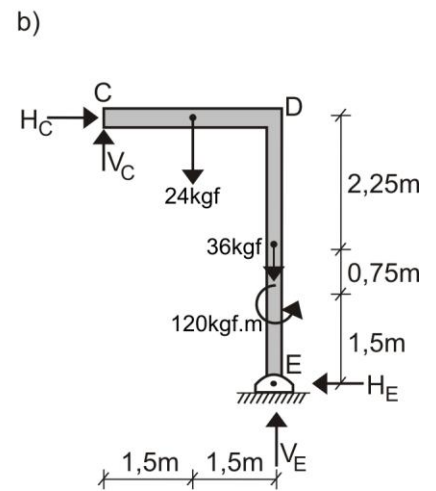


Fig. 2.41



PROBLEMA 2.15 Determinar las reacciones en los apoyos A y C del arco triarticulado ABC

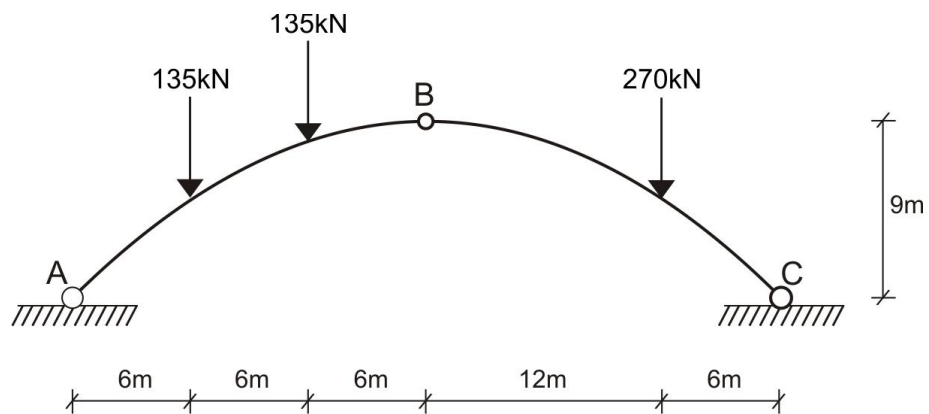


Fig. 2.42

Solución:

Analizamos el equilibrio del arco triarticulado ABC:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C \cdot (36) - 135 \cdot (6) - 135 \cdot (12) - 270 \cdot (30) = 0$$

$$V_C = 292,5\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 292,5 - 135 - 135 - 270 = 0$$

$$V_A = 247,5 \text{ kN} \uparrow$$

Para determinar las reacciones horizontales en A y C, efectuamos un corte en la rótula B y analizamos el tramo AB del arco.

$$\sum M_B^{\text{izq}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 247,5 \cdot (18) - 135 \cdot (6) - 135 \cdot (12) - H_A \cdot (9) = 0$$

$$H_A = 225 \text{ kN} \rightarrow$$

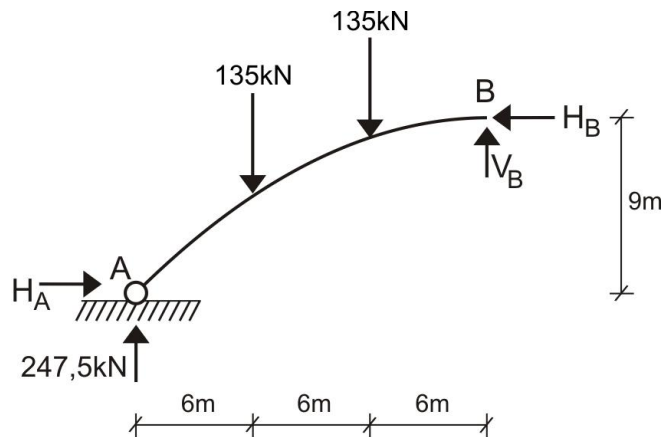


Fig. 2.43

Para determinar la reacción horizontal en el apoyo C, analizamos el equilibrio del arco ABC

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 225 - H_C = 0$$

$$H_C = 225 \text{ kN} \leftarrow$$

De esta manera, las reacciones finales de todo el arco se muestran en la figura 2.44

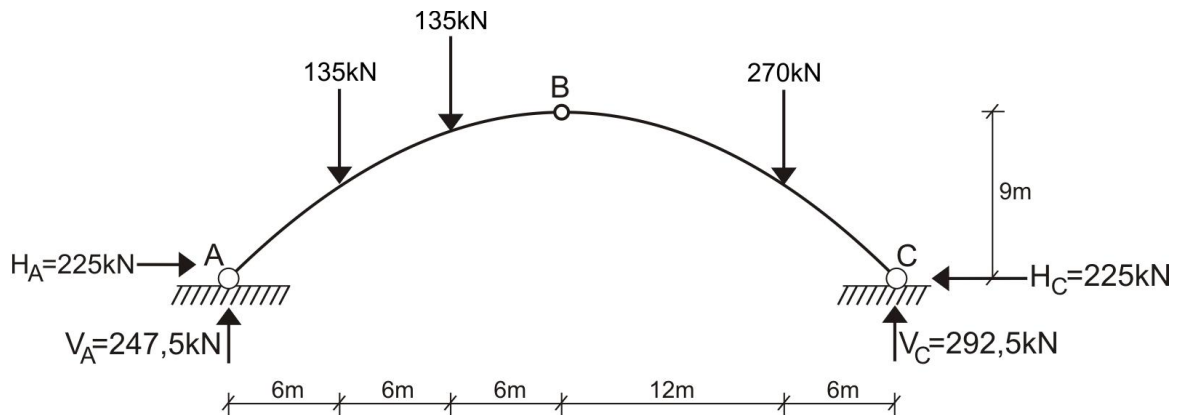


Fig. 2.44

PROBLEMA 2.16 Determinar las reacciones en los apoyos A y B del arco triarticulado ACB mostrado en la figura 2.45

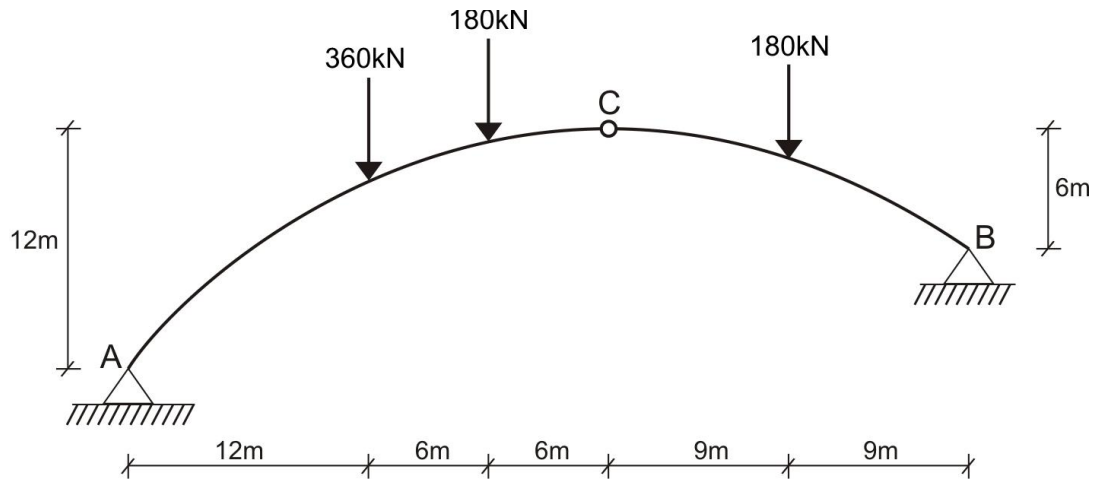


Fig. 2.45

Solución:

Efectuamos el equilibrio de todo el arco ACB

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B \cdot (42) - 360 \cdot (12) - 180 \cdot (18) - 180 \cdot (33) + H_B \cdot (6) = 0$$

$$7V_B + H_B = 2250 \quad (a)$$

Ahora, efectuamos un corte en la rótula C y analizamos el equilibrio del tramo CB

$$\sum M_C^{\text{der}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -180 \cdot (9) - H_B \cdot (6) + V_B \cdot (18) = 0$$

$$3V_B - H_B = 270 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$V_B = 252 \text{ kN} \uparrow$$

$$H_B = 486 \text{ kN} \leftarrow$$

Retornamos, para analizar el equilibrio de todo el arco, determinando las componentes de reacción en el apoyo A

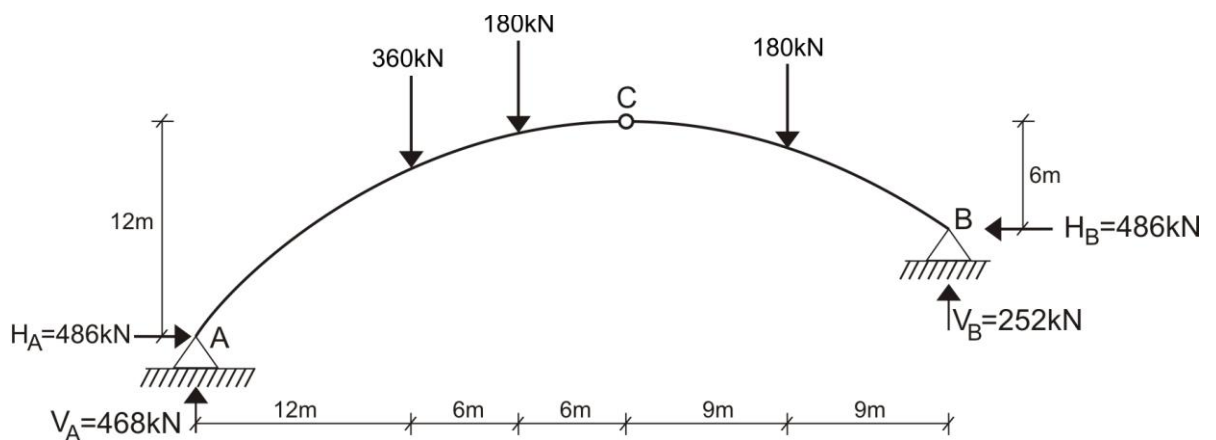


Fig. 2.46

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 486 = 0$$

$$H_A = 486 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 252 - 360 - 180 - 180 = 0$$

$$V_A = 468 \text{ kN} \uparrow$$

De esta manera, las componentes de reacción en los apoyos A y C se muestran en la figura 2.46

2.4 CALCULO DE ESTRUCTURAS COMPUESTAS

PROBLEMA 2.17 Para la estructura mostrada en equilibrio, determinar las componentes de reacción en los apoyos A, E y la tensión en el cable FG

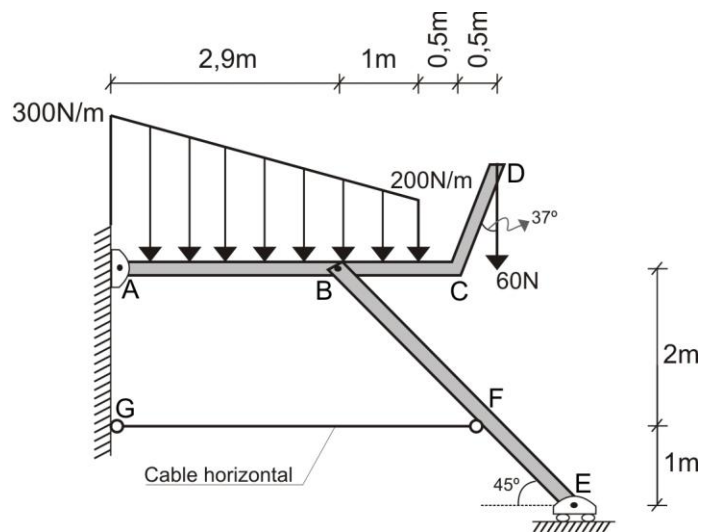


Fig. 2.47

Solución:

Efectuamos un corte por el cable y analizamos el equilibrio de toda la estructura.

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_E \cdot (5,9) - T_{FG} \cdot (2) - 200 \cdot (3,9) \cdot (1,95) - \frac{1}{2} \cdot (3,9) \cdot (100) \cdot (1,3) - 60 \cdot (4,9) = 0$$

$$5,9V_E - 2T_{FG} = 2068,5 \quad (a)$$

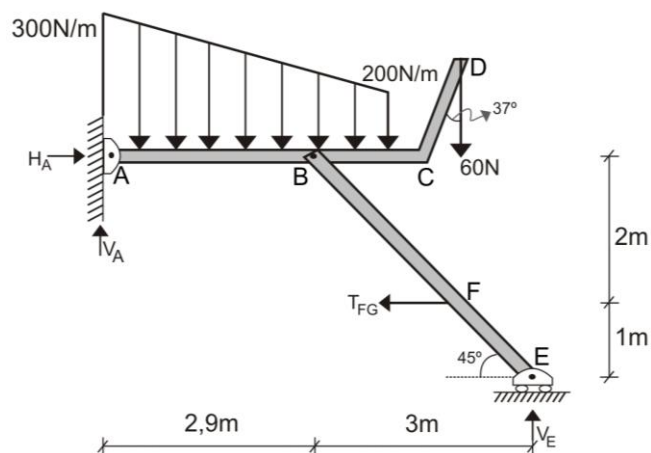


Fig. 2.48

Ahora, efectuamos un corte en el perno B y analizamos el tramo BE

$$\sum M_B^{\text{der}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E \cdot (3) - T_{FG} \cdot (2) = 0$$

$$2T_{FG} = 3V_E \quad (b)$$

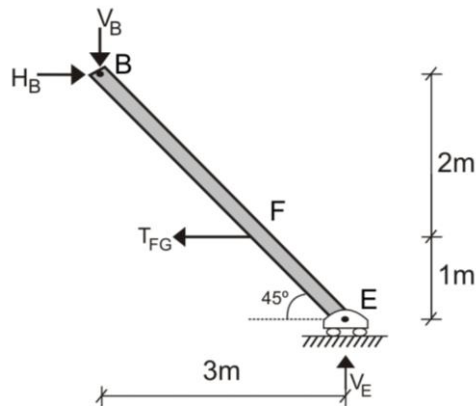


Fig. 2.49

Reemplazamos (b) en (a) y obtenemos:

$$V_E = 713,27\text{N} \uparrow$$

$$T_{FG} = 1069,91\text{N} \leftarrow$$

Luego, analizamos el equilibrio de todo el sistema:

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - T_{FG} = 0$$

$$H_A = 1069,91\text{N} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 713,27 - \frac{(200 + 300) \cdot 3,9}{2} - 60 = 0$$

$$V_A = 321,73\text{N} \uparrow$$

PROBLEMA 2.18 Para la estructura mostrada en la figura, despreciando el peso de AD, se pide calcular las reacciones en los apoyos, si el peso de la barra CDE es 125kg y el peso de la barra quebrada GEB es 250kg.

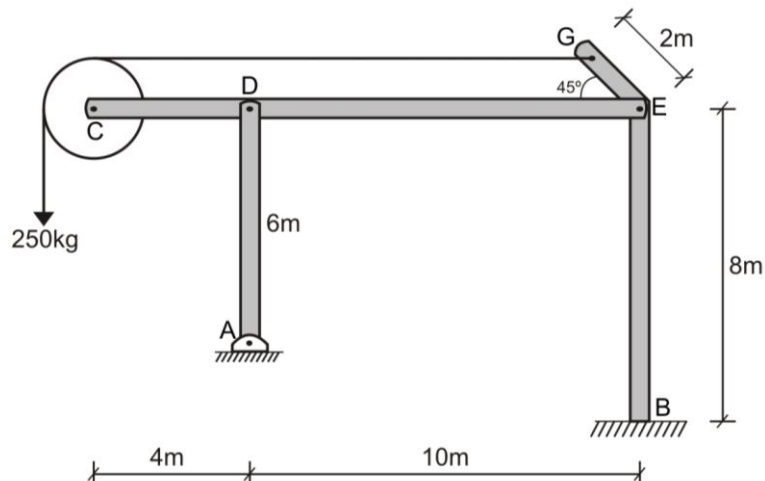


Fig. 2.50

Solución:

Calculamos las reacciones en el centro "C" de la polea:

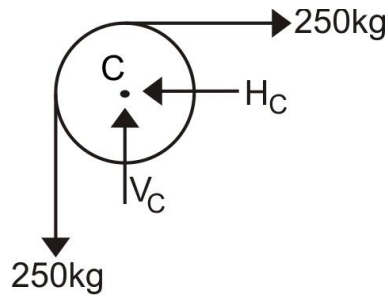


Fig. 2.51

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 250 - H_C = 0 \quad \therefore H_C = 250\text{kg} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_C - 250 = 0 \quad \therefore V_C = 250\text{kg} \uparrow$$

Ahora, pasamos dicho efecto en sentidos opuestos a la barra CDE y analizamos el equilibrio de la barra CDE incluyendo su peso de 125kg

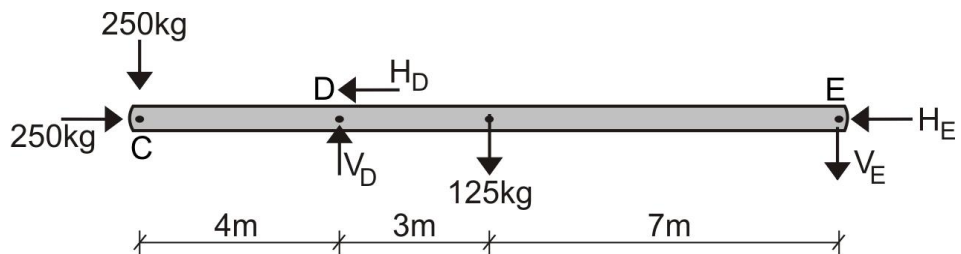


Fig. 2.52

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 250 \cdot (14) - V_D \cdot (10) + 125 \cdot (7) = 0 \quad \therefore V_D = 437,5\text{kg} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 437,5 - 125 - 250 - V_E = 0 \quad \therefore V_E = 62,5\text{kg} \downarrow$$

Nos detenemos en el análisis y pasamos a la barra AD

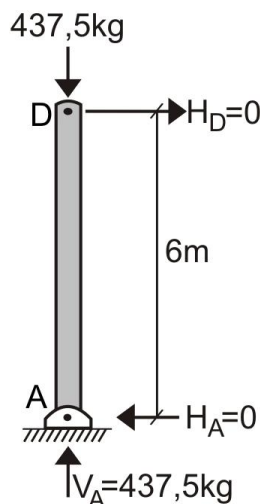


Fig. 2.53

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -H_D \cdot (6) = 0 \quad \therefore H_D = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - 437,5 = 0 \quad \therefore \quad V_A = 437,5 \text{kg} \uparrow$$

Ahora, retornamos al equilibrio de la barra CDE

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 250 - H_E = 0 \quad \therefore \quad H_E = 250 \text{kg} \leftarrow$$

Finalmente, analizamos el equilibrio de la barra GEB, aplicando los pesos en forma proporcional a sus longitudes y las acciones de las otras componentes en G y E

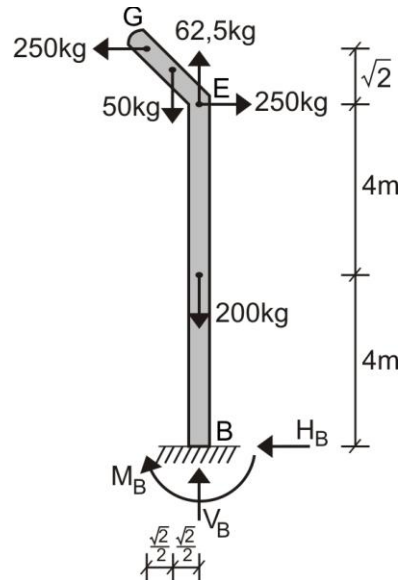


Fig. 2.54

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 250 - 250 - H_B = 0$$

$$H_B = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -50 + 62,5 - 200 + V_B = 0$$

$$V_B = 187,5 \text{kg} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_B - 250 \cdot (8) + 250 \cdot (8 + \sqrt{2}) + 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$M_B = 388,91 \text{kg.m}$$

El sentido del momento M_B es horario, tal como se muestra en la figura 2.54

PROBLEMA 2.19 Para la estructura mostrada en equilibrio, la polea tiene masa 120kg, determinar las componentes de reacción en:

- El centro E de la polea
- Los apoyos A y C
- La articulación G

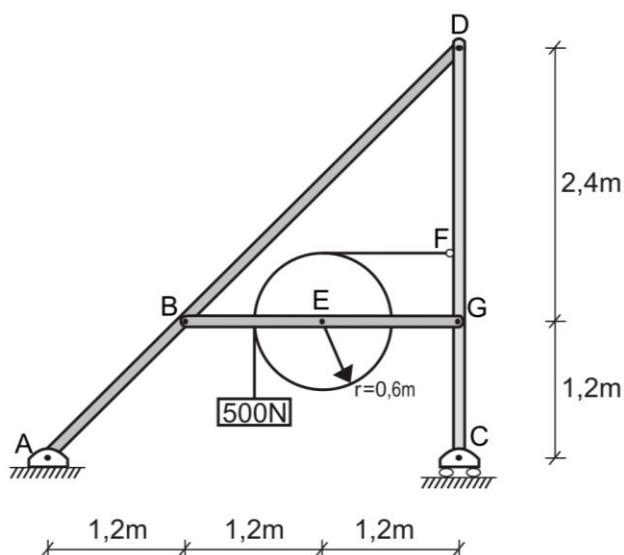


Fig. 2.55

Solución:

- a) Calculamos el peso en el centro de la polea:

$$P = mg = 120 \cdot (9,81) = 1177,2 \text{ N}$$

Luego, analizamos el equilibrio de la polea:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 500 - H_E = 0 \quad \therefore H_E = 500 \text{ N} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_E - 500 - 1177,2 = 0 \quad \therefore V_E = 1677,2 \text{ N} \uparrow$$

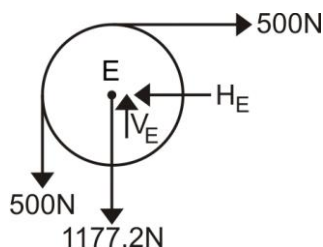


Fig. 2.56

- b) Aplicamos todas las reacciones y sus acciones en toda la estructura (figura 2.57)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + 500 - 500 = 0$$

$$H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C \cdot (3,6) + 500 \cdot (1,8) - 500 \cdot (1,2) - 1677,2 \cdot (2,4) = 0$$

$$V_C = 1034,8 \text{ N} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 1034,8 - 1677,2 = 0$$

$$V_A = 642,4 \text{ N} \uparrow$$

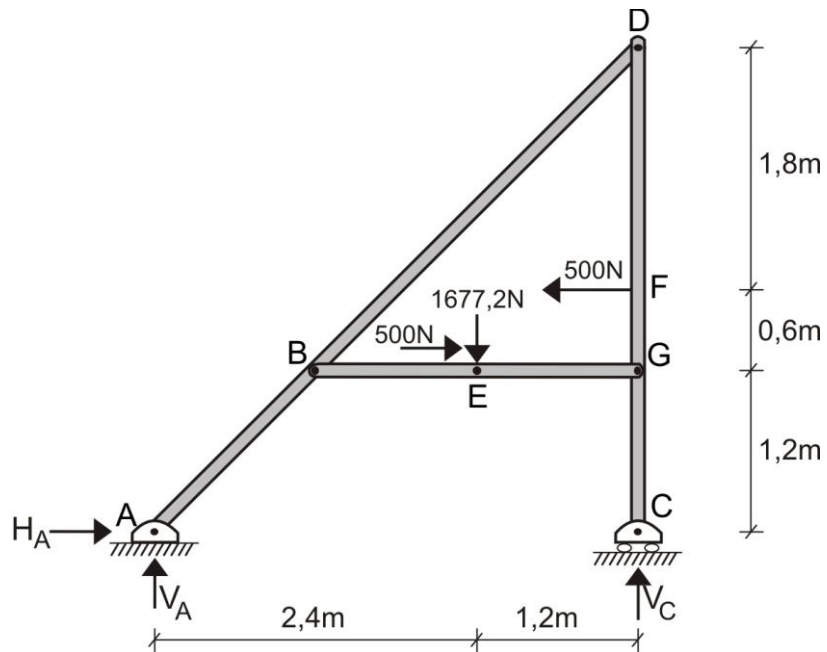


Fig. 2.57

c) Analizamos el equilibrio de la barra BEG

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_G \cdot (2,4) - 1677,2 \cdot (1,2) = 0 \quad \therefore V_G = 838,6\text{N} \uparrow$$

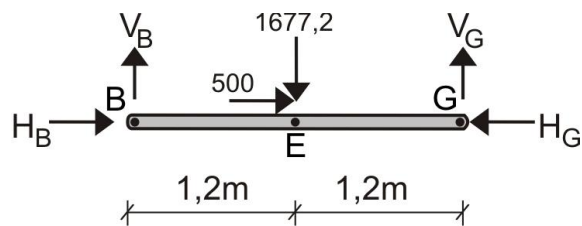


Fig. 2.58

Luego, analizamos el equilibrio de la barra DGC:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -500 \cdot (1,8) + H_G \cdot (2,4) = 0 \quad \therefore H_G = 375\text{N} \rightarrow$$

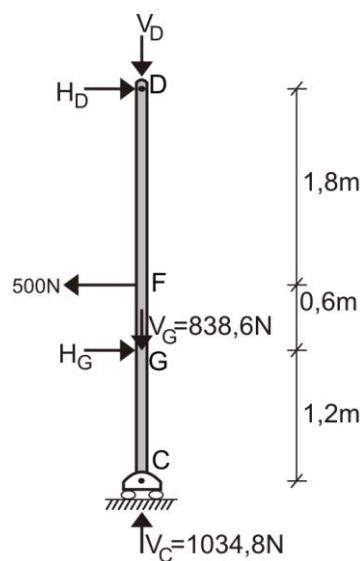


Fig. 2.59

PROBLEMA 2.20 La siguiente estructura está en equilibrio y formada por dos barras AB y BC de pesos 50N y 80N respectivamente. Se pide:

- Determinar las componentes de reacción en los apoyos.
- Dibujar el diagrama de cuerpo libre del perno en B, indicando las componentes de las fuerzas que actúan sobre el mismo.

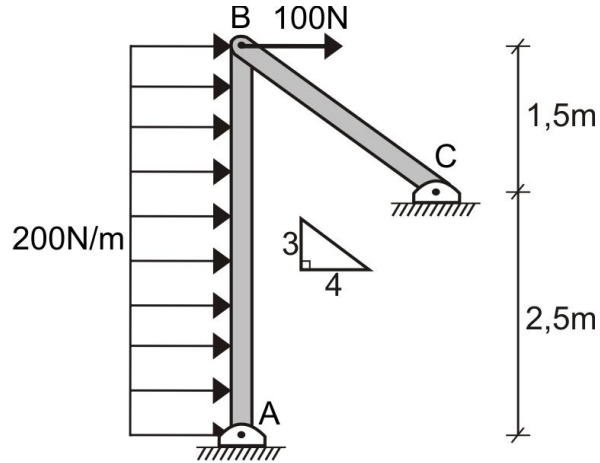


Fig. 2.60

Solución:

- Ubicamos las cargas y pesos sobre la estructura, analizando su equilibrio:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C \cdot (2) + H_C \cdot (2,5) - 80 \cdot (1) - 100 \cdot (4) - 200 \cdot (4) \cdot (2) = 0$$

$$2V_C + 2,5H_C = 2080 \quad (a)$$

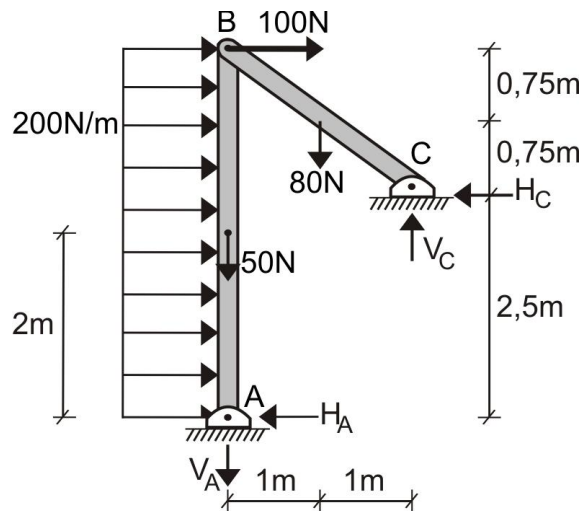


Fig. 2.61

Ahora, analizamos el equilibrio de la parte derecha de la estructura, efectuando un corte en el perno B.

$$\sum M_B^{\text{der}} = 0 \Rightarrow V_C \cdot (2) - H_C \cdot (1,5) - 80 \cdot (1) = 0$$

$$2V_C - 1,5H_C = 80 \quad (b)$$

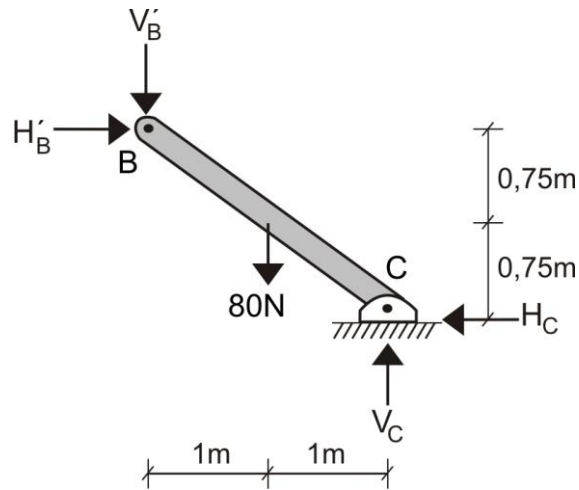


Fig. 2.62

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$V_C = 415\text{N} \uparrow$$

$$H_C = 500\text{N} \leftarrow$$

Analizamos el equilibrio del tramo BC:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H'_B - 500 = 0 \quad \therefore H'_B = 500\text{N} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 415 - 80 - V'_B = 0 \quad \therefore V'_B = 335\text{N} \downarrow$$

Retornamos al sistema completo (figura 2.61), para analizar su equilibrio:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_A + 200 \cdot (4) + 100 - 500 = 0 \quad \therefore H_A = 400\text{N} \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -V_A - 50 - 80 + 415 = 0 \quad \therefore V_A = 285\text{N} \downarrow$$

Ahora, analizamos la barra AB y comprobamos su equilibrio:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -400 - H_B + 200 \cdot (4) = 0 \quad \therefore H_B = 400\text{N} \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_B - 50 - 285 = 0 \quad \therefore V_B = 335\text{N} \uparrow$$

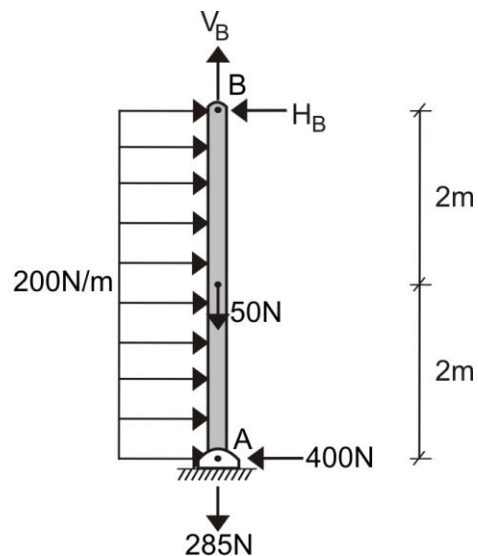


Fig. 2.63

- b) Con los valores obtenidos, dibujamos el DCL del perno B y comprobamos que existe equilibrio en dicho nudo, lo cual certifica el correcto cálculo.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 400 + 100 - 500 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 335 - 335 = 0$$

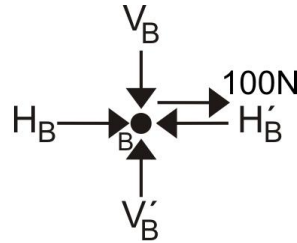


Fig. 2.64

PROBLEMA 2.21 Para el sistema en equilibrio mostrado en la figura, calcular:

- Las reacciones en el centro E de la polea
- La reacción en el apoyo C y las fuerzas internas en el perno B
- La reacción en el apoyo A y el diagrama de cuerpo libre del perno B

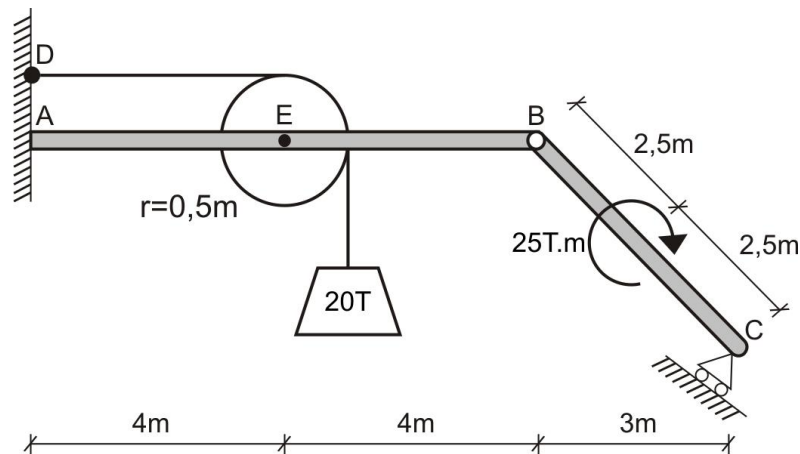


Fig. 2.65

Solución:

- a) Calculamos las reacciones en el centro E de la polea:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_E - 20 = 0 \quad \therefore H_E = 20T \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_E - 20 = 0 \quad \therefore V_E = 20T \uparrow$$

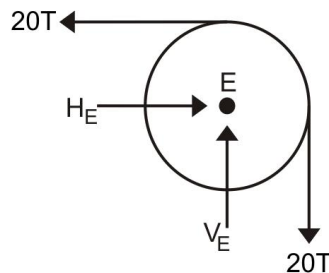


Fig. 2.66

b) Efectuamos un corte en el perno B (rótula) y analizamos el equilibrio en la barra BC

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_C \cdot (5) - 25 = 0 \quad \therefore V_C = 5T$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 5 \cos 37^\circ - H_B = 0 \quad \therefore H_B = 4T \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 5 \sin 37^\circ - V_B = 0 \quad \therefore V_B = 3T \downarrow$$

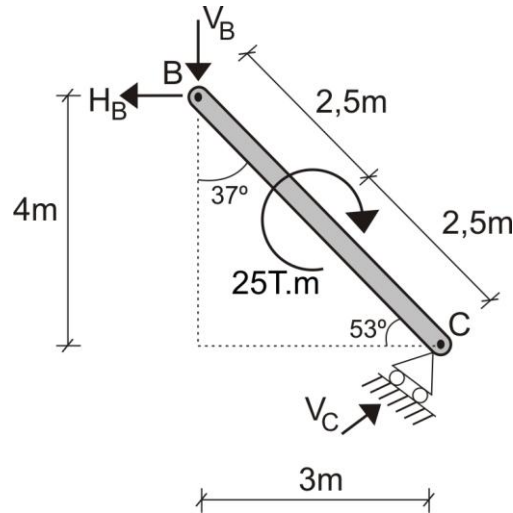


Fig. 2.67

c) Ahora, analizamos el equilibrio de la barra ADB, efectuándolo de 2 formas:

1ra. FORMA:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 20 + 4 = 0 \quad \therefore H_A = 16T \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 20 + 3 = 0 \quad \therefore V_A = 17T \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 3 \cdot (8) - 20 \cdot (4,5) + 20 \cdot (0,5) + M_A = 0 \quad \therefore M_A = 56T.m$$

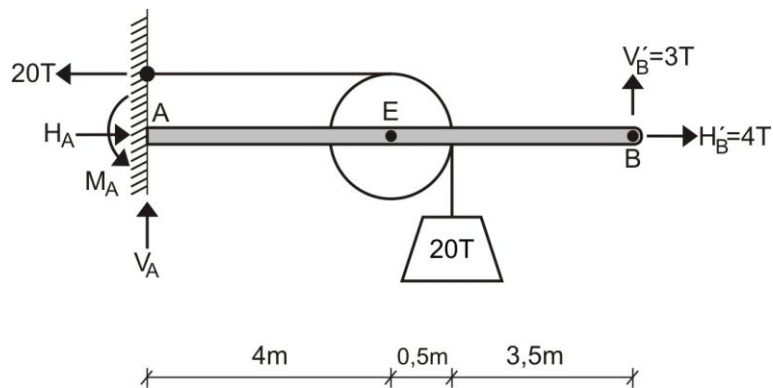


Fig. 2.68

2da. FORMA:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A + 4 - 20 = 0 \quad \therefore H_A = 16T \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 20 + 3 = 0 \quad \therefore V_A = 17T \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 20 \cdot (4) + 3 \cdot (8) = 0 \quad \therefore M_A = 56T.m$$

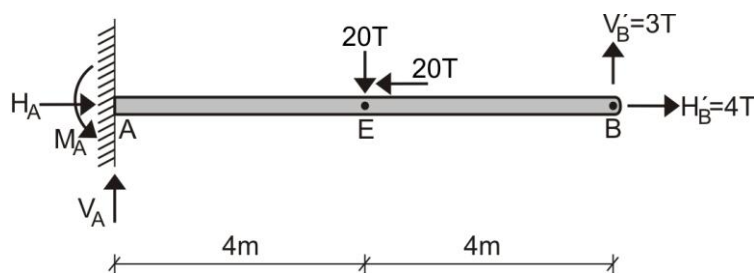


Fig. 2.69

Efectuamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) del perno B y comprobamos el equilibrio en dicho nudo, corroborando, de esta manera, el correcto análisis.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 4 - 4 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3 - 3 = 0$$

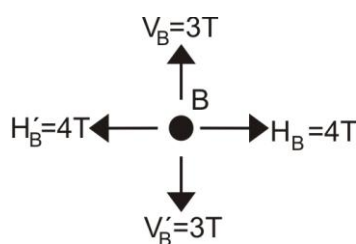


Fig. 2.70

PROBLEMA 2.22 La siguiente estructura en equilibrio está formada por dos barras AB y BC, donde la barra AB es de peso despreciable, la barra BC tiene $0,5T$ de peso y la polea es de peso despreciable, con radio $r = 0,5m$. Se pide:

- Determinar las componentes de reacción en los apoyos A y C
- Dibujar el diagrama de cuerpo libre del perno en B, indicando las componentes de las fuerzas que actúan sobre el mismo.

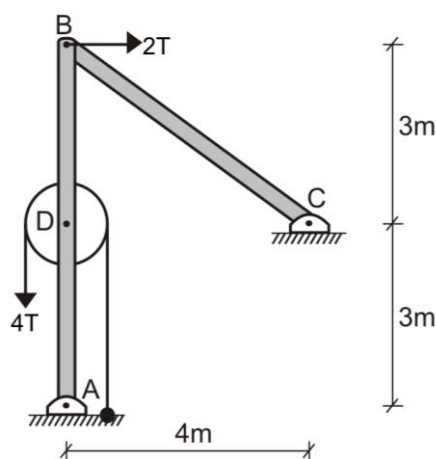


Fig. 2.71

Solución:

- Analizamos el equilibrio de toda la estructura, incorporando el peso de la barra BC (figura 2.72):

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C \cdot (4) + H_C \cdot (3) - 2 \cdot (6) - 0,5 \cdot (2) + 4 \cdot (0,5) - 4 \cdot (0,5) = 0$$

$$4V_C + 3H_C = 13 \quad (a)$$

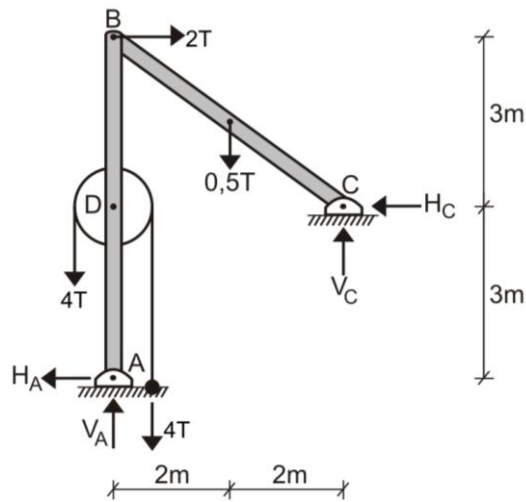


Fig. 2.72

Ahora, analizamos el equilibrio de la barra BC:

$$\sum M_B^{\text{der}} = 0 \Rightarrow V_C \cdot (4) - H_C \cdot (3) - 0,5 \cdot (2) = 0$$

$$4V_C - 3H_C = 1 \quad (b)$$

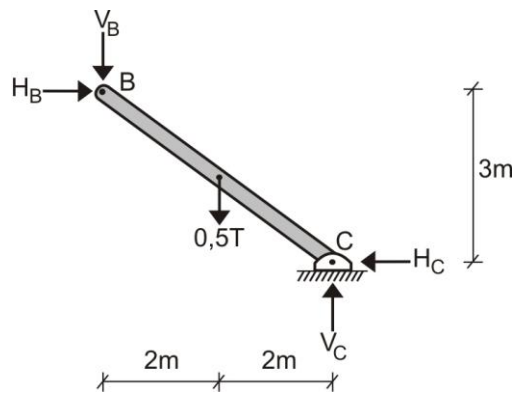


Fig. 2.73

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$V_C = 1,75T \uparrow$$

$$H_C = 2T \leftarrow$$

Luego, analizamos el equilibrio de la barra BC:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_B - 2 = 0 \quad \therefore H_B = 2T \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 1,75 - 0,5 - V_B = 0 \quad \therefore V_B = 1,25T \downarrow$$

Retornamos al sistema completo (figura 2.72):

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -H_A - 2 + 2 = 0 \quad \therefore H_A = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 8 - 0,5 + 1,75 = 0 \quad \therefore V_A = 6,75T \uparrow$$

Ahora, analizamos el equilibrio de la barra AB:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H'_B - 0 = 0 \quad \therefore H'_B = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 6,75 + V'_B - 8 = 0 \quad \therefore V'_B = 1,25T \uparrow$$

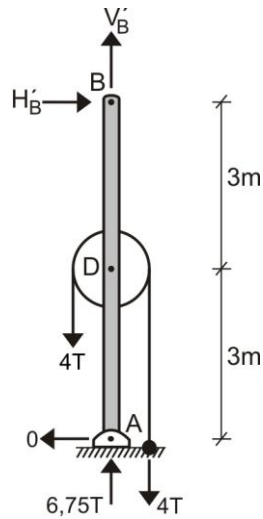


Fig. 2.74

b) Con los valores obtenidos, dibujamos el DCL del perno B y comprobamos el equilibrio del mismo

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 0 - 2 + 2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1,25 - 1,25 = 0$$

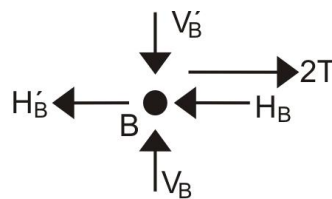


Fig. 2.75

2.5 CALCULO DE REACCIONES DE ESTRUCTURAS ESPACIALES

PROBLEMA 2.23 Calcular las reacciones que surgen en el empotramiento A, por efecto del sistema de cargas mostrado en la figura. Considerar que la barra CD es paralela al eje Z

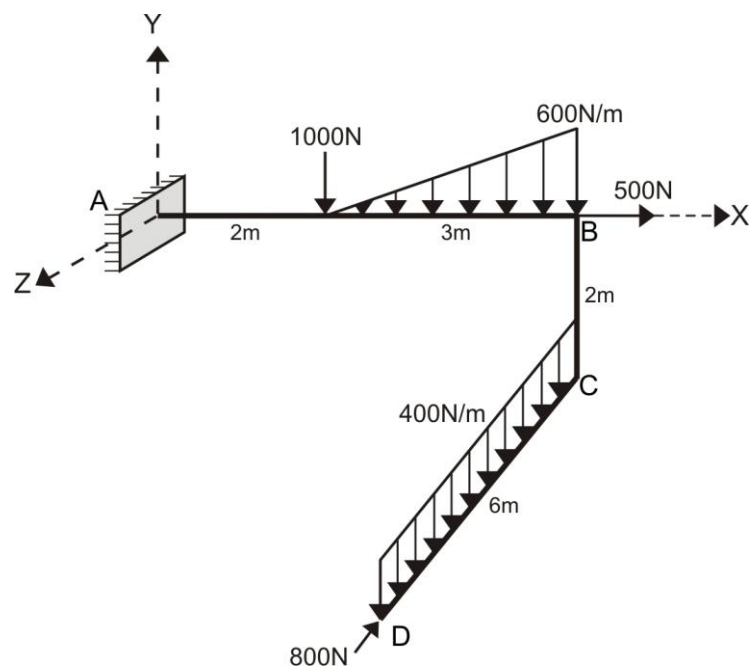


Fig. 2.76

Solución:

Sabemos que en un empotramiento en 3D existen 6 reacciones (3 fuerzas y 3 momentos), teniendo que analizar el equilibrio para 6 ecuaciones.

Orientamos las reacciones en el punto A (fuerzas) en las direcciones mostradas en la figura 2.77

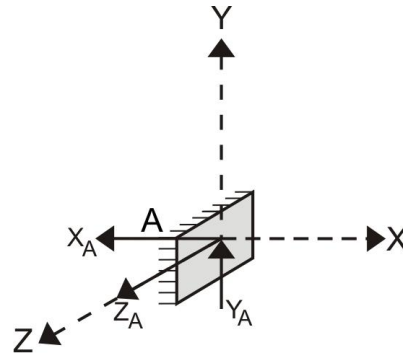


Fig. 2.77

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -X_A + 500 = 0$$

$$X_A = 500\text{N} \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_A - 1000 - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (600) - 400 \cdot (6) = 0$$

$$Y_A = 4300\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_A - 800 = 0$$

$$Z_A = 800\text{N}$$

La orientación de la reacción Z_A es la misma que la mostrada en la figura 2.77

Proyectamos los momentos en los planos YZ, XZ, XY, con la finalidad de determinar los momentos respecto a los ejes X, Y, Z respectivamente.

$$\sum M_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_X^A + 800 \cdot (2) + 400 \cdot (6) \cdot (3) = 0 \quad \therefore \quad M_X^A = 8800\text{N.m}$$

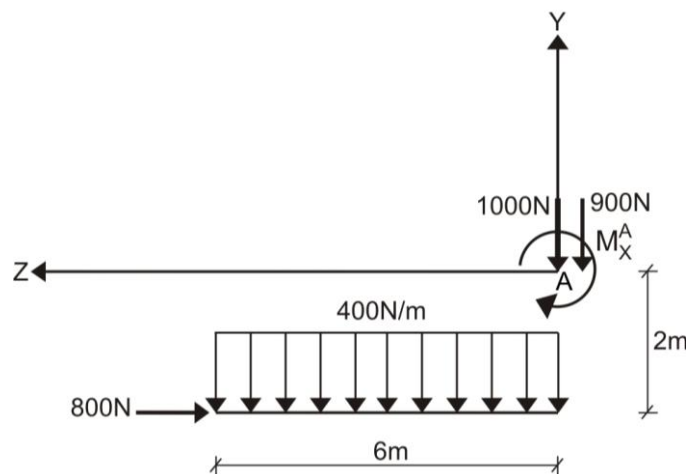


Fig. 2.78

$$\sum M_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_Y^A + 800 \cdot (5) = 0 \quad \therefore \quad M_Y^A = 4000\text{N.m}$$

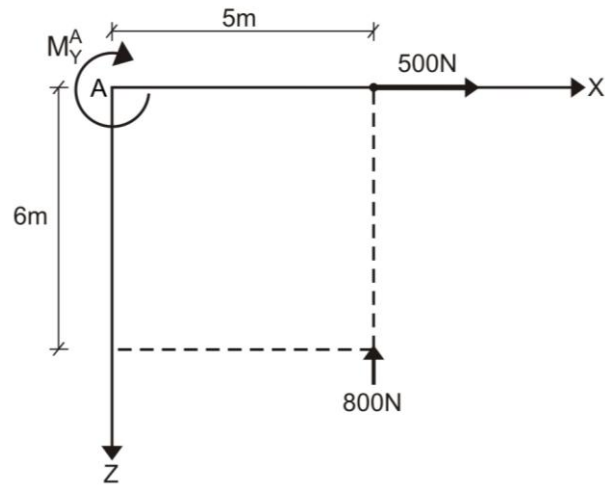


Fig. 2.79

$$\sum M_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad M_Z^A - 1000 \cdot (2) - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (600) \cdot (4) - 2400 \cdot (5) = 0$$

$$M_Z^A = 17600 \text{ N.m}$$

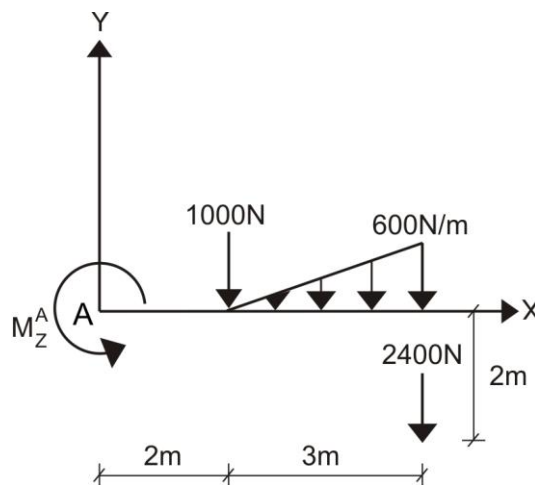


Fig. 2.80

PROBLEMA 2.24 La losa homogénea pesa $P = 8\text{kN}$ y está unida a la pared por medio de una rótula esférica A, una rótula cilíndrica B y un cable AD, cuyo peso se desprecia. La losa soporta una carga $F = 15\text{kN}$ y un par de fuerzas con momento $M = 5\text{kN.m}$. Se pide determinar las reacciones en los apoyos y la tensión en el cable.

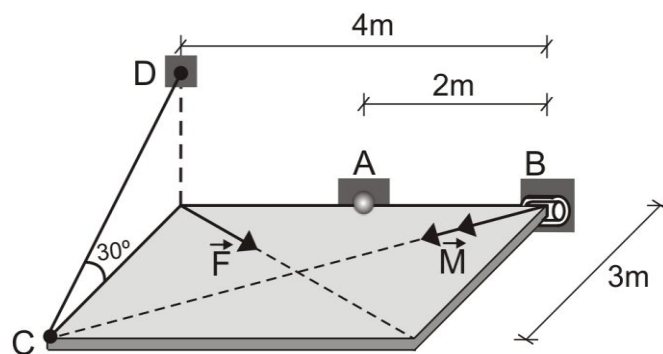


Fig. 2.81

Solución:

Elaboramos el esquema de cálculo, incorporando las cargas y reacciones en la losa. El peso "P" lo aplicamos en el centroide de la losa, es decir en la intersección de las diagonales.

El sistema de ejes coordenados, lo elegimos de tal manera que la mayor cantidad de incógnitas sean paralelas a los ejes coordenados o intersecan a los mismos, disminuyendo, así, el cálculo.

Para simplicidad de cálculo, descomponemos los vectores \vec{F} y \vec{M} por medio de sus proyecciones en los ejes coordenados.

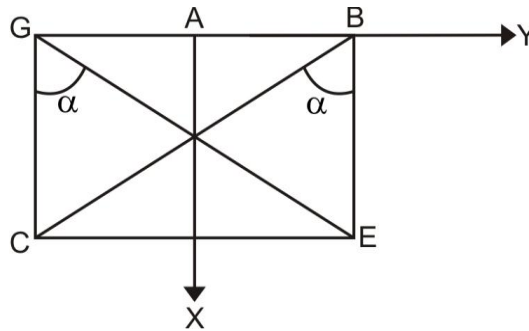


Fig. 2.82

FUERZA "F":

$$F_1 = F \cos \alpha$$

$$F_2 = F \operatorname{sen} \alpha$$

MOMENTO "M":

$$M_1 = M \cos \alpha$$

$$M_2 = M \operatorname{sen} \alpha$$

Siendo:

$$\cos \alpha = \frac{GC}{GE} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{CE}{GE} = \frac{4}{5} = 0,8$$

De esta manera, obtenemos:

$$F_1 = 15 \cdot 0,6 = 9 \text{ kN}$$

$$F_2 = 15 \cdot 0,8 = 12 \text{ kN}$$

$$M_1 = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ kN.m}$$

$$M_2 = 5 \cdot 0,8 = 4 \text{ kN.m}$$

La tensión \vec{S} en el cable también lo descomponemos en sus proyecciones:

$$S_1 = S \cdot \cos 30^\circ = 0,866S$$

$$S_3 = S \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 0,5S$$

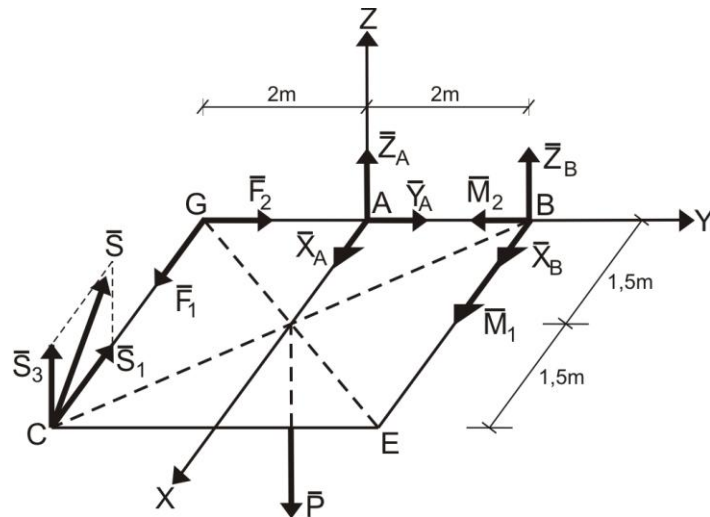


Fig. 2.83

Plateamos las ecuaciones de equilibrio estático:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_1 - S_1 + X_A + X_B = 0 \quad (a)$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_2 + Y_A = 0 \quad (b)$$

$$\sum F_Z = 0 \Rightarrow S_3 - P + Z_A + Z_B = 0 \quad (c)$$

$$\sum M_X = 0 \Rightarrow -S_3 \cdot 2 + Z_B \cdot 2 + M_1 = 0 \quad (d)$$

$$\sum M_Y = 0 \Rightarrow -S_3 \cdot 3 + P \cdot 1,5 - M_2 = 0 \quad (e)$$

$$\sum M_Z = 0 \Rightarrow -S_1 \cdot 2 + F_1 \cdot 2 - X_B \cdot 2 = 0 \quad (f)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) – (f), previamente, reemplazamos los valores calculados anteriormente, obteniendo:

$$X_A = -8,76 \text{ kN}$$

$$Y_A = -12 \text{ kN}$$

$$Z_A = 4,16 \text{ kN}$$

$$X_B = 4,38 \text{ kN}$$

$$Z_B = 1,17 \text{ kN}$$

$$S = 5,33 \text{ kN}$$

CAPITULO 3

CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA

3.1 CENTROIDE DE ALAMBRES

PROBLEMA 3.1 Un alambre compuesto delgado de sección uniforme ABCD está conformado por un tramo AB de cuarto de circunferencia y dos tramos rectos BC y CD donde este último es vertical. Determinar las coordenadas de su centro de gravedad.

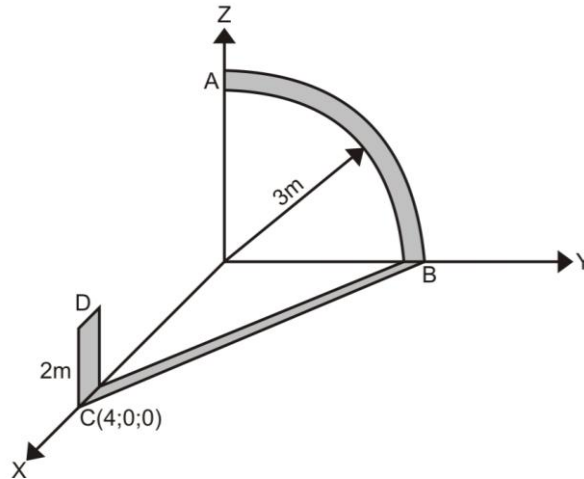


Fig. 3.1

Solución:

Para determinar el centro de gravedad de figuras, como es el caso de alambres compuestos, se divide en sectores conocidos (tramo cuarto de círculo AB y líneas BC y CD).

Para el caso del cuarto de círculo, tenemos:

$$L_{AB} = \frac{\pi R}{2} = \frac{3\pi}{2} = 1,5\pi$$

$$Y_{CG} = Z_{CG} = \frac{2R}{\pi} = \frac{2 \cdot 3}{\pi} = \frac{6}{\pi}$$

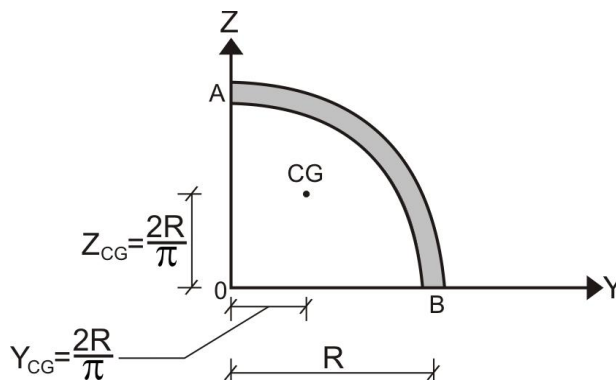


Fig. 3.2

Las longitudes y ubicación de los centros de gravedad de las líneas BC y CD se conocen y muestran en la tabla 3.1

Tabla 3.1

TRAMO	L_i (m)	\bar{X}_i	\bar{Y}_i	\bar{Z}_i
AB	$1,5\pi$	0	$6/\pi$	$6/\pi$
BC	5	2	1,5	0
CD	2	4	0	1

Luego, determinamos las coordenadas del centro de gravedad:

$$\bar{X} = \frac{\sum L_i \bar{X}_i}{\sum L_i} = \frac{1,5\pi.(0) + 5.(2) + 2.(4)}{1,5\pi + 5 + 2} = \frac{18}{11,712} = 1,537\text{m}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum L_i \bar{Y}_i}{\sum L_i} = \frac{1,5\pi.\left(\frac{6}{\pi}\right) + 5.(1,5) + 2.(0)}{11,712} = \frac{16,5}{11,712} = 1,409\text{m}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum L_i \bar{Z}_i}{\sum L_i} = \frac{1,5\pi.\left(\frac{6}{\pi}\right) + 5.(0) + 2.(1)}{11,712} = \frac{11}{11,712} = 0,939\text{m}$$

PROBLEMA 3.2 Sabiendo que la coordenada en “Z” del centro de gravedad del siguiente alambre delgado homogéneo es 0,466m. Determinar “R”, sabiendo que la semi-circunferencia se encuentra en el plano YZ

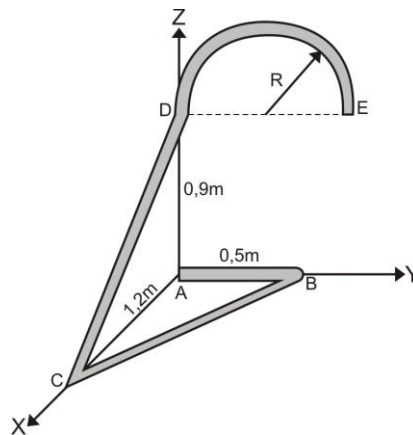


Fig. 3.3

Solución:

Determinamos las longitudes de cada tramo:

$$L_{AB} = 0,5\text{m}$$

$$L_{BC} = \sqrt{0,5^2 + 1,2^2} = 1,3\text{m}$$

$$L_{CD} = \sqrt{0,9^2 + 1,2^2} = 1,5\text{m}$$

$$L_{DE} = \pi R$$

En la tabla 3.2 se tienen las longitudes y centroides de cada tramo.

Tabla 3.2

TRAMO	L_i (m)	\bar{Z}_i
AB	0,5	0
BC	1,3	0
CD	1,5	0,45
DE	πR	$0,9 + \frac{2R}{\pi}$

Luego:

$$\bar{Z} = \frac{\sum L_i \bar{Z}_i}{\sum L_i} \Rightarrow 0,466 = \frac{0,5 \cdot (0) + 1,3 \cdot (0) + 1,5 \cdot (0,45) + \pi R \cdot \left(0,9 + \frac{2R}{\pi}\right)}{0,5 + 1,3 + 1,5 + \pi R}$$

Efectuamos cálculos y obtenemos:

$$2R^2 + 1,3634R - 0,8628 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática, tomando solo el valor positivo, ya que el radio siempre será así, obteniendo:

$$R = 0,4m$$

3.2 CENTROIDE DE AREAS

PROBLEMA 3.3 Determinar las coordenadas del centroide de la lámina compuesta delgada, la cual está formada por una región de cuarto de círculo y otra región rectangular hueca.

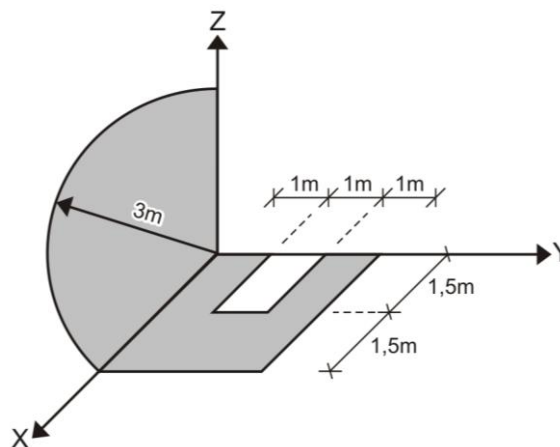


Fig. 3.4

Solución:

Analizamos cada figura en forma independiente, determinando sus áreas y coordenadas del centro de gravedad.

FIGURA 1:

$$\bar{X}_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot (3)}{3\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$\bar{Y}_1 = 0$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot (3)}{3\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} \cdot R^2 = \frac{\pi \cdot (3)^2}{4} = 2,25\pi$$

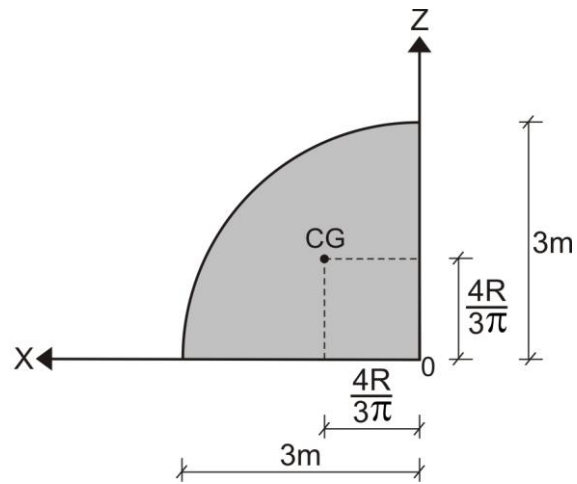


Fig. 3.5

FIGURA 2:

$$\bar{X}_2 = 1,5$$

$$\bar{Y}_2 = 1,5$$

$$\bar{Z}_2 = 0$$

$$A_2 = 3 \cdot 3 = 9$$

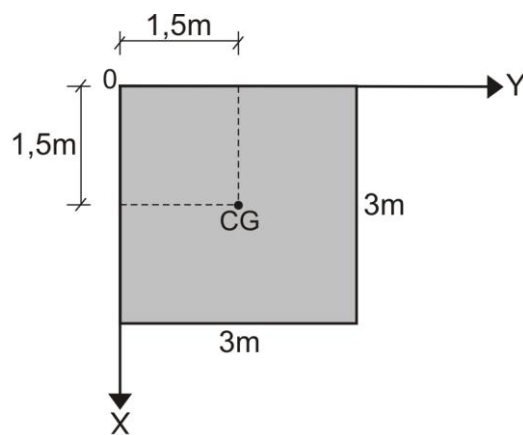


Fig. 3.6

FIGURA 3:

$$\bar{X}_3 = 0,75$$

$$\bar{Y}_3 = 1,5$$

$$\bar{Z}_3 = 0$$

$$A_3 = 1 \cdot 1,5 = 1,5$$

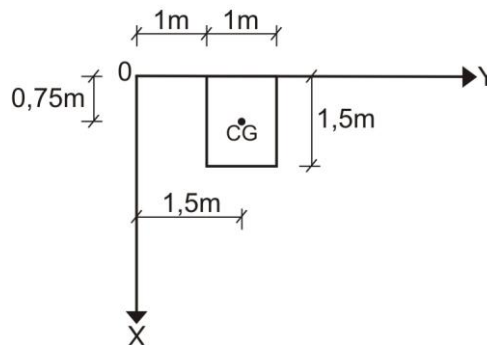


Fig. 3.7

Con los resultados obtenidos, elaboramos la tabla 3.3, con la finalidad de determinar las coordenadas del centro de gravedad de la lámina compuesta.

Tabla 3.3

FIGURA	A_i (m ²)	\bar{X}_i	\bar{Y}_i	\bar{Z}_i	$A_i \bar{X}_i$	$A_i \bar{Y}_i$	$A_i \bar{Z}_i$
1	$2,25\pi$	$4/\pi$	0	$4/\pi$	9	0	9
2	9	1,5	1,5	0	13,5	13,5	0
3	-1,5	0,75	1,5	0	-1,125	-2,25	0
Σ	14,568	-	-	-	21,375	11,25	9

Nótese, que el área de la figura 3, es negativa, por ser la lámina hueca en esa parte.

Luego:

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{X}_i}{\sum A_i} = \frac{21,375}{14,568} = 1,467\text{m}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{Y}_i}{\sum A_i} = \frac{11,25}{14,568} = 0,772\text{m}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum A_i \bar{Z}_i}{\sum A_i} = \frac{9}{14,568} = 0,618\text{m}$$

PROBLEMA 3.4 Sabiendo que las coordenadas del centro de gravedad de la lámina delgada homogénea mostrada es $(0,421; \bar{Y}; \bar{Z})$. Determinar a , \bar{Y} , \bar{Z} .

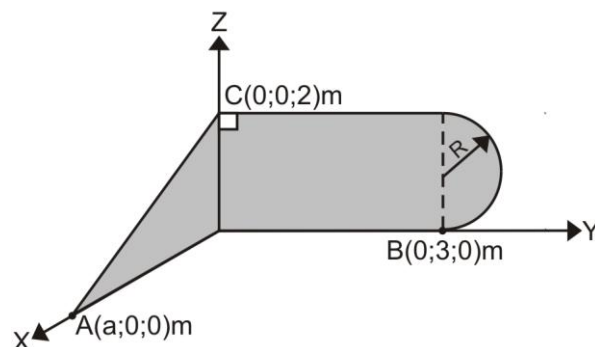


Fig. 3.8

Solución:

Una vez más, dividimos en figuras regulares.

FIGURA 1:

$$\bar{X}_1 = \frac{a}{3}$$

$$\bar{Y}_1 = 0$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot (a) \cdot (2) = a$$

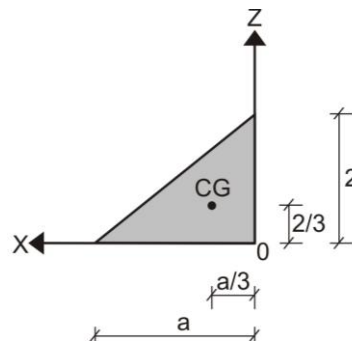


Fig. 3.9

FIGURA 2:

$$\bar{X}_2 = 0$$

$$\bar{Y}_2 = 1,5$$

$$\bar{Z}_2 = 1$$

$$A_2 = 2 \cdot 3 = 6$$

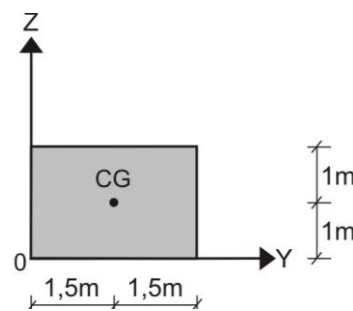


Fig. 3.10

FIGURA 3:

$$\bar{X}_3 = 0$$

$$\bar{Y}_3 = 3 + \frac{4 \cdot (1)}{3\pi} = 3 + \frac{4}{3\pi}$$

$$\bar{Z}_3 = 1$$

$$A_3 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

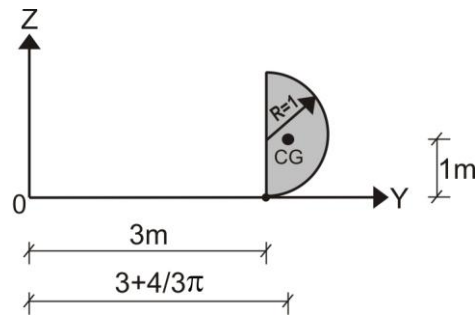


Fig. 3.11

Luego:

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{X}_i}{\sum A_i} \Rightarrow 0,421 = \frac{a \cdot \left(\frac{a}{3}\right) + 6 \cdot (0) + \frac{\pi}{2} \cdot (0)}{a + 6 + \frac{\pi}{2}}$$

Efectuando cálculos se obtiene:

$$a^2 - 1,263a - 9,561 = 0$$

Tomamos solo el valor positivo de la solución de la ecuación cuadrática, obteniendo:

$$a = 3,787\text{m}$$

Ahora, determinamos las otras coordenadas del centro de gravedad de toda la figura:

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{Y}_i}{\sum A_i} = \frac{3,787 \cdot (0) + 6 \cdot (1,5) + \frac{\pi}{2} \cdot \left(3 + \frac{4}{3\pi}\right)}{3,787 + 6 + \frac{\pi}{2}} = 1,266\text{m}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum A_i \bar{Z}_i}{\sum A_i} = \frac{3,787 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 6 \cdot (1) + \frac{\pi}{2} \cdot (1)}{3,787 + 6 + \frac{\pi}{2}} = 0,889\text{m}$$

3.3 MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS PLANAS

PROBLEMA 3.5 Determinar los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales de la sección transversal mostrada en la figura 3.12, cuyas dimensiones están dadas en centímetros.

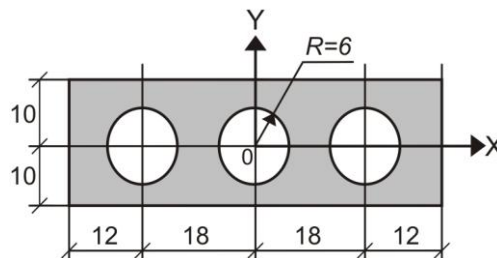


Fig. 3.12

Solución:

Los ejes OX y OY se denominan centrales principales de toda la sección transversal.

Determinamos los momentos de inercia, áreas del rectángulo y de cada uno de los círculos huecos.

RECTANGULO:

$$I_X^{(1)} = \frac{bh^3}{12} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40000 \text{cm}^4$$

$$I_Y^{(1)} = \frac{hb^3}{12} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000 \text{cm}^4$$

$$A_1 = 60 \cdot 20 = 1200 \text{cm}^2$$

CIRCULO:

$$I_X^{(2)} = I_Y^{(2)} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi \cdot 6^4}{4} = 1017,88 \text{cm}^4$$

$$A_2 = \pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 113,10 \text{cm}^2$$

Calculamos los momentos de inercia respecto a los ejes principales centrales, aplicando el teorema de ejes paralelos:

$$I_X = I_X^{(1)} - 3I_X^{(2)} = 40000 - 3 \cdot 1017,88 = 36946,36 \text{cm}^4$$

$$I_Y = I_Y^{(1)} - 3I_Y^{(2)} - 2A_2 \cdot d^2 = 360000 - 3 \cdot 1017,88 - 2 \cdot 113,10 \cdot 18^2 = 283657,56 \text{cm}^4$$

PROBLEMA 3.6 Determinar los momentos de inercia respecto a los ejes principales centrales de la sección transversal mostrada en la figura 3.13, cuyas dimensiones están dadas en centímetros.

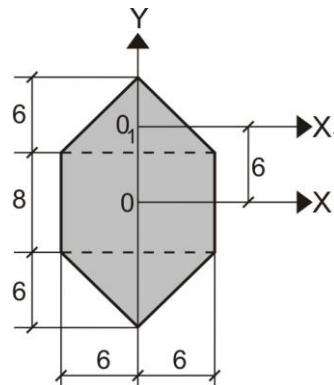


Fig. 3.13

Solución:

Dividimos la sección transversal en tres figuras geométricas sencillas: un rectángulo y dos triángulos isósceles.

Calculamos las áreas y momentos de inercia del rectángulo y triángulos, respecto a sus ejes centrales.

RECTANGULO (eje central XOY):

$$I_X^{(1)} = \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 512 \text{cm}^4$$

$$I_Y^{(1)} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152 \text{cm}^4$$

$$A_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{cm}^2$$

TRIANGULO (eje central X_1O_1Y)

$$I_{X_1}^{(2)} = \frac{bh^3}{36} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{cm}^4$$

$$I_Y^{(2)} = \frac{hb^3}{48} = \frac{6 \cdot 12^3}{48} = 216 \text{cm}^4$$

$$A_2 = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{cm}^2$$

Ahora, calculamos los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales OX y OY, considerando el teorema de ejes paralelos.

$$I_X = I_X^{(1)} + 2(I_{X_1}^{(2)} + A_2 \cdot d^2) = 512 + 2(72 + 36 \cdot 6^2) = 3248 \text{cm}^4$$

$$I_Y = I_Y^{(1)} + 2I_Y^{(2)} = 1152 + 2 \cdot 216 = 1584 \text{cm}^4$$

PROBLEMA 3.7 Determinar la ubicación del centro de gravedad y los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales de la sección transversal mostrado en la figura 3.14, cuyas dimensiones están dadas en centímetros.

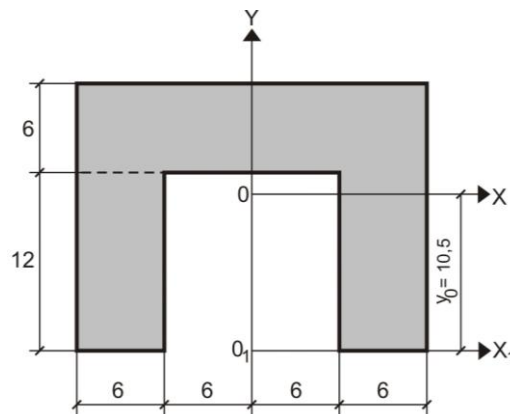


Fig. 3.14

Solución:

La sección transversal mostrada, se puede analizar como un rectángulo de 24cm x 18cm y otro rectángulo hueco de 12cm x 12cm

El área de la sección transversal es:

$$A = 24 \cdot 18 - 12 \cdot 12 = 288 \text{cm}^2$$

Para determinar la posición del centro de gravedad, el cual se ubica en el eje de simetría OY, utilizamos un eje auxiliar O_1X_1 , el cual pasa por la base de la sección.

El momento estático de la sección respecto a este eje, lo determinamos como la diferencia entre los momentos estáticos de dos rectángulos.

$$S_{X_1} = A_1 y_1 - A_2 y_2 = 24 \cdot 18 \cdot 9 - 12 \cdot 12 \cdot 6 = 3024 \text{cm}^3$$

Determinamos la ubicación del centro de gravedad.

$$y_0 = \frac{S_{X_1}}{A} = \frac{3024}{288} = 10,5 \text{cm}$$

De esta manera, los ejes OX y OY son los denominados ejes centrales principales.

Determinamos el momento de inercia de toda la sección respecto al eje O_1X_1 , que es la base de ambos rectángulos:

$$I_{X_1} = \frac{b_1 h_1^3}{3} - \frac{b_2 h_2^3}{3} = \frac{24 \cdot 18^3}{3} - \frac{12 \cdot 12^3}{3} = 39744 \text{ cm}^4$$

Ahora, determinamos los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales, aplicando para el eje OX el teorema de ejes paralelos, pero para el eje OY no es necesario, ya que coinciden los ejes de las figuras analizadas anteriormente con la sección completa, producto de la simetría.

$$I_X = I_{X_1} - A y_0^2 = 39744 - 288 \cdot 10,5^2 = 7992 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = \frac{18 \cdot 24^3}{12} - \frac{12 \cdot 12^3}{12} = 19008 \text{ cm}^4$$

Otra de las formas para determinar el momento de inercia respecto al eje OX , es analizando cada figura en forma independiente y considerando el teorema de ejes paralelos para cada figura, es decir la distancia de cada eje local respecto al eje OX . Para ello, dividimos en tres figuras regulares, donde existe material, es decir, un rectángulo en la parte superior de $24\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ y dos rectángulos laterales de $6\text{ cm} \times 12\text{ cm}$.

$$I_X = \left[\frac{24 \cdot 6^3}{12} + 24 \cdot 6 \cdot 4,5^2 \right] + 2 \cdot \left[\frac{6 \cdot 12^3}{12} + 6 \cdot 12 \cdot 4,5^2 \right] = 7992 \text{ cm}^4$$

Como podemos apreciar, coincide la respuesta, quedando a criterio del lector el método más adecuado a utilizar.

PROBLEMA 3.8 Determinar los momentos de inercia respecto a los ejes $X_1 - X_1$ y $X_2 - X_2$ de la sección mostrada en la figura 3.15. Considere que los ejes $X_1 - X_1$ y $X_2 - X_2$ son paralelos.

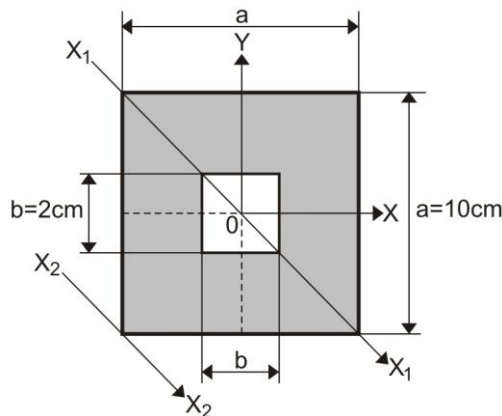


Fig. 3.15

Solución:

Determinamos los momentos de inercia de toda la sección, respecto a sus ejes centrales principales

$$I_X = I_Y = \frac{10 \cdot 10^3}{12} - \frac{2 \cdot 2^3}{12} = 832 \text{ cm}^4$$

$$I_{XY} = 0$$

Ahora, calculamos el momento de inercia respecto al eje $X_1 - X_1$

$$I_{X_1} = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{XY} \sin 2\alpha$$

Para este caso, reemplazamos los valores obtenidos anteriormente y $\alpha = -45^\circ$, porque α es positivo en sentido antihorario y negativo en sentido horario, que es el presente caso.

$$I_{X_1} = 832 \cos^2(-45^\circ) + 832 \sin^2(-45^\circ) - 0 = 832 \text{ cm}^4$$

Luego, determinamos el momento de inercia respecto al eje $X_2 - X_2$, utilizando el teorema de ejes paralelos.

$$I_{X_2} = I_{X_1} + A.d^2 = 832 + (10^2 - 2^2).(5\sqrt{2})^2 = 5632 \text{ cm}^4$$

Si en el presente problema, nos hubiesen pedido determinar el momento de inercia respecto al eje $Y_1 - Y_1$, perpendicular al eje $X_1 - X_1$, se determinaría de la siguiente manera:

$$I_{Y_1} = I_X \sin^2 \alpha + I_Y \cos^2 \alpha + I_{XY} \sin 2\alpha$$

$$I_{Y_1} = 832 \sin^2(-45^\circ) + 832 \cos^2(-45^\circ) + 0 = 832 \text{ cm}^4$$

Para determinar el producto de inercia respecto a los ejes $X_1 - X_1$ e $Y_1 - Y_1$, se determinará mediante la siguiente relación:

$$I_{X_1 Y_1} = \frac{I_X - I_Y}{2} \sin 2\alpha + I_{XY} \cos 2\alpha$$

$$I_{X_1 Y_1} = \frac{832 - 832}{2} \sin(-90^\circ) + 0 = 0$$

Esto demuestra un principio básico del producto de inercia, que indica: “Si un área tiene un eje de simetría, ese eje y el eje perpendicular a él, constituyen un conjunto de ejes para los cuales el producto de inercia es cero”.

3.4 MOMENTOS DE INERCIA DE PERFILES METALICOS

PROBLEMA 3.9 Determinar los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales de la sección transversal de acero, compuesta de cuatro ángulos de lados iguales L10x10x1 y una plancha de sección 30x1, tal como se muestra en la figura 3.16, cuyas dimensiones están dadas en centímetros. Las características del ángulo se dan en la tabla 3.4, respecto a los ejes $O_1 X_1$ y $O_1 Y_1$

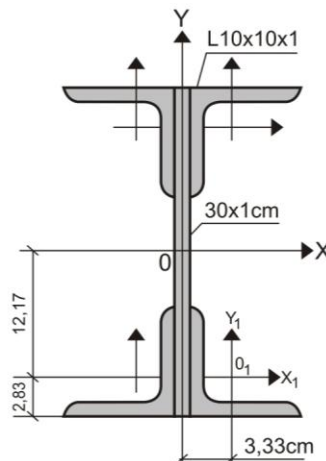


Fig. 3.16

Tabla 3.4

PERFIL	A_1 (cm ²)	$I_{X_1}^{(1)}$ (cm ⁴)	$I_{Y_1}^{(1)}$ (cm ⁴)
L10x10x1	19,2	179	179

Solución:

Los momentos de inercia respecto a los ejes OX y OY y el área de la plancha son:

$$I_X^{(2)} = \frac{1.30^3}{12} = 2250\text{cm}^4$$

$$I_Y^{(2)} = \frac{30.1^3}{12} = 2,5\text{cm}^4$$

$$A_2 = 30.1 = 30\text{cm}^2$$

El área de toda la sección transversal es:

$$A = 4A_1 + A_2 = 4.19,2 + 30 = 106,8\text{cm}^2$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales OX y OY lo determinamos, teniendo en cuenta el principio de ejes paralelos.

$$I_X = 4.(I_{X_1}^{(1)} + A_1 b_1^2) + I_X^{(2)} = 4.(179 + 19,2.12,17^2) + 2250 = 14340,76\text{cm}^4$$

$$I_Y = 4.(I_{Y_1}^{(1)} + A_1 a_1^2) + I_Y^{(2)} = 4.(179 + 19,2.3,33^2) + 2,5 = 1570,13\text{cm}^4$$

PROBLEMA 3.10 Determinar la ubicación del centro de gravedad y los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales de la sección transversal de una viga de acero compuesta por dos perfiles I27 y una plancha de sección 40x1,2cm, tal como se muestra en la figura 3.17. Las características del perfil I27 se dan en la tabla 3.5

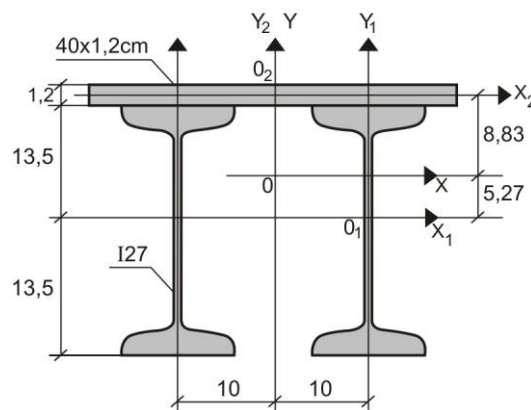


Fig. 3.17

Tabla 3.5

PERFIL	A_1 (cm ²)	$I_{X_1}^{(1)}$ (cm ⁴)	$I_{Y_1}^{(1)}$ (cm ⁴)
I27	40,2	5010	260

Solución:

Los momentos de inercia respecto a los ejes $O_2X_2Y_2$ y el área de la plancha son:

$$I_{X_2}^{(2)} = \frac{40 \cdot 1,2^3}{12} = 5,76 \text{ cm}^4$$

$$I_{Y_2}^{(2)} = \frac{1,2 \cdot 40^3}{12} = 6400 \text{ cm}^4$$

$$A_2 = 40 \cdot 1,2 = 48 \text{ cm}^2$$

El área de toda la sección será:

$$A = 2 \cdot 40,2 + 48 = 128,4 \text{ cm}^2$$

Para determinar la ubicación del centro de gravedad de toda la sección, calculamos el momento estático de la sección respecto al eje O_1X_1 , que pasa por el centro de gravedad de los perfiles I27 y, en consecuencia, no generan dichos perfiles momentos estáticos respecto al eje indicado.

$$S_{X_1} = A_2 y_2 = 48 \left(13,5 + \frac{1,2}{2} \right) = 676,8 \text{ cm}^3$$

De esta manera, determinamos el centro de gravedad de toda la sección, respecto al eje O_1X_1 :

$$y_0 = \frac{S_{X_1}}{A} = \frac{676,8}{128,4} = 5,27 \text{ cm}$$

Los ejes OX y OY se denominan ejes centrales principales y los momentos de inercia respecto a dichos ejes son:

$$I_X = 2 \cdot (5010 + 40 \cdot 2,5 \cdot 2,27^2) + 5,76 + 48 \cdot 8,83^2 = 16001,21 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = 2 \cdot (260 + 40 \cdot 2 \cdot 10^2) + 6400 = 14960 \text{ cm}^4$$

PROBLEMA 3.11 Para la sección no simétrica mostrada en la figura 3.18,a compuesta por un perfil I50 y un ángulo de lados desiguales L20x12,5x1,6. Se pide determinar la ubicación del centro de gravedad de la sección, los momentos de inercia respecto a los ejes centrales principales y la orientación de estos ejes. Los momentos de inercia y áreas de ambos perfiles respecto a sus ejes locales centrales se dan en la tabla 3.6

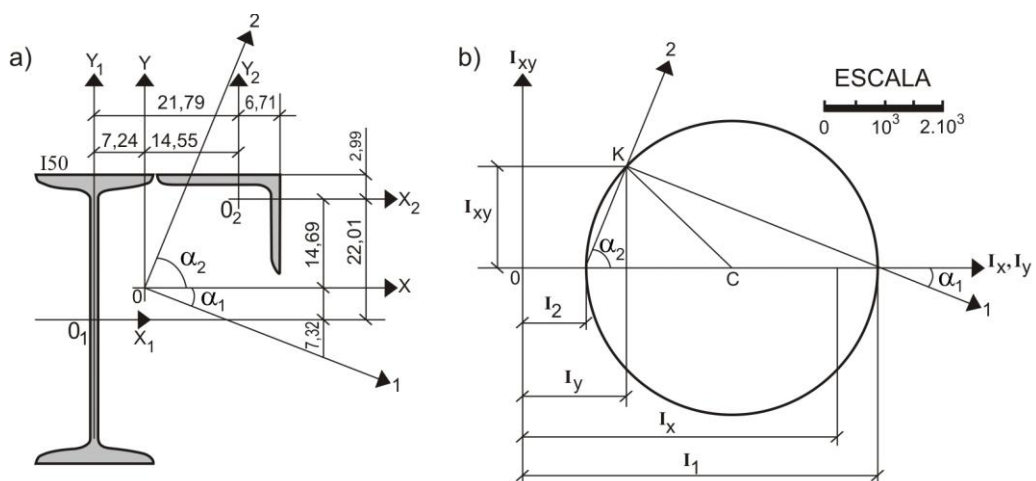


Fig. 3.18

Tabla 3.6

PERFIL I50	PERFIL L20x12,5x1,6
$I_{X_1} = 39727\text{cm}^4$	$I_{X_2} = 617\text{cm}^4$
$I_{Y_1} = 1043\text{cm}^4$	$I_{Y_2} = 2026\text{cm}^4$
-	$I_{X_2Y_2} = -644\text{cm}^4$
$A_1 = 100\text{cm}^2$	$A_2 = 49,8\text{cm}^2$

Solución:

El área de toda la sección es:

$$A = 100 + 49,8 = 149,8\text{cm}^2$$

Para determinar la ubicación del centro de gravedad, elegimos como ejes auxiliares los ejes del perfil I50, es decir, los ejes O_1X_1 y O_1Y_1

$$x_0 = \frac{S_{Y_1}}{A} = \frac{A_2 x_2}{A} = \frac{49,8 \cdot 21,79}{149,8} = 7,24\text{cm}$$

$$y_0 = \frac{S_{X_1}}{A} = \frac{A_2 y_2}{A} = \frac{49,8 \cdot 22,01}{149,8} = 7,32\text{cm}$$

Estas magnitudes y las coordenadas de los centros de gravedad de los perfiles se muestran en la figura 3.18,a, cuyos valores son:

$$a_1 = -7,24\text{cm}; \quad b_1 = -7,32\text{cm}; \quad a_2 = 14,55\text{cm}; \quad b_2 = 14,69\text{cm}$$

Determinamos los momentos de inercia respecto a los ejes centrales OX y OY

$$I_X = I_{X_1} + A_1 b_1^2 + I_{X_2} + A_2 b_2^2$$

$$I_X = 39727 + 100 \cdot (-7,32)^2 + 617 + 49,8 \cdot 14,69^2 = 56448,88\text{cm}^4$$

$$I_Y = I_{Y_1} + A_1 a_1^2 + I_{Y_2} + A_2 a_2^2$$

$$I_Y = 1043 + 100 \cdot (-7,24)^2 + 2026 + 49,8 \cdot 14,55^2 = 18853,54\text{cm}^4$$

$$I_{XY} = I_{X_1Y_1} + A_1 a_1 b_1 + I_{X_2Y_2} + A_2 a_2 b_2$$

$$I_{XY} = 0 + 100 \cdot (-7,24) \cdot (-7,32) - 644 + 49,8 \cdot 14,55 \cdot 14,69 = 15299,91\text{cm}^4$$

Ahora, determinamos los momentos de inercia principales y los ángulos de desviación de los ejes principales 1 y 2 respecto al eje OX

$$I_{1,2} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_X - I_Y}{2}\right)^2 + I_{XY}^2}$$

$$I_1 = \frac{56448,88 + 18853,54}{2} + \sqrt{\left(\frac{56448,88 - 18853,54}{2}\right)^2 + 15299,91^2} = 61888,36\text{cm}^4$$

$$I_2 = \frac{56448,88 + 18853,54}{2} - \sqrt{\left(\frac{56448,88 - 18853,54}{2}\right)^2 + 15299,91^2} = 13414,05 \text{ cm}^4$$

$$\text{tg}\alpha_1 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} = \frac{15299,91}{18853,54 - 61888,36} = -0,355 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -19,54^\circ$$

$$\text{tg}\alpha_2 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_2} = \frac{15299,91}{18853,54 - 13414,05} = 2,813 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 70,43^\circ$$

En la figura 3.18,b se muestra la obtención gráfica de los momentos de inercia principales y la orientación de los ejes principales, cuyo proceso se detalla a continuación:

1. Se eligen los ejes coordenados, orientando en el eje horizontal los momentos de inercia I_x, I_y y en el eje vertical el producto de inercia I_{xy}
2. De acuerdo a la escala elegida, se obtienen los puntos correspondientes en el eje horizontal de los momentos de inercia I_x e I_y
3. La diferencia de dichos momentos de inercia lo dividimos entre dos y obtenemos el centro C de la figura.
4. A partir del extremo del momento de inercia I_y , levantamos en el eje vertical del producto de inercia, es decir I_{xy} , obteniendo el punto K de la figura.
5. Unimos los puntos C y K, cuyo valor es el radio del círculo denominado de Mohr para momentos de inercia.
6. Trazamos el denominado círculo de Mohr, intersecándose con el eje horizontal en dos puntos, que corresponden de mayor a menor a los momentos de inercia principales I_1 e I_2 , cuyos valores se obtienen como indicamos en un inicio de acuerdo a una escala previamente elegida.
7. Para obtener la orientación de los ejes principales, trazamos desde el punto K dos líneas que unen al punto K con el extremo del momento de inercia principal I_1 y corresponde a la orientación del eje principal 1. Análogamente, unimos el punto K con el extremo del momento de inercia principal I_2 y cuya dirección corresponde a la orientación del eje principal 2.
8. Los ángulos que forman dichos ejes principales con el eje horizontal, corresponden a los ángulos de desviación de los ejes principales 1 y 2 respecto al eje OX, recordando que el signo es positivo en sentido antihorario y negativo en sentido horario, siempre y cuando se tome como referencia el eje OX como inicio de la medida.

CAPITULO 4

ARMADURAS

4.1 METODO DE LOS NUDOS

PROBLEMA 4.1 Para la siguiente armadura:

- Calcular las reacciones en los apoyos
- Indicar que barras no trabajan
- Determinar las fuerzas axiales en las barras restantes

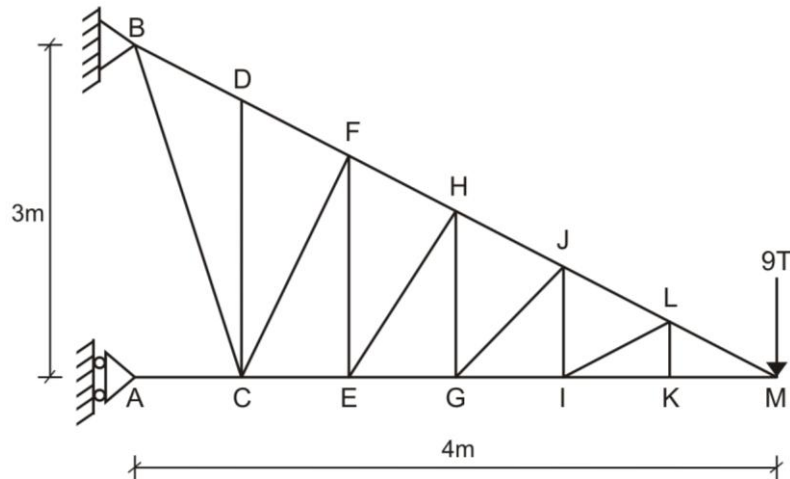


Fig. 4.1

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow H_A \cdot (3) - 9 \cdot (4) = 0 \quad \therefore H_A = 12T \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_B + 12 = 0 \quad \therefore H_B = 12T \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_B - 9 = 0 \quad \therefore V_B = 9T \uparrow$$

- Sabemos que una barra no trabaja, si su fuerza interna es cero, también conocida como barra nula, existiendo 3 principios de determinación visual de tal tipo de barras, los cuales son:

- Si en un nudo convergen dos barras y el nudo no está cargado, entonces ambas barras son nulas.
- Si en un nudo convergen dos barras y el nudo está cargado con una fuerza en la dirección de una de las barras, entonces la otra barra será nula.
- Si en un nudo convergen tres barras, donde dos de las barras se encuentran sobre una misma línea y la tercera en una dirección arbitraria, además el nudo no está cargado, entonces la barra que tiene dirección arbitraria es nula.

Basado en estos principios, analizamos la armadura de la figura 4.1, para ello iniciamos con el nudo K y vemos que la barra KL es nula por el 3er principio anteriormente descrito, luego, pasamos al nudo L y observamos que la barra LI es nula por el mismo principio. Continuamos analizando el nudo I, determinando que la barra IJ es nula y así, sucesivamente, se cumplirá con este mismo principio al analizar los nudos J, G, H, E, F, D y C.

Las reacciones en los apoyos y las barras nulas se muestran en la figura 4.2, esquematizándolas las barras nulas con un círculo.

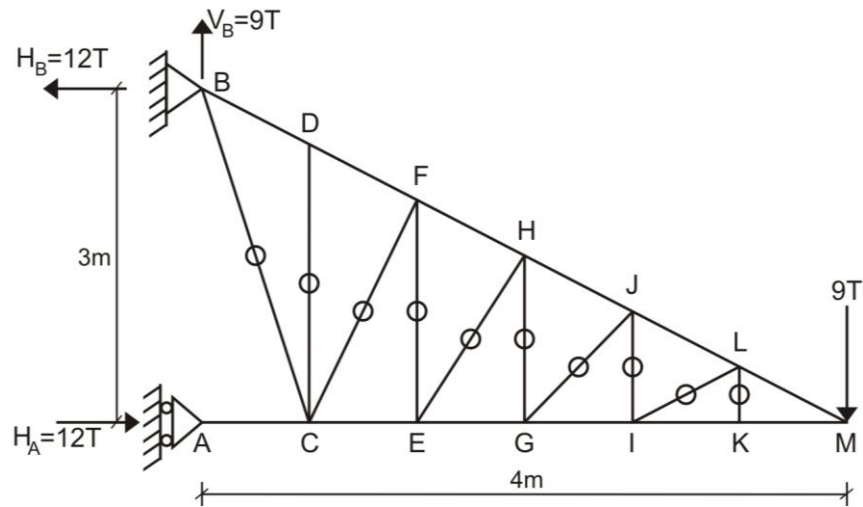


Fig. 4.2

- c) Para calcular las fuerzas internas en el resto de barras, aplicamos el método de los nudos, analizando el equilibrio en el nudo M

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{LM} \sin 37^\circ - 9 = 0 \quad \therefore F_{LM} = 15T \text{ (TRACCION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{KM} - 15 \cos 37^\circ = 0 \quad \therefore F_{KM} = 12T \text{ (COMPRESION)}$$

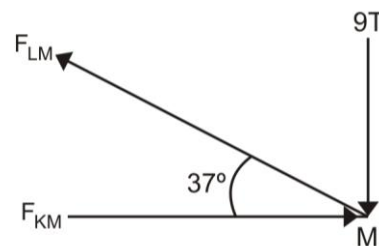


Fig. 4.3

El resto de barras tienen las mismas fuerzas internas, tal como se muestra en la figura 4.4

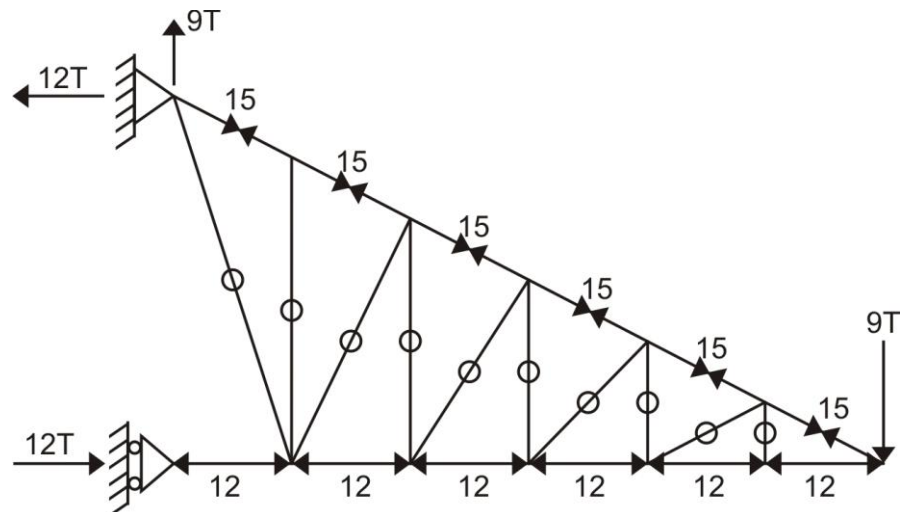


Fig. 4.4

PROBLEMA 4.2 Para la siguiente armadura:

- Calcular las reacciones en los apoyos
- Indicar que barras no trabajan
- Determinar las fuerzas axiales en las barras restantes

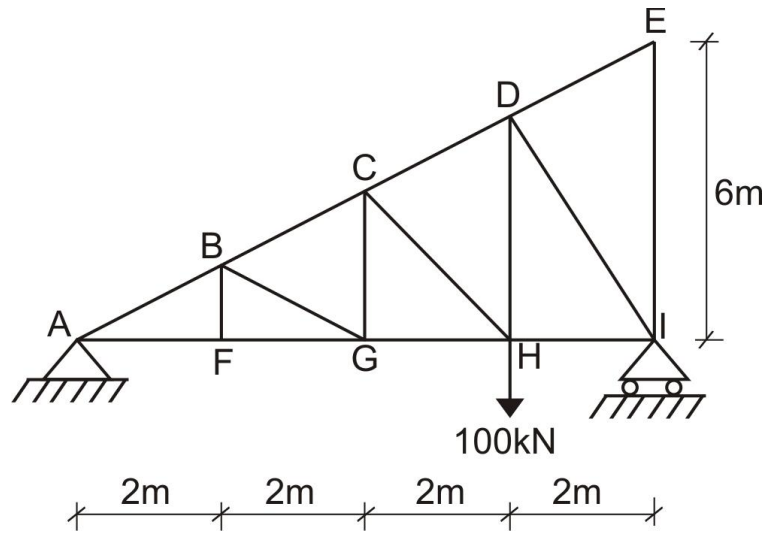


Fig. 4.5

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_I \cdot (8) - 100 \cdot (6) = 0 \quad \therefore V_I = 75 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 75 - 100 = 0 \quad \therefore V_A = 25 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

- Si analizamos el nudo E y aplicamos el 1er principio de barras nulas, se tendrá que las barras ED y EI son nulas. Luego, aplicamos el 3er principio al nudo F, siendo la barra FB nula y continuamos con este principio en los nudos B, G y C, siendo nulas las barras BG, GC y CH. Las reacciones en los apoyos, las barras nulas y las fuerzas internas en el resto de barras se muestran en la figura 4.6, esquematizando las barras nulas con un círculo.

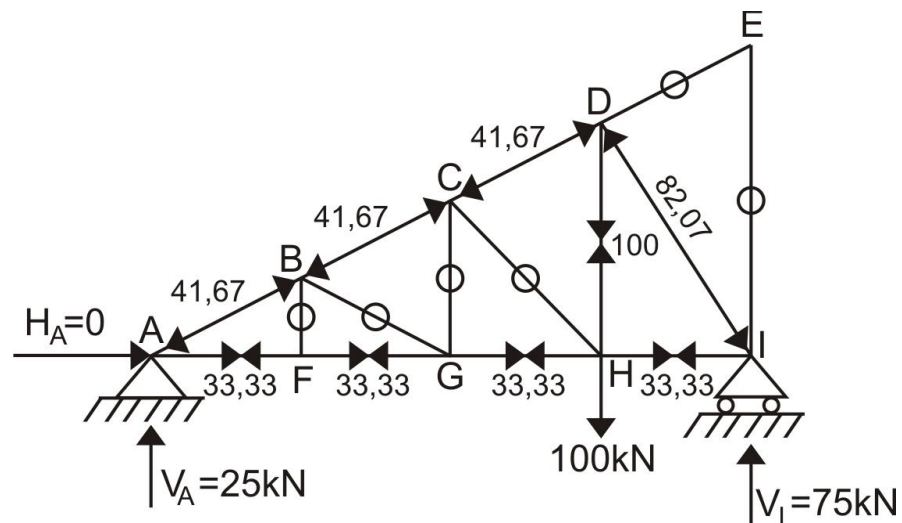


Fig. 4.6

- c) Aplicamos el método de los nudos para determinar las fuerzas internas en el resto de barras.

NUDO "A":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 25 - F_{AB} \sin 37^\circ = 0$$

$$F_{AB} = 41,67 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{AF} - 41,67 \cos 37^\circ = 0$$

$$F_{AF} = 33,33 \text{ kN (TRACCION)}$$

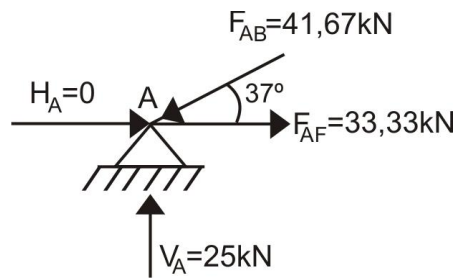


Fig. 4.7

Ahora, pasamos al nudo F, en el cual, la barra FB es nula y las fuerzas internas en las barras AF y FG son iguales. Lo mismo sucede con las barras FG y GH, así como en AB y BC, BC y CD.

NUDO "H":

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{HI} - 33,33 = 0 \quad \therefore \quad F_{HI} = 33,33 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{HD} - 100 = 0 \quad \therefore \quad F_{HD} = 100 \text{ kN (TRACCION)}$$

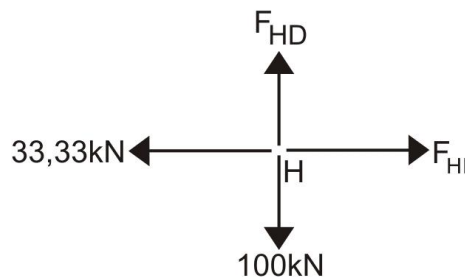


Fig. 4.8

NUDO "I":

Previamente, calculamos el valor del ángulo β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4,5}{2} \Rightarrow \beta = 66,04^\circ$$

Ahora, calculamos la fuerza interna en la barra DI:

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 75 - F_{DI} \sin 66,04^\circ = 0$$

$$F_{DI} = 82,07 \text{ kN (COMPRESION)}$$

Como comprobación, efectuamos el equilibrio en el eje horizontal:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 82,07 \cos 66,04^\circ - 33,33 = 0 \quad \text{OK}$$

Con esto, no es necesario comprobar el equilibrio del nudo D, el cual también será correcto.

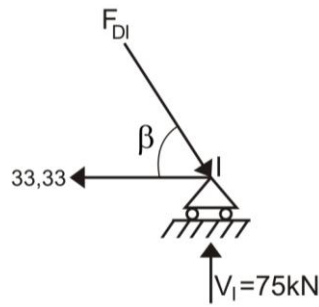


Fig. 4.9

PROBLEMA 4.3 Para la armadura mostrada en la figura, determinar:

- Las reacciones en los apoyos
- Las fuerzas axiales en las barras AB y BE, indicando si están en tracción o compresión

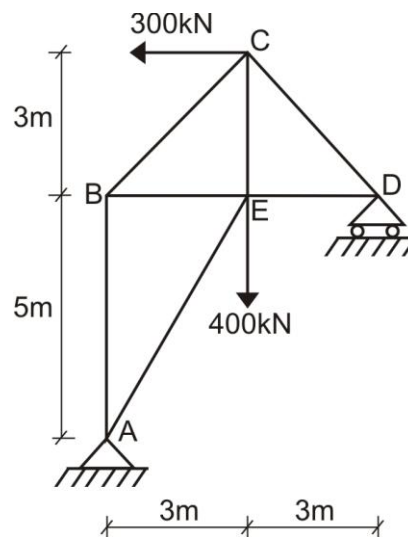


Fig. 4.10

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_D \cdot (6) - 400 \cdot (3) + 300 \cdot (8) = 0$$

$$V_D = 200 \text{ kN} \downarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 300 = 0$$

$$H_A = 300 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A - 200 - 400 = 0$$

$$V_A = 600 \text{ kN} \uparrow$$

- Determinamos la fuerza interna en la barra AB, analizando el equilibrio en el nudo A y la fuerza en la barra BE, analizando el equilibrio en el nudo B.

NUDO "A":

Previamente, calculamos el ángulo α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \alpha = 59,04^\circ$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 300 - F_{AE} \cos 59,04^\circ = 0$$

$$F_{AE} = 583,16 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 600 - F_{AB} - 583,16 \sin 59,04^\circ = 0$$

$$F_{AB} = 99,92 \text{ kN (COMPRESION)}$$

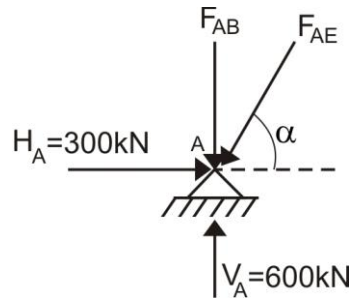


Fig. 4.11

NUDO "B":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 99,92 - F_{BC} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{BC} = 141,31 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{BE} - 141,31 \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{BE} = 99,92 \text{ kN (TRACCION)}$$

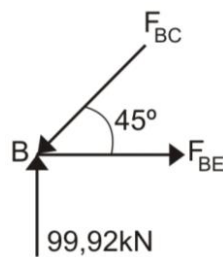


Fig. 4.12

Las reacciones y fuerzas internas de las barras AB y BE, se muestran en la figura 4.13

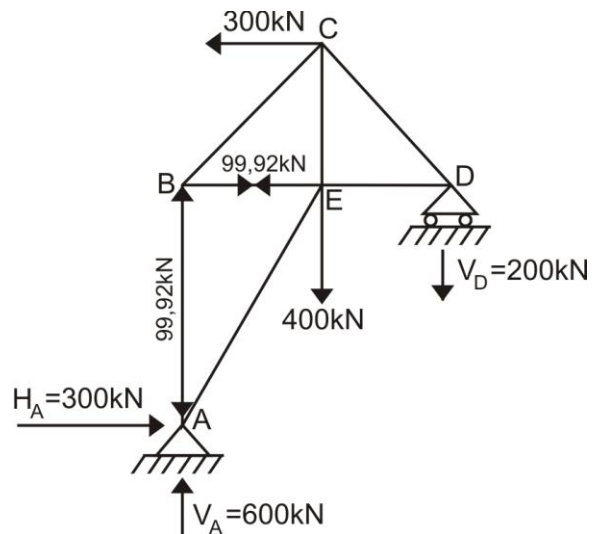


Fig. 4.13

PROBLEMA 4.4 Para la armadura mostrada en la figura, usando el método de los nudos, determinar las fuerzas en las barras CD y DF

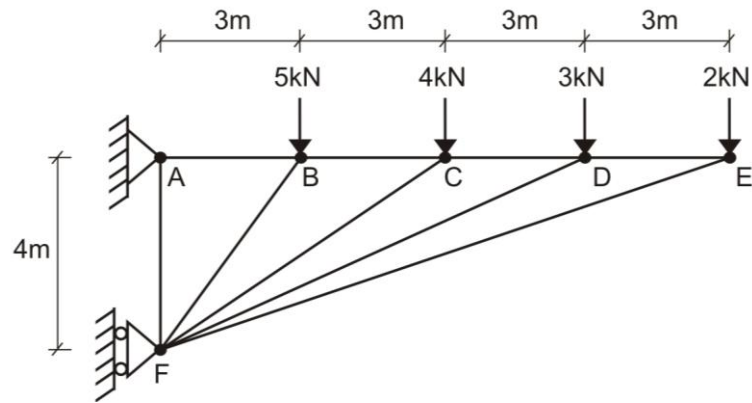


Fig. 4.14

Solución:

Como se podrá apreciar, no es necesario calcular las reacciones en los apoyos y analizamos consecutivamente el equilibrio en los nudos E y D.

NUDO "E":

Determinamos el valor del ángulo α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18,43^{\circ}$$

Luego:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF} \sin 18,43^{\circ} - 2 = 0$$

$$F_{EF} = 6,326 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 6,326 \cos 18,43^{\circ} - F_{ED} = 0$$

$$F_{ED} = 6 \text{ kN (TRACCION)}$$

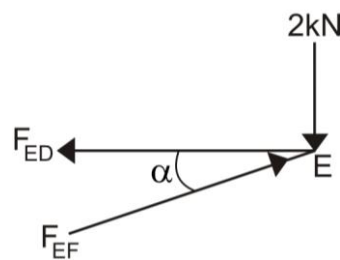


Fig. 4.15

NUDO "D":

Calculamos el ángulo β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \beta = 23,96^{\circ}$$

Luego:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DF} \sin 23,96^{\circ} - 3 = 0$$

$$F_{DF} = 7,387 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 7,387 \cos 23,96^\circ + 6 - F_{CD} = 0$$

$$F_{CD} = 12,75 \text{ kN (TRACCION)}$$

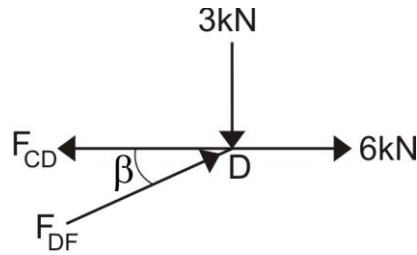


Fig. 4.16

La armadura con las fuerzas internas en las barras CD y DF, se muestran en la figura 4.17

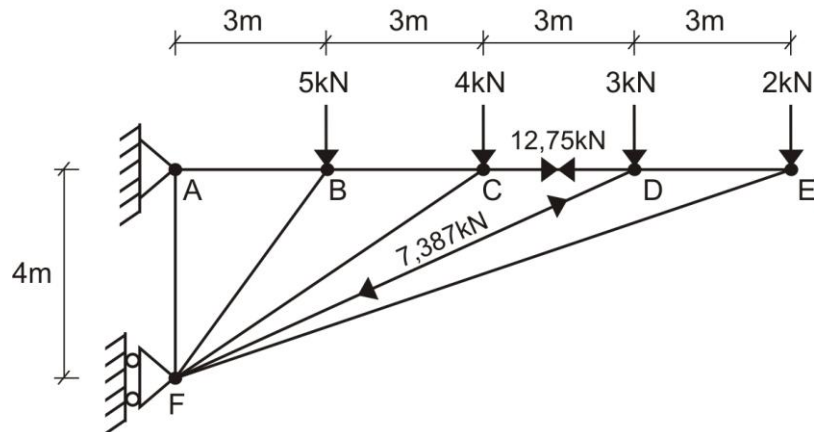


Fig. 4.17

PROBLEMA 4.5 Para la siguiente armadura:

- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Determinar las fuerzas axiales en cada una de las barras.

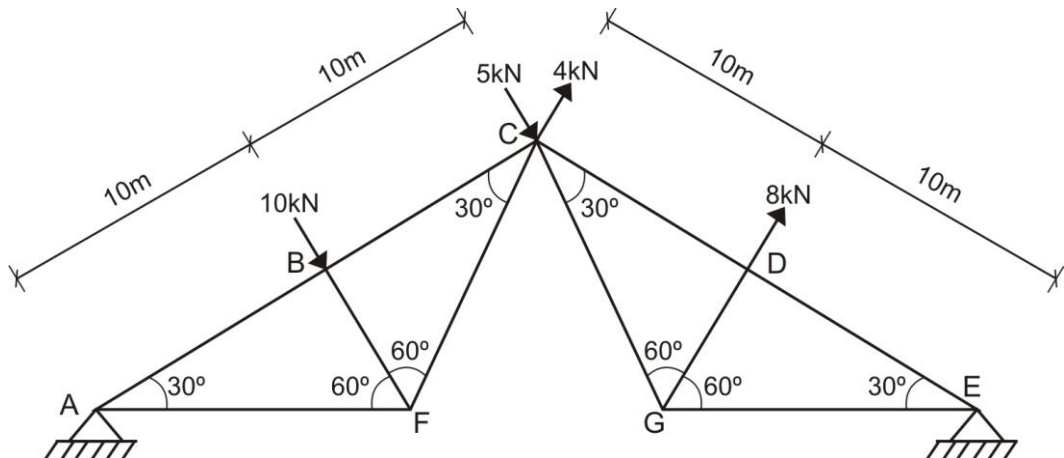


Fig. 4.18

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos, para ello, proyectamos el tramo FC hasta el punto H, producto de la intersección de dicha prolongación con la perpendicular trazada desde el punto A, determinando la distancia d (figura 4.19).

$$d = 20\sin 30^\circ = 10\text{m}$$

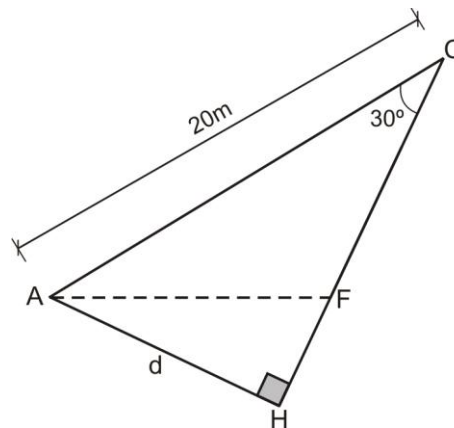


Fig. 4.19

Como las fuerzas 4kN y 8kN son paralelas, entonces la distancia desde el apoyo A hasta la intersección con la proyección de DG es 20m.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_E \cdot (2 \cdot 20 \cos 30^\circ) - 10 \cdot (10) - 5 \cdot (20) + 4 \cdot (10) + 8 \cdot (20) = 0$$

$$V_E = 0$$

$$\sum M_C^{\text{der}} = 0 \Rightarrow 8 \cdot (10) - H_E \cdot (10) = 0$$

$$H_E = 8\text{kN} \leftarrow$$

Ahora, analizamos el equilibrio de toda la armadura:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 10\sin 30^\circ + 5\sin 30^\circ + 4\sin 30^\circ + 8\sin 30^\circ - 8 = 0$$

$$H_A = 5,5\text{kN} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10\cos 30^\circ - 5\cos 30^\circ + 4\cos 30^\circ + 8\cos 30^\circ + V_A = 0$$

$$V_A = 2,6\text{kN} \uparrow$$

- b) Determinamos las fuerzas internas en cada una de las barras de la armadura, analizando el equilibrio nudo por nudo.

NUDO "A":

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2,6 - F_{AB}\sin 30^\circ = 0$$

$$F_{AB} = 5,2\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AF} - 5,2\cos 30^\circ - 5,5 = 0$$

$$F_{AF} = 10\text{kN} \text{ (TRACCION)}$$

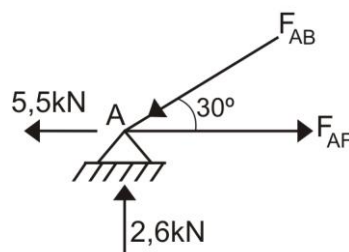


Fig. 4.20

NUDO "B":

$$\sum F_{X'} = 0 \Rightarrow 5,2 - F_{BC} = 0$$

$$F_{BC} = 5,2 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_{Y'} = 0 \Rightarrow F_{BF} - 10 = 0$$

$$F_{BF} = 10 \text{ kN (COMPRESION)}$$

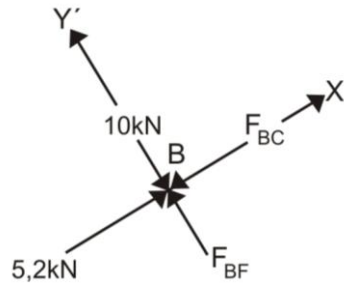


Fig. 4.21

NUDO "F":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{BC} \cos 30^\circ - 10 \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{BC} = 10 \text{ kN (TRACCION)}$$

Comprobamos el equilibrio en el eje horizontal:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 10 \sin 30^\circ + 10 \sin 30^\circ - 10 = 0$$

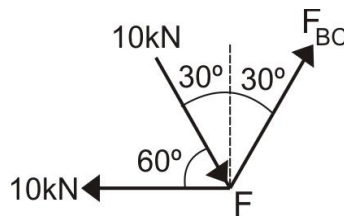


Fig. 4.22

NUDO "E":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{ED} \sin 30^\circ = 0$$

$$F_{ED} = 0$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{EG} - 8 = 0$$

$$F_{EG} = 8 \text{ kN (COMPRESION)}$$

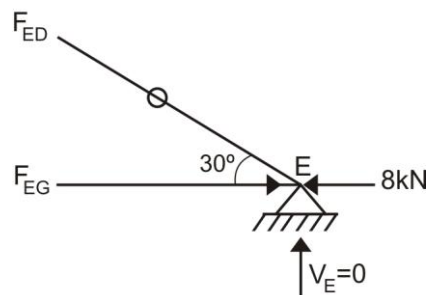


Fig. 4.23

NUDO "D":

$$\sum F_{X''} = 0 \Rightarrow 8 - F_{DG} = 0$$

$$F_{DG} = 8 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_{Y''} = 0 \Rightarrow F_{DC} = 0$$

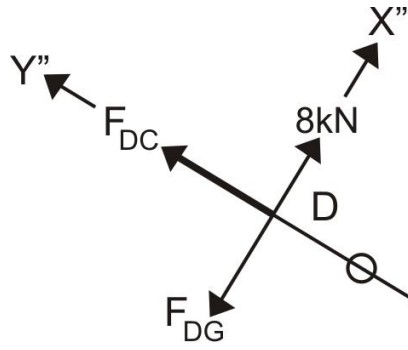


Fig. 4.24

NUDO "G":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 8 \cos 30^\circ - F_{GC} \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{GC} = 8 \text{ kN (COMPRESION)}$$

Comprobamos el equilibrio en el eje horizontal:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 8 \sin 30^\circ + 8 \sin 30^\circ - 8 = 0$$

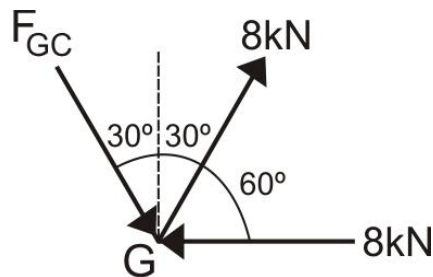


Fig. 4.25

De esta manera, las reacciones y fuerzas internas en la armadura, se muestran en la figura 4.26

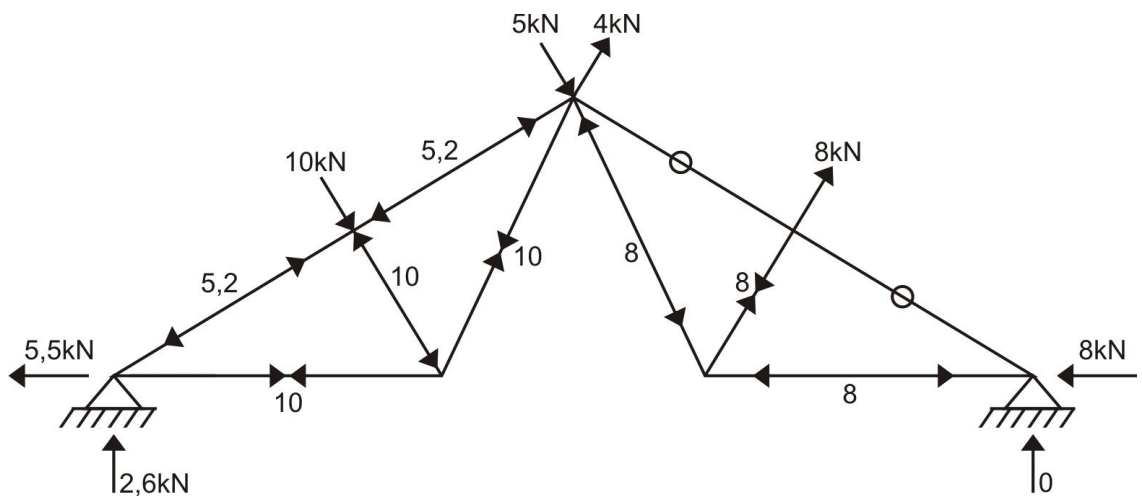


Fig. 4.26

PROBLEMA 4.6 Para la siguiente armadura:

- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Determinar las fuerzas axiales en cada una de las barras.

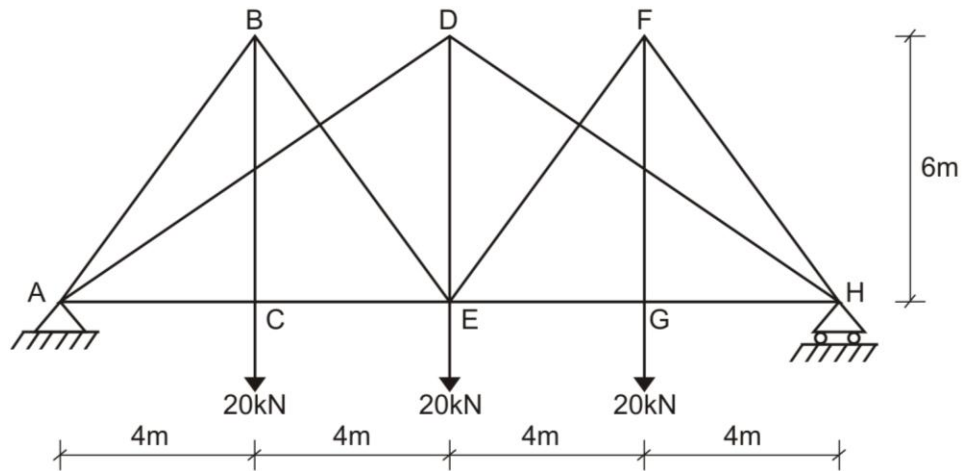


Fig. 4.27

Solución:

- Por simetría:

$$V_A = V_H = 30\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

- Determinamos las fuerzas internas en cada una de las barras de la armadura, debiendo de iniciar en el nudo C, ya que ahí podemos determinar la fuerza interna en la barra CB y luego pasamos al nudo B, continuando con el apoyo A y luego con el nudo D, aplicando el método de los nudos, en el cual se deben de tener como máximo 2 incógnitas a determinar.

NUDO "C":

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CB} - 20 = 0$$

$$F_{CB} = 20\text{kN (TRACCION)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CE} - F_{CD} = 0$$

$$F_{CE} = F_{CD}$$

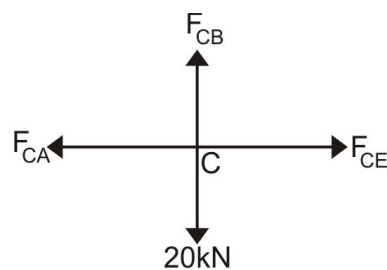


Fig. 4.28

NUDO "B":

Determinamos el ángulo α :

$$\text{tg} \alpha = \frac{4}{6} \Rightarrow \alpha = 33,69^\circ$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{BA} \sin 33,69^\circ - F_{BE} \sin 33,69^\circ = 0$$

$$F_{BA} = F_{BE}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 2F_{BA} \cos 33,69^\circ - 20 = 0$$

$$F_{BA} = 12,02 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$F_{BE} = 12,02 \text{ kN (COMPRESION)}$$

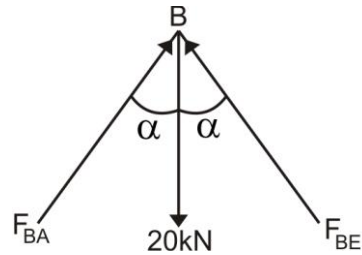


Fig. 4.29

NUDO "A":

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 30 - 12,02 \sin 56,31^\circ - F_{AD} \sin 37^\circ = 0$$

$$F_{AD} = 33,33 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{AC} - 33,33 \cos 37^\circ - 12,02 \cos 56,31^\circ = 0$$

$$F_{AC} = 33,33 \text{ kN (TRACCION)}$$

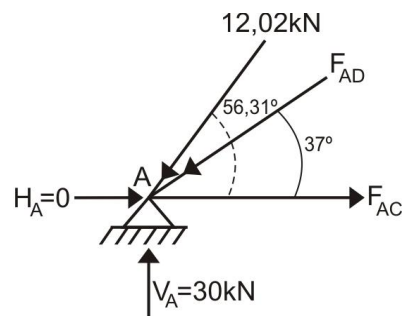


Fig. 4.30

NUDO "D":

Por simetría:

$$F_{DH} = F_{DA} = 33,33 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 2 \cdot 33,33 \cos 53^\circ - F_{DE} = 0$$

$$F_{DE} = 40 \text{ kN (TRACCION)}$$

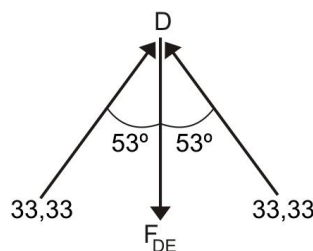


Fig. 4.31

Como la armadura es simétrica, no determinamos las otras fuerzas internas, debido a que son iguales al lado izquierdo de la armadura.

De esta manera, las reacciones en los apoyos y fuerzas internas en todas las barras de la armadura, se muestran en la figura 4.32

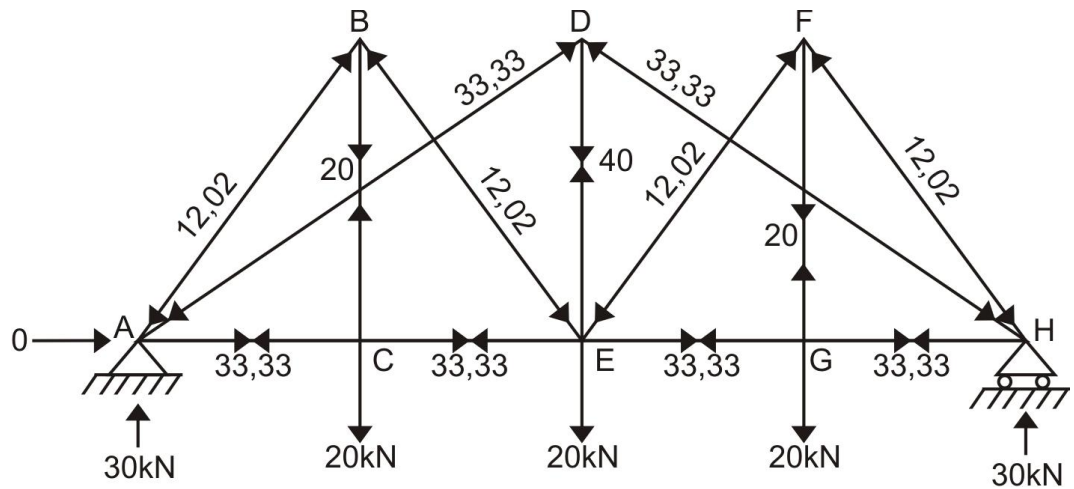


Fig. 4.32

4.2 METODO DE LAS SECCIONES

PROBLEMA 4.7 Dada la siguiente armadura:

- Usando el método de las secciones, determine las fuerzas axiales en las barras CD, KD y KJ, indicando si están en tracción o compresión.
- Usando el método de los nudos, determine la fuerza axial en la barra CK, indicando si está en tracción o compresión.

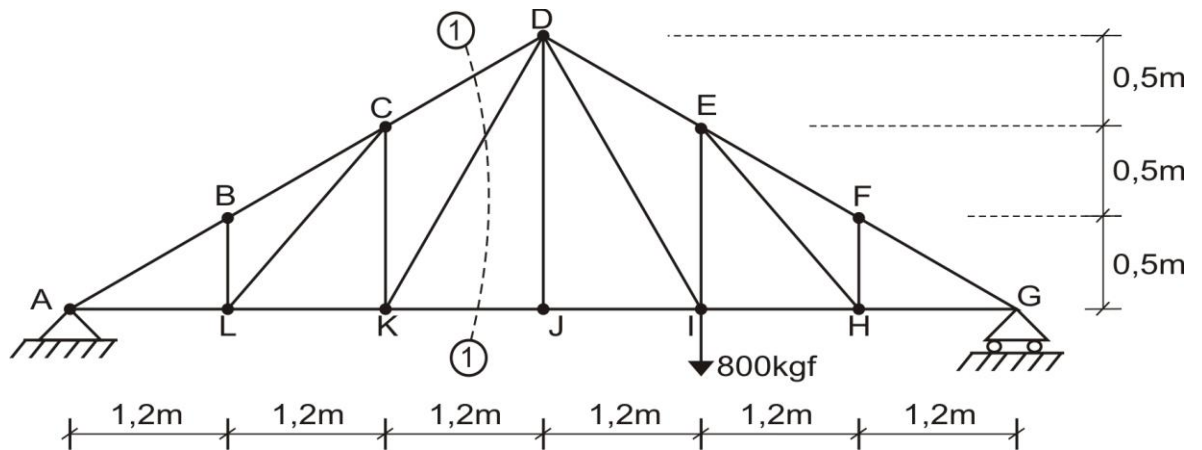


Fig. 4.33

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_G \cdot (7,2) - 800 \cdot (4,8) = 0 \quad \therefore V_G = 533,33 \text{ kgf} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 533,33 - 800 = 0 \quad \therefore V_A = 266,67 \text{ kgf} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Efectuamos el corte indicado, analizando la parte izquierda de la armadura, pero, previamente, calculamos el valor del ángulo α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,5}{3,6} \Rightarrow \alpha = 22,62^\circ$$

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow -(F_{CD} \cos 22,62^\circ) \cdot (1) - 266,67 \cdot (2,4) = 0$$

$$F_{CD} = -693,34 \text{ kgf (COMPRESION)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{KD} = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_{KJ} \cdot (1,5) - 266,67 \cdot (3,6) = 0$$

$$F_{KJ} = 640 \text{ kgf (TRACCION)}$$

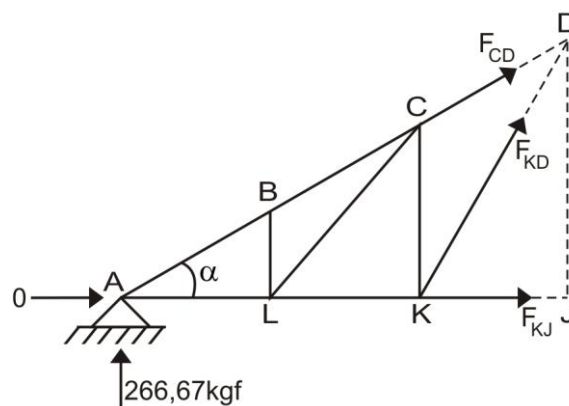


Fig. 4.34

- b) Determinamos el valor de la fuerza interna en la barra CK, aplicando, para ello, no el método de los nudos, sino el principio de barra nula en forma consecutiva en los nudos B, L, C y K para la parte izquierda de la armadura, siendo las barras nulas de toda la armadura las barras BL, CL, CK, KD, FH, HE y EI, tal como se muestra en la figura 4.35

En consecuencia:

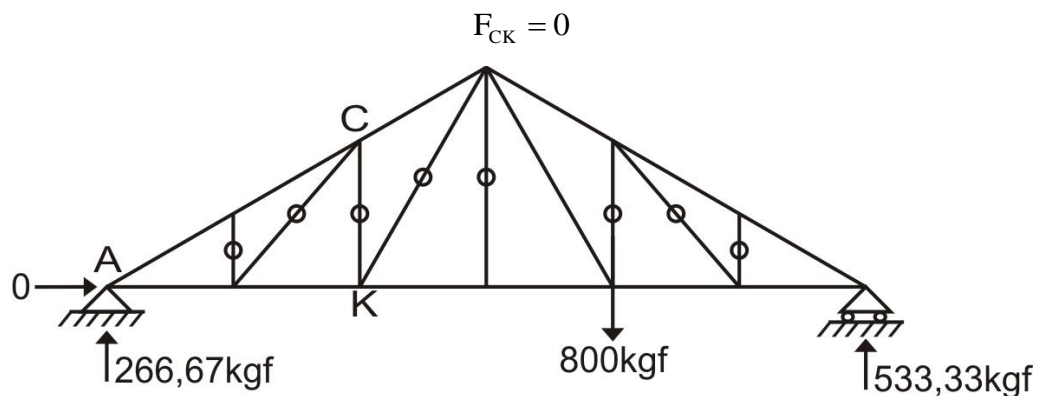


Fig. 4.35

PROBLEMA 4.8 Dada la siguiente armadura:

- Usando el método de los cortes, determine las fuerzas axiales en las barras DE, JE y JI, indicando si están en tracción o compresión.
- Usando el método de los nudos, determine las fuerzas axiales en las barras AB, AK, FG y GH

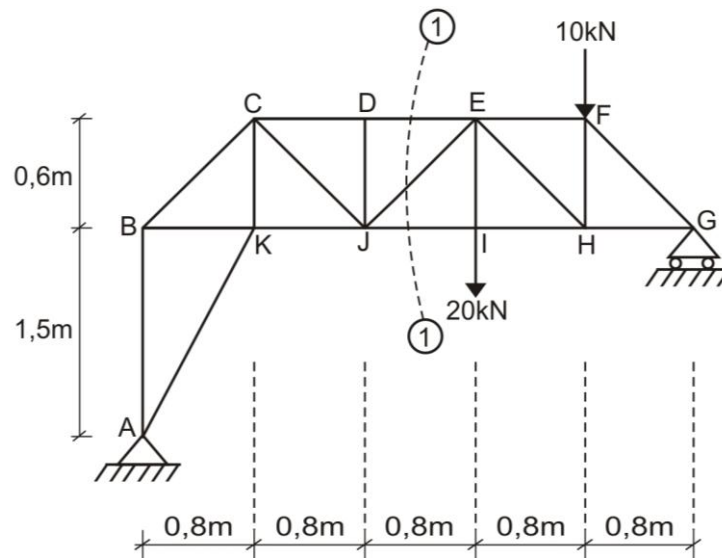


Fig. 4.36

Solución:

a) Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_G \cdot (4) - 10 \cdot (3,2) - 20 \cdot (2,4) = 0 \quad \therefore V_G = 20\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 20 - 20 - 10 = 0 \quad \therefore V_A = 10\text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Analizamos la parte izquierda del corte, por ser la de menor trabajo:

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow -F_{DE} \cdot (0,6) - 10 \cdot (1,6) = 0$$

$$F_{DE} = -26,67\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{JE} \cdot \sin 37^\circ + 10 = 0$$

$$F_{JE} = -16,67\text{kN} \text{ (COMPRESION)}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -10 \cdot (2,4) + F_{JI} \cdot (0,6) = 0$$

$$F_{JI} = 40\text{kN} \text{ (TRACCION)}$$

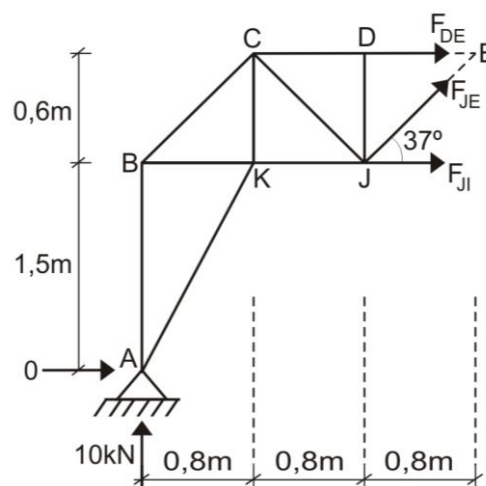


Fig. 4.37

b) Aplicamos el método de los nudos en los apoyos A y G

APOYO "A":

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1,5}{0,8} \Rightarrow \beta = 61,93^\circ$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AK} \cos 61,93^\circ = 0$$

$$F_{AK} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{AB} + 10 = 0$$

$$F_{AB} = 10\text{kN (COMPRESION)}$$

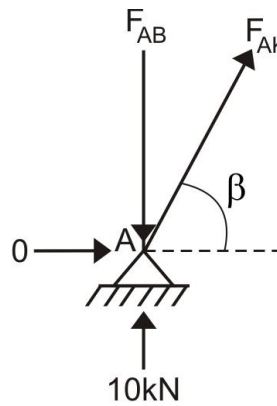


Fig. 4.38

APOYO "G":

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 20 - F_{FG} \sin 37^\circ = 0$$

$$F_{FG} = 33,33\text{kN (COMPRESION)}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 33,33 \cos 37^\circ - F_{GH} = 0$$

$$F_{GH} = 26,66\text{kN (TRACCION)}$$

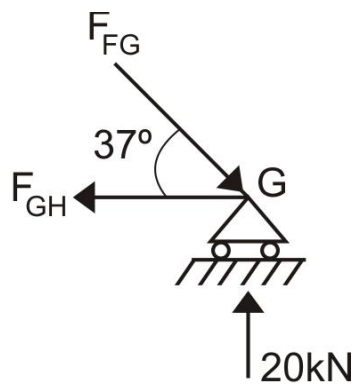


Fig. 4.39

PROBLEMA 4.9 Un bloque de 20kN de peso, se encuentra suspendido en los nudos D y E de la armadura, mediante dos cables inextensibles. Calcular las fuerzas en las barras AC, BC y BD, utilizando el método de las secciones e indique si las fuerzas son de tracción o compresión.

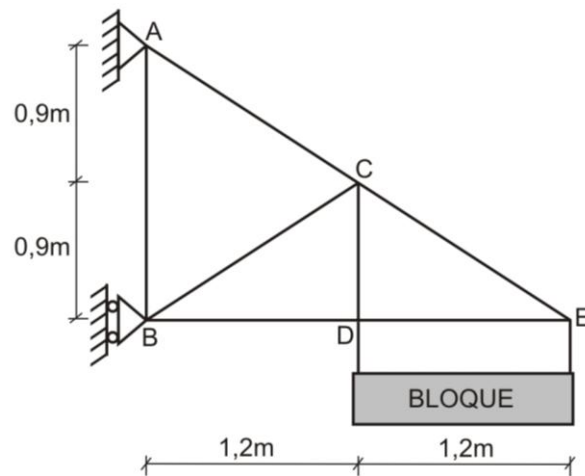


Fig. 4.40

Solución:

Como el bloque pesa 20kN, entonces cada cable soporta 10kN y para determinar las fuerzas internas en las barras AC, BC y BD efectuamos el corte 1-1, tal como se muestra en la figura 4.41

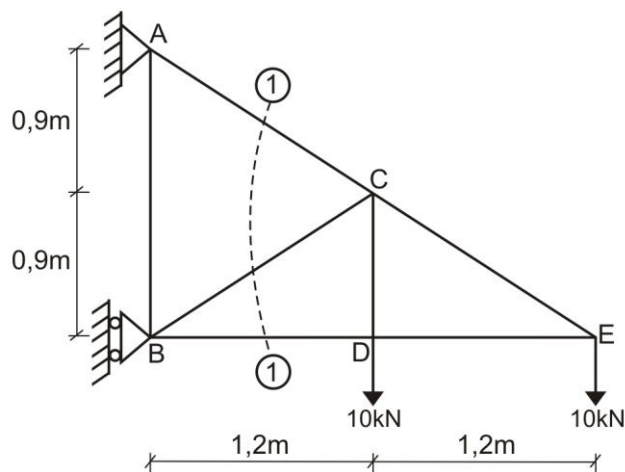


Fig. 4.41

Ahora, analizamos el lado derecho del corte y su equilibrio:

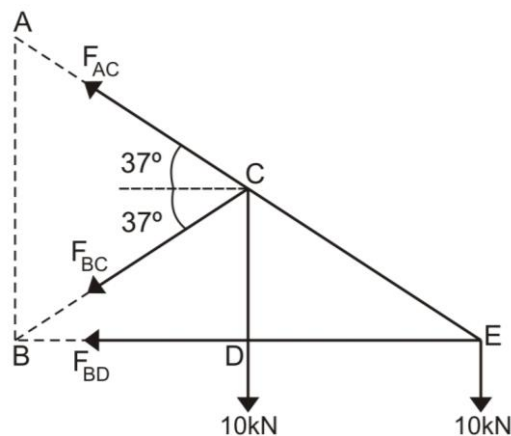


Fig. 4.42

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -10.(1,2) - 10.(2,4) + F_{AC} \sin 37^\circ.(1,2) + F_{AC} \cos 37^\circ.(0,9) = 0$$

$$F_{AC} = 25 \text{ kN (TRACCION)}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 10.(1,2) + F_{BC} \cos 37^\circ.(0,9) + F_{BC} \sin 37^\circ.(1,2) = 0$$

$$F_{BC} = -8,33 \text{ kN (COMPRESION)}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -10.(1,2) - F_{BD}.(0,9) = 0$$

$$F_{BD} = -13,33 \text{ kN (COMPRESION)}$$

PROBLEMA 4.10 Dada la siguiente armadura:

- Usando el método de los cortes, determinar las fuerzas axiales en las barras EF y BC, indicando si están en tracción o compresión.
- Analizar el nudo E y determinar las fuerzas axiales en las barras EH y ED

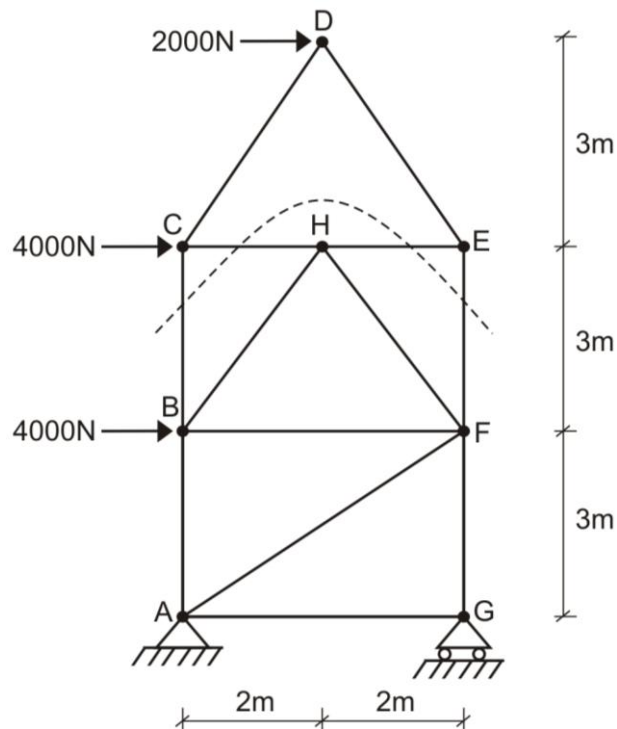


Fig. 4.43

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_G.(4) - 4000.(3) - 4000.(6) - 2000.(9) = 0$$

$$V_G = 13500 \text{ N } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 13500 - V_A = 0$$

$$V_A = 13500 \text{ N } \downarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 4000 + 4000 + 2000 - H_A = 0$$

$$H_A = 10000 \text{ N } \leftarrow$$

Efectuamos el corte indicado en la figura 4.43, denotándolo como 1-1 y analizamos el equilibrio de la parte superior de la armadura.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -2000 \cdot (3) - F_{EF} \cdot (4) = 0$$

$$F_{EF} = -1500 \text{ N (COMPRESION)}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{BC} \cdot (4) - 2000 \cdot (3) = 0$$

$$F_{BC} = 1500 \text{ N (TRACCION)}$$

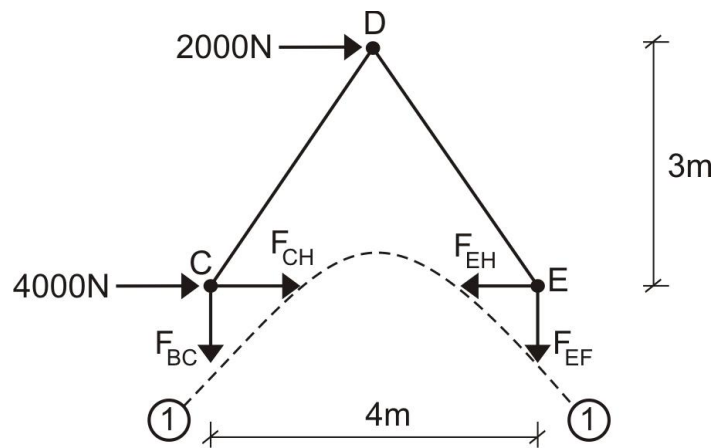


Fig. 4.44

b) Analizamos el nudo E por el método de los nudos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 56,3^\circ$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 1500 - F_{ED} \sin 56,3^\circ = 0$$

$$F_{ED} = 1802,98 \text{ N (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 1802,98 \cos 56,3^\circ - F_{EH} = 0$$

$$F_{EH} = 1000,37 \text{ N (TRACCION)}$$

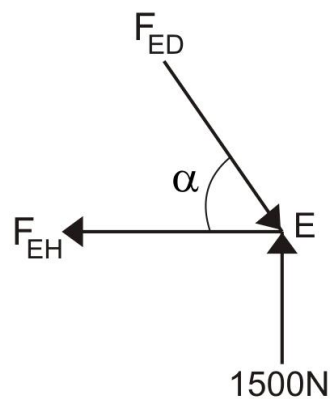


Fig. 4.45

PROBLEMA 4.11 Usando el método de las secciones, determinar las fuerzas axiales en las barras DE, QE, OQ y OP e indicar en cada caso, si las fuerzas son de tracción o de compresión.

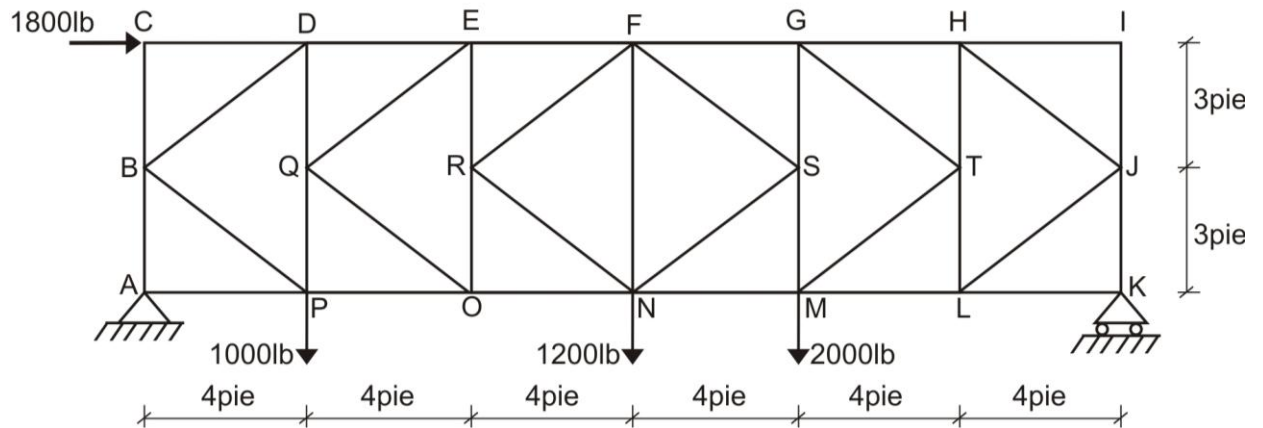


Fig. 4.46

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_K \cdot (24) - 1800 \cdot (6) - 1000 \cdot (4) - 1200 \cdot (12) - 2000 \cdot (16) = 0$$

$$V_K = 2550 \text{ lb } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 2550 - 1000 - 1200 - 2000 = 0$$

$$V_A = 1650 \text{ lb } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 1800 - H_A = 0$$

$$H_A = 1800 \text{ lb } \leftarrow$$

En la figura 4.47 se muestran los cortes 1-1 y 2-2 que debemos de realizar para determinar las fuerzas internas en las barras requeridas, así como las reacciones en los apoyos.

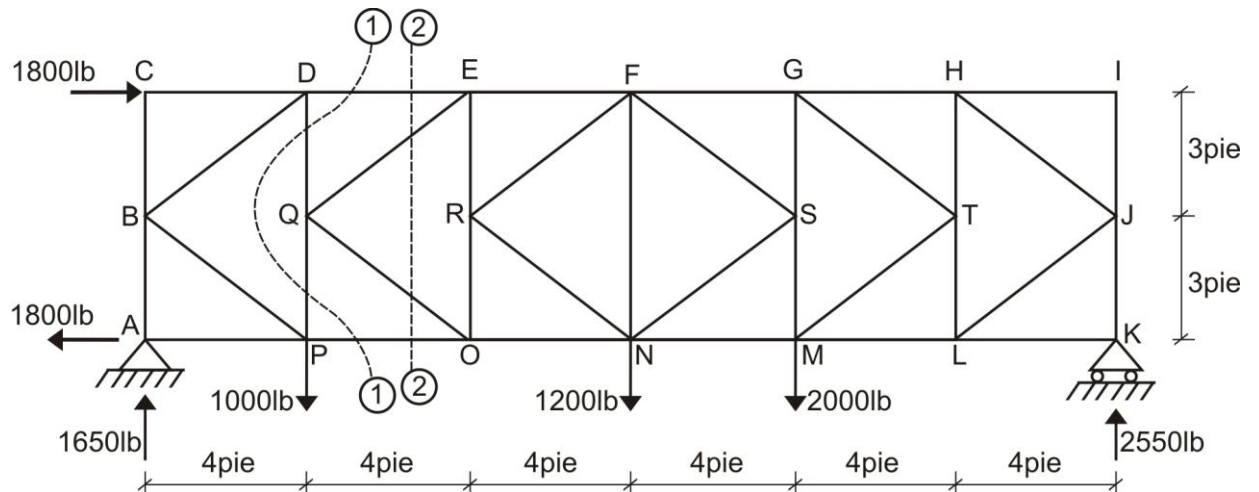


Fig. 4.47

Ahora, efectuamos el corte 1-1 mostrado en la figura 4.48 y determinamos las fuerzas internas en las barras DE y OP

$$\sum M_P = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_{DE} \cdot (6) - 1800 \cdot (6) - 1650 \cdot (4) = 0$$

$$F_{DE} = -2900 \text{ lb (COMPRESION)}$$

$$\sum M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{OP} \cdot (6) - 1650 \cdot (4) - 1800 \cdot (6) = 0$$

$$F_{OP} = 2900 \text{ lb (TRACCION)}$$

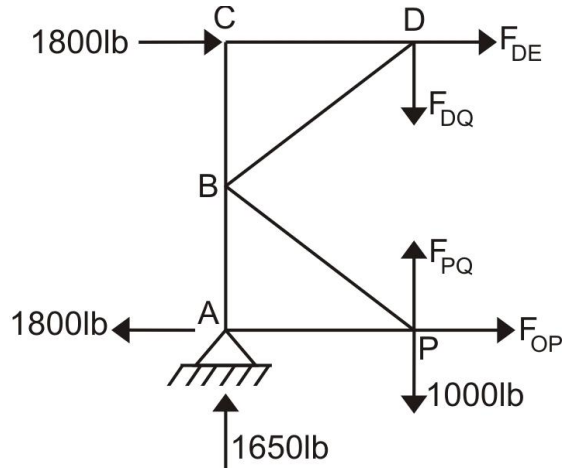


Fig. 4.48

Para determinar las fuerzas en QE y OQ, efectuamos el corte 2-2, analizando su equilibrio:

$$\sum M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad 1000 \cdot (4) - 1650 \cdot (8) - 1800 \cdot (6) + 2900 \cdot (6) + F_{QE} \sin 37^\circ \cdot (4) + F_{QE} \cos 37^\circ \cdot (3) = 0$$

$$F_{QE} = 541,67 \text{ lb (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 1800 - 1800 + F_{OQ} \cos 37^\circ - 541,67 \cos 37^\circ = 0$$

$$F_{OQ} = 541,67 \text{ lb (TRACCION)}$$

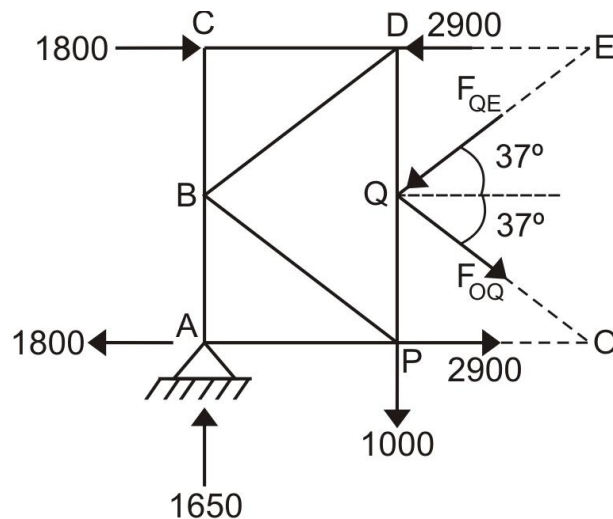


Fig. 4.49

PROBLEMA 4.12 Para la siguiente armadura plana mostrada en la figura, se tiene que la fuerza axial en CD es 3000kgf y en GD es 500kgf, ambas en compresión.

- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Determinar los valores de las fuerzas P y Q

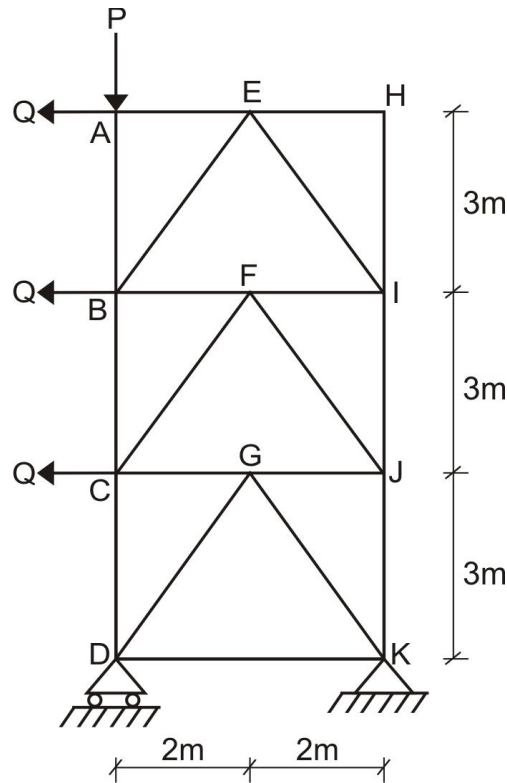


Fig. 4.50

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos, dejándolo en función de variables:

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow -V_D \cdot (4) + Q \cdot (3) + Q \cdot (6) + Q \cdot (9) + P \cdot (4) = 0$$

$$V_D = (P + 4,5Q) \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow (P + 4,5Q) - V_K - P = 0$$

$$V_K = 4,5Q \downarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_K - 3Q = 0$$

$$H_K = 3Q \rightarrow$$

- Para determinar los valores de las fuerzas P y Q, debemos de efectuar los cortes 1-1 y 2-2, que se muestran en la figura 4.51, donde también se esquematizan las direcciones de las reacciones en los apoyos.

Posteriormente, analizamos la parte superior del corte 1-1 (figura 4.52), incorporando, para ello, el valor de la fuerza axial en la barra CD

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow -3000 \cdot (4) + P \cdot (4) + Q \cdot (3) + Q \cdot (6) = 0$$

$$4P + 9Q = 12000 \quad (a)$$

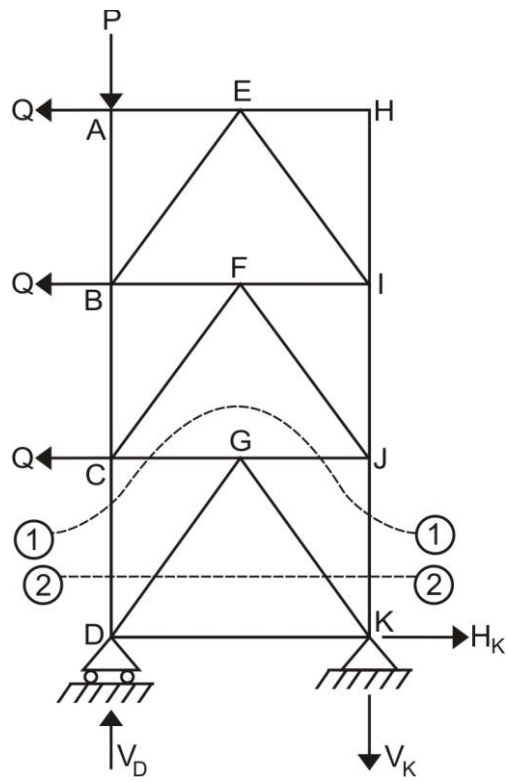


Fig. 4.51

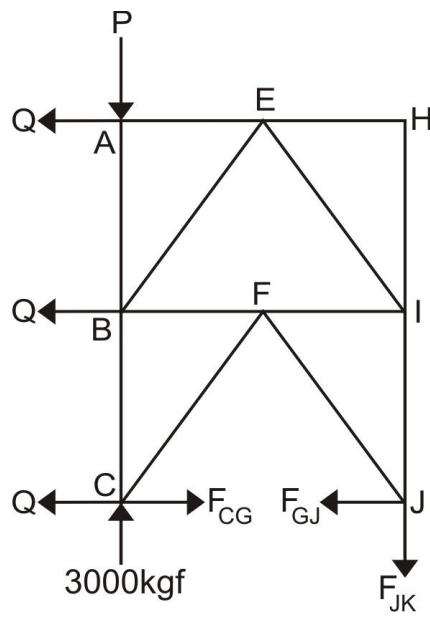


Fig. 4.52

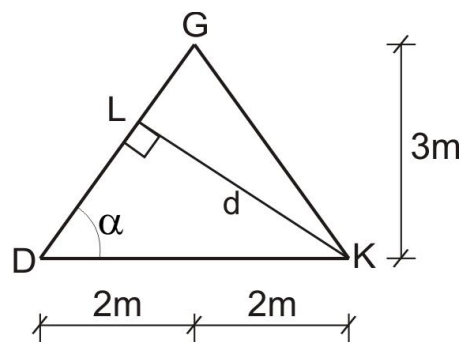


Fig. 4.53

Previamente al análisis del corte 2-2, calculamos la distancia perpendicular del nudo K hasta la barra GD, con la finalidad de determinar el momento en el nudo K del corte 2-2

De la armadura inicial:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 56,31^\circ$$

Luego, analizamos el triángulo DLK de la figura 4.53

$$d = 4 \operatorname{sen} 56,31^\circ = 3,328 \text{ m}$$

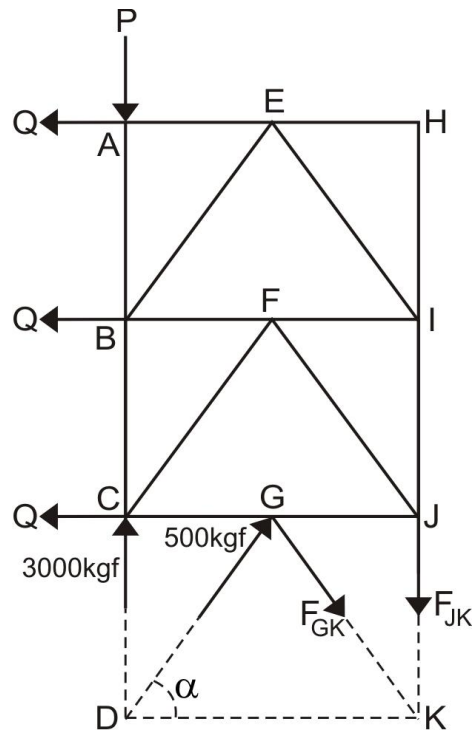


Fig. 4.54

Ahora, analizamos el equilibrio de la parte superior al corte 2-2, incorporando las fuerzas axiales en las barras CD y GD, tal como se muestra en la figura 4.54

$$\sum M_K = 0 \quad \Rightarrow \quad -3000.(4) - 500.(3,328) + Q.(3) + Q.(6) + Q.(9) + P.(4) = 0$$

$$4P + 18Q = 13664 \quad (b)$$

Resolvemos las ecuaciones (a) y (b), obteniendo:

$$P = 2584 \text{ kgf}$$

$$Q = 184,89 \text{ kgf}$$

Ahora, retornamos a la parte a) del problema, determinando las reacciones en los apoyos:

$$V_D = P + 4,5Q = 2584 + 4,5.(184,89) = 3416 \text{ kgf} \quad \uparrow$$

$$V_K = 4,5Q = 4,5.(184,89) = 832 \text{ kgf} \quad \downarrow$$

$$H_K = 3Q = 3.(184,89) = 554,67 \text{ kgf} \quad \rightarrow$$

PROBLEMA 4.13 Para la armadura mostrada en la figura, calcular:

- Las fuerzas axiales en las barras EL y AH usando el método de los cortes o secciones.
- Las fuerzas en las barras AB y AG por el método de los nudos.

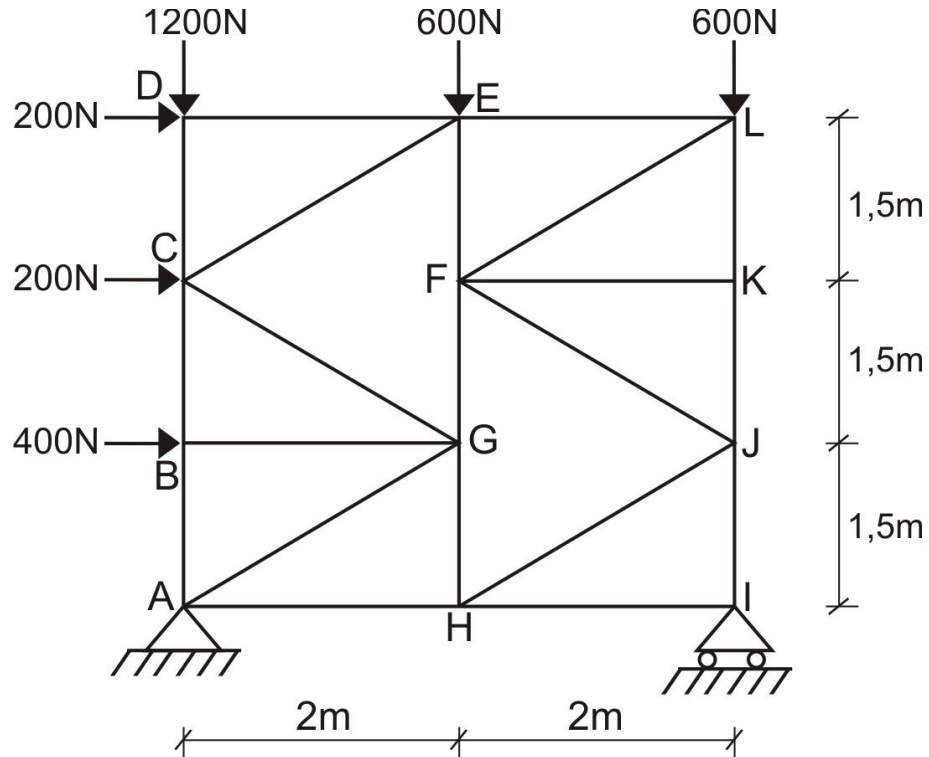


Fig. 4.55

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_I \cdot (4) - 400 \cdot (1,5) - 200 \cdot (3) - 200 \cdot (4,5) - 600 \cdot (2) - 600 \cdot (4) = 0$$

$$V_I = 1425\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 1425 - 1200 - 600 - 600 = 0$$

$$V_A = 975\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow 400 + 200 + 200 - H_A = 0$$

$$H_A = 800\text{N} \leftarrow$$

Efectuamos un corte tipo S, tal como se muestra en la figura 4.56 y analizamos el equilibrio del lado derecho del corte:

$$\sum M_H = 0 \Rightarrow F_{EL} \cdot (4,5) + 1425 \cdot (2) - 600 \cdot (2) = 0$$

$$F_{EL} = -366,67\text{N (COMPRESION)}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -600 \cdot (2) - F_{AH} \cdot (4,5) + 1425 \cdot (2) = 0$$

$$F_{AH} = 366,67\text{N (TRACCION)}$$

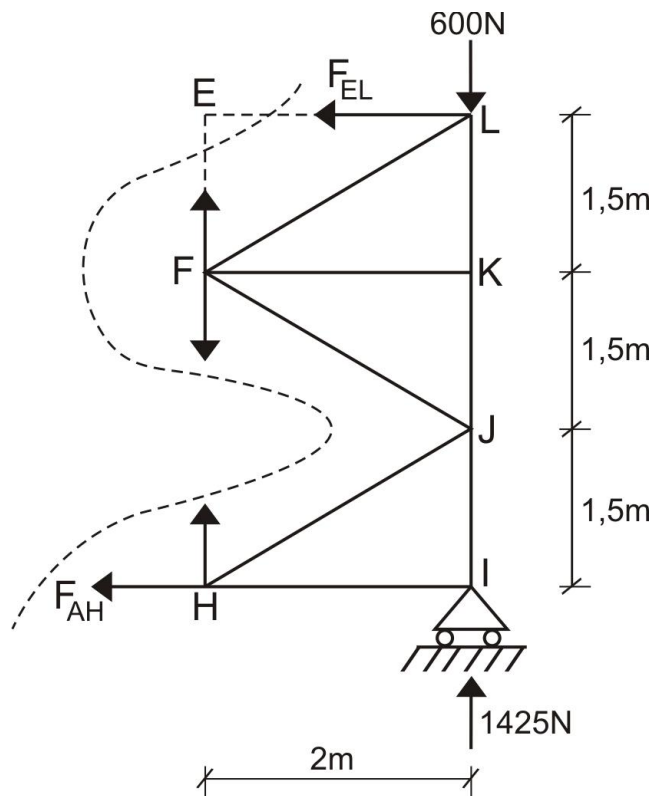


Fig. 4.56

- b) Ahora, calculamos las fuerzas axiales en las barras AB y AG, utilizando el método de los nudos, y analizando el equilibrio en el nudo A, tal como se muestra en la figura 4.57

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 366,67 + F_{AG} \cos 37^\circ - 800 = 0$$

$$F_{AG} = 541,66\text{N (TRACCION)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 541,66 \sin 37^\circ + 975 - F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = 1300\text{N (COMPRESION)}$$

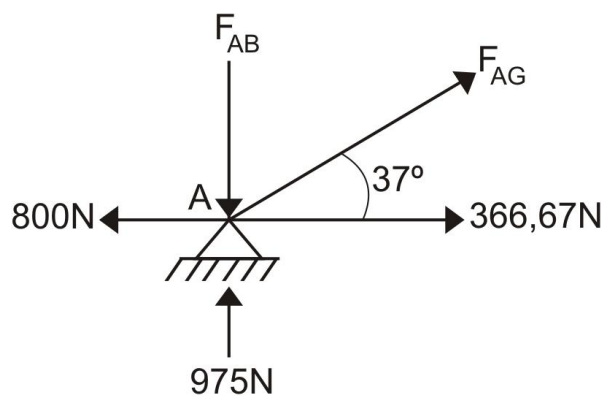


Fig. 4.57

PROBLEMA 4.14 En la armadura mostrada, la fuerza axial en GH es 600N (tracción) y en BC es 480N (tracción), determinar:

- El ángulo α
- El valor de la carga P

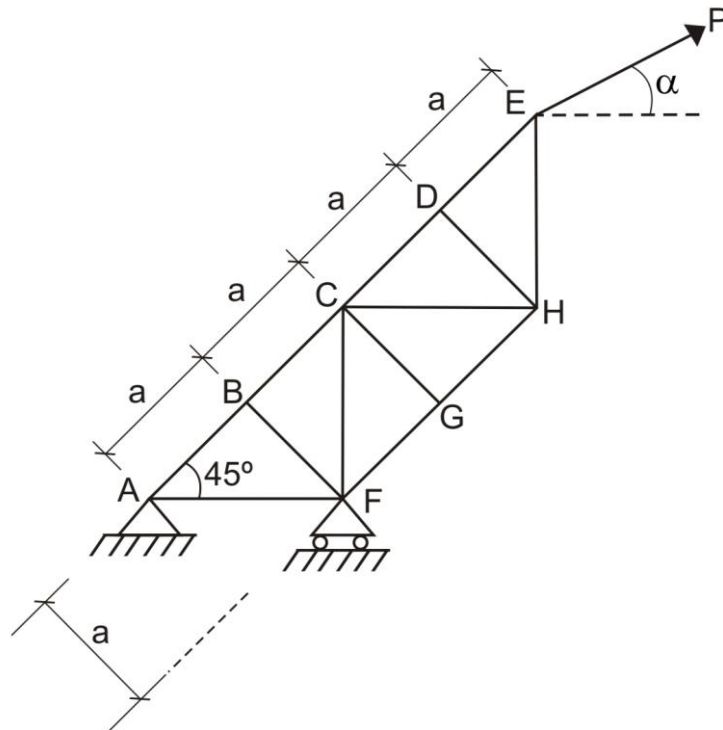


Fig. 4.58

Solución:

- Aplicamos el principio de barras nulas, siendo estas las barras BF, CG y DH, tal como se muestra en la figura 4.59

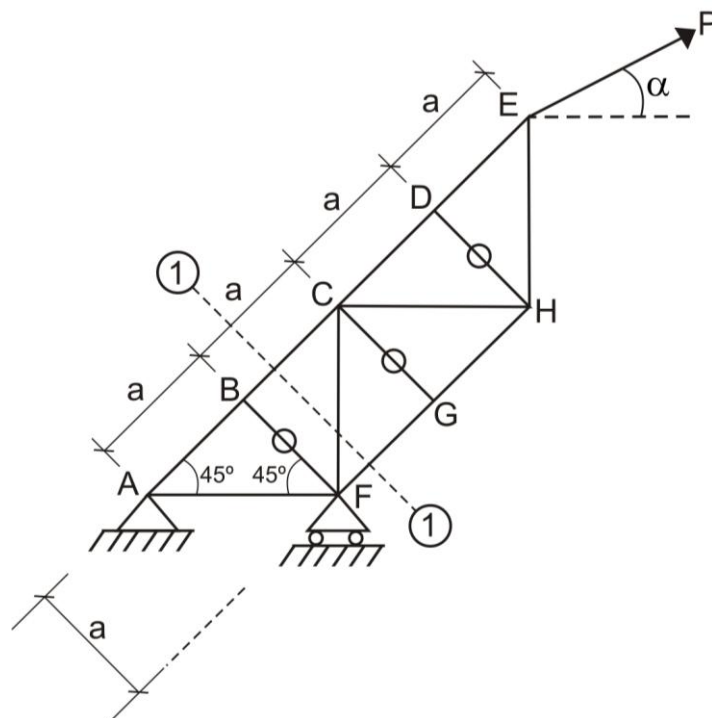


Fig. 4.59

Como la barra CG es nula, entonces al analizar el equilibrio en el nudo G, tendremos que las fuerzas axiales en las barras GF y GH son las mismas y ambas son de tracción, debido a que por condición del problema la fuerza axial en GH es 600N en tracción.

Ahora, analizamos el equilibrio de la parte derecha al corte 1-1, el cual se muestra en la figura 4.60

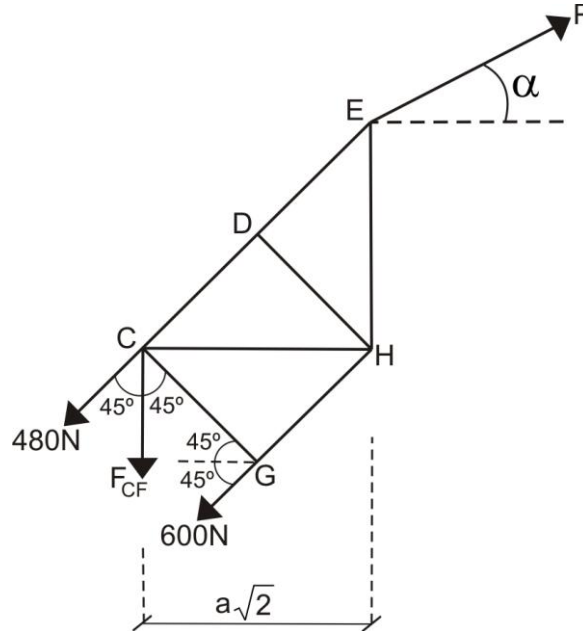


Fig. 4.60

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow F_{CF} \cdot (a\sqrt{2}) - 600 \cdot (a) = 0$$

$$F_{CF} = 424,26 \text{ N (TRACCION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow P \sin \alpha - 424,26 - 480 \cos 45^\circ - 600 \sin 45^\circ = 0$$

$$P \sin \alpha = 1187,93 \quad (a)$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow P \cos \alpha - 480 \sin 45^\circ - 600 \cos 45^\circ = 0$$

$$P \cos \alpha = 763,67 \quad (b)$$

Dividimos la ecuación (a) entre la ecuación (b) y obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,555$$

De donde:

$$\alpha = 57,26^\circ$$

b) Para determinar el valor de la carga P, reemplazamos valores en la ecuación (a), es decir:

$$P = \frac{1187,93}{\sin 57,26^\circ} = 1412,3 \text{ N}$$

PROBLEMA 4.15 Para la estructura mostrada en la figura, se pide determinar:

- Las reacciones en los apoyos A, B y D
- Las fuerzas axiales en las barras BC y EF, indicando si son de tracción o de compresión.

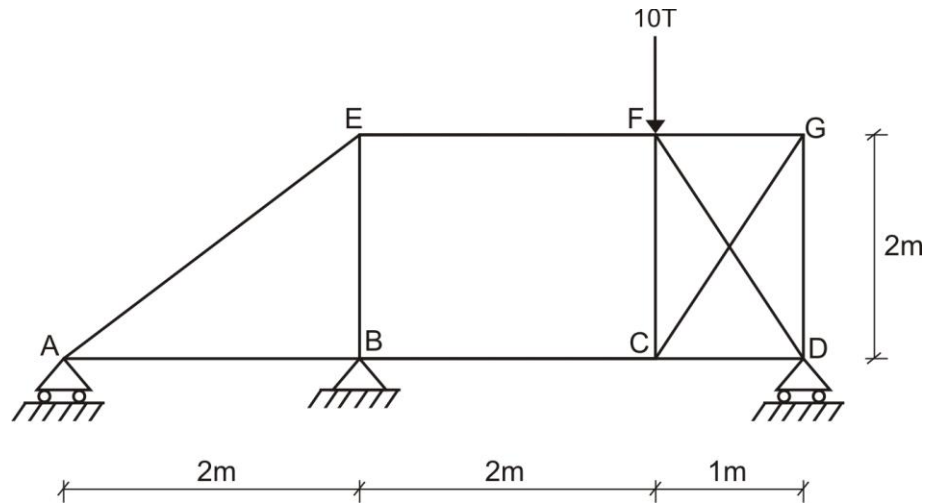


Fig. 4.61

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

Efectuamos un corte 1-1 y analizamos el equilibrio de la parte derecha del corte:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_D - 10 = 0 \quad \therefore V_D = 10T \uparrow$$

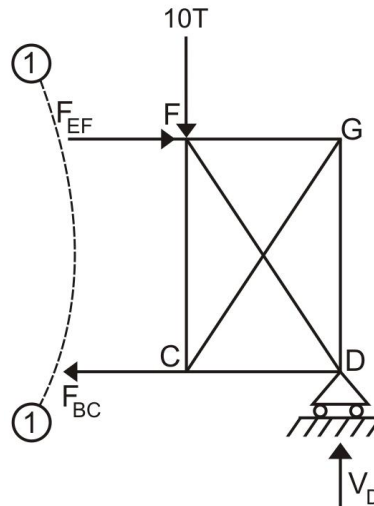


Fig. 4.62

Retornamos a la armadura inicial, analizando el equilibrio de toda la armadura:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 10.(3) - 10.(2) - V_A.(2) = 0 \quad \therefore V_A = 5T \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5 + 10 - 10 - V_B = 0 \quad \therefore V_B = 5T \downarrow$$

- Para determinar las fuerzas axiales en las barras BC y EF, retornamos al corte 1-1 (figura 4.62)

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 10.(1) - F_{EF}.(2) = 0$$

$$F_{EF} = 5T \text{ (COMPRESION)}$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 - F_{BC} = 0$$

$$F_{BC} = 5T \text{ (TRACCION)}$$

PROBLEMA 4.16 Para la armadura mostrada en la figura, se pide determinar:

- Las reacciones en los apoyos A, B y D
- Las fuerzas axiales en las barras FE, AB y JF, indicando si son de tracción o de compresión.

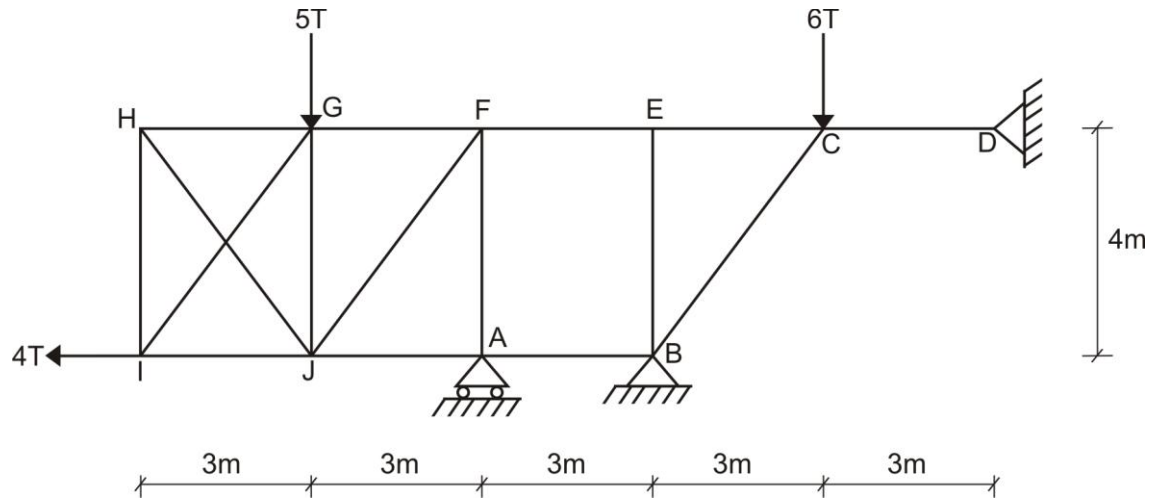


Fig. 4.63

Solución:

- Analizamos el equilibrio de la parte izquierda del corte 1-1 de la armadura:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A - 5 = 0$$

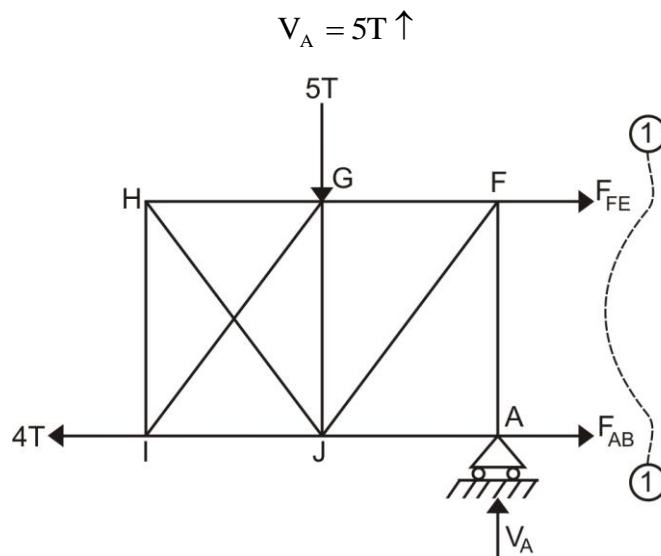


Fig. 4.64

Para determinar la reacción vertical en B, analizamos la armadura entre los cortes 1-1 y 2-2, tal como se muestra en la figura 4.65

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B - 6 = 0$$

$$V_B = 6T \uparrow$$

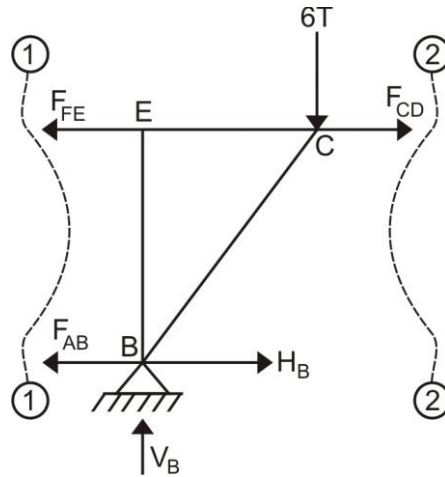


Fig. 4.65

Retornamos a toda la armadura, analizando su equilibrio, previa incorporación de las reacciones ya calculadas, tal como se muestra en la figura 4.66

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 5 + 6 + V_D - 5 - 6 = 0$$

$$V_D = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 6.(3) + 5.(12) - 4.(4) - 5.(9) - 6.(6) + H_B.(4) = 0$$

$$H_B = 4,75T \rightarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -4 + 4,75 - H_D = 0$$

$$H_D = 0,75T \leftarrow$$

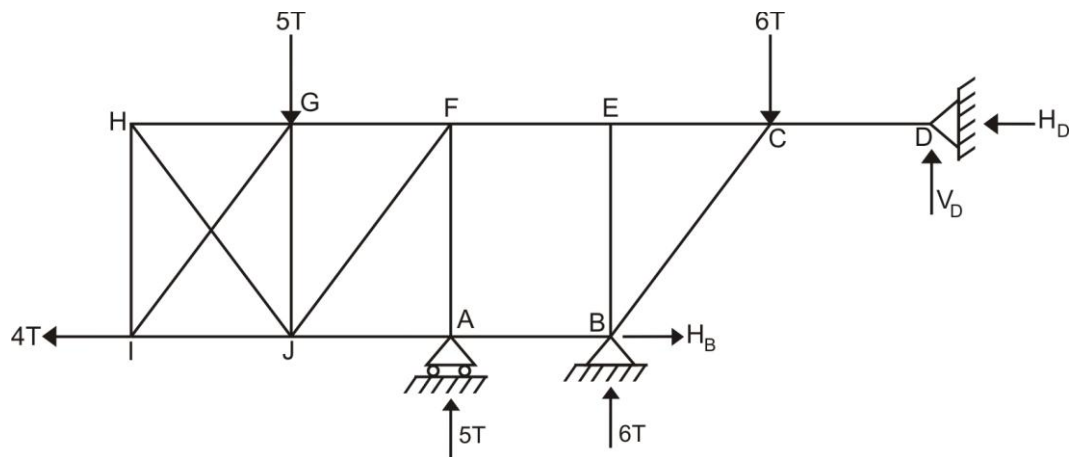


Fig. 4.66

- b) Determinamos las fuerzas axiales en las barras FE y AB, analizando el equilibrio del lado izquierdo de la armadura del corte 1-1, incorporando el valor de la reacción en A, tal como se muestra en la figura 4.67

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 5.(3) - F_{FE}.(4) = 0$$

$$F_{FE} = 3,75T \text{ (TRACCION)}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{AB} + 3,75 - 4 = 0$$

$$F_{AB} = 0,25T \text{ (TRACCION)}$$

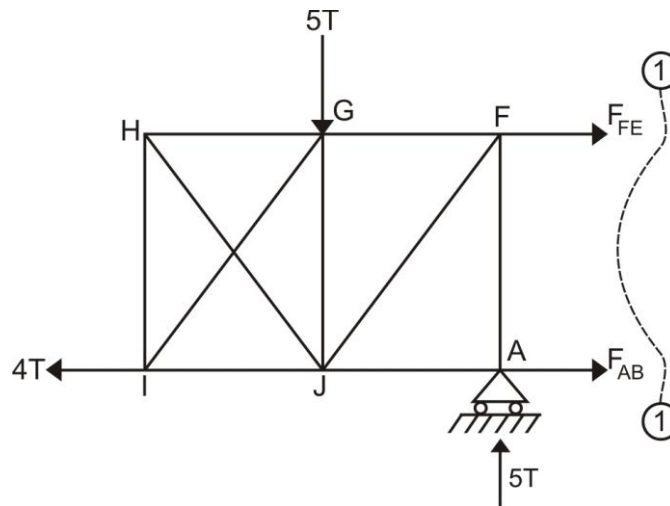


Fig. 4.67

Ahora, determinamos la fuerza axial en la barra JF, efectuando un corte 3-3 y analizando el lado izquierdo de la armadura.

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -5 + F_{JF} \sin 53^\circ = 0$$

$$F_{JF} = 6,25T \text{ (TRACCION)}$$

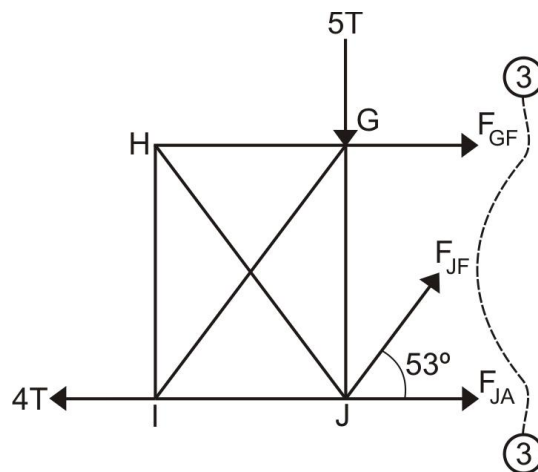


Fig. 4.68

CAPITULO 5

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

5.1 FUERZAS INTERNAS

PROBLEMA 5.1 La siguiente viga tiene una componente de reacción en el apoyo B igual a 1002N, se pide determinar:

- El valor de "W"
- Las fuerzas o acciones internas a 2m a la derecha del apoyo A

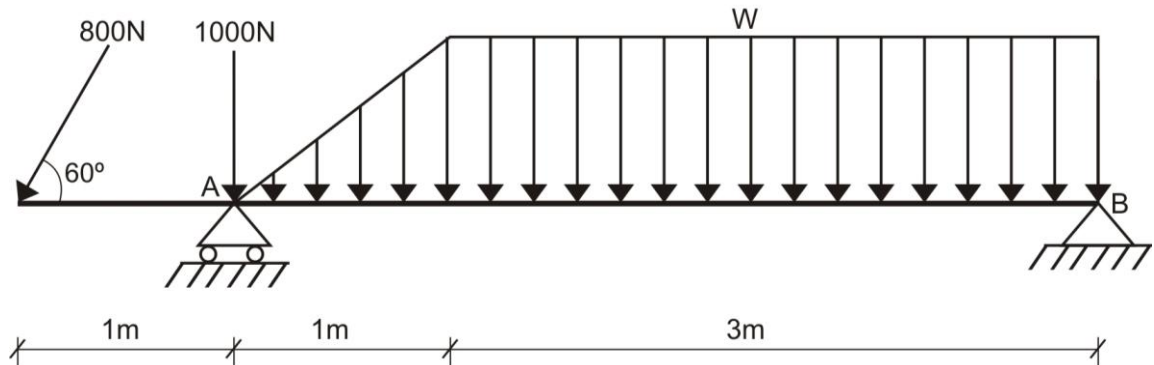


Fig. 5.1

Solución:

- Efectuamos el equilibrio de la viga, teniendo en cuenta que por dato del problema, la reacción vertical en el apoyo B es igual a 1002N, debido a que es la única componente que alcanza dicho valor.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 800 \sin 60^\circ \cdot (1) + 1002 \cdot (4) - \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (W) \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) - 3 \cdot (W) \cdot (2,5) = 0$$

$$W = 600 \text{ N/m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B - 800 \cos 60^\circ = 0$$

$$H_B = 400 \text{ N} \rightarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 1002 - 800 \sin 60^\circ - 1000 - \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (600) - 3 \cdot (600) = 0$$

$$V_A = 2790,8 \text{ N} \uparrow$$

- Efectuamos un corte a 2m a la derecha del apoyo A, analizando su equilibrio de la parte izquierda de la viga (figura 5.2) y denotando el punto del corte como C

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_C - 800 \cos 60^\circ = 0$$

$$N_C = 400 \text{ N (TRACCION)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2790,8 - 800 \sin 60^\circ - 1000 - \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (600) - 1 \cdot (600) - V_C = 0$$

$$V_C = 198 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow$$

$$- 2790,8.(2) + 800\text{sen}60^\circ.(3) + 1000.(2) + \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (600) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 1 \cdot (600) \cdot (0,5) + M_C = 0$$

$$M_C = 803,14\text{N.m}$$

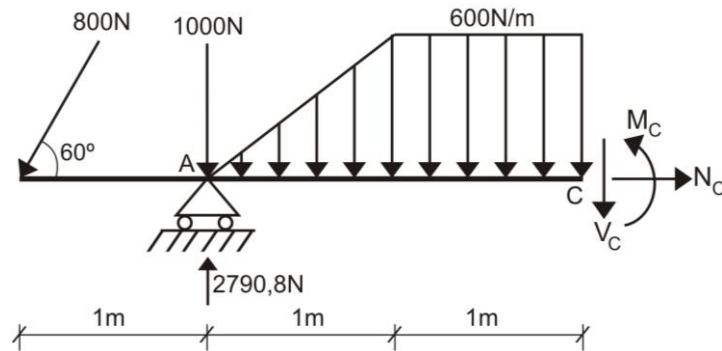


Fig. 5.2

PROBLEMA 5.2 En la figura se muestra una viga empotrada en B, se pide determinar:

- Las componentes de reacción en los apoyos.
- La fuerza axial, fuerza cortante y momento flector a 2m a la derecha del apoyo A

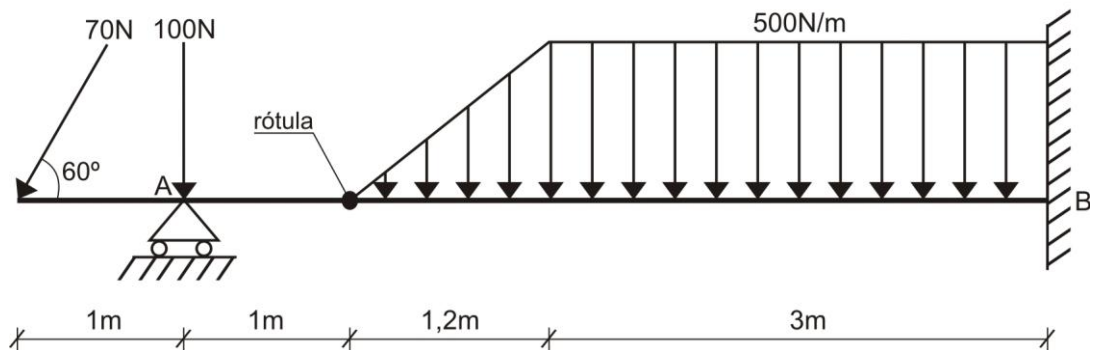


Fig. 5.3

Solución:

- Analizamos el equilibrio de la parte izquierda de la rótula (figura 5.4)

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow - V_A \cdot (1) + 100 \cdot (1) + 70\text{sen}60^\circ \cdot (2) = 0$$

$$V_A = 221,24\text{N} \uparrow$$

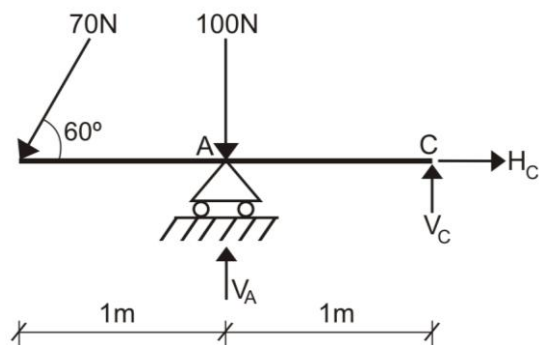


Fig. 5.4

Ahora, analizamos el equilibrio de toda la viga:

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -70 \cos 60^\circ + H_B = 0$$

$$H_B = 35 \text{ N} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -70 \sin 60^\circ - 100 - \frac{1}{2} \cdot (1,2) \cdot (500) - 3 \cdot (500) + 221,24 + V_B = 0$$

$$V_B = 1739,38 \text{ N} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow$$

$$70 \sin 60^\circ \cdot (6,2) + 100 \cdot (5,2) + \frac{1}{2} \cdot (1,2) \cdot (500) \cdot (3,4) + 3 \cdot (500) \cdot (1,5) - 221,24 \cdot (5,2) - M_B = 0$$

$$M_B = 3015,41 \text{ N.m}$$

La orientación de las reacciones en los apoyos y sus valores, se muestran en la figura 5.5

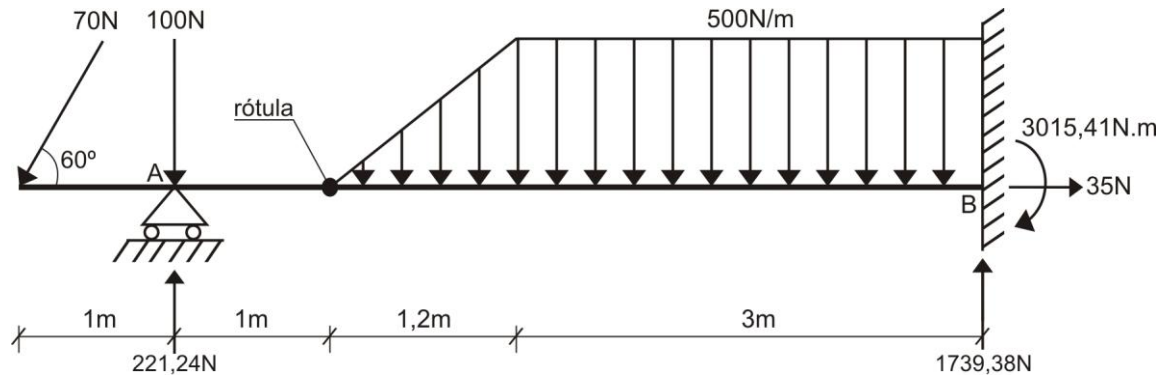


Fig. 5.5

- b) Ahora, determinamos las fuerzas internas a 2 m a la derecha del apoyo A, efectuando un equilibrio en dicho punto, denotándolo como D

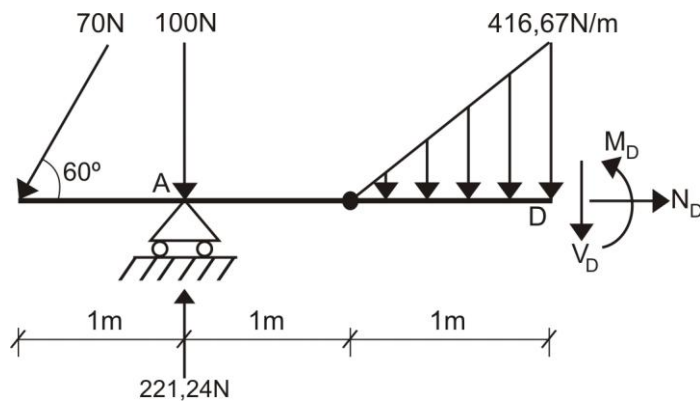


Fig. 5.6

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_D - 70 \cos 60^\circ = 0$$

$$N_D = 35 \text{ N (TRACCION)}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 221,24 - 70 \sin 60^\circ - 100 - \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (416,67) - V_D = 0$$

$$V_D = -147,72 \text{ N}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

$$-221,24 \cdot (2) + 70 \sin 60^\circ \cdot (3) + 100 \cdot (2) + \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (416,67) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) + M_D = 0$$

$$M_D = -8,83 \text{ N.m}$$

PROBLEMA 5.3 La siguiente viga mostrada en equilibrio tiene sus componentes de reacción vertical en el apoyo A igual a $3T$ y en el apoyo B igual a $10T$ respectivamente, determinar:

- El valor de " W "
- La fuerza axial, fuerza cortante y momento flector a 1m a la derecha del apoyo A

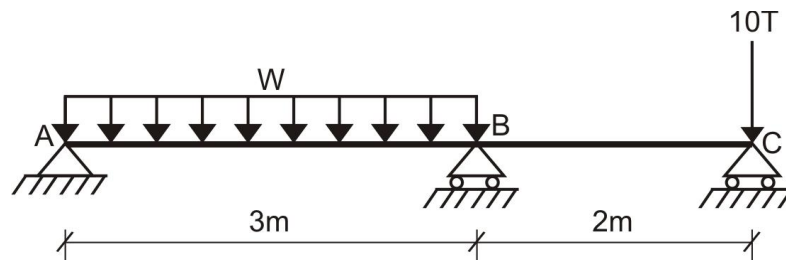


Fig. 5.7

Solución:

- Analizamos el equilibrio de la viga, incorporando las reacciones que son dados como datos en el problema, tal como se muestra en la figura 5.8

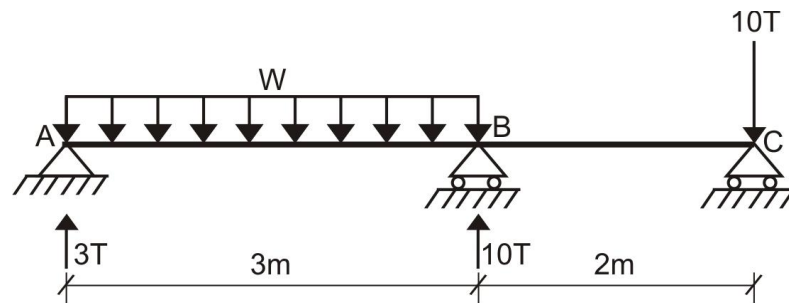


Fig. 5.8

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -3 \cdot (5) - 10 \cdot (2) + 3W \cdot (3,5) = 0 \quad \therefore W = 3,33T/\text{m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3 + 10 + V_C - 3,33 \cdot (3) - 10 = 0 \quad \therefore V_C = 7T \uparrow$$

- Ahora determinamos las fuerzas internas a 1m a la derecha del apoyo A, efectuando un corte y analizando su equilibrio, denotando a dicho punto como D

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 3 - 3,33 \cdot (1) - V_D = 0 \quad \therefore V_D = -0,33T$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -3 \cdot (1) + 3,33 \cdot (1) \cdot (0,5) + M_D = 0 \quad \therefore M_D = 1,335T \cdot \text{m}$$

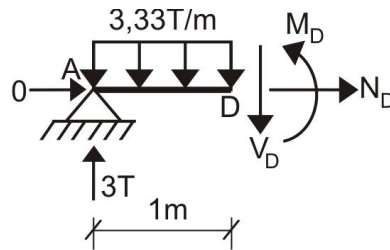


Fig. 5.9

PROBLEMA 5.4 En la siguiente barra doblada ABC, la componente de reacción en el apoyo C es igual a 2000kgf, determinar:

- El valor de W
- Las fuerzas internas a 2m a la derecha de B

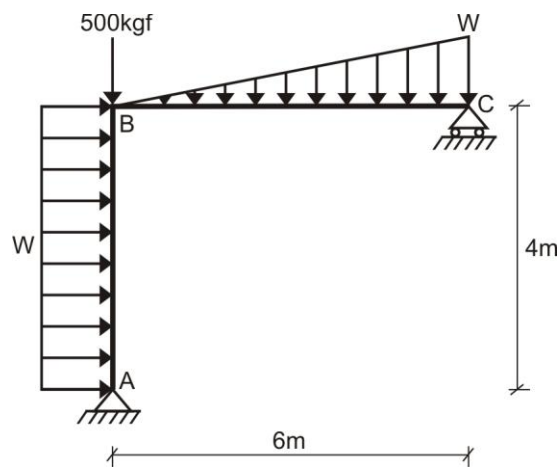


Fig. 5.10

Solución:

- Determinamos el valor de W, efectuando el equilibrio de toda la estructura y, luego, calculamos las componentes de reacción en el apoyo A

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2000.(6) - W.(4).(2) - \frac{1}{2}.(W).(6).(4) = 0$$

$$W = 600\text{kgf} / \text{m}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 600.(4) - H_A = 0$$

$$H_A = 2400\text{kgf} \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 2000 - 500 - \frac{1}{2}.(6).(600) = 0$$

$$V_A = 300\text{kgf} \uparrow$$

- Ahora, efectuamos un corte a 2m a la derecha de B y analizamos el equilibrio de la parte izquierda de la estructura, tal como se muestra en la figura 5.11

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D + 600.(4) - 2400 = 0$$

$$N_D = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 300 - 500 - \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (200) - V_D = 0$$

$$V_D = -400 \text{ kgf}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

$$-300 \cdot (2) - 2400 \cdot (4) + 600 \cdot (4) \cdot (2) + 500 \cdot (2) + \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (200) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + M_D = 0$$

$$M_D = 4266,67 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

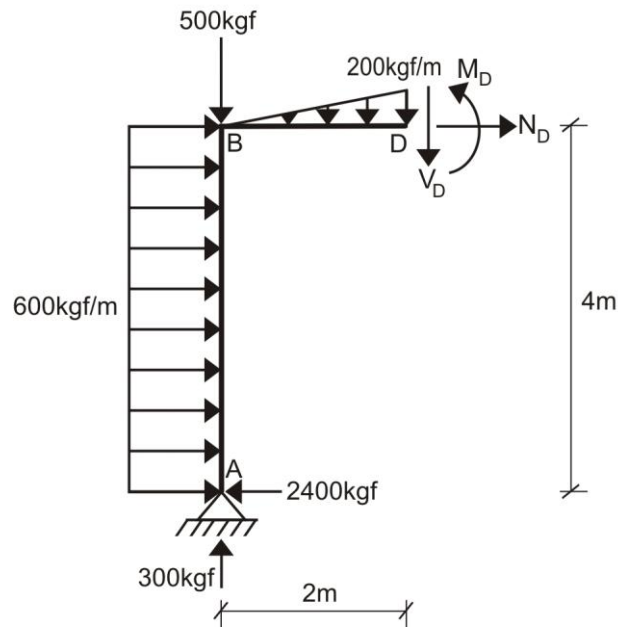


Fig. 5.11

PROBLEMA 5.5 En la estructura mostrada en equilibrio se tiene dos barras AB y BC unidas por una articulación en B, determine:

- El valor de W (N/m) sabiendo que el momento en el empotramiento en C vale 500 N.m en sentido antihorario.
- Las fuerzas internas a 2m a la derecha del punto B

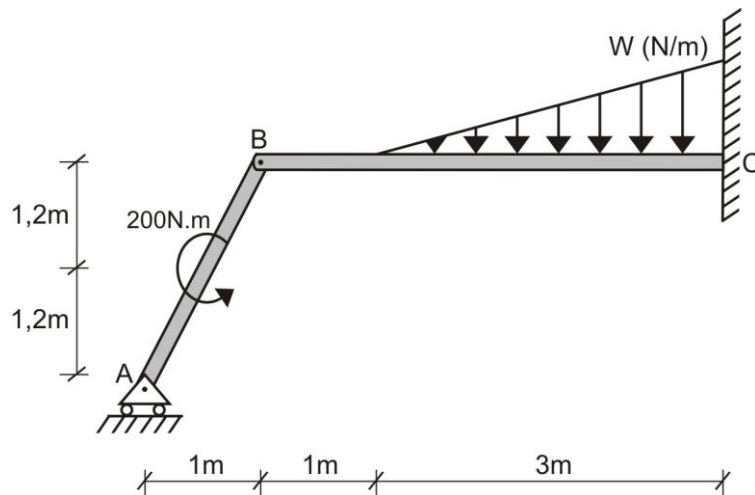


Fig. 5.12

Solución:

- a) Efectuamos un corte en la rótula B y analizamos el equilibrio de la parte izquierda del corte, determinando la reacción en A y las fuerzas internas en la rótula.

$$\sum M_B^{izq} = 0 \Rightarrow -V_A \cdot (1) + 200 = 0 \quad \therefore V_A = 200\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 200 - V_B = 0 \quad \therefore V_B = 200\text{N} \downarrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

Los valores obtenidos se muestran en la figura 5.13

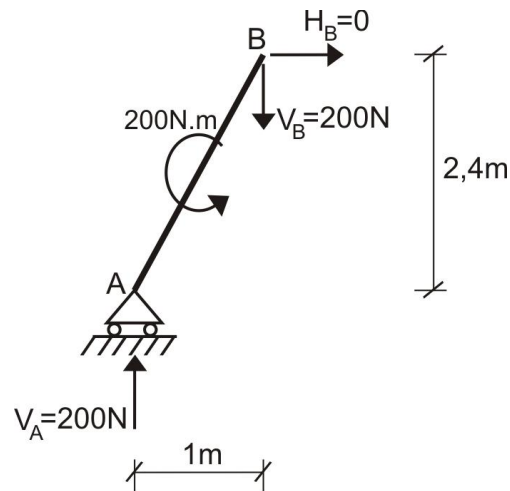


Fig. 5.13

Ahora, analizamos el lado derecho de la rótula B, es decir BC, determinando el valor de W y las componentes de reacción vertical y horizontal en el empotramiento C, debido a que el momento es dato del problema, esquematizando los resultados obtenidos en la figura 5.14

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_C = 0$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -200 \cdot (4) + 500 + \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (W) \cdot (1) = 0 \quad \therefore W = 200\text{N/m}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 200 + V_C - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (200) = 0 \quad \therefore V_C = 100\text{N} \uparrow$$

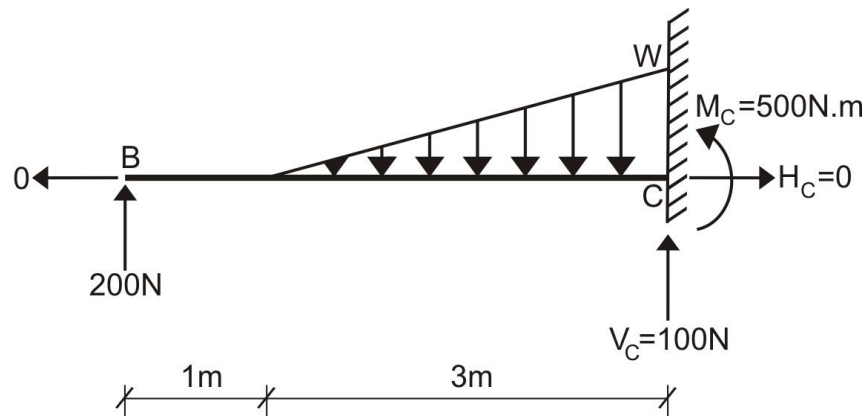


Fig. 5.14

- b) Ahora, efectuamos un corte a 2m a la derecha de la rótula B, analizando el equilibrio de la parte izquierda del corte y determinando las fuerzas internas en el punto D, que es la sección requerida en el problema, tal como se muestra en la figura 5.15

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 200 - \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (66,67) - V_D = 0$$

$$V_D = 166,67 \text{ N}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -200 \cdot (3) + 200 + \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (66,67) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) + M_D = 0$$

$$M_D = 388,89 \text{ N.m}$$

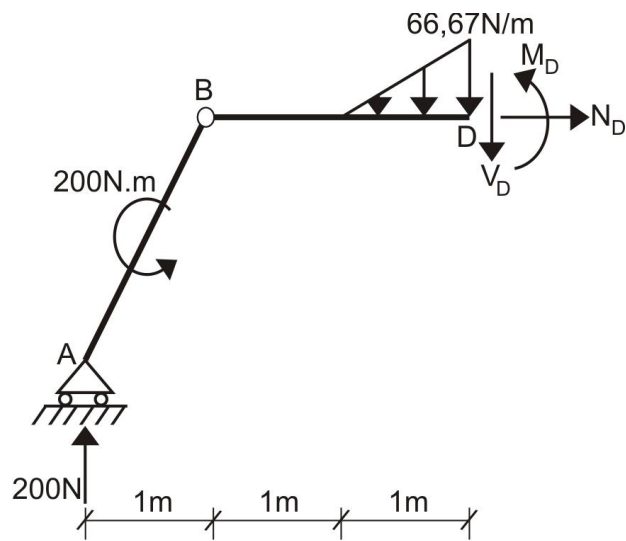


Fig. 5.15

PROBLEMA 5.6 Para el sistema mostrado en equilibrio:

- Determinar el valor de la tensión en el cable AB y las componentes de reacción en el apoyo D, sabiendo que la barra doblada ADC rígida es recto en D y es homogénea con un peso de 400 N
- Determinar la fuerza axial, fuerza cortante y momento flector en el punto medio de la barra AD

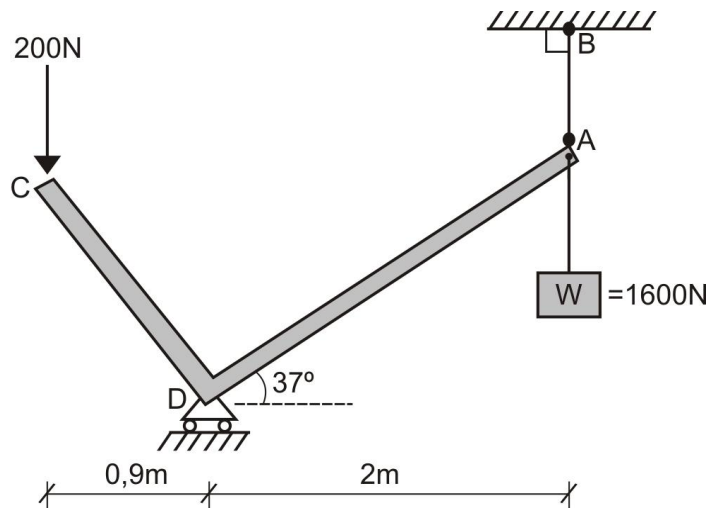


Fig. 5.16

Solución:

a) Determinamos las longitudes de los tramos CD y AD:

$$L_{CD} = \frac{0,9}{\cos 53^\circ} = 1,5\text{m}$$

$$L_{AD} = \frac{2}{\cos 37^\circ} = 2,5\text{m}$$

Luego, calculamos los pesos en cada tramo en forma proporcional a sus longitudes:

$$P_{CD} = 1,5 \cdot 100 = 150\text{N}$$

$$P_{AD} = 2,5 \cdot 100 = 250\text{N}$$

Graficamos el diagrama de cuerpo libre de la estructura y analizamos su equilibrio, determinando la tensión en el cable y las componentes de reacción en el apoyo D

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow T \cdot (2) - 250 \cdot (1) - 1600 \cdot (2) + 200 \cdot (0,9) + 150 \cdot (0,45) = 0$$

$$T = 1601,25\text{N}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_D - 200 - 150 - 250 - 1600 + 1601,25 = 0$$

$$V_D = 598,75\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_D = 0$$

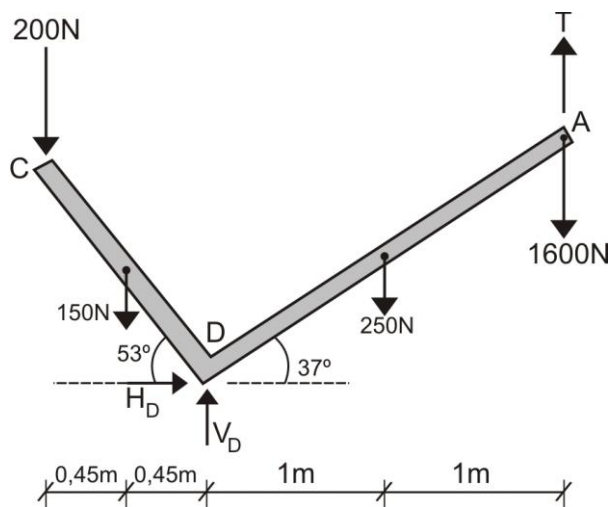


Fig. 5.17

b) Calculamos las fuerzas internas en el punto medio de la barra AD, denotándolo como E, efectuando un corte en dicho punto y analizando el equilibrio de la estructura.

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow M_E + 200 \cdot (1,9) + 150 \cdot (1,45) - 598,75 \cdot (1) + 125 \cdot (0,5) = 0$$

$$M_E = -61,25\text{N.m}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_E \cos 37^\circ + V_E \cos 53^\circ = 0$$

$$N_E = -0,75V_E$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow N_E \sin 37^\circ + 598,75 - 200 - 150 - 125 - V_E \sin 53^\circ = 0$$

$$-0,75V_E \cdot (0,6) + 598,75 - 200 - 150 - 125 - 0,8V_E = 0$$

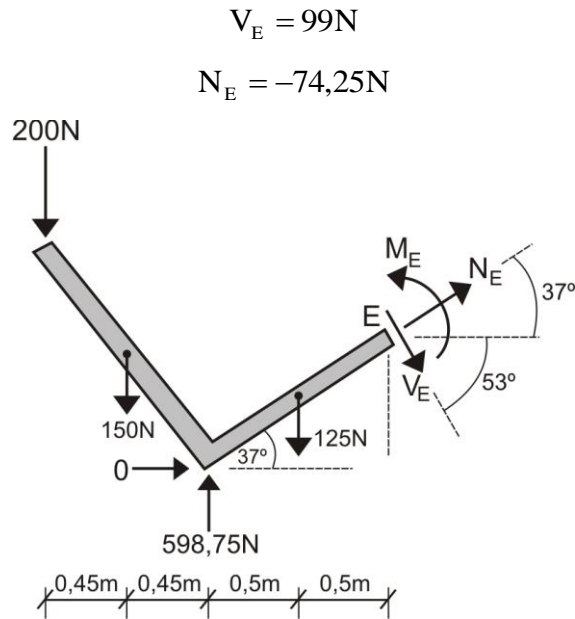


Fig. 5.18

PROBLEMA 5.7 Para el sistema mostrado, calcular:

- La tensión en el cable BC
- Las reacciones en los apoyos A y D
- Las fuerzas internas en el punto medio de la barra AB

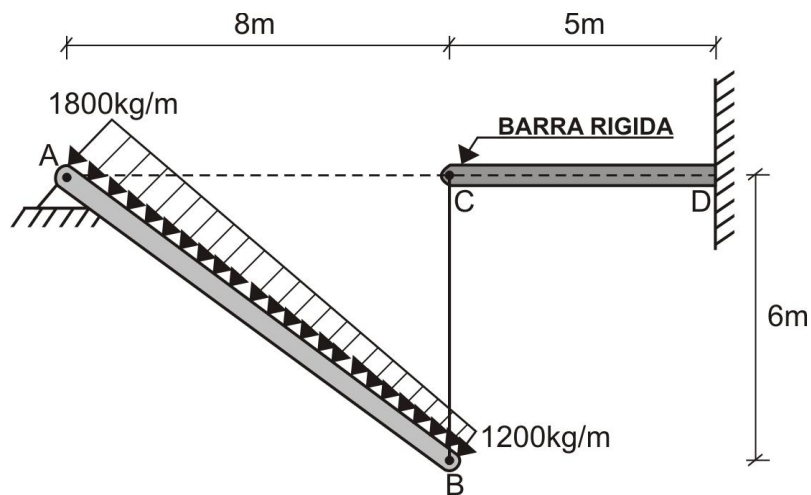


Fig. 5.19

Solución:

- Efectuamos un corte en el cable BC, analizando el equilibrio de la parte izquierda de la estructura, es decir la barra AB, tal como se muestra en la figura 5.20

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1200 \cdot (10) \cdot (5) - \frac{1}{2} \cdot (600) \cdot (10) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 10 \right) + T_{BC} \cdot (8) = 0$$

$$T_{BC} = 8750\text{kg}$$

- Calculamos las reacciones en el apoyo A

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 8750 - 1200 \cdot (10) \cos 37^\circ - \frac{1}{2} \cdot (600) \cdot (10) \cos 37^\circ = 0$$

$$V_A = 3250\text{kg} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 1200 \cdot (10) \sin 37^\circ - \frac{1}{2} \cdot (600) \cdot (10) \sin 37^\circ = 0$$

$$H_A = 9000\text{kg} \rightarrow$$

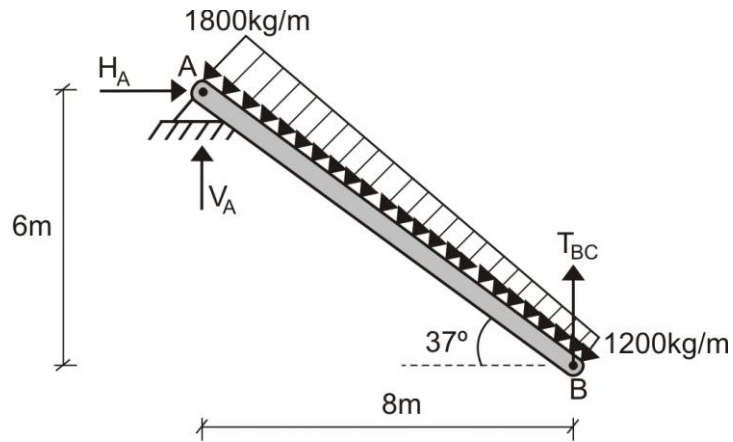


Fig. 5.20

Ahora, analizamos el equilibrio de la barra rígida CD

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_D = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -8750 + V_D = 0$$

$$V_D = 8750\text{kg} \uparrow$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 8750 \cdot (5) - M_D = 0$$

$$M_D = 43750\text{kg.m}$$

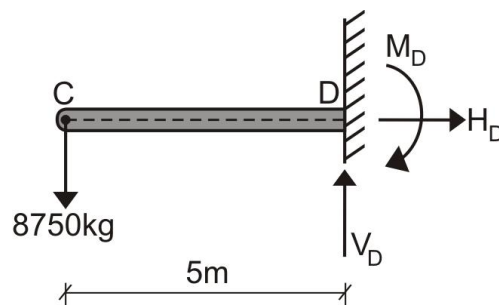


Fig. 5.21

- c) Calculamos las fuerzas internas en la parte media de la barra AB, es decir en el punto E de la figura 5.22, analizando el equilibrio de la parte izquierda al corte. Para su facilidad de cálculo, elegimos como ejes coordenados X' e Y'

$$\sum F_{X'} = 0 \Rightarrow N_E + 9000 \cos 37^\circ - 3250 \cos 53^\circ = 0$$

$$N_E = -5250\text{kg}$$

$$\sum F_{Y'} = 0 \Rightarrow 9000 \sin 37^\circ + 3250 \sin 53^\circ - \frac{(1500 + 1800) \cdot (5)}{2} - V_E = 0$$

$$V_E = -250\text{kg}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow$$

$$-3250 \sin 53^\circ \cdot (5) - 9000 \sin 37^\circ \cdot (5) + 1500 \cdot (5) \cdot (2,5) + \frac{1}{2} \cdot (300) \cdot (5) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) + M_E = 0$$

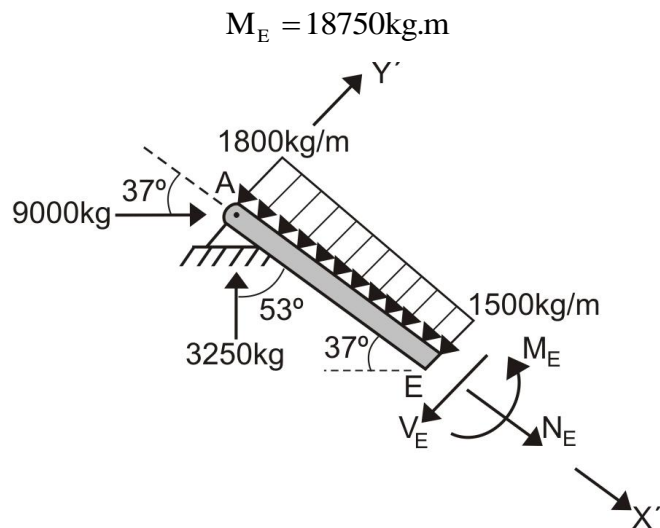


Fig. 5.22

5.2 DIAGRAMAS EN VIGAS

PROBLEMA 5.8 ¿Será correcto afirmar que el momento flector máximo de la viga mostrada es $PL/2$?

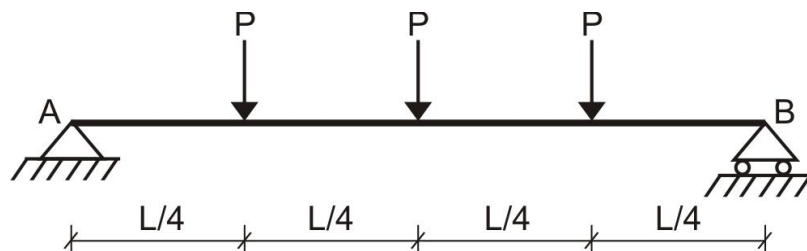


Fig. 5.23

Solución:

Como la viga es simétrica en geometría y cargas, entonces las reacciones en los apoyos A y B son iguales a $3P/2$ y el momento flector máximo debe suceder en el centro de la viga.

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, por 2 formas o métodos diferentes.

1. ECUACIONES:

Antes de iniciar esta metodología, debemos de conocer la convención universal de signos de la fuerza cortante y momento flector, que se muestran en la figura 5.24 y 5.25 respectivamente.

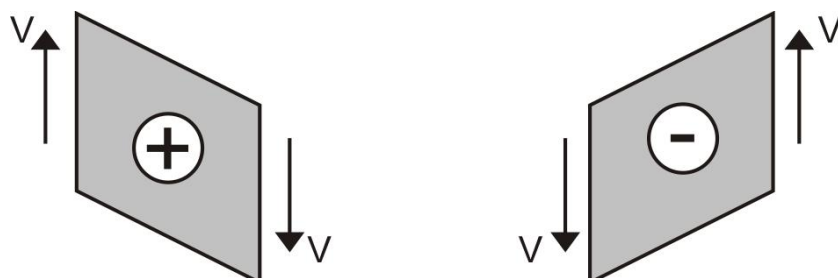


Fig. 5.24

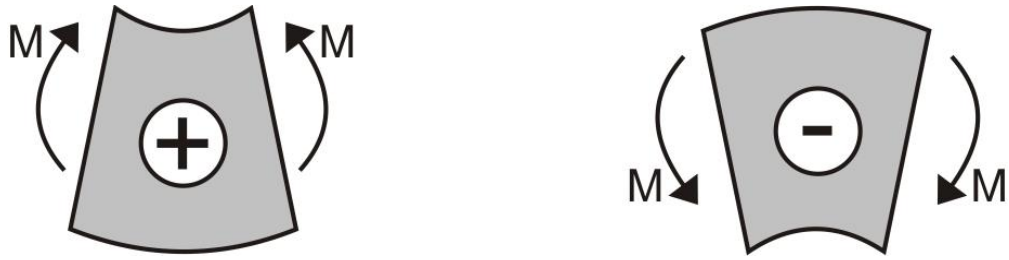


Fig. 5.25

Planteamos las ecuaciones de la fuerza cortante y momento flector por tramos, considerando la distancia X a partir del origen, es decir del apoyo A

TRAMO AC ($0 \leq X \leq L/4$)

$$\begin{aligned} V_{AC} &= \frac{3P}{2} & \Rightarrow & V_A = \frac{3P}{2} \\ & & \Rightarrow & V_{C-0} = \frac{3P}{2} \\ M_{AC} &= \frac{3P}{2} X & \Rightarrow & M_A = M_{X=0} = 0 \\ & & \Rightarrow & M_C = M_{X=L/4} = \frac{3P}{2} \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{3PL}{8} \end{aligned}$$

TRAMO CD ($L/4 \leq X \leq L/2$)

$$\begin{aligned} V_{CD} &= \frac{3P}{2} - P = \frac{P}{2} & \Rightarrow & V_{C+0} = \frac{P}{2} \\ & & \Rightarrow & V_{D-0} = \frac{P}{2} \\ M_{CD} &= \frac{3P}{2} X - P \left(X - \frac{L}{4} \right) & \Rightarrow & M_C = M_{X=L/4} = \frac{3P}{2} \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{3PL}{8} \\ & & \Rightarrow & M_D = M_{X=L/2} = \frac{3P}{2} \left(\frac{L}{2} \right) - P \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{PL}{2} \end{aligned}$$

En las ecuaciones, el subíndice -0 significa que está en el punto indicado como valor final del tramo y el subíndice +0 corresponde al mismo punto, pero al inicio del siguiente tramo.

De las ecuaciones, podremos apreciar, que se cumple con la relación diferencial entre la cortante y el momento flector, la cual es:

$$V = \frac{dM}{dX}$$

Invitamos al lector, a comprobar dicha relación para cada tramo analizado.

Como la viga es simétrica en geometría y cargas, entonces el diagrama de fuerza cortante será antisimétrico y el diagrama de momento flector simétrico, tal como se muestra en la figura 5.26 y que el lector lo puede comprobar analizando los tramos sucesivos DE y EB

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, teniendo en cuenta que de acuerdo a las ecuaciones obtenidas, el diagrama de fuerza cortante es constante en cada tramo

y en los puntos A, C, D, E y B sufre un ascenso o descenso igual al valor y dirección de las reacciones o fuerzas externas actuantes en el punto indicado. Para el diagrama de momento flector, las ecuaciones obtenidas nos indican que es una línea recta.

Con los valores obtenidos, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, tal como se muestra en la figura 5.26

Se puede observar, que los diagramas de fuerza cortante y momento flector empiezan en cero y terminan en cero.

Como se podrá apreciar de los diagramas, se grafica para fuerza cortante, positivo arriba y negativo abajo, en cambio, para momento flector, se graficará positivo abajo y negativo arriba, con la finalidad de aproximar el diagrama de momento flector con la deflexión de la viga, que es materia de estudio del curso Resistencia de Materiales.

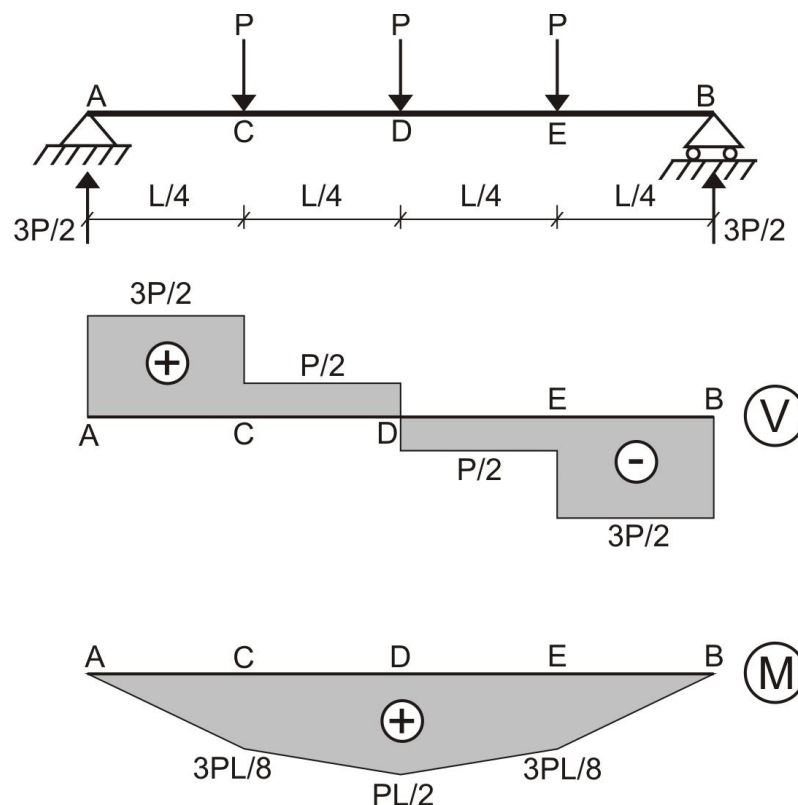


Fig. 5.26

2. METODO DE LAS AREAS:

Para efectuar con mayor rapidez los diagramas de fuerza cortante y momento flector, aplicamos el *Método de las áreas*, cuya veracidad de cálculo es 100% válida para cargas puntuales y cargas uniformemente distribuidas.

DIAGRAMA "V":

- En el apoyo A, la cortante es igual al valor de la reacción en dicho punto, es decir $3P/2$
- En el tramo AC no existe fuerza externa, por ello, el diagrama de cortante permanece constante e igual a $3P/2$
- En el punto C aparece la fuerza P hacia abajo, lo que hace que el valor de la cortante en dicho punto disminuya la magnitud P y sea igual a $P/2$
- En el tramo CD no existe carga externa aplicada, en consecuencia, el diagrama de cortante es constante e igual a $P/2$

- e) En el punto D aparece otra fuerza P hacia abajo, que hace que la cortante disminuya dicho valor y sea igual a $-P/2$
- f) En el tramo DE no existe carga externa, en consecuencia el diagrama de fuerza cortante permanece constante e igual a $-P/2$
- g) En el punto E aparece otra fuerza externa P, que hace disminuir al diagrama de fuerza cortante en dicho punto hasta $-3P/2$
- h) En el tramo EB no existe fuerza cortante, por lo tanto el diagrama de fuerza cortante es constante e igual a $-3P/2$
- i) Finalmente, en el apoyo B existe una reacción vertical hacia arriba e igual a $3P/2$, que hace que el diagrama de fuerza cortante llegue a cero.

DIAGRAMA "M":

Para graficar el diagrama de momento flector, el Método de las áreas se basa en un principio básico, que indica que el diagrama de momento flector es igual al área del diagrama de fuerza cortante, el cual lo aplicamos al presente problema.

$$M_A = 0$$

$$M_C = \frac{3P}{2} \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{3PL}{8}$$

$$M_D = \frac{3PL}{8} + \frac{P}{2} \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{PL}{2}$$

$$M_E = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2} \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{3PL}{8}$$

$$M_B = \frac{3PL}{8} - \frac{3P}{2} \left(\frac{L}{4} \right) = 0$$

Como podemos apreciar, ambos métodos nos llevan a obtener los mismos resultados, quedando a criterio del lector la aplicación indistinta del método más adecuado.

Efectivamente, para el presente problema, el momento flector máximo es $PL/2$ y sucede en el centro de la viga, es decir en el punto D

La fuerza cortante máxima sucede en los apoyos, por ello, en vigas de concreto armado, para evitar los agrietamientos en dichas zonas, se colocan los estribos menos espaciados, con la finalidad de reducir dicho efecto.

PROBLEMA 5.9 ¿Cuál deberá ser la distancia "X" en la siguiente viga, para que el momento máximo positivo sea numéricamente igual al momento máximo negativo?

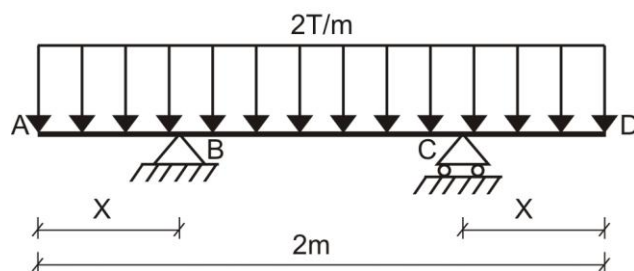


Fig. 5.27

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos, los cuales serán de $2T$ hacia arriba, debido a que la viga es simétrica en geometría y cargas, esquematizando el diagrama de momento flector que se producirá, lo cual se invita al lector a comprobar que se trata de parábolas cuadráticas, tal como se muestra en la figura 5.28

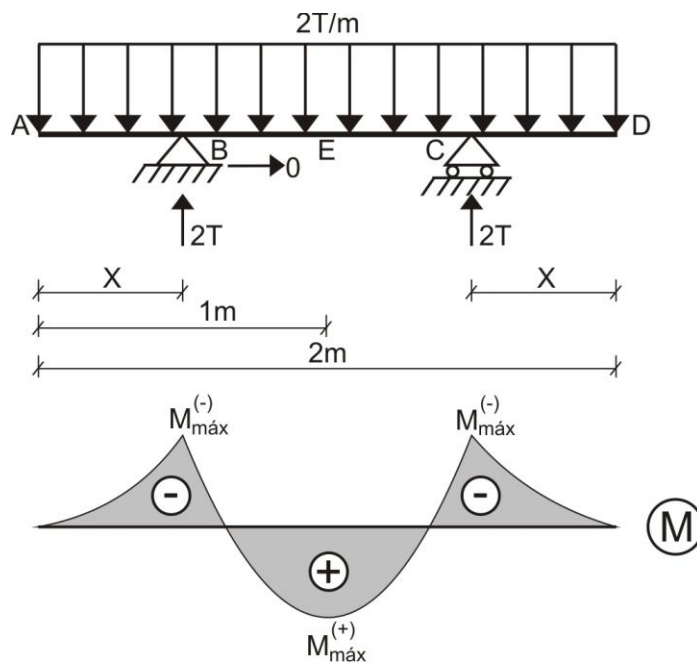


Fig. 5.28

Por dato del problema:

$$|M_{\text{máx}}^{(-)}| = M_{\text{máx}}^{(+)}$$

Planteamos las ecuaciones:

$$\left| -2X \left(\frac{X}{2} \right) \right| = -2 \cdot (1) \cdot (0,5) + 2 \cdot (1 - X)$$

Efectuamos el cálculo, obteniendo una ecuación cuadrática:

$$X^2 + 2X - 1 = 0$$

Dicha ecuación tiene 2 soluciones, siendo la positiva la verdadera, es decir:

$$X = 0,414\text{m}$$

PROBLEMA 5.10 Para la viga mostrada en la figura, sometida a una carga trapezoidal, determinar la relación a/L , de tal manera, que la fuerza cortante V siempre será igual a cero en el punto medio.

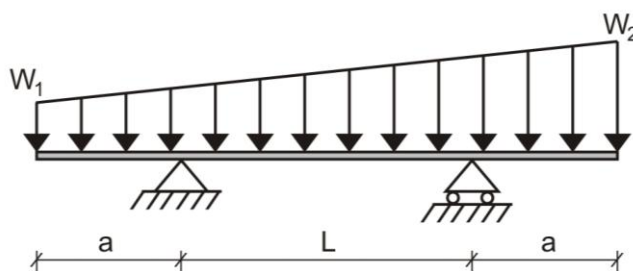


Fig. 5.29

Solución:

Esquematizamos la viga con sus reacciones y distribución de cargas.

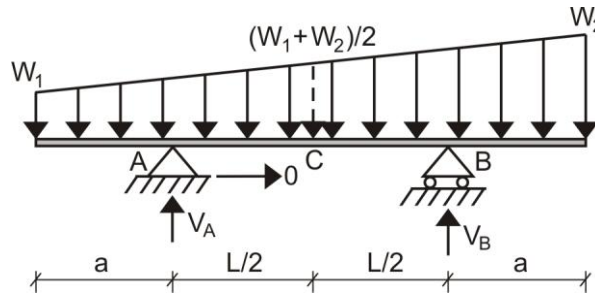


Fig. 5.30

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A(L) - W_1(L+2a)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{1}{2}(L+2a)(W_2 - W_1)\left(\frac{L-a}{3}\right) = 0$$

$$V_A = W_1 \left[\frac{2L^2 + 5aL + 2a^2}{6L} \right] + W_2 \left[\frac{L^2 + aL - 2a^2}{6L} \right]$$

Por dato del problema, la fuerza cortante en C es cero, lo que indica que la suma de las fuerzas verticales hasta dicho punto será igual a cero, analizando el lado izquierdo o derecho de la viga. En este caso, analizamos el lado izquierdo.

$$W_1 \left[\frac{2L^2 + 5aL + 2a^2}{6L} \right] + W_2 \left[\frac{L^2 + aL - 2a^2}{6L} \right] - \frac{\left(W_1 + \frac{W_1 + W_2}{2} \right) \left(a + \frac{L}{2} \right)}{2} = 0$$

$$W_1 \left[\frac{2L^2 + 5aL + 2a^2}{6L} \right] + W_2 \left[\frac{L^2 + aL - 2a^2}{6L} \right] = W_1 \left[\frac{6a + 3L}{8} \right] + W_2 \left[\frac{2a + L}{8} \right]$$

Para que se cumpla la condición del problema, los coeficientes de W_1 deben ser iguales. Lo mismo debe de suceder con los coeficientes de W_2

Igualemos los coeficientes de W_1 , obteniendo:

$$\frac{2L^2 + 5aL + 2a^2}{6L} = \frac{6a + 3L}{8}$$

$$8a^2 + 2aL - L^2 = 0$$

$$8\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{L}\right) - 1 = 0$$

De donde:

$$\frac{a}{L} = 0,25$$

Para comprobar, la veracidad del cálculo, igualamos los coeficientes de W_2 , obteniendo:

$$\frac{L^2 + aL - 2a^2}{6L} = \frac{2a + L}{8}$$

$$8a^2 + 2aL - L^2 = 0$$

Como se obtiene la misma ecuación, entonces el resultado será el mismo, quedando demostrada la veracidad del cálculo.

PROBLEMA 5.11 Para la viga mostrada en la figura, se pide:

- Plantear la ecuación de la fuerza cortante y momento flector en función de "X", cuando $0 \leq X \leq 4$
- Dibujar el diagrama de fuerza cortante y el diagrama de momento flector debidamente acotados.

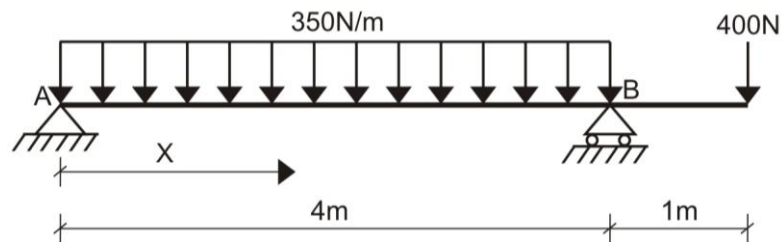


Fig. 5.31

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot (4) - 350 \cdot (4) \cdot (2) - 400 \cdot (5) = 0$$

$$V_B = 1200 \text{ N } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 1200 - 350 \cdot (4) - 400 = 0$$

$$V_A = 600 \text{ N } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Planteamos la ecuación de la fuerza cortante para el tramo AB

$$V_{AB} = 600 - 350X \Rightarrow V_A = V_{X=0} = 600 \text{ N}$$

$$\Rightarrow V_{B-0} = V_{X=4} = -800 \text{ N}$$

Como pasa de un valor positivo a otro negativo, entonces habrá un punto en el cual la fuerza cortante será cero y que ocasionará un valor máximo del momento flector en dicho tramo. Para ello, igualamos la ecuación de la cortante a cero y determinamos la distancia desde el apoyo A que se produce dicho efecto.

$$650 - 350X = 0$$

$$X = 1,714 \text{ m}$$

Este punto, es denotado en la figura 5.32 como C

Ahora, planteamos la ecuación del momento flector para dicho tramo AB

$$M_{AB} = 600X - 350X\left(\frac{X}{2}\right) = 600X - 175X^2 \Rightarrow M_A = M_{X=0} = 0$$

$$\Rightarrow M_C = M_{\text{máx}} = M_{X=1,714} = 514,2 \text{ N.m}$$

$$\Rightarrow M_B = M_{X=4} = -400 \text{ N.m}$$

Como podemos apreciar, cuando la carga es distribuida, el diagrama de fuerza cortante será un tramo de recta y el diagrama de momento flector una parábola cuadrática.

- b) En función de los valores obtenidos por ecuaciones graficamos los diagramas en el tramo AB y lo comparamos con el Método de las áreas, graficando el tramo restante, es decir BD

Para ello, a continuación damos a conocer los principios básicos que se debe de conocer para aplicar el Método de las áreas, con la finalidad de no detenernos en este tipo de detalles en los problemas posteriores.

1. Para el caso de cargas puntuales, el diagrama de fuerza cortante en un tramo determinado será constante (recta horizontal) y el diagrama de momento flector será una recta inclinada.
2. Para cargas uniformemente distribuidas, el diagrama de fuerza cortante es una recta inclinada y el diagrama de momento flector una parábola cuadrática.
3. Cuando exista una rótula, está tendrá efecto en el cálculo de reacciones y en el diagrama de momento flector, cuyo valor debe ser cero en dicha rótula; sin embargo, en el diagrama de fuerza cortante no tiene efecto, continuando el diagrama sin tomar en cuenta la rótula.

Aplicamos estos principios en los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo A existe una reacción vertical igual a 600N hacia arriba.
2. Luego viene una carga distribuida, dirigida hacia abajo, que irá disminuyendo gradualmente hasta el apoyo B, donde su valor es la diferencia de 600N con la resultante de la carga distribuida, es decir:

$$V_{B-0} = 600 - 350.(4) = -800N$$

3. Determinamos por relaciones de triángulos rectángulos el valor de la distancia "d" desde el apoyo A, en cuyo punto C se tendrá que la fuerza cortante es cero.

$$\frac{600}{d} = \frac{1400}{4} \Rightarrow d = 1,714m$$

Como podemos apreciar, este valor coincide con el obtenido mediante la ecuación de la fuerza cortante.

4. En el punto B, existe una reacción vertical igual a 1200N, que lo llevará hasta 400N
5. En el tramo BD no existe carga alguna, por ello, el diagrama de fuerza cortante será constante.
6. En el extremo D existe una fuerza vertical hacia abajo, que lo lleva los 400N hasta cero, cerrando el diagrama de fuerza cortante correctamente.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_C = \frac{1}{2}.(1,714).(600) = 514,2N.m$$

$$M_B = 514,2 - \frac{1}{2}.(2,286).(800) = -400N.m$$

$$M_D = -400 + 400.(1) = 0$$

Las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza cortante y momento flector se muestran en la figura 5.32

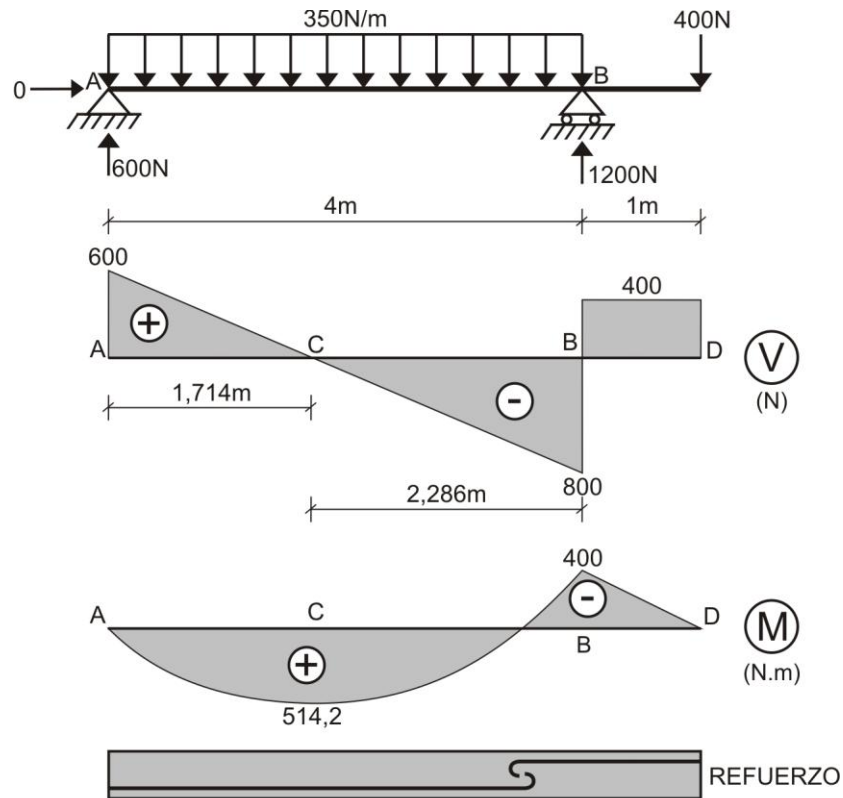


Fig. 5.32

Para distinguir la forma de la parábola en el tramo AB, recordamos, que para trazar una parábola como mínimo se necesitan 3 puntos, los cuales conocemos en los puntos A, C y B de la viga, uniendo de acuerdo a la escala indicada, quedando de la forma mostrada en la figura 5.32

En dicha figura, se ha agregado el diagrama de refuerzo, con la finalidad que el lector conozca la zona a reforzar cuando se trata de vigas de concreto armado, en el cual, como se sabe, el concreto trabaja muy bien en compresión y mal en tracción, siendo necesario el refuerzo con acero en dicha zona.

De acuerdo a la figura 5.25, podemos indicar que cuando el momento es positivo, la zona de tracción es la parte inferior y la zona de compresión la parte superior. Lo contrario sucede cuando el momento es negativo.

PROBLEMA 5.12 Para la viga mostrada en la figura, se pide:

- Determinar las componentes de reacción en los apoyos.
- Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados.

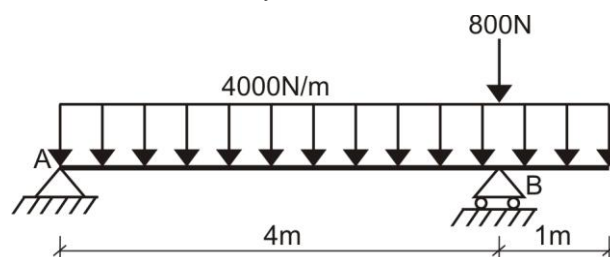


Fig. 5.33

Solución:

a) Determinamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot (4) - 4000 \cdot (5) \cdot (2,5) - 800 \cdot (4) = 0$$

$$V_B = 13300\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 13300 - 4000 \cdot (5) - 800 = 0$$

$$V_A = 7500\text{N} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

b) Aplicamos el Método de las áreas para graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo A existe una reacción vertical igual a 7500N hacia arriba.
2. Luego, viene una carga distribuida, dirigida hacia abajo, que irá disminuyendo gradualmente hasta el apoyo B, donde su valor es la diferencia de 7500N con la resultante de la carga distribuida, es decir:

$$V_{B-0} = 7500 - 4000 \cdot (4) = -8500\text{N}$$

3. Determinamos por relaciones de triángulos rectángulos el valor de la distancia "d" desde el apoyo A, en cuyo punto C se tendrá que la fuerza cortante es cero y en consecuencia, su momento flector será máximo en dicho tramo.

$$\frac{7500}{d} = \frac{16000}{4} \Rightarrow d = 1,875\text{m}$$

4. En el punto B, existe una reacción vertical de 13300N y una carga vertical de 800N, cuya acción conjunta hará que el valor de la cortante en dicho punto suba la diferencia, es decir, 12500N, llegando hasta 4000N
5. En el tramo BD existe una carga distribuida, que lo hará al valor de 4000N decrecer gradualmente hasta llegar en D a cero, debido a que la resultante de la carga distribuida en el tramo BD es también 4000N

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_C = M_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \cdot (1,875) \cdot (7500) = 7031,25\text{N.m}$$

$$M_B = 7031,25 - \frac{1}{2} \cdot (2,125) \cdot (8500) = -2000\text{N.m}$$

$$M_D = -2000 + \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (4000) = 0$$

Las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo se muestran en la figura 5.34

Para graficar la parábola del tramo AB, aplicamos el mismo criterio del problema anterior, es decir, unimos los valores de los momentos en los puntos A, C y B, de acuerdo a la escala

escogida y para la parábola en el tramo BD será la misma forma que en el tramo AC, debido a que el diagrama de fuerza cortante tiene la misma forma para ambos tramos.

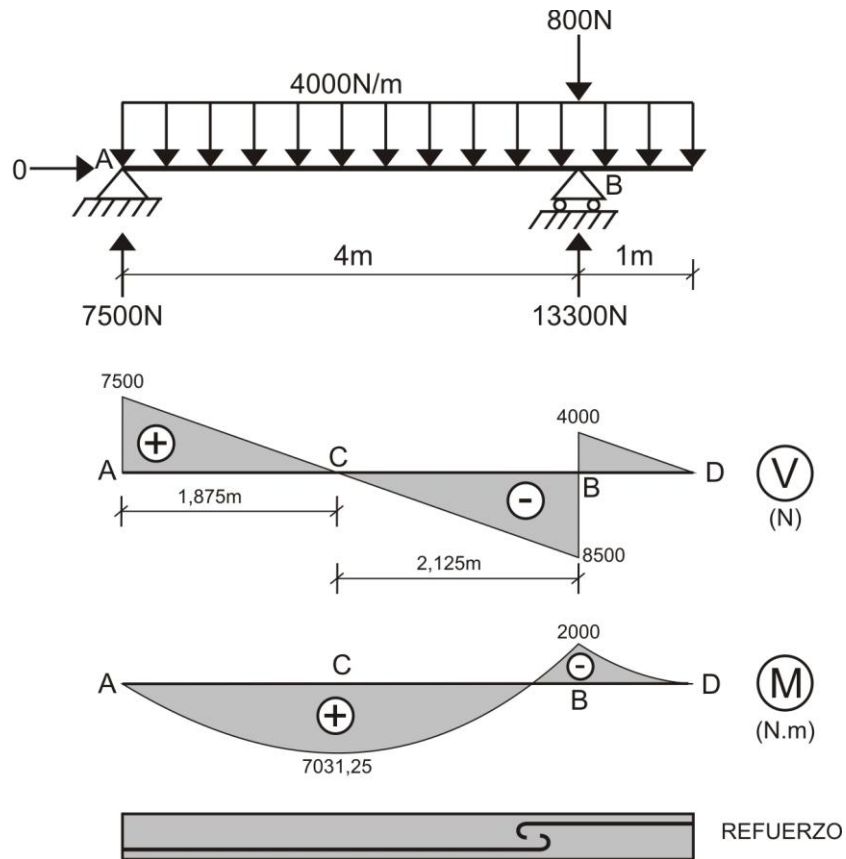


Fig. 5.34

PROBLEMA 5.13 Dada la siguiente viga, graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados.

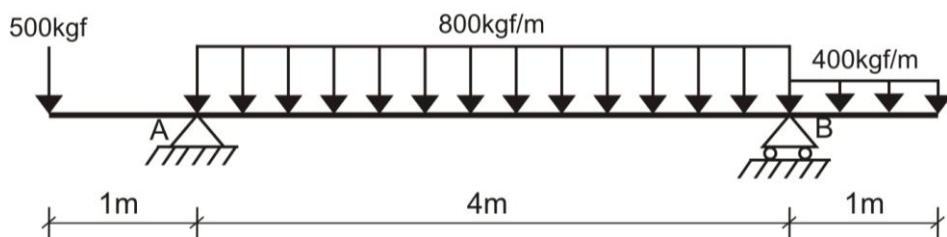


Fig. 5.35

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B \cdot (4) + 500 \cdot (1) - 800 \cdot (4) \cdot (2) - 400 \cdot (1) \cdot (4,5) = 0$$

$$V_B = 1925 \text{ kgf } \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 1925 - 500 - 800 \cdot (4) - 400 \cdot (1) = 0$$

$$V_A = 2175 \text{ kgf } \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

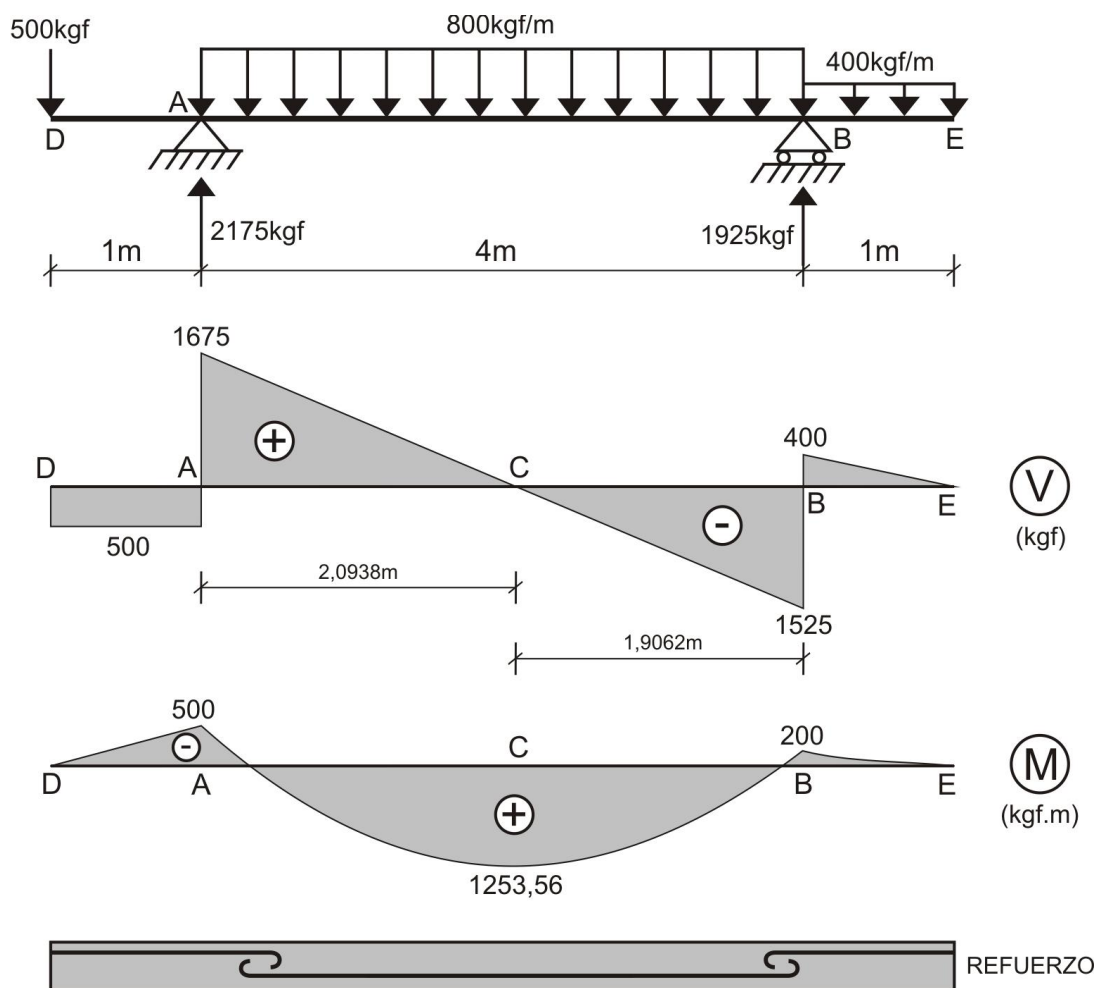


Fig. 5.36

A continuación, explicamos los diagramas de fuerzas internas.

DIAGRAMA "V":

1. Iniciamos desde el extremo izquierdo de la viga en voladizo, teniendo una fuerza de 500kgf hacia abajo que es constante en el tramo DA
2. En el apoyo A existe una reacción vertical hacia arriba de 2175kgf, que lo lleva de -500kgf hasta 1675kgf
3. En el tramo AB existe una carga distribuida de 800kgf/m que lo hace disminuir gradualmente hasta el apoyo B, donde su valor es la diferencia entre 1675kgf con la resultante de la carga distribuida, es decir:

$$V_{B-0} = 1675 - 800 \cdot (4) = -1525 \text{kgf}$$

4. Determinamos por relaciones de triángulos rectángulos, el valor de la distancia "d" desde el apoyo A, en cuyo punto C se tendrá que la fuerza cortante es cero y, en consecuencia, su momento flector será máximo en dicho tramo.

$$\frac{1675}{d} = \frac{3200}{4} \Rightarrow d = 2,0938 \text{m}$$

5. En el apoyo B existe una reacción vertical hacia arriba de 1925kgf, que lo lleva hasta 400kgf
6. En el tramo BE existe una carga distribuida de 400kgf/m que lo hace disminuir gradualmente, cuya resultante de 400kgf lo lleva hasta cero en el extremo E

DIAGRAMA "M":

$$M_D = 0$$

$$M_A = -500.(1) = -500 \text{kgf} .\text{m}$$

$$M_C = M_{\text{máx}} = -500 + \frac{1}{2} .(2,0938) .(1675) = 1253,56 \text{kgf} .\text{m}$$

$$M_B = 1253,56 - \frac{1}{2} .(1,9062) .(1525) = -200 \text{kgf} .\text{m}$$

$$M_E = -200 + \frac{1}{2} .(400) .(1) = 0$$

Para graficar la parábola del tramo AB, aplicamos el mismo criterio del problema anterior, es decir unimos los valores de los momentos en los puntos A, C y B, de acuerdo a la escala escogida y para la parábola en el tramo BE será la misma forma que en el tramo AC, debido a que el diagrama de fuerza cortante tiene la misma forma para ambos tramos.

Las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo se muestran en la figura 5.36

PROBLEMA 5.14 Graficar los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo, para la viga mostrada en la figura 5.37

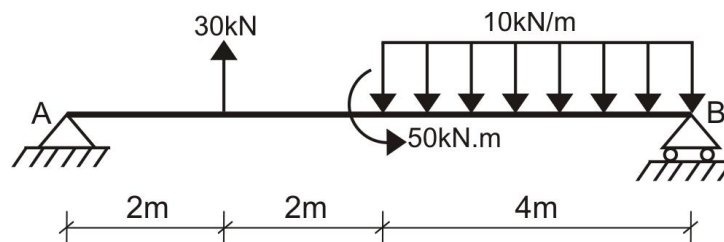


Fig. 5.37

Solución:

Determinamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B .(8) + 30 .(2) - 10 .(4) .(6) + 50 = 0$$

$$V_B = 16,25 \text{kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_A + 30 - 10 .(4) + 16,25 = 0$$

$$V_A = 6,25 \text{kN} \downarrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = 0$$

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo A, existe una reacción vertical de 6,25kN hacia abajo y es constante en el tramo AC
2. En el punto C existe una carga vertical hacia arriba de 30kN, que lo lleva de -6,25kN hasta 23,75kN
3. En el tramo CD no existe carga alguna, es por ello, que el diagrama de fuerza cortante es constante e igual a 23,75kN

4. Desde el punto D hasta el apoyo B existe una carga uniformemente distribuida de 10kN/m que lo reduce gradualmente hasta el apoyo B, donde su valor es la diferencia entre 23,75kN con la resultante de la carga distribuida, es decir:

$$V_{B-0} = 23,75 - 10 \cdot (4) = -16,25 \text{ kN}$$

5. Determinamos por relaciones de triángulos rectángulos, el valor de la distancia "d" desde el punto D, siendo en el punto E la fuerza cortante cero y, en consecuencia, su momento flector será máximo en dicho tramo.

$$\frac{23,75}{d} = \frac{40}{4} \Rightarrow d = 2,375 \text{ m}$$

6. En el apoyo B existe una reacción vertical de 16,25kN hacia arriba que lo lleva hasta cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_C = -6,25 \cdot (2) = -12,5 \text{ kN.m}$$

$$M_D^{\text{antes}} = -12,5 + 23,75 \cdot (2) = 35 \text{ kN.m}$$

$$M_D^{\text{después}} = 35 - 50 = -15 \text{ kN.m}$$

$$M_E = -15 + \frac{1}{2} \cdot (2,375) \cdot (23,75) = 13,2 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 13,2 - \frac{1}{2} \cdot (1,625) \cdot (16,25) = 0$$

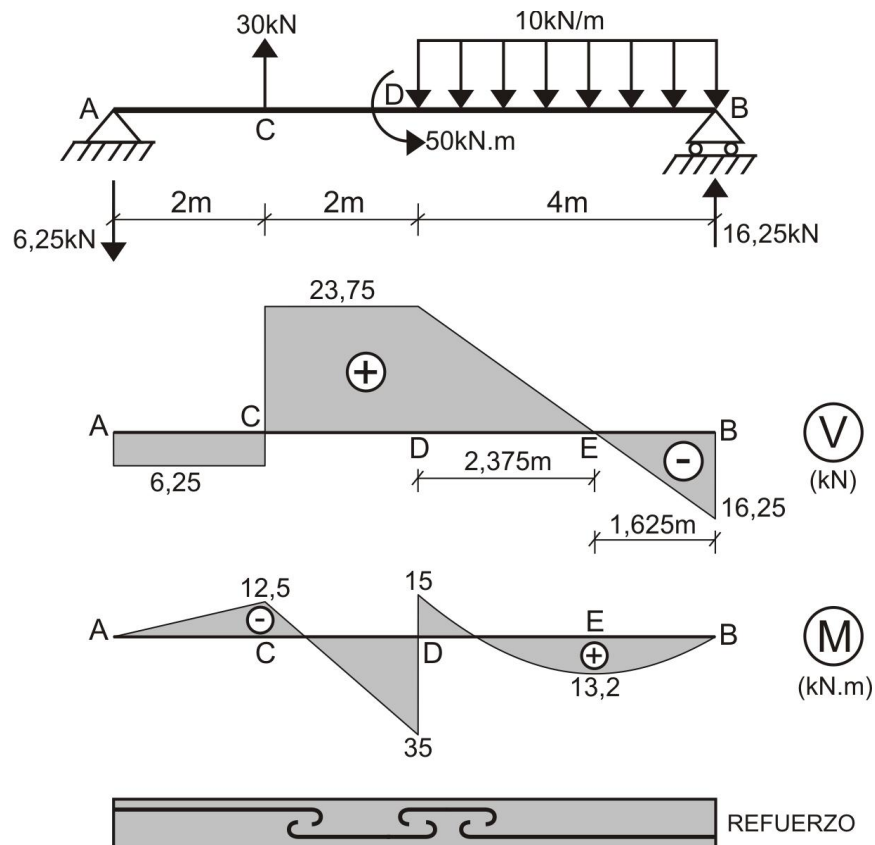


Fig. 5.38

Como podemos apreciar, aplicando el Método de las áreas, debemos de detenernos en el punto donde existe momento puntual, como es el caso del punto D, en cuyo lugar analizamos antes y después de la acción del momento, cuya variación en el diagrama de momento flector en dicho punto, debe ser igual al valor del momento.

En la figura 5.38, se muestran las reacciones en los apoyos, diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

PROBLEMA 5.15 Trazar los diagramas de cargas y de momento flector, correspondiente al diagrama de fuerza cortante que se da en la figura 5.39, sabiendo que la viga únicamente está sometida a cargas puntuales y uniformemente distribuidas.

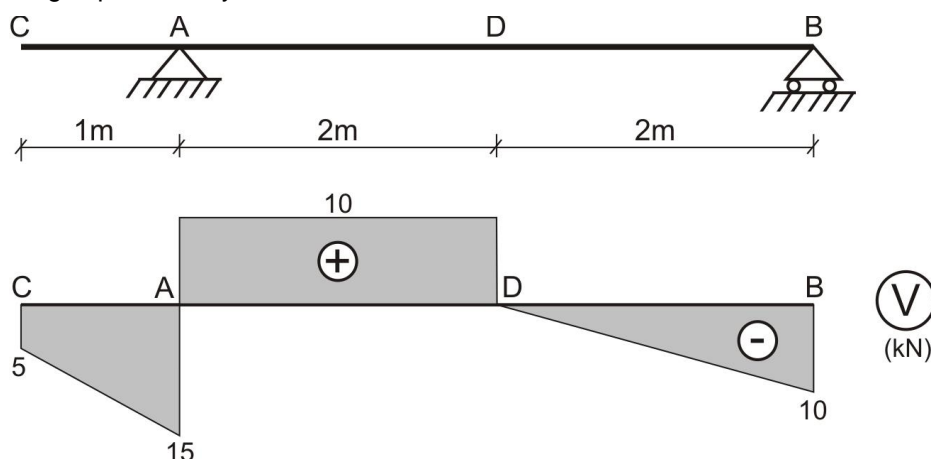


Fig. 5.39

Solución:

A continuación, explicamos como se debe de ubicar las cargas en la viga de acuerdo al diagrama de fuerza cortante y en función de este diagrama, trazamos el diagrama de momento flector por el Método de las áreas.

DIAGRAMA DE CARGAS:

1. En el extremo C de la viga, existe una carga puntual de 5kN hacia abajo, debido a que en el diagrama de fuerza cortante desciende dicha magnitud.
2. En el tramo CA existe una carga uniformemente distribuida de 10kN/m hacia abajo, debido a que en el diagrama de fuerza cortante en dicho tramo desciende una magnitud de 10kN, equivalente a la acción de la carga distribuida en el tramo indicado.
3. En el apoyo A existe una reacción vertical hacia arriba e igual a 25kN, tal como se observa en el diagrama de fuerza cortante.
4. En el tramo AD no existe carga alguna, debido a que el diagrama de fuerza cortante permanece constante.
5. En el punto D de la viga existe una carga puntual hacia abajo e igual a 10kN, tal como se muestra en el diagrama de fuerza cortante.
6. En el tramo DB existe una carga uniformemente distribuida de 5kN/m hacia abajo, debido a que en el diagrama de fuerza cortante en dicho tramo desciende la magnitud de 10kN, equivalente a la acción de la carga distribuida en el tramo indicado.

7. En el apoyo B existe una reacción vertical de 10kN hacia arriba que hace cerrar el diagrama de fuerza cortante.

DIAGRAMA "M":

$$M_C = 0$$

$$M_A = -\frac{(5+15) \cdot (1)}{2} = -10 \text{ kN.m}$$

$$M_D = -10 + 10 \cdot (2) = 10 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 10 - \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (10) = 0$$

Para saber la forma de la parábola en el tramo CA, analizamos de otra forma, dividiendo el diagrama de fuerza cortante de dicho tramo en dos partes de longitud 0,5m cada tramo, siendo el área del lado izquierdo menor que el área del lado derecho, lo que implica que el valor del momento en el centro de dicho tramo CA es menor que el 50% del momento en el extremo A, lo que implica que la única forma que se pueden unir tres puntos para graficar la parábola es la mostrada en la figura 5.40

Para el tramo DB la forma de la parábola será la misma que en el tramo CA por la forma de la pendiente del diagrama de fuerza cortante.

En la figura 5.40 se muestran el diagrama de cargas, reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

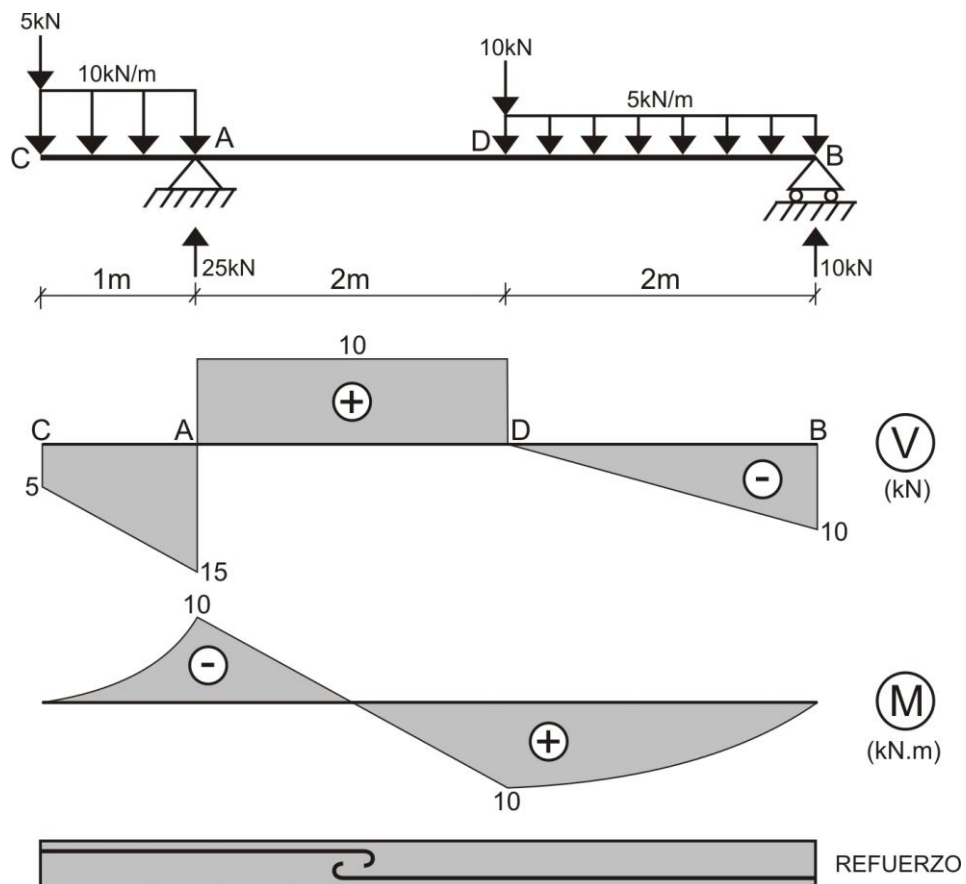


Fig. 5.40

PROBLEMA 5.16 Para la viga mostrada en la figura 5.41, se pide determinar:

- Las fuerzas internas a 2,5m a la derecha del apoyo A
- Las expresiones de fuerza cortante y momento flector a la distancia "X" indicada ($0 \leq X \leq 2\text{m}$)
- Las gráficas de los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, debidamente acotados.

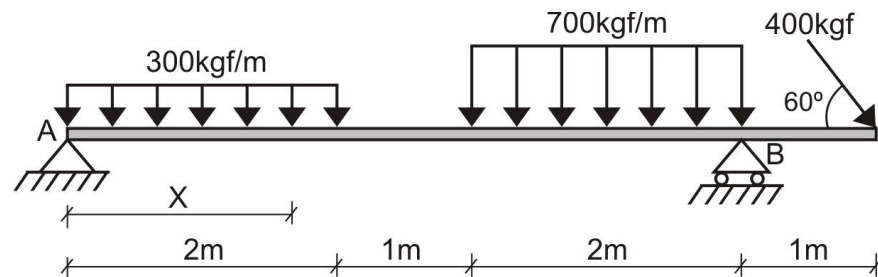


Fig. 5.41

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_A + 400 \cos 60^\circ = 0$$

$$H_A = 200 \text{ kgf} \leftarrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot (5) - 300 \cdot (2) \cdot (1) - 700 \cdot (2) \cdot (4) - 400 \sin 60^\circ (6) = 0$$

$$V_B = 1655,69 \text{ kgf} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + 1655,69 - 600 - 1400 - 400 \sin 60^\circ = 0$$

$$V_A = 690,72 \text{ kgf} \uparrow$$

Efectuamos un corte a 2,5m a la derecha del apoyo A y analizamos su equilibrio, determinando las fuerzas internas en dicho punto, denotado como C

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_C - 200 = 0$$

$$N_C = 200 \text{ kgf}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 690,72 - 600 - V_C = 0$$

$$V_C = 90,72 \text{ kgf}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -690,72 \cdot (2,5) + 300 \cdot (2) \cdot (1,5) + M_C = 0$$

$$M_C = 826,8 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

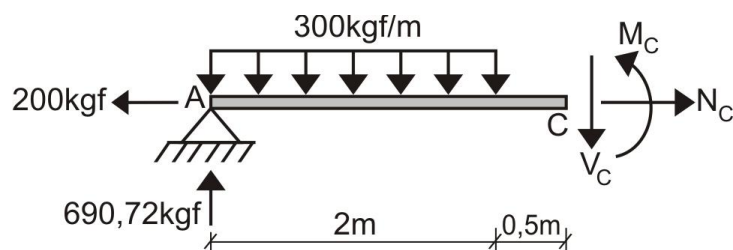


Fig. 5.42

- b) Para determinar las ecuaciones de la fuerza cortante y momento flector a una distancia "X" del apoyo A, es decir en el tramo AD de la figura 5.43, efectuamos un corte en D y analizamos el equilibrio del tramo AD

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D - 200 = 0$$

$$N_D = 200\text{kgf}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 690,72 - 300X - V_D = 0$$

$$V_D = -300X + 690,72$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -690,72X + 300X \cdot \left(\frac{X}{2}\right) + M_D = 0$$

$$M_D = -150X^2 + 690,72X$$

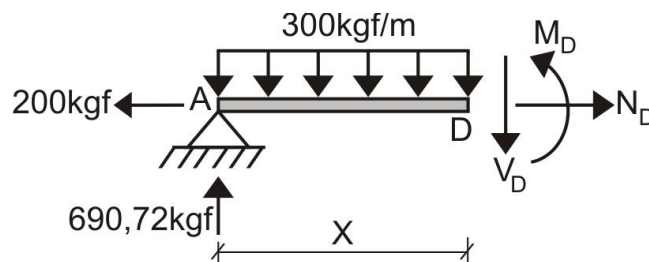


Fig. 5.43

- c) Graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

Como podemos apreciar, en la viga en ambos extremos existen fuerzas de tracción de 200kgf, lo que implica que toda la viga está sometida a dicha acción.

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo A existe una componente de reacción que es vertical hacia arriba de 690,72kgf
2. En el tramo AE existe una carga distribuida de 300kgf/m que lo reduce gradualmente hasta 90,72kgf que corresponde al punto E
3. En el tramo EF no existe carga alguna, por ello, el diagrama de fuerza cortante permanece constante e igual a 90,72kgf
4. Desde el punto F hasta el apoyo B existe una carga uniformemente distribuida de 700kgf/m que lo reduce gradualmente hasta el apoyo B, donde su valor es la diferencia entre 90,72kgf con la resultante de la carga distribuida, es decir:

$$V_{B-0} = 90,72 - 700 \cdot (2) = -1309,28\text{kgf}$$

5. Determinamos por relaciones de triángulos rectángulos, el valor de la distancia "d" desde el punto F, siendo en el punto G la fuerza cortante cero y, en consecuencia, su momento flector será máximo en dicho tramo.

$$\frac{90,72}{d} = \frac{1400}{2} \Rightarrow d = 0,1296\text{m}$$

6. En el apoyo B existe una reacción vertical hacia arriba de 1655,69kgf que lo lleva hasta 346,41kgf
7. Este valor es constante en el tramo BH, existiendo en el extremo H una carga vertical de 346,41kgf que lo hace descender hasta cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_E = \frac{(690,72 + 90,72) \cdot (2)}{2} = 781,44 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_F = 781,44 + 90,72 \cdot (1) = 872,16 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_G = 872,16 + \frac{1}{2} \cdot (0,1296) \cdot (90,72) = 878,03 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 878,03 - \frac{1}{2} \cdot (1,8704) \cdot (1309,28) = -346,41 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_H = -346,41 + 346,41 \cdot (1) = 0$$

En la figura 5.44 se muestran las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

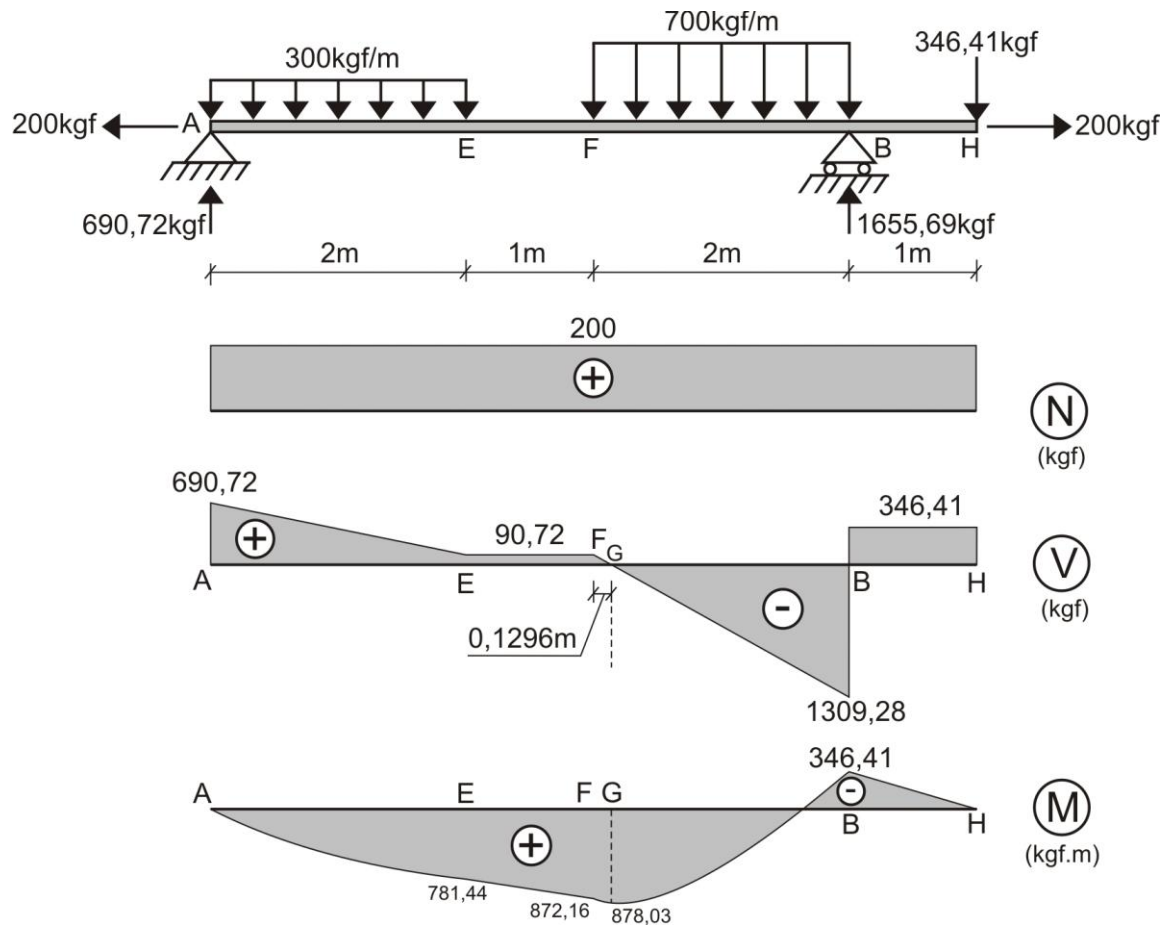


Fig. 5.44

PROBLEMA 5.17 Graficar los diagramas de fuerza axial o normal, fuerza cortante, momento flector y refuerzo para la viga mostrada en la figura 5.45

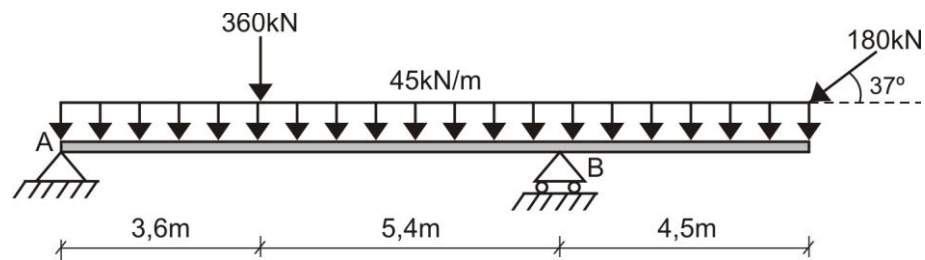


Fig. 5.45

Solución:

Determinamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot (9) - 360 \cdot (3,6) - 45 \cdot (13,5) \cdot (6,75) - 180 \sin 37^\circ (13,5) = 0$$

$$V_B = 761,625 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 761,625 - 360 - 45 \cdot (13,5) - 180 \sin 37^\circ = 0$$

$$V_A = 313,875 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A - 180 \cos 37^\circ = 0$$

$$H_A = 144 \text{ kN} \rightarrow$$

A continuación, explicamos como se debe de graficar los diagramas N, V y M

DIAGRAMA "N":

Como podemos apreciar, en la viga en ambos extremos existen fuerzas de compresión de 144kN, lo que implica que toda la viga está sometida a dicha acción.

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo A existe una componente de reacción vertical hacia arriba e igual a 313,875kN
2. En el tramo AC existe una carga uniformemente distribuida de 45kN/m que lo hace descender gradualmente 162kN, llegando al punto C con un valor de fuerza cortante igual a 151,875kN
3. En el punto C existe una carga puntual hacia abajo de 360kN, que lo hace descender de 151,875kN hasta -208,125kN
4. En el tramo CB existe una carga uniformemente distribuida de 45kN/m que lo hace descender gradualmente 243kN, llegando al apoyo B con un valor de fuerza cortante igual a -451,125kN
5. En el apoyo B existe una reacción vertical de 761,625kN hacia arriba llevándolo hasta 310,5kN
6. En el tramo BD existe una carga uniformemente distribuida de 45kN/m que lo hace descender gradualmente 202,5kN llegando al punto D con una valor de fuerza cortante igual a 108kN
7. En el extremo D de la viga existe una fuerza, cuya componente vertical es de 108kN hacia abajo, que lo lleva hasta cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_C = \frac{(313,875 + 151,875) \cdot (3,6)}{2} = 838,35 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 838,35 - \frac{(208,125 + 451,125) \cdot (5,4)}{2} = -941,625 \text{ kN.m}$$

$$M_D = -941,625 + \frac{(310,5 + 108) \cdot (4,5)}{2} = 0$$

En la figura 5.46 se muestran las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante, momento flector y refuerzo.

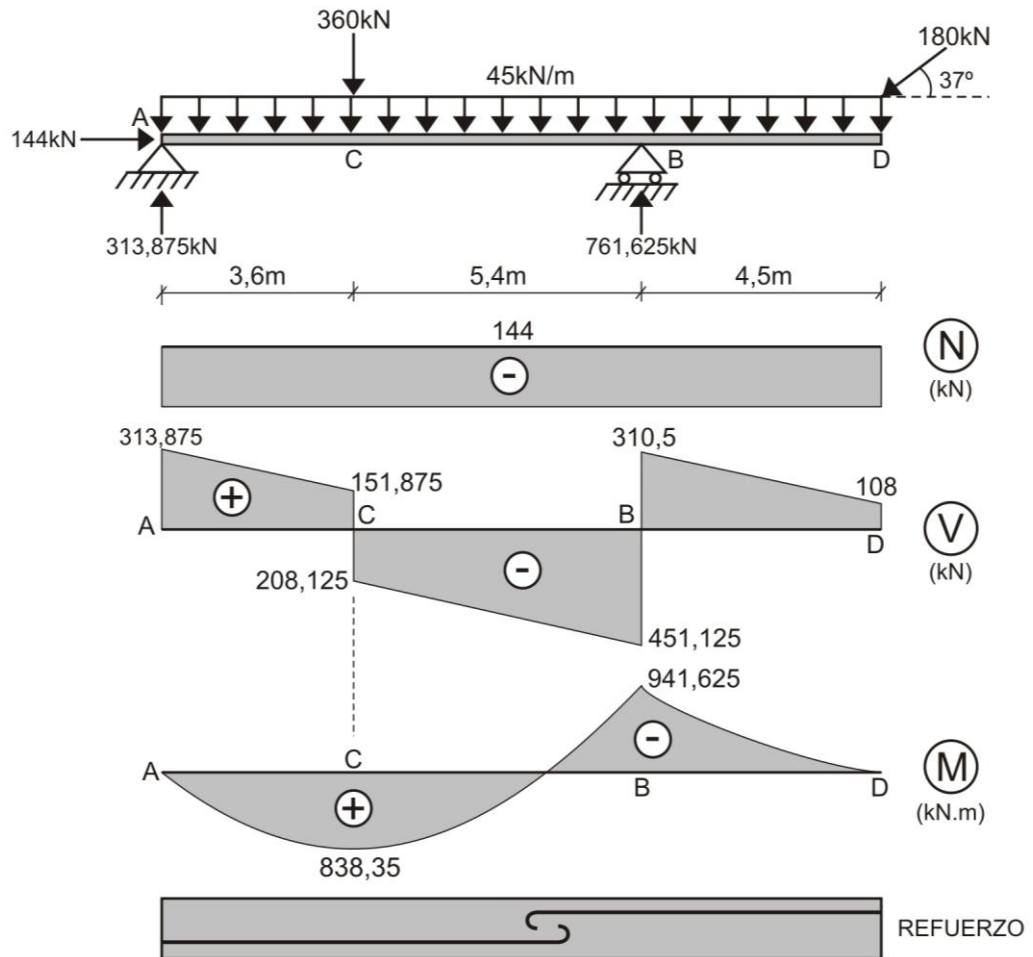


Fig. 5.46

PROBLEMA 5.18 Para la viga mostrada en la figura 5.47, determinar:

- Las ecuaciones de la fuerza cortante y momento flector para los tramos AC y CB en términos de "X", considerando el origen en A
- Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados.

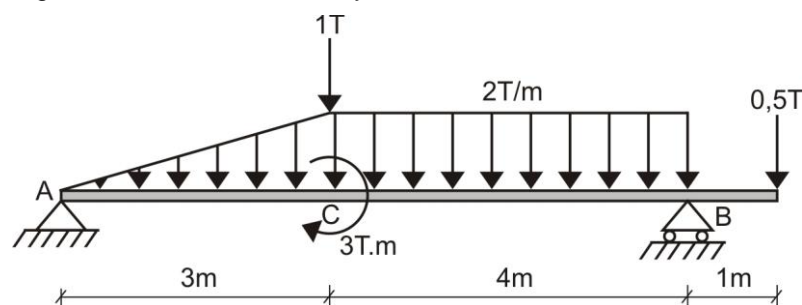


Fig. 5.47

Solución:

a) Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot (7) - 1 \cdot (3) - 0,5 \cdot (8) - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (2) \cdot (2) - 2 \cdot (4) \cdot (5) - 3 = 0$$

$$V_B = 8T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 8 - 1 - 0,5 - \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (3) - 2 \cdot (4) = 0$$

$$V_A = 4,5T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Planteamos las ecuaciones en los tramos requeridos, efectuando un corte en dichos tramos y analizando su equilibrio.

TRAMO AC ($0 \leq X \leq 3$)

Previamente determinamos el valor de W_X utilizando la relación de triángulos rectángulos.

$$\frac{W_X}{X} = \frac{2}{3} \Rightarrow W_X = \frac{2X}{3}$$

Luego, determinamos las fuerzas internas en el punto E, lugar donde se ha efectuado el corte.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_E = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 4,5 - \frac{1}{2} \cdot (X) \cdot \left(\frac{2X}{3} \right) - V_E = 0$$

$$V_E = 4,5 - \frac{X^2}{3}$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -4,5X + \frac{1}{2} \cdot (X) \cdot \left(\frac{2X}{3} \right) \cdot \left(\frac{X}{3} \right) + M_E = 0$$

$$M_E = 4,5X - \frac{X^3}{9}$$

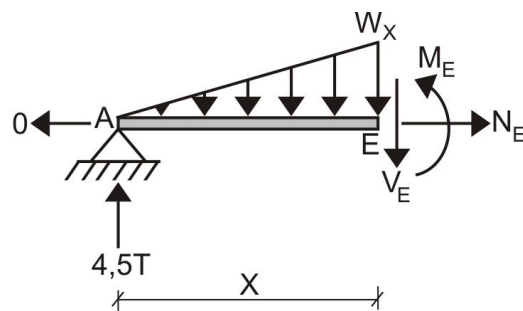


Fig. 5.48

TRAMO CB ($3 \leq X \leq 7$)

Analizamos el equilibrio de la parte izquierda de la viga hasta el punto D, lugar del corte.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_D = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 4,5 - 1 - \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (3) - 2 \cdot (X - 3) - V_D = 0$$

$$V_D = -2X + 6,5$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -4,5X + 1 \cdot (X - 3) + \frac{1}{2} (2) \cdot (3) \cdot (1 + X - 3) + 2 \cdot \frac{(X - 3)^2}{2} - 3 + M_D = 0$$

$$M_D = -X^2 + 6,5X + 3$$

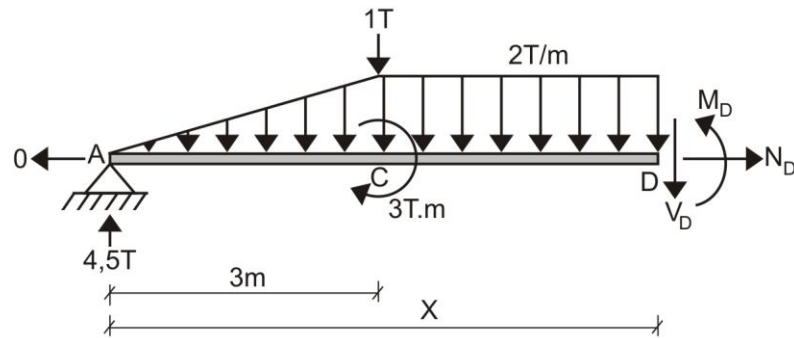


Fig. 5.49

b) Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, analizando tramo por tramo.

TRAMO AC ($0 \leq X \leq 3$)

Aplicamos las ecuaciones obtenidas para dicho tramo, debido a que como es carga triangular, el método de las áreas no es recomendable aplicarlo para tal tipo de cargas.

$$V_A = V_{X=0} = 4,5T$$

$$V_G = V_{X=1,5} = 4,5 - \frac{1,5^2}{3} = 3,75T$$

$$V_{C-0} = V_{X=3} = 4,5 - \frac{3^2}{3} = 1,5T$$

$$M_A = M_{X=0} = 0$$

$$M_G = M_{X=1,5} = 4,5 \cdot (1,5) - \frac{1,5^3}{9} = 6,375T.m$$

$$M_{C-0} = M_{X=3} = 4,5 \cdot (3) - \frac{3^3}{9} = 10,5T.m$$

TRAMO CB ($3 \leq X \leq 7$)

En este tramo podemos aplicar indistintamente el Método de las áreas o las ecuaciones obtenidas, efectuando la comparación de los resultados para el diagrama de fuerza cortante.

METODO DE LAS AREAS:

DIAGRAMA "V":

1. En el punto C hay una fuerza de 1T hacia abajo que lo reduce al valor de 1,5T hasta 0,5T
2. En el tramo CB existe una carga uniformemente distribuida igual a 2T/m que lo reduce gradualmente desde 0,5T hasta -7,5T

3. Por relaciones de triángulos rectángulos determinamos el valor de la distancia donde la fuerza cortante es cero.

$$\frac{0,5}{d} = \frac{8}{4} \Rightarrow d = 0,25\text{m}$$

DIAGRAMA "M":

$$M_{C+0} = 10,5 + 3 = 13,5\text{T.m}$$

$$M_H = M_{\text{máx}} = 13,5 + \frac{1}{2} \cdot (0,25) \cdot (0,5) = 13,562\text{T.m}$$

$$M_B = 13,562 - \frac{1}{2} \cdot (3,75) \cdot (7,5) = -0,5\text{T.m}$$

ECUACIONES:

Comprobamos los valores obtenidos anteriormente en dicho tramo por las ecuaciones correspondientes al tramo analizado.

$$V_{C+0} = V_{X=3} = -2 \cdot (3) + 6,5 = 0,5\text{T}$$

$$V_H = V_{X=3,25} = -2 \cdot (3,25) + 6,5 = 0$$

$$V_{B-0} = V_{X=7} = -2 \cdot (7) + 6,5 = -7,5\text{T}$$

$$M_{C+0} = M_{X=3} = -3^2 + 6,5 \cdot (3) + 3 = 13,5\text{T.m}$$

$$M_H = M_{X=3,25} = -3,25^2 + 6,5 \cdot (3,25) + 3 = 13,562\text{T.m}$$

$$M_B = M_{X=7} = -7^2 + 6,5 \cdot (7) + 3 = -0,5\text{T.m}$$

Como se ha podido apreciar, son los mismos resultados los obtenidos por ambos métodos, es por ello, de ahora en adelante para problemas similares, solo en el tramo de carga triangular se aplicarán las ecuaciones correspondientes y en el resto de tramos el Método de las áreas.

TRAMO BF ($7 \leq X \leq 8$)

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo B existe una reacción vertical hacia arriba de 8T que lo lleva de -7,5T hasta 0,5T
2. En el tramo BF no existe carga alguna, siendo constante el diagrama de fuerza cortante e igual a 0,5T hasta llegar al extremo F de la viga, donde la carga vertical hacia abajo de 0,5T lo lleva hasta cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_F = -0,5 + 0,5 \cdot (1) = 0$$

En la figura 5.50 se muestran las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

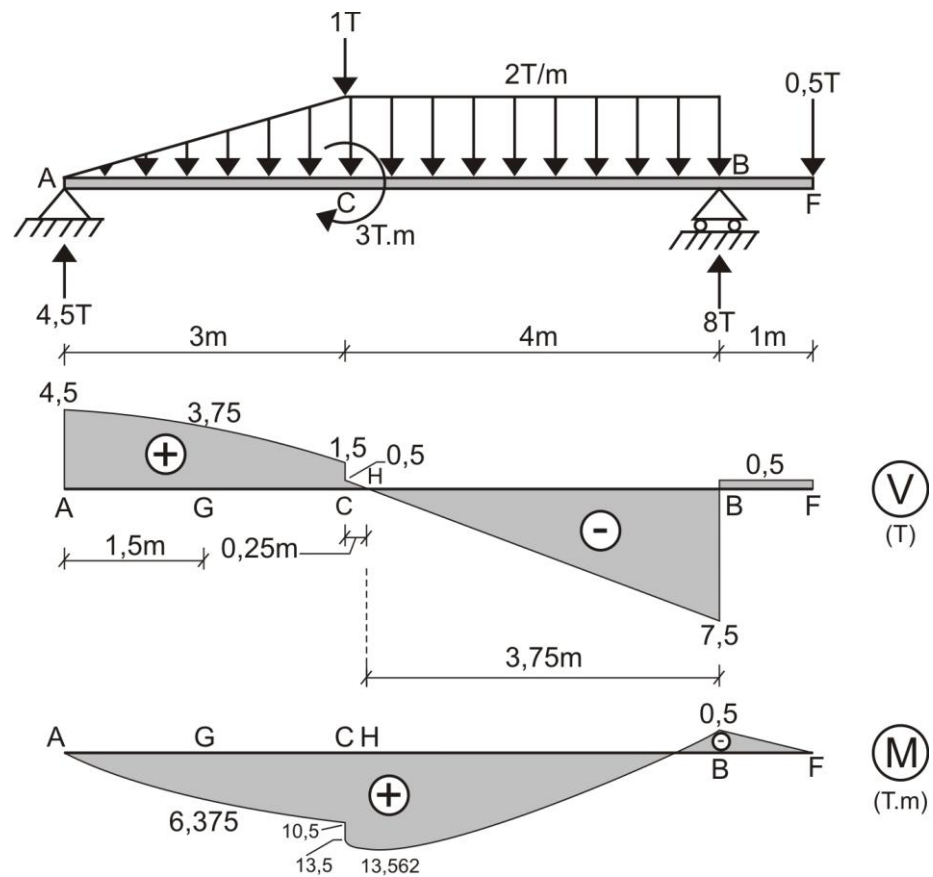


Fig. 5.50

PROBLEMA 5.19 Para la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 5.51, se pide:

- Determinar las ecuaciones de la fuerza cortante y el momento flector para el tramo BC en términos de "X" ($0 \leq X \leq 6\text{m}$), considerando el origen en B
- Dibujar el diagrama de fuerza cortante y diagrama de momento flector debidamente acotados.

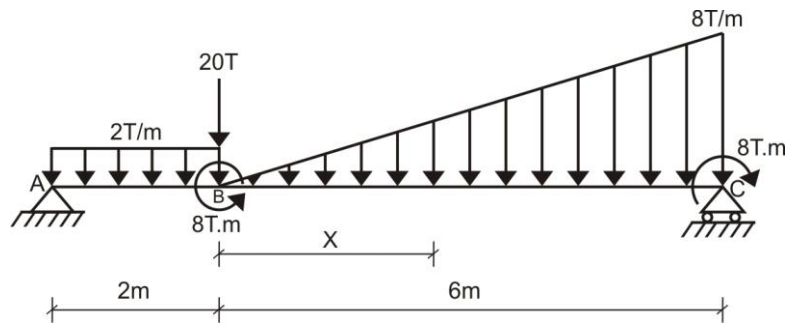


Fig. 5.51

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_C \cdot (8) - 20 \cdot (2) - 2 \cdot (2) \cdot (1) - \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (6) \cdot (6) + 8 - 8 = 0$$

$$V_C = 23,5T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_A + 23,5 - 20 - 2 \cdot (2) - \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (6) = 0$$

$$V_A = 24,5T \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Determinamos el valor de W_x para la carga triangular, mediante relación de triángulos rectángulos.

$$\frac{W_x}{X} = \frac{8}{6} \Rightarrow W_x = \frac{4X}{3}$$

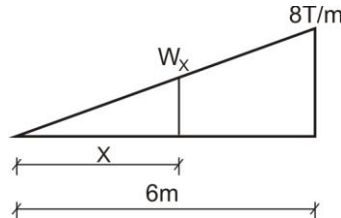


Fig. 5.52

Ahora, planteamos las ecuaciones de la fuerza cortante y momento flector, aplicando la metodología alterna, sin necesidad de efectuar corte alguno, solo efectuando la suma de fuerzas verticales para la cortante y el momento respecto al punto correspondiente a W_x , quedando a criterio del lector la comprobación mediante el equilibrio explicado anteriormente.

$$V_{BC} = 24,5 - 2 \cdot (2) - 20 - \frac{1}{2}(X) \cdot \left(\frac{4X}{3} \right) = -0,667X^2 + 0,5$$

Luego, la cortante en este tramo será cero cuando $X = 0,866m$

$$M_{BC} = 24,5 \cdot (2 + X) - 2 \cdot (2) \cdot (1 + X) - 20X - 8 - \frac{1}{2} \cdot (X) \cdot \left(\frac{4X}{3} \right) \cdot \left(\frac{X}{3} \right) = -0,222X^3 + 0,5X + 37$$

- b) Para graficar el diagrama de fuerza cortante y momento flector, aplicamos el Método de las áreas para el tramo AB y las ecuaciones obtenidas anteriormente para el tramo BC

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo A existe una reacción vertical hacia arriba de 24,5T
2. En el tramo AB existe una carga uniformemente distribuida que lo hace descender gradualmente hasta 20,5T
3. En el punto B existe una carga puntual de 20T hacia abajo, que lo hace descender hasta 0,5T
4. Para el tramo BC aplicamos las ecuaciones obteniendo el mismo valor para el punto B+0, que es después de aplicar la carga de 20T hacia abajo.

$$V_{B+0} = V_{X=0} = -0,667 \cdot (0) + 0,5 = 0,5T$$

$$V_{C-0} = V_{X=6} = -0,667 \cdot (6)^2 + 0,5 = -23,5T$$

5. En el apoyo B existe una reacción vertical de 23,5T hacia arriba que lo lleva hasta cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_{B-0} = \frac{(24,5 + 20,5) \cdot (2)}{2} = 45T \cdot m$$

$$M_{B+0} = 45 - 8 = 37 \text{ T.m}$$

$$M_D = M_{BC}^{\text{máx}} = M_{X=0,866} = -0,222 \cdot (0,866)^3 + 0,5 \cdot (0,866) + 37 = 37,29 \text{ T.m}$$

$$M_{C-0} = M_{X=6} = -0,222 \cdot (6)^3 + 0,5 \cdot (6) + 37 = -8 \text{ T.m}$$

$$M_{C+0} = -8 + 8 = 0$$

En la figura 5.53 se muestran las reacciones en los apoyos y los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

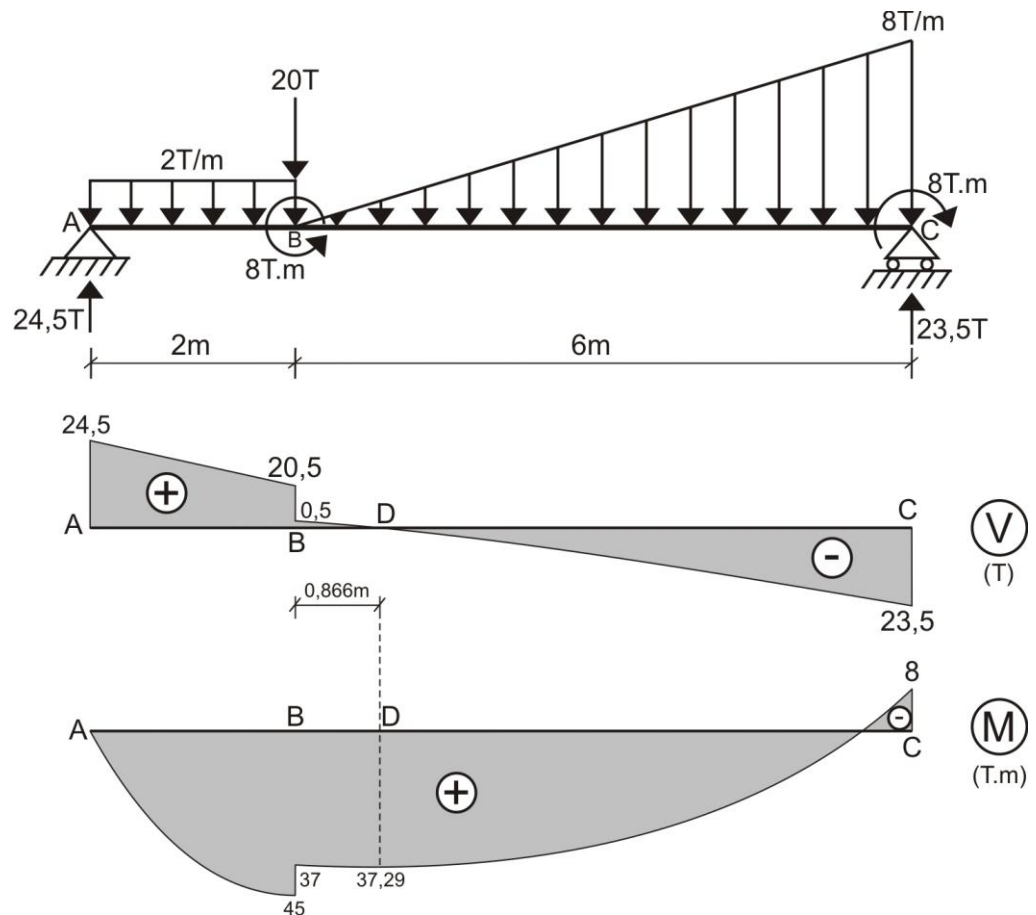


Fig. 5.53

PROBLEMA 5.20 Para la viga mostrada en la figura, se pide:

- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados.

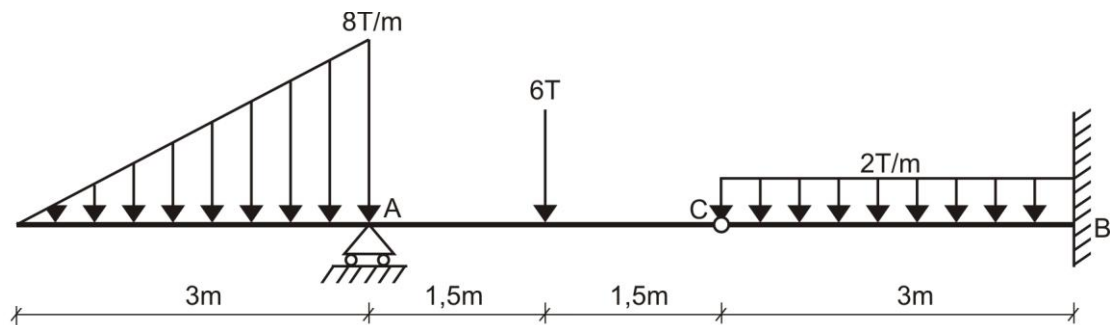


Fig. 5.54

Solución:

- a) Calculamos las reacciones en los apoyos, efectuando un corte en la rótula y analizando el equilibrio en la parte izquierda de la viga.

$$\sum M_C^{izq} = 0 \Rightarrow -V_A \cdot (3) + 6 \cdot (1,5) + \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (3) \cdot (4) = 0$$

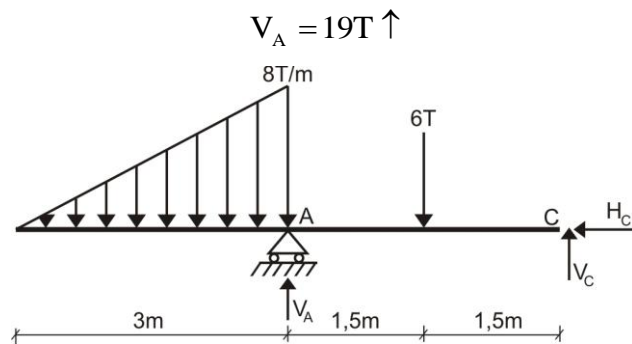


Fig. 5.55

Ahora, determinamos las reacciones en el empotramiento en B, analizando el equilibrio de toda la viga.

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 19 + V_B - \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (3) - 6 - 2 \cdot (3) = 0$$

$$V_B = 5T \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -19 \cdot (6) + \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (3) \cdot (7) + 6 \cdot (4,5) + 2 \cdot (3) \cdot (1,5) - M_B = 0$$

$$M_B = 6T.m$$

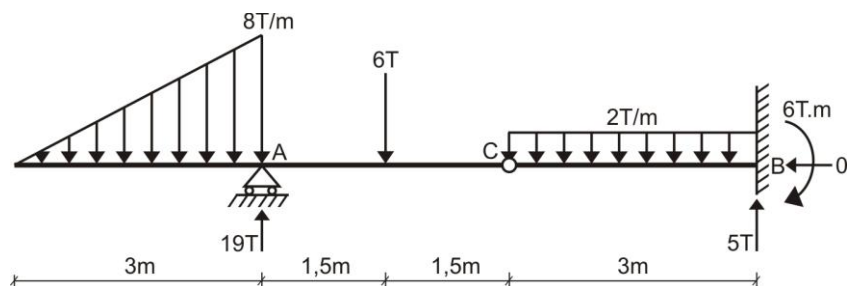


Fig. 5.56

- b) Determinamos el valor de W_x para la carga triangular, mediante relación de triángulos rectángulos.

$$\frac{W_x}{X} = \frac{8}{3} \Rightarrow W_x = \frac{8X}{3}$$

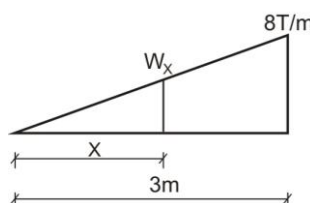


Fig. 5.57

Ahora, planteamos las ecuaciones de la fuerza cortante y momento flector para el tramo indicado.

$$V_{DA} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8X}{3} \right) \cdot (X) = -\frac{4X^2}{3} \quad \Rightarrow \quad V_{X=0} = V_D = 0$$

$$V_{X=1,5} = -\frac{4 \cdot (1,5)^2}{3} = -3T$$

$$V_{X=3} = V_{A-0} = -\frac{4 \cdot (3)^2}{3} = -12T$$

$$M_{DA} = -\frac{4X^2}{3} \cdot \left(\frac{X}{3} \right) = -\frac{4X^3}{9} \quad \Rightarrow \quad M_{X=0} = M_D = 0$$

$$M_{X=1,5} = -\frac{4 \cdot (1,5)^3}{9} = -1,5T.m$$

$$M_{X=3} = M_A = -\frac{4 \cdot (3)^3}{9} = -12T.m$$

Graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector, considerando los valores obtenidos para el tramo DA, mediante las ecuaciones y para el resto de la viga por los métodos conocidos.

DIAGRAMA "V":

1. En el apoyo B existe una reacción vertical hacia arriba de 19T, que lo lleva desde -12T hasta 7T, siendo constante en el tramo AE, debido a que no existe carga alguna.
2. En el punto E existe una carga de 6T vertical hacia abajo, que lo lleva hasta 1T, siendo constante en el tramo EC
3. Desde C hasta B existe una carga uniformemente distribuida de 2T/m que lo reduce gradualmente desde 1T hasta -5T, siendo el valor de la cortante cero en el punto ubicado a la distancia de 0,5m de la rótula C
4. En el empotramiento B existe una reacción vertical de 5T que lo lleva hasta cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = -12T.m$$

$$M_E = -12 + 7 \cdot (1,5) = -1,5T.m$$

$$M_C = -1,5 + 1 \cdot (1,5) = 0$$

$$M_F = \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (0,5) = 0,25T.m$$

$$M_{B-0} = 0,25 - \frac{1}{2} \cdot (5) \cdot (2,5) = -6T.m$$

$$M_{B+0} = -6 + 6 = 0$$

Los diagramas de fuerza cortante, momento flector y refuerzo se muestran en la figura 5.58, donde se aprecia que se cumple con la condición que el momento flector en la rótula es cero.

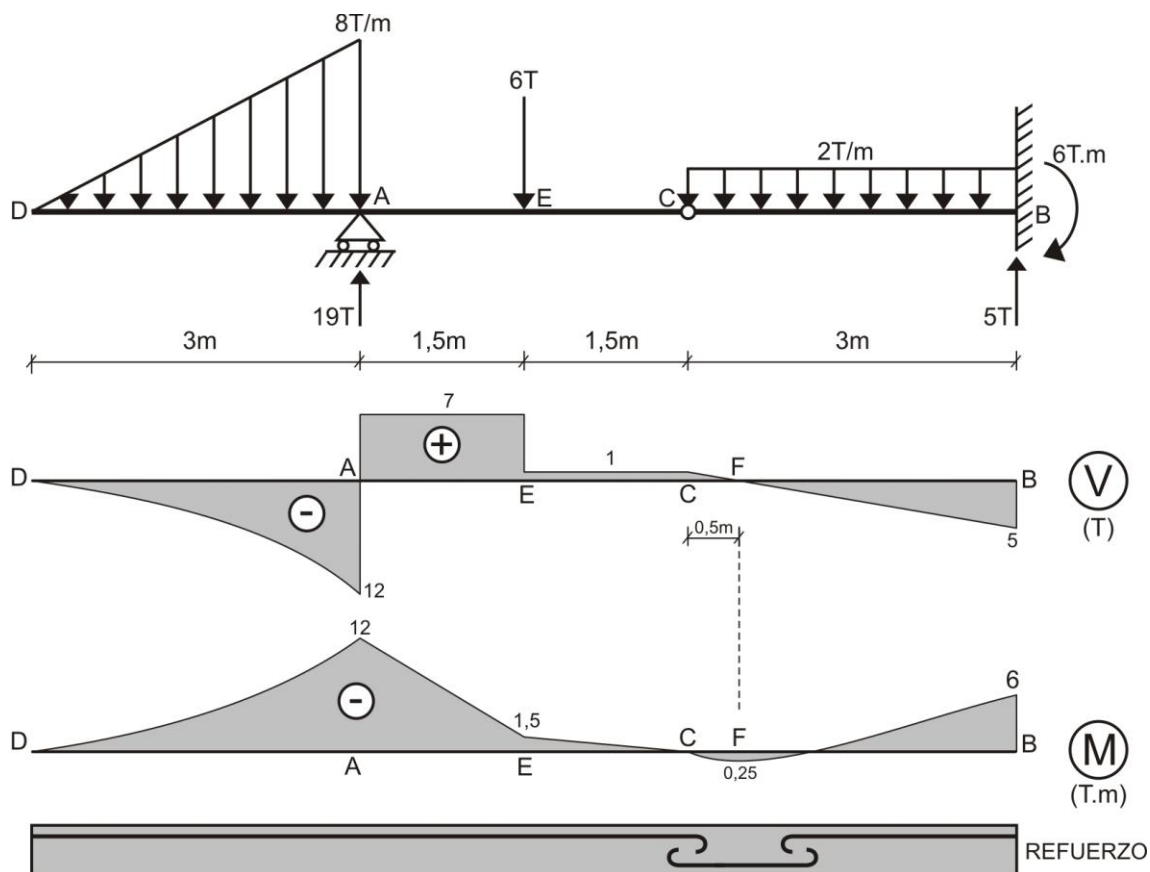


Fig. 5.58

PROBLEMA 5.21 Grafique los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga mostrada en la figura 5.59

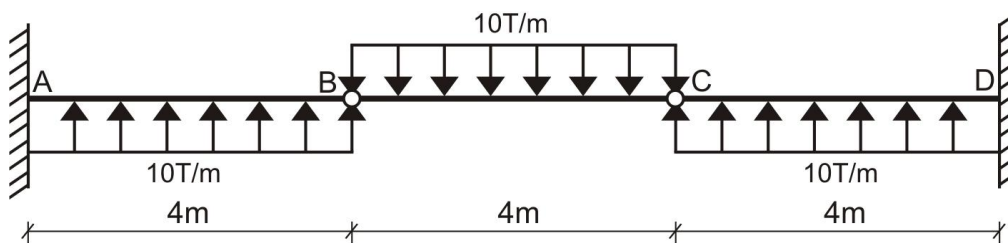


Fig. 5.59

Solución:

Calculamos las fuerzas internas en cada tramo.

TRAMO BC:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_C \cdot (4) - 10 \cdot (4) \cdot (2) = 0 \quad \therefore V_C = 20T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow V_B + 20 - 10 \cdot (4) = 0 \quad \therefore V_B = 20T \uparrow$$

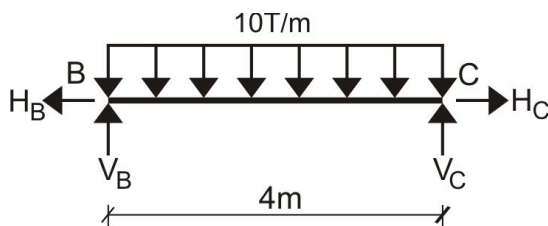


Fig. 5.60

TRAMO AB:

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad -V_A - 20 + 10 \cdot (4) = 0 \quad \therefore \quad V_A = 20T \downarrow$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A - 20 \cdot (4) + 10 \cdot (4) \cdot (2) = 0 \quad \therefore \quad M_A = 0$$

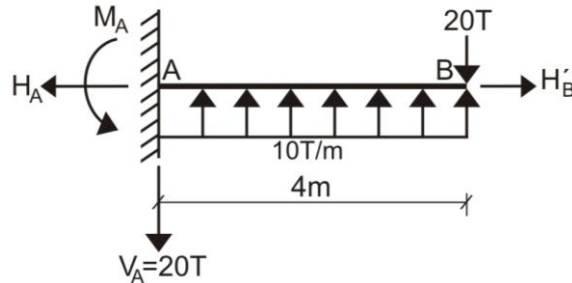


Fig. 5.61

En base a los resultados obtenidos, graficamos los diagramas correspondientes de fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "V":

1. En el empotramiento A existe una reacción vertical de 20T hacia abajo.
2. En el tramo AB existe una carga uniformemente distribuida de 10T/m hacia arriba, que lo hace crecer gradualmente desde -20T hasta 20T en la rótula B
3. En el tramo BC existe una carga uniformemente distribuida de 10T/m hacia abajo, que lo hace descender gradualmente desde 20T hasta -20T en la rótula C
4. En el tramo CD existe una carga uniformemente distribuida de 10T/m hacia arriba que lo hace crecer gradualmente desde -20T hasta 20T en el empotramiento D
5. En el empotramiento D existe una reacción vertical de 20T hacia abajo, que lo lleva a cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_E = -\frac{1}{2} \cdot (20) \cdot (2) = -20T.m$$

$$M_B = -20 + \frac{1}{2} \cdot (20) \cdot (2) = 0$$

$$M_F = \frac{1}{2} \cdot (20) \cdot (2) = 20T.m$$

$$M_C = 20 - \frac{1}{2} \cdot (20) \cdot (2) = 0$$

$$M_G = -\frac{1}{2} \cdot (20) \cdot (2) = -20T.m$$

$$M_D = -20 + \frac{1}{2} \cdot (20) \cdot (2) = 0$$

Como se puede apreciar en la figura 5.62, se cumple que los momentos en las rótulas B y C son ceros. También se puede indicar, que si el sistema es simétrico en geometría y cargas, entonces su diagrama de fuerza cortante es antisimétrico y el diagrama de momento flector simétrico.

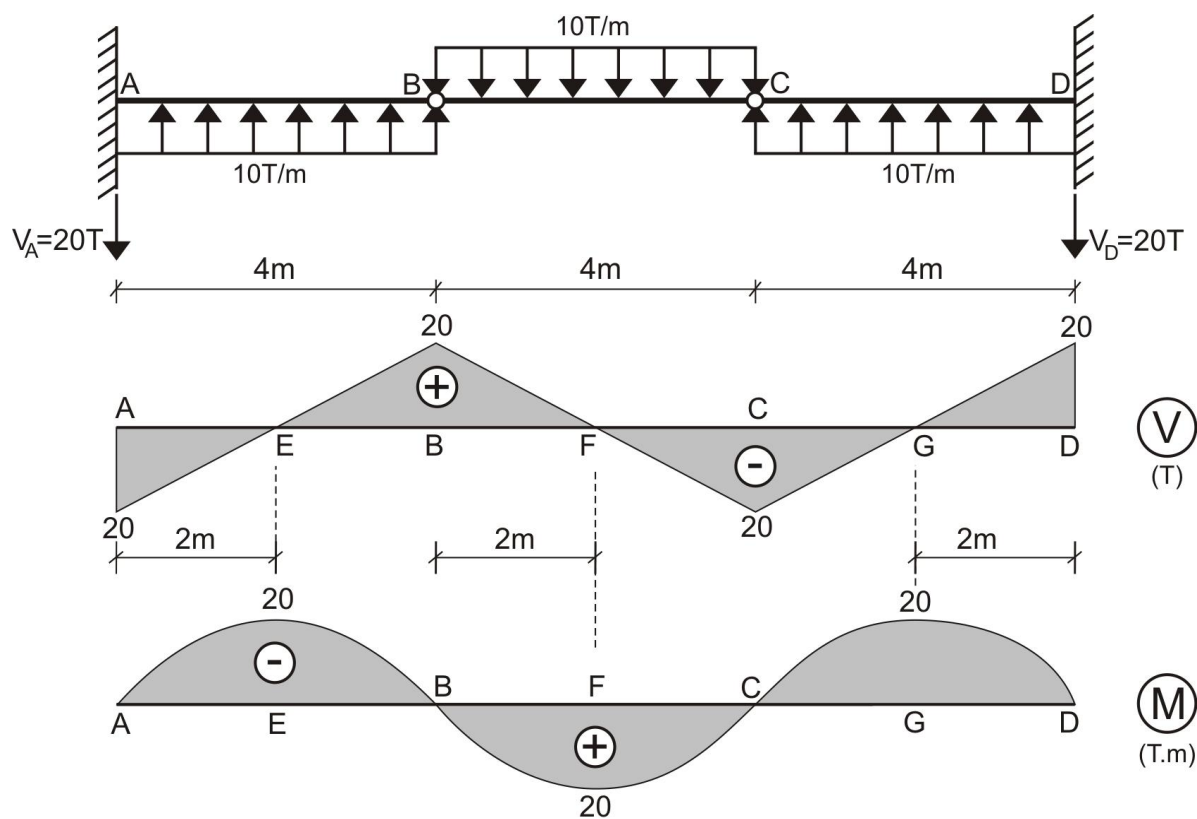


Fig. 5.62

PROBLEMA 5.22 Para la viga mostrada en la figura 5.63, se pide:

- Determinar las ecuaciones de la fuerza cortante y momento flector para el tramo izquierdo en términos de X ($0 \leq X \leq 3m$), considerando el origen en A
- Dibujar el diagrama de fuerza cortante y diagrama de momento flector debidamente acotados.

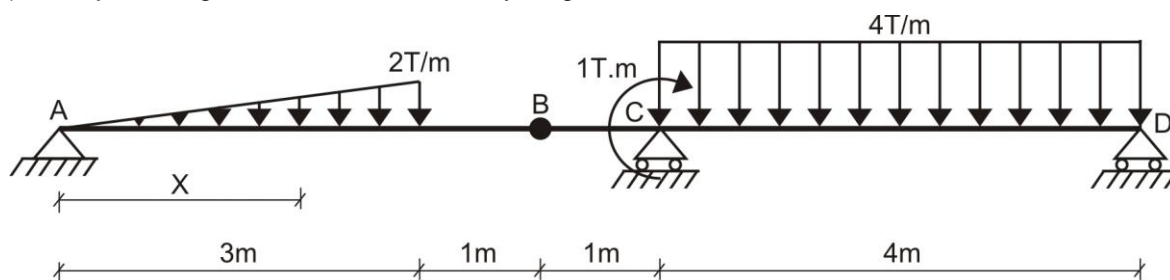


Fig. 5.63

Solución:

- Calculamos las reacciones en los apoyos, analizando en un inicio el equilibrio total de la viga.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Luego, efectuamos un corte en la rótula B y analizamos el equilibrio de la parte izquierda de la viga.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -V_A \cdot (4) + \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (3) \cdot (2) = 0 \quad \therefore V_A = 1,5T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 1,5 + V_B - \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (3) = 0 \quad \therefore V_B = 1,5T \uparrow$$

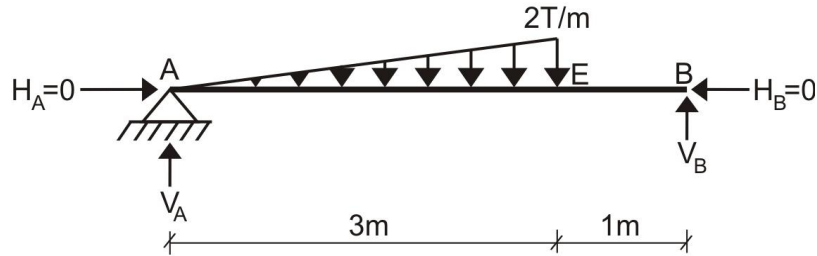


Fig. 5.64

Determinamos las ecuaciones de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el tramo AE de la viga.

$$\frac{W_x}{X} = \frac{2}{3} \Rightarrow W_x = \frac{2X}{3}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_{AE} = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 1,5 - \frac{1}{2} \cdot (X) \cdot \left(\frac{2X}{3}\right) - V_{AE} = 0 \quad \therefore V_{AE} = 1,5 - \frac{X^2}{3}$$

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow M - 1,5 \cdot (X) + \left(\frac{X^2}{3}\right) \cdot \left(\frac{X}{3}\right) = 0 \quad \therefore M_{AE} = 1,5X - \frac{X^3}{9}$$

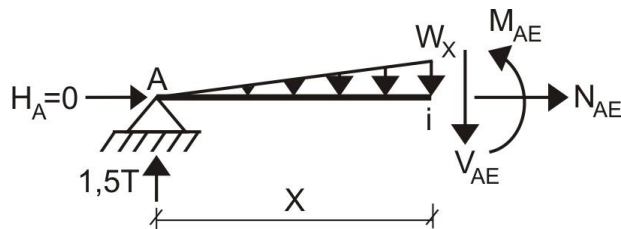


Fig. 5.65

Ahora, calculamos las otras reacciones, analizando el equilibrio del tramo BCD de la viga.

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 1,5 \cdot (5) + 4 \cdot (4) \cdot (2) - 1 - V_C \cdot (4) = 0 \quad \therefore V_C = 9,625T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow 9,625 + V_D - 1,5 - 4 \cdot (4) = 0 \quad \therefore V_D = 7,875T \uparrow$$

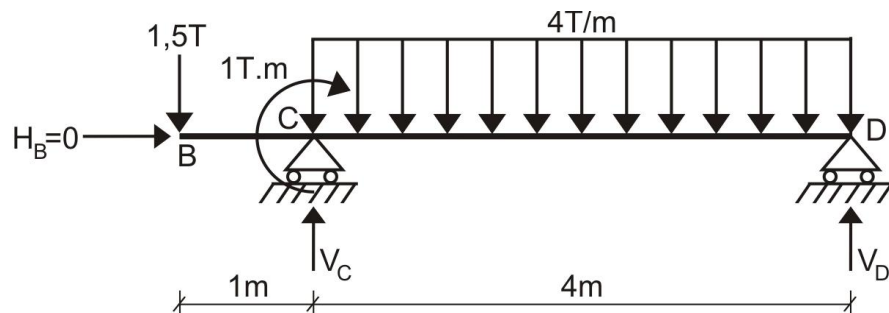


Fig. 5.66

- b) En el tramo AE, determinamos el punto donde la fuerza cortante es cero, igualando a cero la ecuación de la fuerza cortante.

$$1,5 - \frac{X^2}{3} = 0 \Rightarrow X = 2,1213\text{m}$$

Calculamos los valores de la fuerza cortante y momento flector para el tramo AE, tal como se muestra en la tabla 5.1

Tabla 5.1

DISTANCIA (m)	V (T)	M (T.m)
X = 0	1,5	0
X = 1,5	0,75	1,875
X = 2,1213	0	2,1213
X = 3	-1,5	1,5

Con los valores obtenidos, graficamos los diagramas de fuerza cortante y momento flector en el tramo AE y para el resto de la viga por los métodos conocidos, tal como se muestra en la figura 5.67

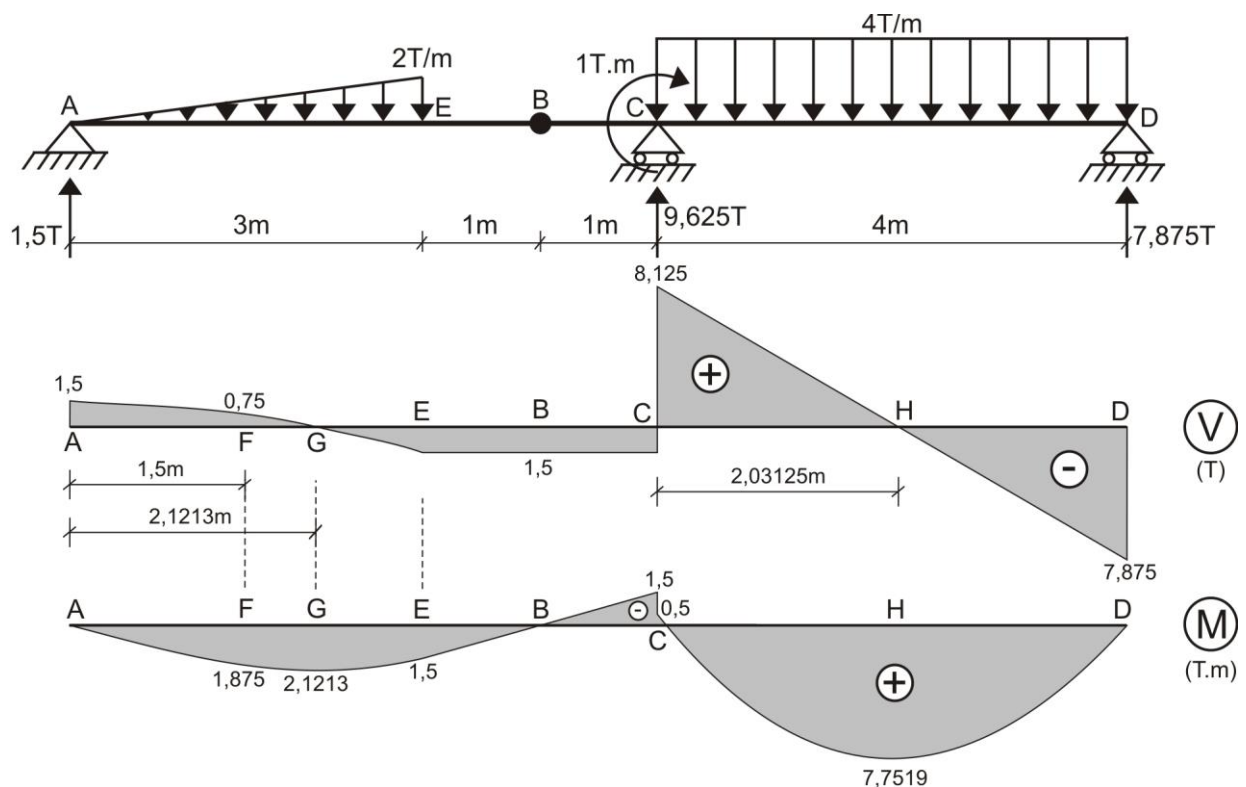


Fig. 5.67

DIAGRAMA "V":

1. En el tramo EC no existe carga alguna, por ello, el diagrama de fuerza cortante es constante e igual a -1,5T
2. En el apoyo C existe una reacción vertical hacia arriba de 9,625T que lo lleva desde -1,5T hasta 8,125T
3. En el tramo CD existe una carga uniformemente distribuida de 4T/m que lo hace decrecer gradualmente desde 8,125T hasta -7,875T
4. En el apoyo D existe una reacción vertical de 7,875T que lo lleva hasta cero.

DIAGRAMA "M":

$$M_B = 1,5 - 1,5 \cdot (1) = 0$$

$$M_{C-0} = 0 - 1,5 \cdot (1) = -1,5T.m$$

$$M_{C+0} = -1,5 + 1 = -0,5T.m$$

$$M_H = -0,5 + \frac{1}{2} \cdot (8,125) \cdot (2,03125) = 7,7519T.m$$

$$M_D = 7,7519 - \frac{1}{2} \cdot (7,875) \cdot (1,96875) = 0$$

5.3 DIAGRAMAS EN PORTICOS

PROBLEMA 5.23 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para la estructura mostrada en la figura 5.68

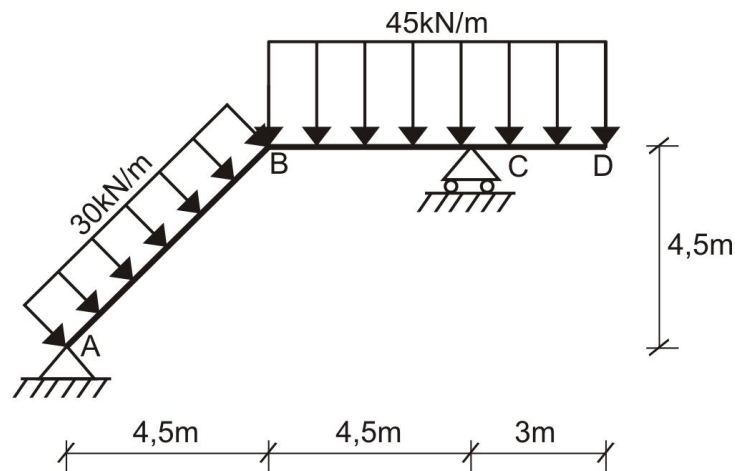


Fig. 5.68

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C \cdot (9) - 30 \cdot (4,5\sqrt{2}) \cdot (2,25\sqrt{2}) - 45 \cdot (7,5) \cdot (8,25) = 0$$

$$V_C = 376,875kN \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -H_A + 30 \cdot (4,5\sqrt{2}) \cdot \text{sen}45^\circ = 0$$

$$H_A = 135kN \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 376,875 - 30.(4,5\sqrt{2}).\cos 45^\circ - 45.(7,5) = 0$$

$$V_A = 95,625 \text{ kN} \uparrow$$

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

Como sabemos, las fuerzas axiales van orientadas a lo largo de cada barra y pueden ser de tracción (origina alargamiento) o de compresión (ocasiona acortamiento).

Para ello, proyectamos las fuerzas a lo largo de cada barra en su eje longitudinal.

$$N_{AB} = 135 \cos 45^\circ - 95,625 \cos 45^\circ = 27,84 \text{ kN} \quad (\text{TRACCION})$$

$$N_{BC} = 0$$

$$N_{CD} = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.69

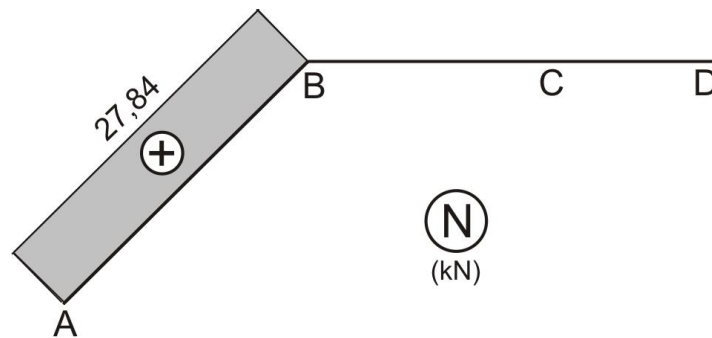


Fig. 5.69

DIAGRAMA "V":

Efectuamos en forma análoga, pero proyectamos en forma perpendicular al eje de la barra, codificando el subíndice como el punto en el cual se analiza y superíndice el tramo respectivo.

$$V_A^{AB} = 95,625 \sin 45^\circ + 135 \sin 45^\circ = 163,07 \text{ kN}$$

$$V_B^{AB} = 163,07 - 30.(4,5\sqrt{2}) = -27,84 \text{ kN}$$

$$V_B^{BC} = 95,625 - 30.(4,5\sqrt{2}) \sin 45^\circ = -39,375 \text{ kN}$$

$$V_C^{BC} = -39,375 - 45.(4,5) = -241,875 \text{ kN}$$

$$V_C^{CD} = -241,875 + 376,875 = 135 \text{ kN}$$

$$V_D^{CD} = 135 - 45.(3) = 0$$

Determinamos la distancia "d" desde el apoyo A, en el tramo AB, donde la fuerza cortante es cero.

$$\frac{163,07}{d} = \frac{190,91}{4,5\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad d = 5,4357 \text{ m}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.70

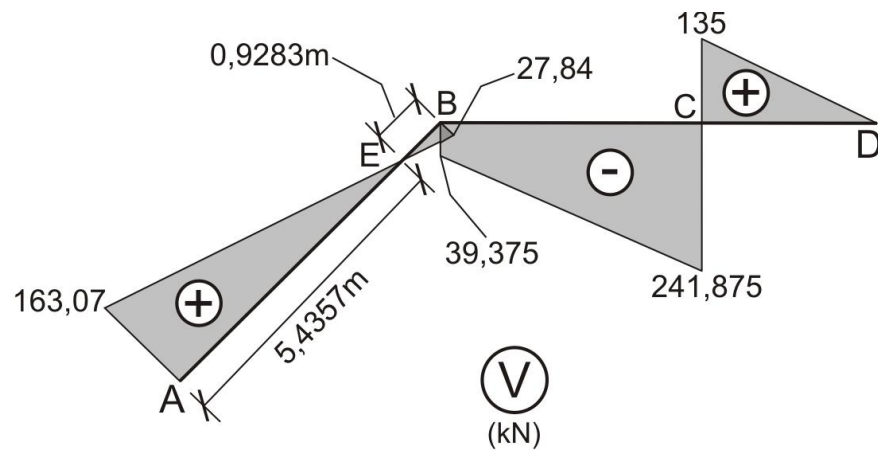


Fig. 5.70

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_E = \frac{1}{2} \cdot (163,07) \cdot (5,4357) = 443,2 \text{ kN.m}$$

$$M_B = 443,2 - \frac{1}{2} \cdot (27,84) \cdot (0,9283) = 430,28 \text{ kN.m}$$

$$M_C = 430,28 - \frac{(241,875 + 39,375)}{2} \cdot (4,5) = -202,5 \text{ kN.m}$$

$$M_D = -202,5 + \frac{1}{2} \cdot (135) \cdot (3) = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.71

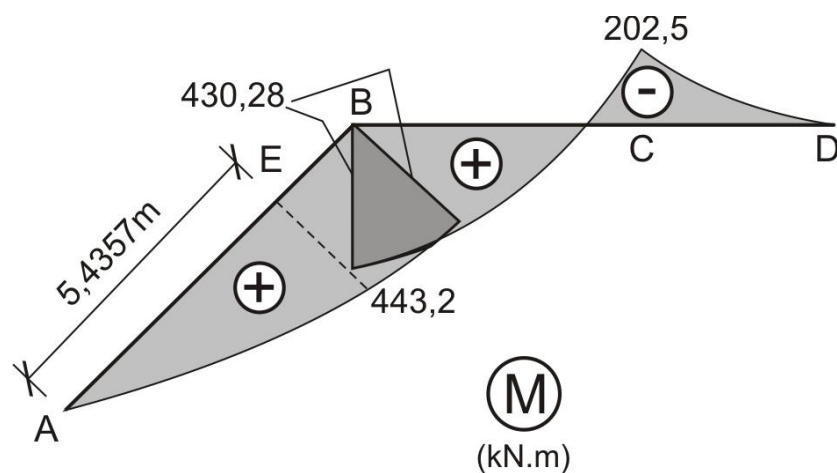


Fig. 5.71

PROBLEMA 5.24 Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura 5.72

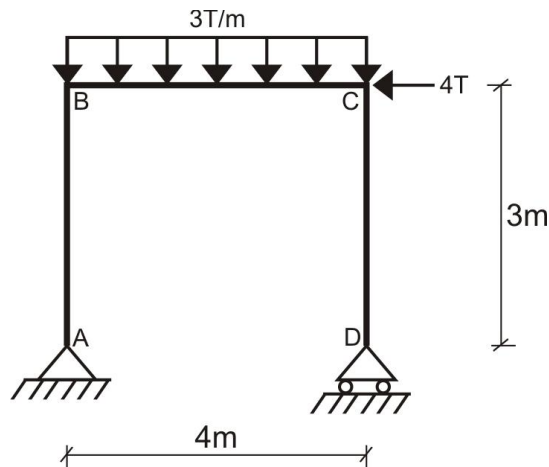


Fig. 5.72

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 & \Rightarrow V_D \cdot (4) + 4 \cdot (3) - 3 \cdot (4) \cdot (2) = 0 & \therefore V_D = 3T \uparrow \\ \sum F_Y = 0 & \Rightarrow V_A + 3 - 3 \cdot (4) = 0 & \therefore V_A = 9T \uparrow \\ \sum F_X = 0 & \Rightarrow H_A - 4 = 0 & \therefore H_A = 4T \rightarrow\end{aligned}$$

En la figura 5.73,a se muestran las reacciones en los apoyos.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

Como sabemos, las fuerzas axiales van orientadas a lo largo de cada barra y pueden ser de tracción (origina alargamiento) o de compresión (ocasiona acortamiento).

Para ello, proyectamos las fuerzas a lo largo de cada barra en su eje longitudinal.

$$\begin{aligned}N_{AB} &= -9T & (\text{COMPRESION}) \\ N_{BC} &= -4T & (\text{COMPRESION}) \\ N_{CD} &= -3T & (\text{COMPRESION})\end{aligned}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.73,b

DIAGRAMA "V":

Efectuamos en forma análoga, pero proyectamos en forma perpendicular al eje de la barra, codificando el subíndice como el punto en el cual se analiza y superíndice el tramo respectivo.

$$\begin{aligned}V_A^{AB} &= -4T \\ V_B^{AB} &= -4T \\ V_B^{BC} &= 9T \\ V_C^{BC} &= 9 - 3 \cdot (4) = -3T\end{aligned}$$

$$V_C^{CD} = 0$$

$$V_D^{CD} = 0$$

Determinamos la distancia "d" desde el nudo B, en el tramo BC, donde la fuerza cortante es cero.

$$\frac{9}{d} = \frac{12}{4} \Rightarrow d = 3\text{m}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.73,c

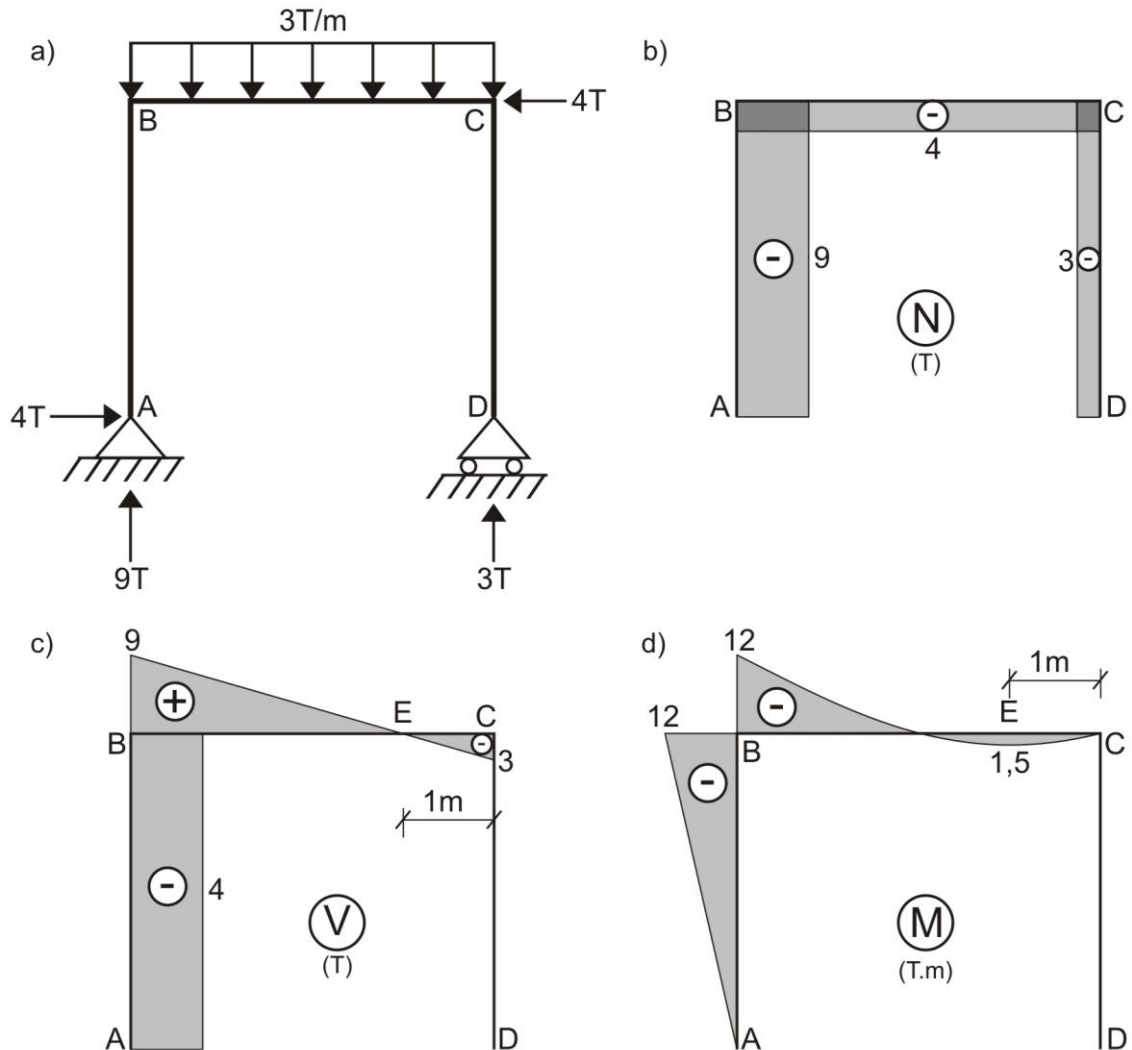


Fig. 5.73

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B = -4.(3) = -12\text{T.m}$$

$$M_E = -12 + \frac{1}{2}.(3).(9) = 1,5\text{T.m}$$

$$M_C = 1,5 - \frac{1}{2}.(1).(3) = 0$$

$$M_D = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.73,d

PROBLEMA 5.25 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura 5.74

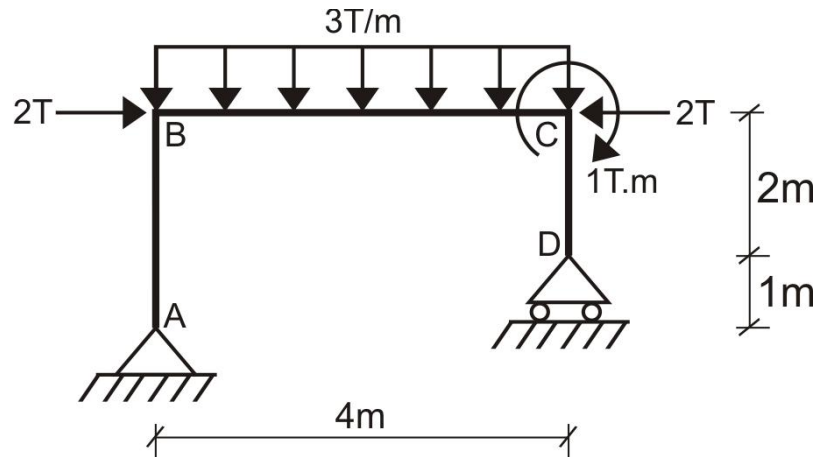


Fig. 5.74

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D \cdot (4) + 2 \cdot (3) - 2 \cdot (3) - 3 \cdot (4) \cdot (2) - 1 = 0$$

$$V_D = 6,25T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 6,25 - 3 \cdot (4) = 0$$

$$V_A = 5,75T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A + 2 - 2 = 0$$

$$H_A = 0$$

En la figura 5.75,a se muestran las reacciones en los apoyos.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

$$N_{AB} = -5,75T \quad (\text{COMPRESION})$$

$$N_{BC} = -2T \quad (\text{COMPRESION})$$

$$N_{CD} = -6,25T \quad (\text{COMPRESION})$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.75,b

DIAGRAMA "V":

$$V_A^{AB} = 0$$

$$V_B^{AB} = 0$$

$$V_B^{BC} = 5,75T$$

$$V_C^{BC} = 5,75 - 3 \cdot (4) = -6,25T$$

$$V_C^{CD} = 0$$

$$V_D^{CD} = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.75,c

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B = 0$$

$$M_E = \frac{1}{2} \cdot (1,917) \cdot (5,75) = 5,51T.m$$

$$M_{C-0} = 5,51 - \frac{1}{2} \cdot (2,083) \cdot (6,25) = -1T.m$$

$$M_{C+0} = -1 + 1 = 0$$

$$M_D = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.75,d

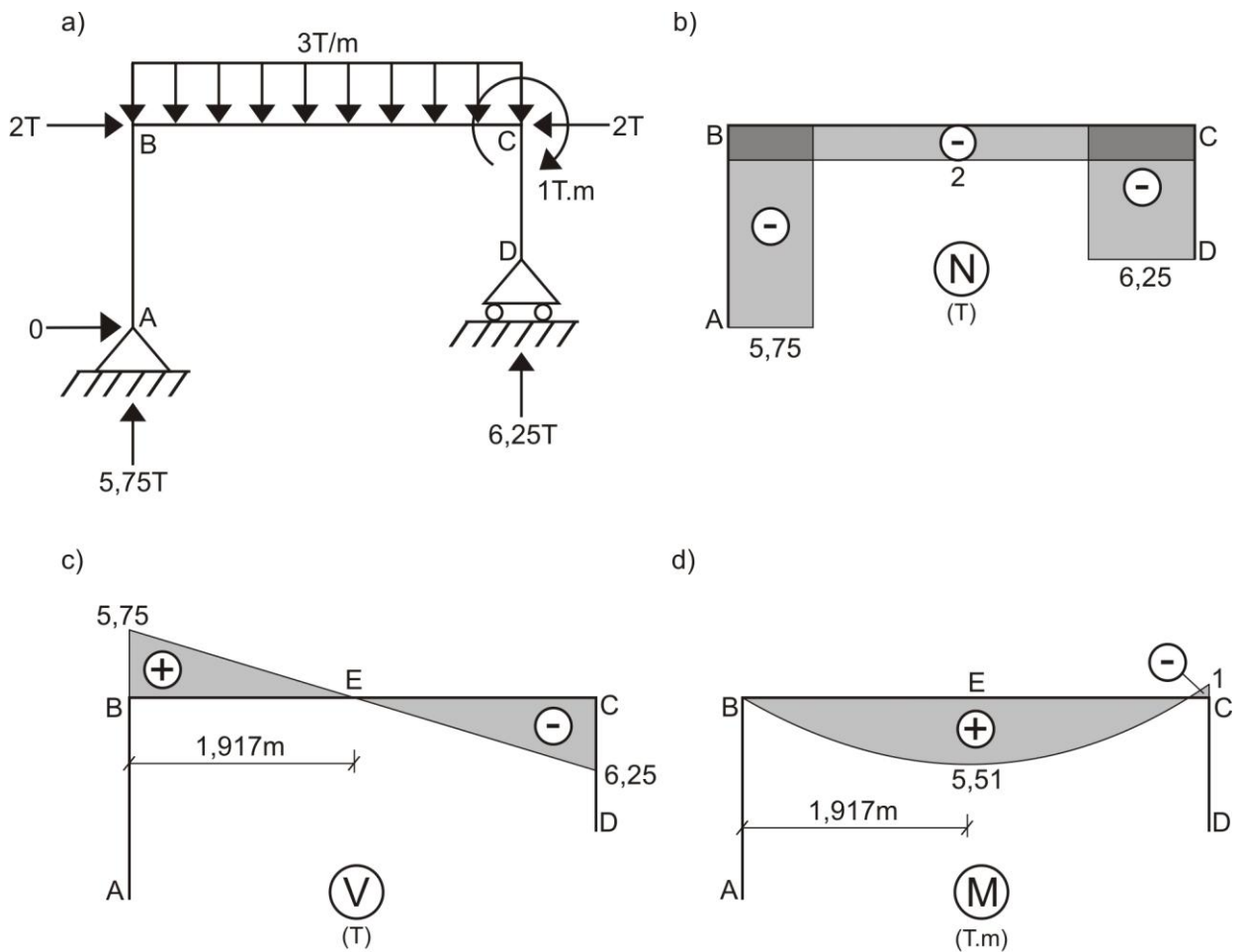


Fig. 5.75

PROBLEMA 5.26 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura 5.76

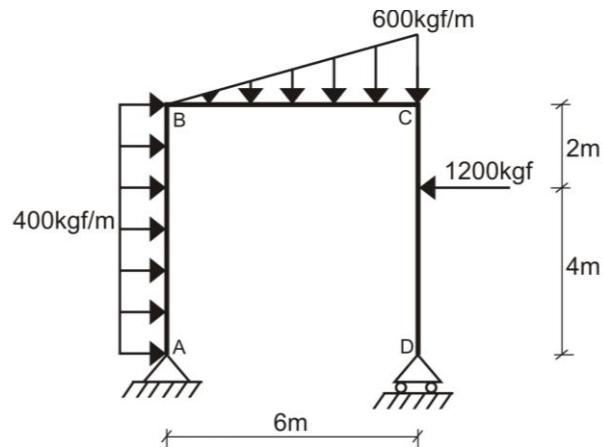


Fig. 5.76

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D \cdot (6) + 1200 \cdot (4) - 400 \cdot (6) \cdot (3) - \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (600) \cdot (4) = 0$$

$$V_D = 1600 \text{ kgf} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 1600 - \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (600) = 0$$

$$V_A = 200 \text{ kgf} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad -H_A + 400 \cdot (6) - 1200 = 0$$

$$H_A = 1200 \text{ kgf} \leftarrow$$

En la figura 5.78,a se muestran las reacciones en los apoyos.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

$$N_{AB} = -200 \text{ kgf} \quad (\text{COMPRESION})$$

$$N_{BC} = -1200 \text{ kgf} \quad (\text{COMPRESION})$$

$$N_{CD} = -1600 \text{ kgf} \quad (\text{COMPRESION})$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.78,b

DIAGRAMA "V":

$$V_A^{AB} = 1200 \text{ kgf}$$

$$V_B^{AB} = 1200 - 400 \cdot (6) = -1200 \text{ kgf}$$

Para graficar el diagrama de cortante en el tramo BC por existir carga triangular, debemos de plantear una ecuación, analizando previamente la carga triangular que se muestra en la figura 5.77

$$\frac{Y}{X} = \frac{600}{6} \quad \Rightarrow \quad Y = 100X$$

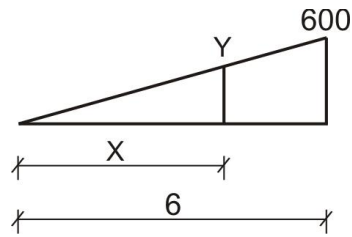


Fig. 5.77

$$V_X^{BC} = 200 - \frac{1}{2} \cdot (X) \cdot (100X) = 200 - 50X^2$$

Ahora, determinamos la fuerza cortante igual a cero, porque ahí se producirá el momento flector máximo en el tramo analizado.

$$200 - 50X^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 2\text{m}$$

Calculamos los valores de la fuerza cortante para el tramo BC, tal como se muestra en la tabla 5.2

Tabla 5.2

PUNTO	DISTANCIA (m)	V (kgf)	M (kgf.m)
B	$X = 0$	200	0
F	$X = 2$	0	266,67
C	$X = 6$	-1600	-2400

$$V_C^{CD} = 1200\text{kgf}$$

$$V_{G-0}^{CD} = 1200\text{kgf}$$

$$V_{G+0}^{CD} = 1200 - 1200 = 0$$

$$V_D^{CD} = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.78,c

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_E = \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (1200) = 1800\text{kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 1800 - \frac{1}{2} \cdot (3) \cdot (1200) = 0$$

Para graficar el diagrama de momento flector en el tramo BC, planteamos la ecuación para dicho tramo.

$$M_X^{BC} = 200X - 50X^2 \cdot \left(\frac{X}{3}\right) = 200X - \frac{50X^3}{3}$$

Calculamos los valores del momento flector para el tramo BC, tal como se muestra en la tabla 5.2

$$M_G = -2400 + 1200 \cdot (2) = 0$$

$$M_D = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.78,d

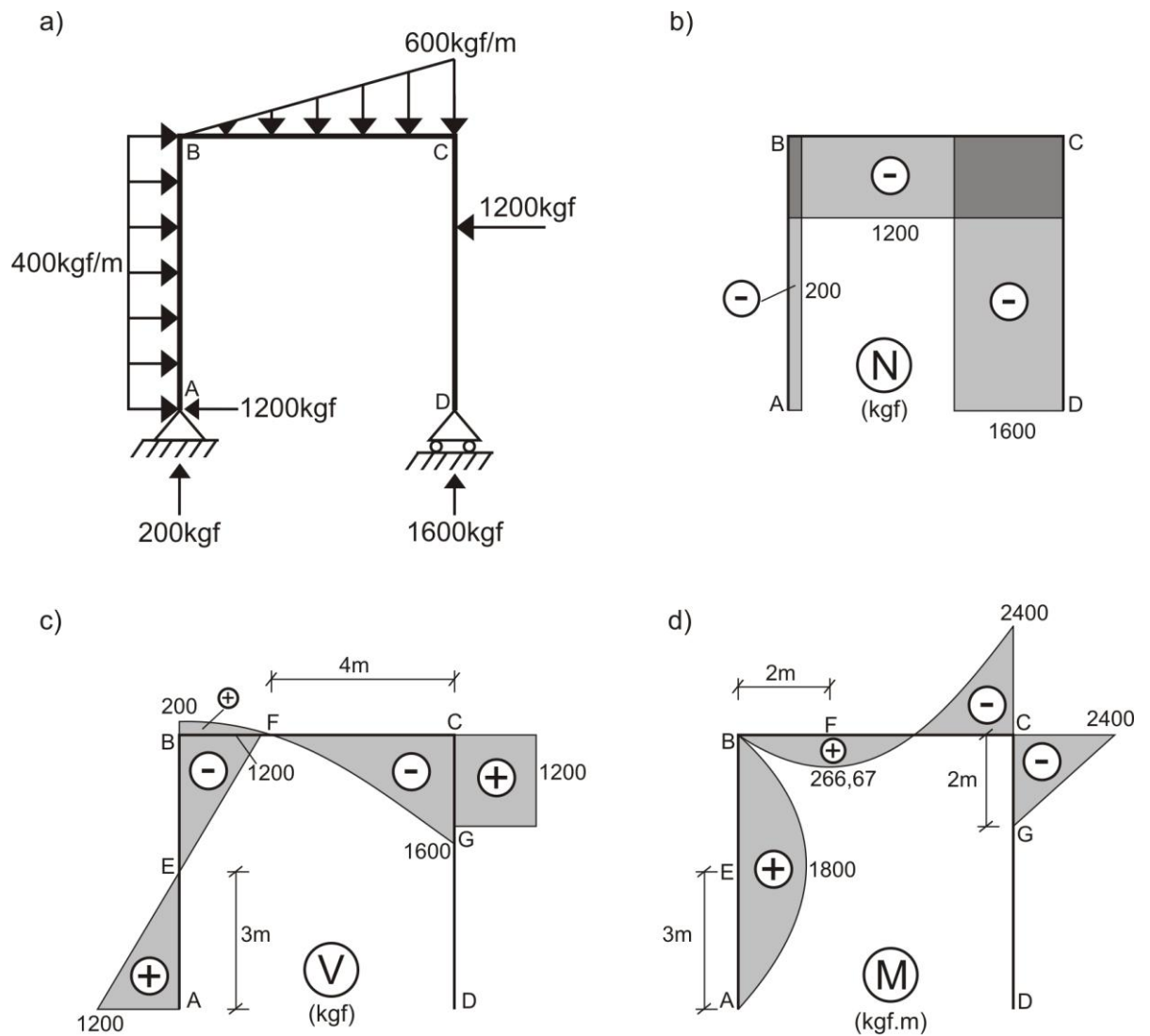


Fig. 5.78

PROBLEMA 5.27 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura 5.79

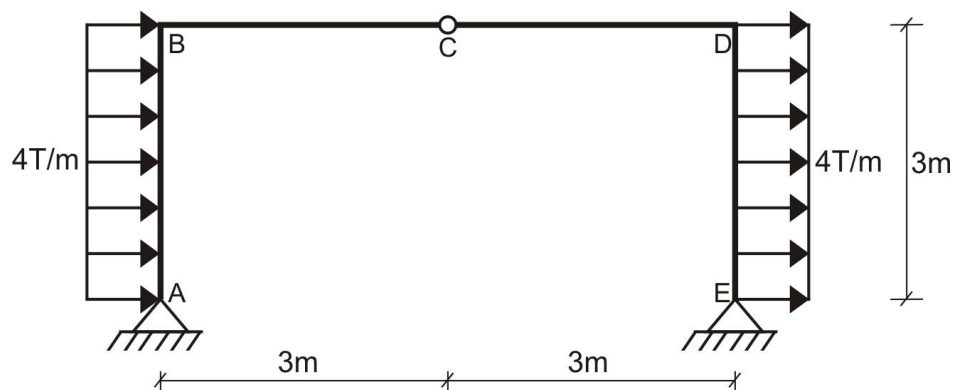


Fig. 5.79

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\Rightarrow V_E \cdot (6) - [4 \cdot (3) \cdot (1,5)] \cdot 2 = 0 &\therefore V_E = 6T \uparrow \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow -V_A + 6 = 0 &\therefore V_A = 6T \downarrow \\ \sum M_C^{\text{der}} = 0 &\Rightarrow 6 \cdot (3) + 4 \cdot (3) \cdot (1,5) - H_E \cdot (3) = 0 &\therefore H_E = 12T \leftarrow \\ \sum F_X = 0 &\Rightarrow 4 \cdot (3) \cdot 2 - 12 - H_A = 0 &\therefore H_A = 12T \leftarrow\end{aligned}$$

En la figura 5.80,a se muestran las reacciones en los apoyos.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

$$N_{AB} = 6T \quad (\text{TRACCION})$$

$$N_{BD} = 0$$

$$N_{DE} = -6T \quad (\text{COMPRESION})$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.80,b

DIAGRAMA "V":

$$V_A^{AB} = 12T$$

$$V_B^{AB} = 12 - 4 \cdot (3) = 0$$

$$V_B^{BD} = -6T$$

$$V_D^{BD} = -6T$$

$$V_D^{DE} = 0$$

$$V_E^{DE} = 4 \cdot (3) = 12T$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.80,c

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_{\text{centro}}^{AB} = \left(\frac{12+6}{2} \right) \cdot (1,5) = 13,5T.m$$

$$M_B = 13,5 + \frac{1}{2} \cdot (1,5) \cdot (6) = 18T.m$$

$$M_C = 18 - 6 \cdot (3) = 0$$

$$M_D = -6 \cdot (3) = -18T.m$$

$$M_{\text{centro}}^{DE} = -18 + \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (1,5) = -13,5T.m$$

$$M_E = -13,5 + \left(\frac{12+6}{2} \right) \cdot (1,5) = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.80,d

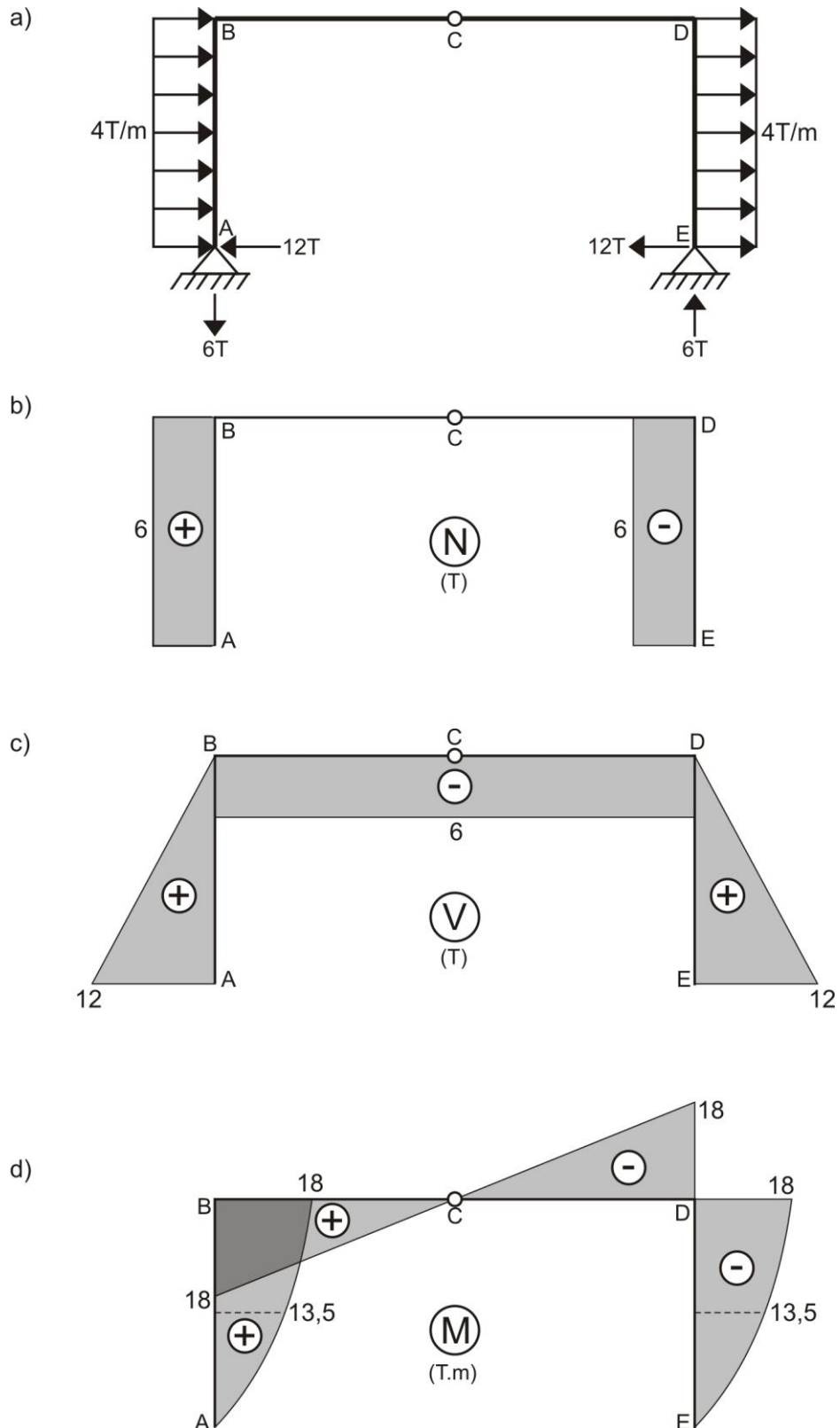


Fig. 5.80

PROBLEMA 5.28 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura 5.81

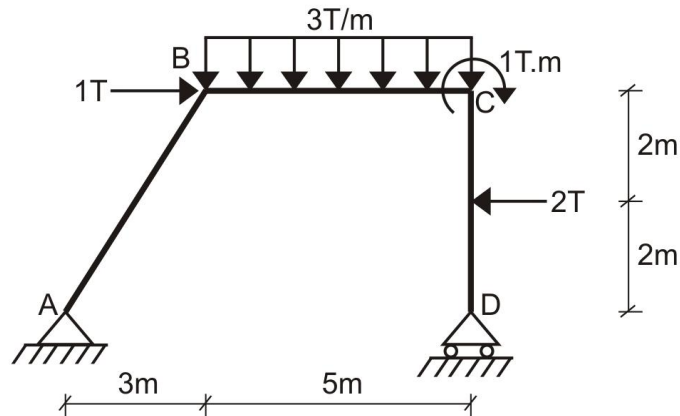


Fig. 5.81

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_D \cdot (8) + 2 \cdot (2) - 1 \cdot (4) - 3 \cdot (5) \cdot (5,5) - 1 = 0$$

$$V_D = 10,4375T \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A + 10,4375 - 3 \cdot (5) = 0$$

$$V_A = 4,5625T \uparrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A + 1 - 2 = 0$$

$$H_A = 1T \rightarrow$$

En la figura 5.82,a se muestran las reacciones en los apoyos.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

Para el tramo AB, proyectamos las componentes de reacción a lo largo del tramo.

$$N_{AB} = -4,5625 \cdot \cos 37^\circ - 1 \cdot \cos 53^\circ = -4,25T \quad (\text{COMPRESION})$$

$$N_{BC} = -2T \quad (\text{COMPRESION})$$

$$N_{CD} = -10,4375T \quad (\text{COMPRESION})$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.82,b

DIAGRAMA "V":

Para el tramo AB, proyectamos las fuerzas en forma perpendicular al eje del tramo.

$$V_A^{AB} = 4,5625 \cdot \sin 37^\circ - 1 \cdot \sin 53^\circ = 1,9375T$$

$$V_B^{AB} = 1,9375T$$

$$V_B^{BC} = 4,5625T$$

$$V_C^{BC} = 4,5625 - 3 \cdot (5) = -10,4375T$$

$$V_C^{CD} = 2T$$

$$V_{F-0}^{CD} = 2T$$

$$V_{F+0}^{CD} = 2 - 2 = 0$$

$$V_D^{CD} = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.82,c

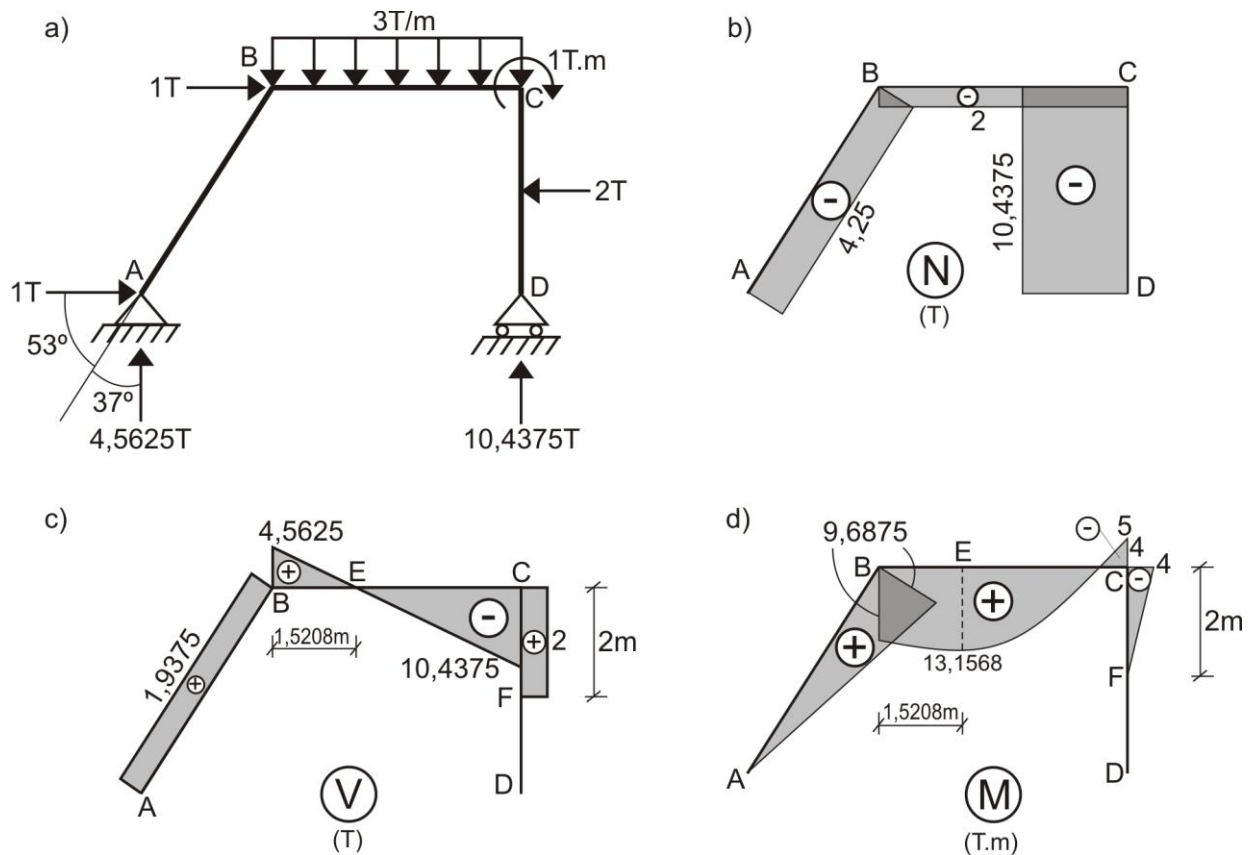


Fig. 5.82

DIAGRAMA "M":

$$M_A = 0$$

$$M_B = 1,9375 \cdot (5) = 9,6875T.m$$

$$M_E = 9,6875 + \frac{1}{2} \cdot (1,5208) \cdot (4,5625) = 13,1568T.m$$

$$M_{C-0} = 13,1568 - \frac{1}{2} \cdot (3,4792) \cdot (10,4375) = -5T.m$$

$$M_{C+0} = -5 + 1 = -4T.m$$

$$M_F = -4 + 2 \cdot (2) = 0$$

$$M_D = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.82,d

PROBLEMA 5.29 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para la estructura mostrada en la figura 5.83

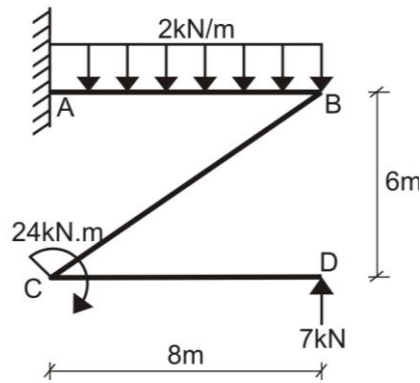


Fig. 5.83

Solución:

Como se trata de una estructura en voladizo, no es necesario calcular las reacciones en el empotramiento, pudiendo graficar desde el extremo libre D hasta el empotramiento, avanzando tramo por tramo.

DIAGRAMA "N":

$$N_{DC} = 0$$

$$N_{CB} = -7 \cos 53^\circ = -4,2 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESION})$$

$$N_{BA} = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.84,a

DIAGRAMA "V":

$$V_D^{DC} = -7 \text{ kN}$$

$$V_C^{DC} = -7 \text{ kN}$$

$$V_C^{CB} = 7 \sin 53^\circ = 5,6 \text{ kN}$$

$$V_B^{CB} = 5,6 \text{ kN}$$

$$V_B^{BA} = -7 \text{ kN}$$

$$V_A^{BA} = -7 + 2 \cdot (8) = 9 \text{ kN}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.84,b

DIAGRAMA "M":

$$M_D^{DC} = 0$$

$$M_C^{DC} = 7 \cdot (8) = 56 \text{ kN.m}$$

$$M_C^{CB} = 56 - 24 = 32 \text{ kN.m}$$

$$M_B^{CB} = 32 - 5,6.(10) = -24 \text{ kN.m}$$

$$M_B^{BA} = -24 \text{ kN.m}$$

$$M_E^{BA} = -24 + \frac{1}{2} \cdot (3,5) \cdot (7) = -11,75 \text{ kN.m}$$

$$M_A^{BA} = -11,75 - \frac{1}{2} \cdot (4,5) \cdot (9) = -32 \text{ kN.m}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.84,c

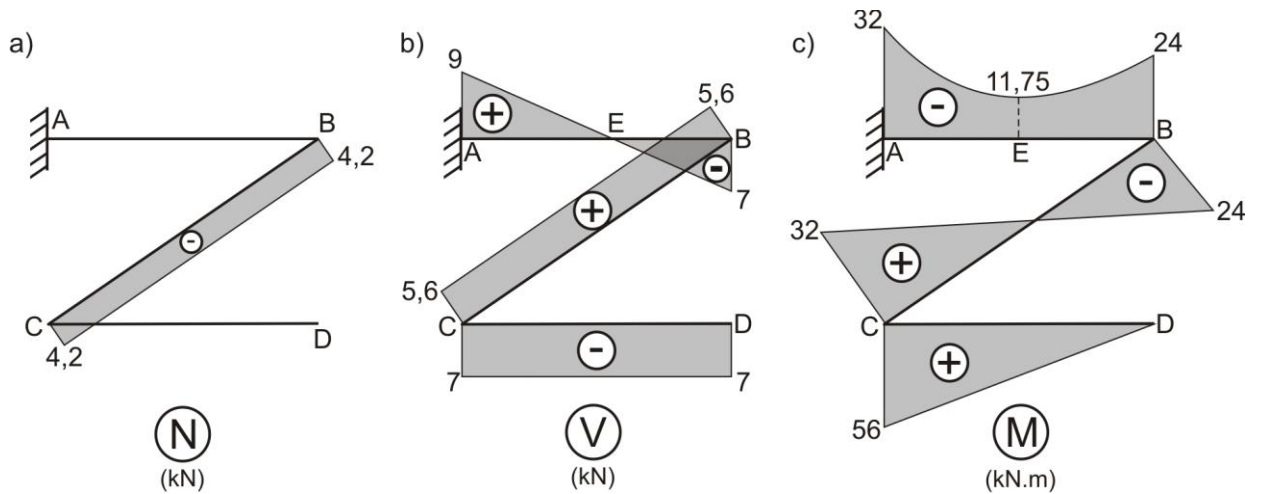


Fig. 5.84

PROBLEMA 5.30 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura 5.85

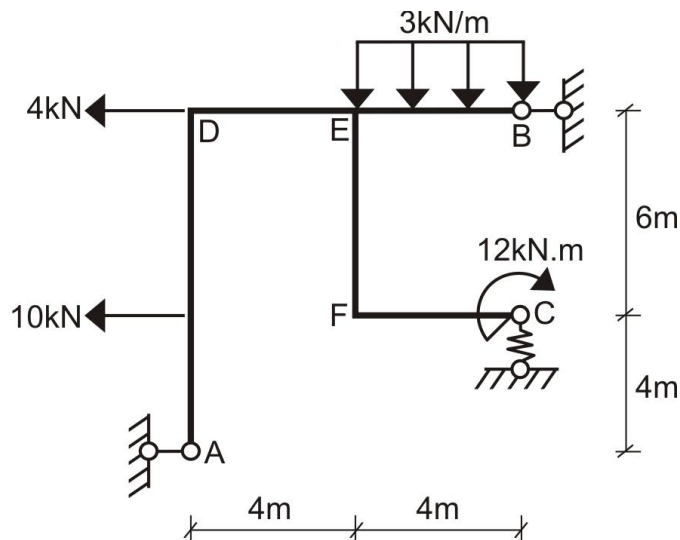


Fig. 5.85

Solución:

Como se sabe, para estructuras isostáticas, el cálculo de reacciones y los diagramas N, V, M no dependen del apoyo elástico. Por ello, el apoyo C puede asumirse como un apoyo movable.

Ahora, calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\begin{aligned}\sum F_Y = 0 & \Rightarrow V_C - 3 \cdot (4) = 0 & \therefore V_C = 12 \text{ kN} \uparrow \\ \sum M_B = 0 & \Rightarrow H_A \cdot (10) + 3 \cdot (4) \cdot (2) - 10 \cdot (6) - 12 = 0 & \therefore H_A = 4,8 \text{ kN} \rightarrow \\ \sum F_X = 0 & \Rightarrow 4,8 + H_B - 10 - 4 = 0 & \therefore H_B = 9,2 \text{ kN} \rightarrow\end{aligned}$$

En la figura 5.86,a se muestran las reacciones en los apoyos.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

$$N_{AD} = 0$$

$$N_{DB} = 9,2 \text{ kN} \quad (\text{TRACCION})$$

$$N_{FC} = 0$$

$$N_{EF} = -12 \text{ kN} \quad (\text{COMPRESION})$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.86,b

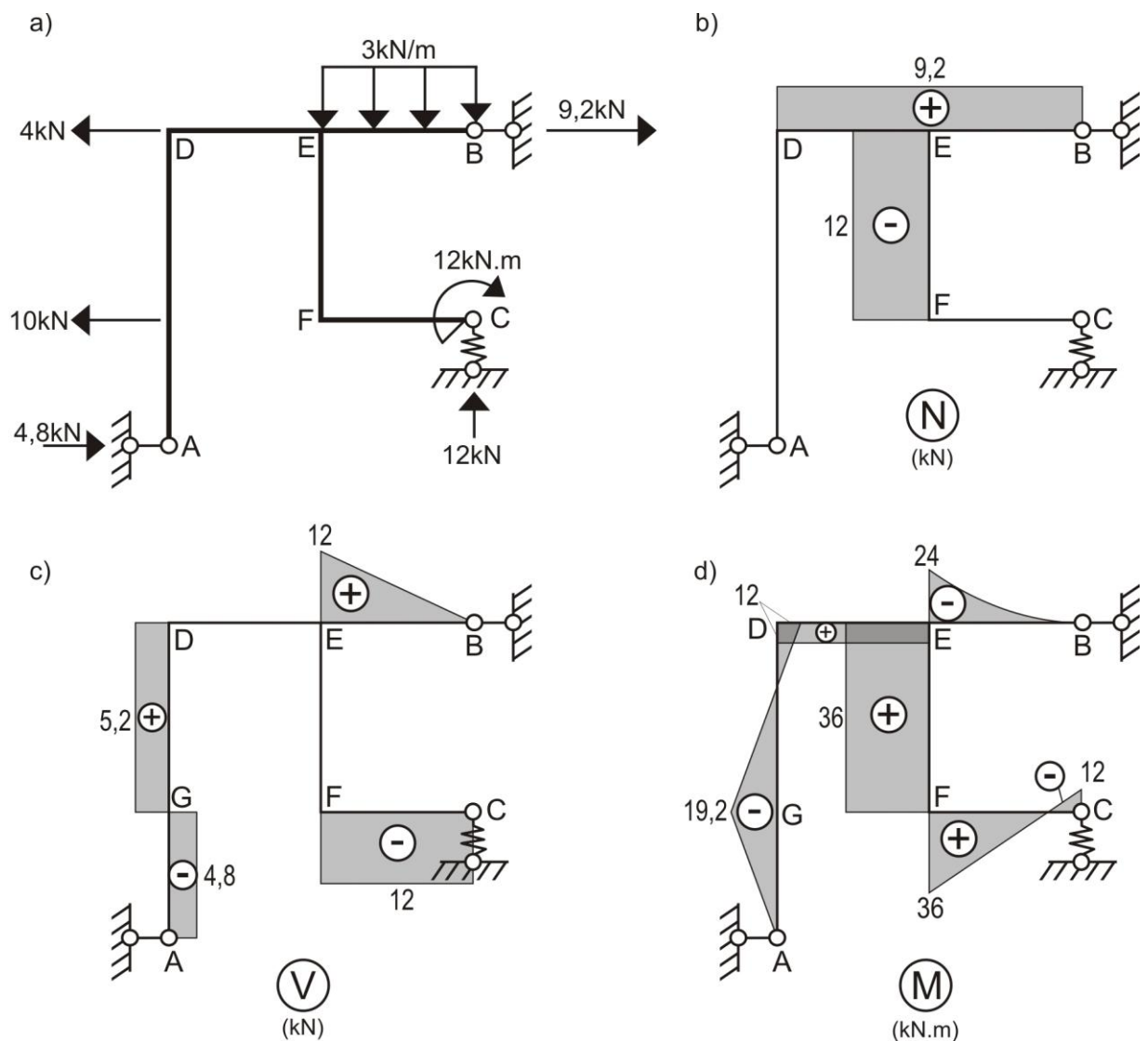


Fig. 5.86

DIAGRAMA “V”:

$$V_A^{AG} = -4,8\text{kN}$$

$$V_G^{AG} = -4,8\text{kN}$$

$$V_G^{GD} = -4,8 + 10 = 5,2\text{kN}$$

$$V_D^{GD} = 5,2\text{kN}$$

$$V_D^{DE} = 0$$

$$V_E^{DE} = 0$$

$$V_C^{CF} = -12\text{kN}$$

$$V_F^{CF} = -12\text{kN}$$

$$V_F^{FE} = 0$$

$$V_E^{FE} = 0$$

$$V_E^{EB} = 12\text{kN}$$

$$V_B^{EB} = 12 - 3 \cdot (4) = 0$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.86,c

DIAGRAMA “M”:

$$M_A^{AD} = 0$$

$$M_G^{AD} = -4,8 \cdot (4) = -19,2\text{kN.m}$$

$$M_D^{AD} = -19,2 + 5,2 \cdot (6) = 12\text{kN.m}$$

$$M_{DE} = 12\text{kN.m}$$

$$M_C^{CF} = -12\text{kN.m}$$

$$M_F^{CF} = -12 + 12 \cdot (4) = 36\text{kN.m}$$

$$M_{FE} = 36\text{kN.m}$$

$$M_B^{BE} = 0$$

$$M_E^{BE} = -\frac{1}{2} \cdot (4) \cdot (12) = -24\text{kN.m}$$

Como comprobación final del equilibrio del nudo E, analizamos las fuerzas y momentos actuantes en dicho nudo, los cuales se muestran en la figura 5.87

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad 9,2 - 9,2 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 - 12 = 0$$

$$\sum M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad -12 - 24 + 36 = 0$$

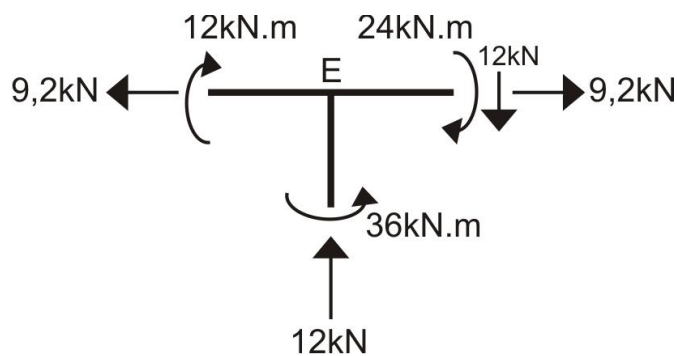


Fig. 5.87

De esta manera, con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.86,d

PROBLEMA 5.31 Grafique los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el pórtico mostrado en la figura 5.88

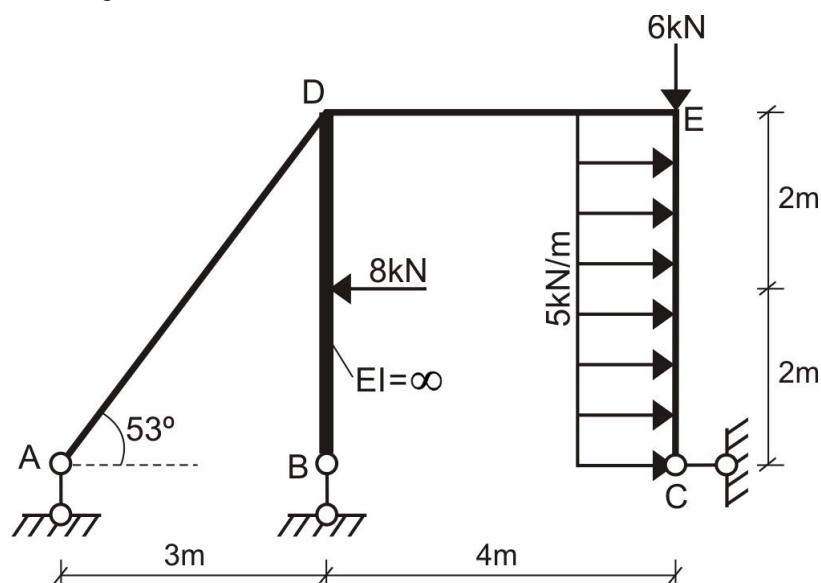


Fig. 5.88

Solución:

Como se sabe, para cuerpos absolutamente rígidos ($EI = \infty$) no existen diagramas N, V, M. Tal tipo de cuerpos no se deforman, por ello, no se muestran los diagramas N, V, M

En la realidad, tal tipo de cuerpos no existen, pero cuando las relaciones de rigidez entre elementos estructurales es alta, se considera al de mayor rigidez como absolutamente rígido, lo cual es característico en sistemas estructurales hiperestáticos (estáticamente indeterminados), asumiendo, para ello, una rigidez infinita $EI = \infty$ o $EI \rightarrow \infty$

Para el presente problema, la rigidez del elemento BD es finita, pero bastante grande, en comparación con los otros elementos, es por ello, que a dicho elemento se le ha considerado como elemento rígido. Para graficar los diagramas N, V, M para estructuras isostáticas, se realiza como cualquier otro tipo de estructura simple, pero para fines académicos consideraremos con línea punteada los diagramas en dicho elemento rígido.

Ahora, calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\begin{aligned}
\sum M_A = 0 & \Rightarrow V_B \cdot (3) + 8 \cdot (2) - 6 \cdot (7) - 5 \cdot (4) \cdot (2) = 0 & \therefore V_B = 22 \text{ kN} \uparrow \\
\sum F_Y = 0 & \Rightarrow -V_A + 22 - 6 = 0 & \therefore V_A = 16 \text{ kN} \downarrow \\
\sum F_X = 0 & \Rightarrow -8 + 5 \cdot (4) - H_C = 0 & \therefore H_C = 12 \text{ kN} \leftarrow
\end{aligned}$$

En la figura 5.89,a se muestran las reacciones en los apoyos.

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

DIAGRAMA "N":

$$\begin{aligned}
N_{AD} &= 16 \cos 37^\circ = 12,8 \text{ kN} & (\text{TRACCION}) \\
N_{BD} &= -22 \text{ kN} & (\text{COMPRESION}) \\
N_{DE} &= 8 \text{ kN} & (\text{TRACCION}) \\
N_{CE} &= 0
\end{aligned}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza axial, tal como se muestra en la figura 5.89,b

DIAGRAMA "V":

$$\begin{aligned}
V_{AD} &= -16 \sin 37^\circ = -9,6 \text{ kN} \\
V_{DE} &= -16 + 22 = 6 \text{ kN} \\
V_{BF} &= 0 \\
V_{FD} &= 8 \text{ kN} \\
V_C^{CE} &= 12 \text{ kN} \\
V_E^{CE} &= 12 - 5 \cdot (4) = -8 \text{ kN}
\end{aligned}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de fuerza cortante, tal como se muestra en la figura 5.89,c

DIAGRAMA "M":

$$\begin{aligned}
M_A &= 0 \\
M_D^{AD} &= -9,6 \cdot (5) = -48 \text{ kN.m} \\
M_B &= 0 \\
M_F &= 0 \\
M_D^{FD} &= -8 \cdot (2) = -16 \text{ kN.m} \\
M_C &= 0 \\
M_G^{CE} &= -\frac{1}{2} \cdot (12) \cdot (2,4) = -14,4 \text{ kN.m} \\
M_E^{CE} &= -14,4 + \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (1,6) = -8 \text{ kN.m} \\
M_E^{ED} &= -8 \text{ kN.m}
\end{aligned}$$

$$M_D^{ED} = -8 - 6 \cdot (4) = -32 \text{ kN.m}$$

Con los valores obtenidos, graficamos el diagrama de momento flector, tal como se muestra en la figura 5.89,d

Como se puede apreciar, se puede graficar de izquierda a derecha, como de derecha a izquierda, quedando a criterio del lector la comprobación del equilibrio en el nudo D, pudiendo efectuarlo en forma análoga al problema 5.30

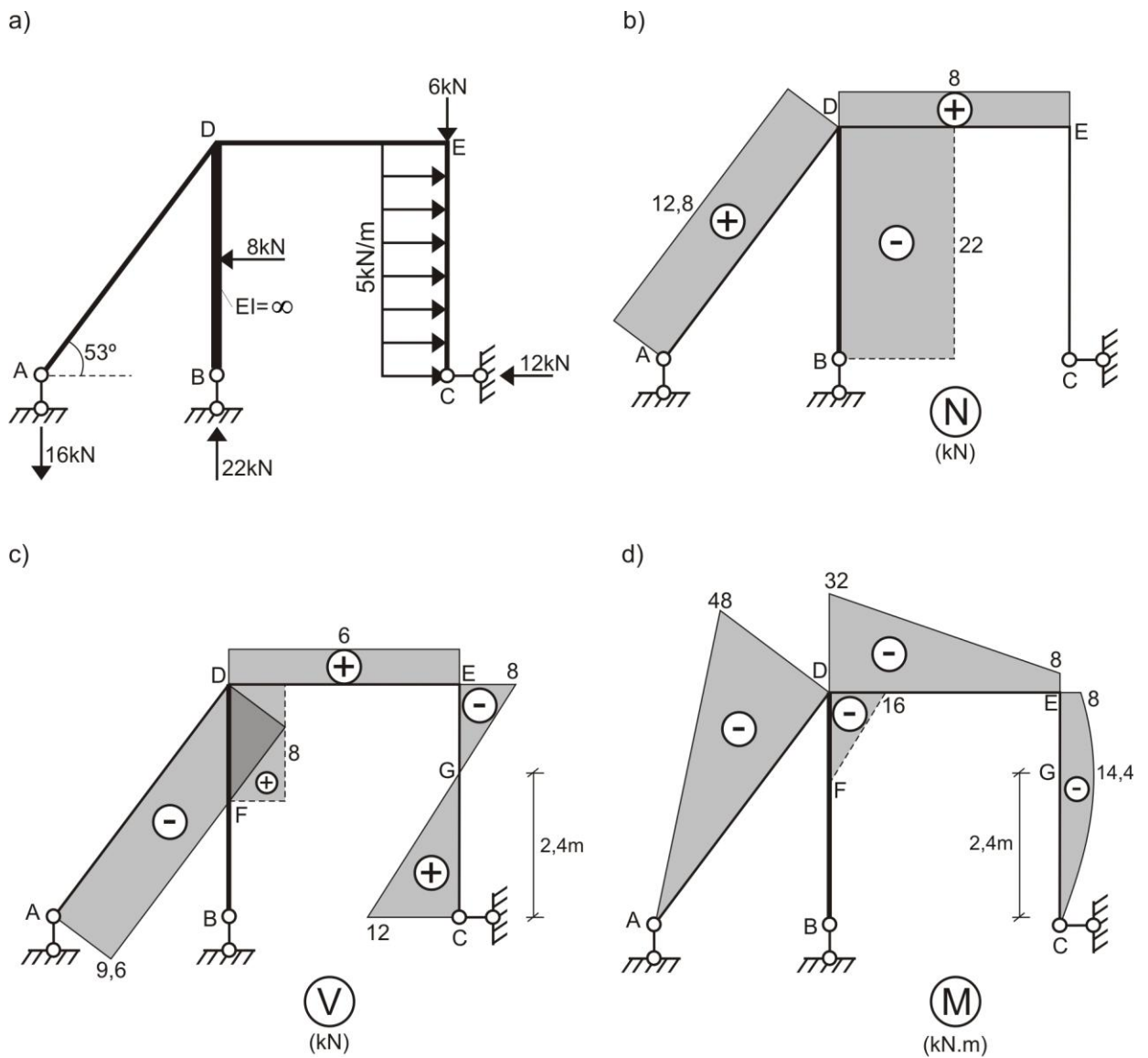


Fig. 5.89

5.4 DIAGRAMAS EN ARCOS

PROBLEMA 5.32 Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el arco mostrado en la figura 5.90, considerando que B es punto medio del arco ABC

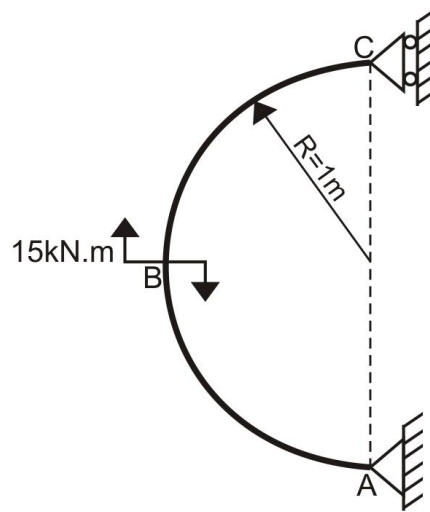


Fig. 5.90

Solución:

Calculamos las reacciones en los apoyos:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad V_C \cdot (2) - 15 = 0 \quad \therefore \quad V_C = 7,5 \text{ kN} \leftarrow$$

$$\sum F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A - 7,5 = 0 \quad \therefore \quad H_A = 7,5 \text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 0$$

En la figura 5.91 se muestran las reacciones en los apoyos.

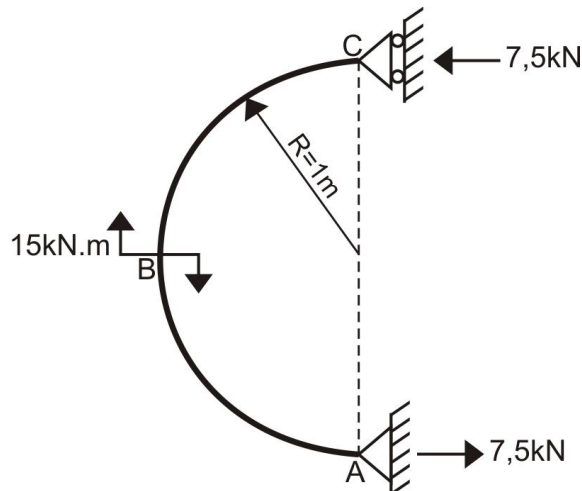


Fig. 5.91

Ahora, graficamos los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector.

TRAMO CB: ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$)

Proyectamos la reacción en C de 7,5kN hacia el punto D y lo descomponemos en una tangente a la curva y una perpendicular a la tangente (figura 5.92,a), siendo la fuerza tangencial la normal y la radial la cortante para cualquier punto del arco en dicho tramo.

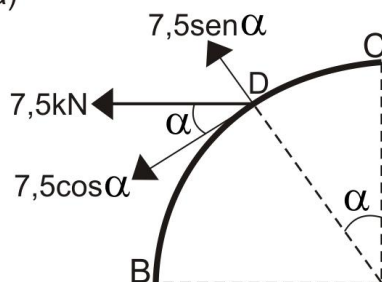
$$N_{CB} = -7,5 \cos \alpha$$

$$V_{CB} = -7,5 \sin \alpha$$

Para calcular el momento, simplemente efectuamos un momento en el punto arbitrario D del segmento de arco BC (figura 5.92,b), obteniéndose:

$$M_{CB} = 7,5 \cdot (1 - \cos \alpha)$$

a)



b)

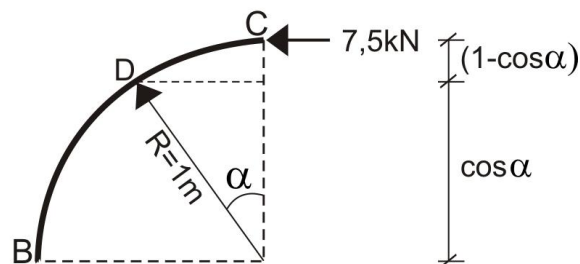


Fig. 5.92

En la tabla 5.3 se muestran los resultados para la normal, cortante y momento en el tramo analizado.

Tabla 5.3

ANGULO	N (kN)	V (kN)	M (kN.m)
$\alpha = 0^\circ$	-7,5	0	0
$\alpha = 45^\circ$	-5,3	-5,3	2,2
$\alpha = 90^\circ$	0	-7,5	7,5

TRAMO AB: ($0 \leq \beta \leq 90^\circ$)

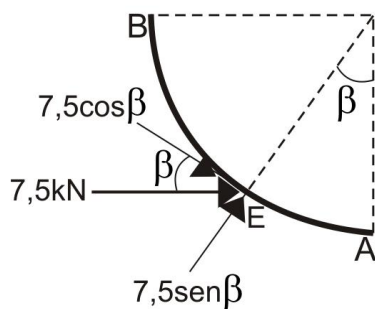
Efectuamos en forma análoga al tramo anterior, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$N_{AB} = 7,5 \cos \beta$$

$$V_{AB} = -7,5 \sin \beta$$

$$M_{AB} = -7,5 \cdot (1 - \cos \beta)$$

a)



b)

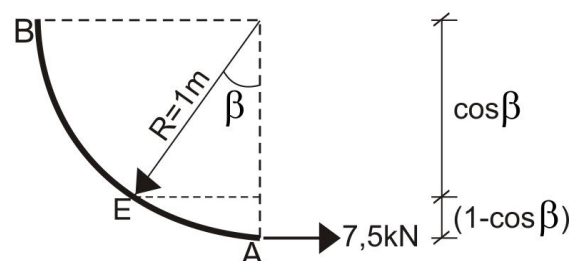


Fig. 5.93

En la tabla 5.4 se muestran los resultados para la normal, cortante y momento en el tramo analizado.

Tabla 5.4

ANGULO	N (kN)	V (kN)	M (kN.m)
$\beta = 0^\circ$	7,5	0	0
$\beta = 45^\circ$	5,3	-5,3	-2,2
$\beta = 90^\circ$	0	-7,5	-7,5

Con los resultados obtenidos, graficamos los diagramas finales de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, tal como se muestran en la figura 5.94

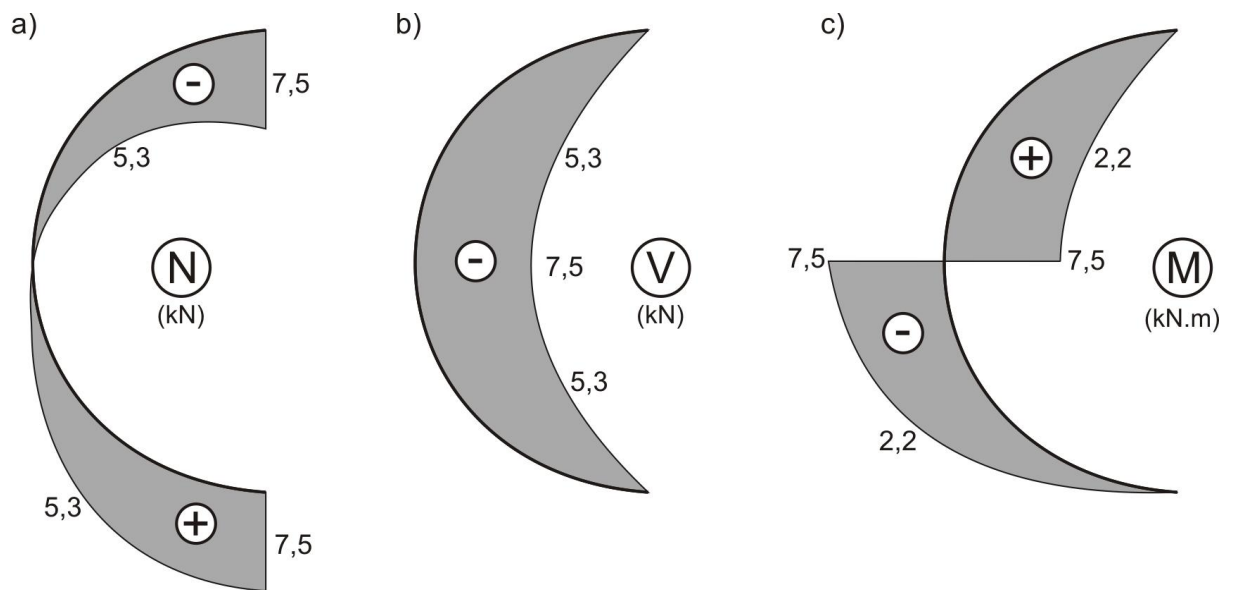


Fig. 5.94

PROBLEMA 5.33 Graficar los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector para el arco mostrado en la figura 5.95

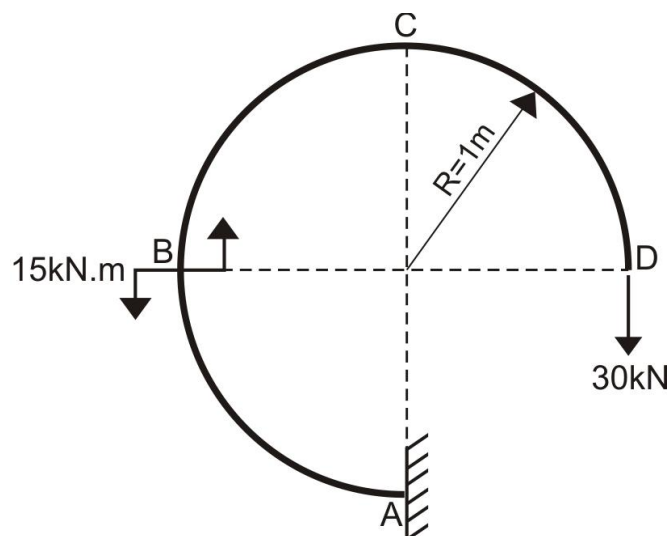


Fig. 5.95

Solución:

Como se trata de un arco en voladizo, no es necesario calcular las reacciones, sino iniciamos del extremo libre y avanzamos hacia el empotramiento.

TRAMO DCB: ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$)

Efectuamos en forma análoga al problema anterior, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$N_{DCB} = 30 \cos \alpha$$

$$V_{DCB} = 30 \operatorname{sen} \alpha$$

$$M_{DCB} = -30 \cdot (1 - \cos \alpha)$$

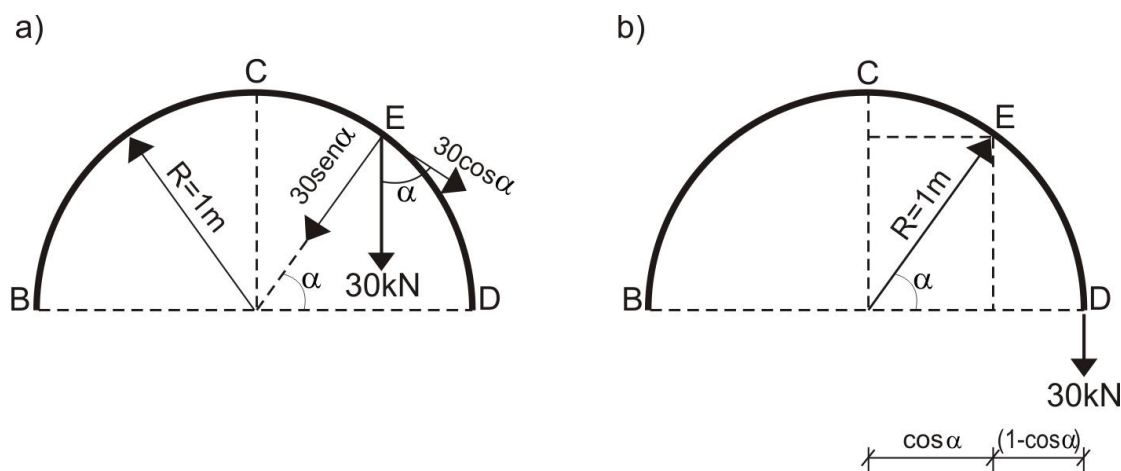


Fig. 5.96

En la tabla 5.5 se muestran los resultados para la normal, cortante y momento en el tramo analizado.

Tabla 5.5

ANGULO	N (kN)	V (kN)	M (kN.m)
$\alpha = 0^\circ$	30	0	0
$\alpha = 45^\circ$	21,21	21,21	-8,79
$\alpha = 90^\circ$	0	30	-30
$\alpha = 135^\circ$	-21,21	21,21	-51,21
$\alpha = 180^\circ$	-30	0	-60

TRAMO BA: ($0 \leq \beta \leq 90^\circ$)

Efectuamos en forma análoga al tramo anterior, obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$N_{BA} = -30 \cos \beta$$

$$V_{BA} = -30 \operatorname{sen} \beta$$

$$M_{BA} = -30 \cdot (1 + \cos \beta) + 15$$

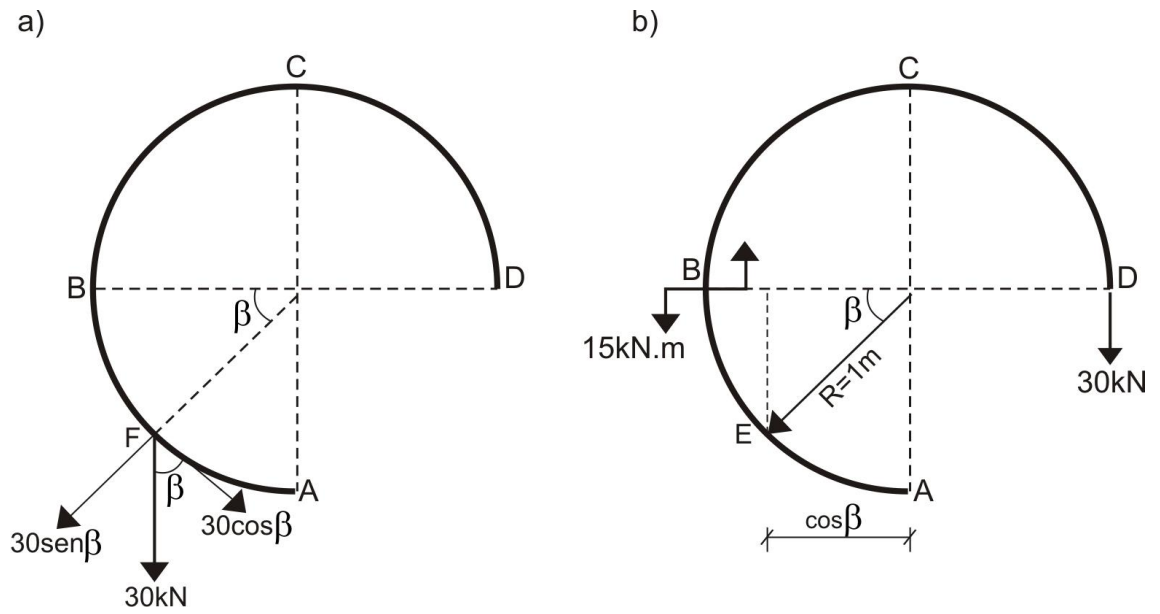


Fig. 5.97

En la tabla 5.6 se muestran los resultados para la normal, cortante y momento en el tramo analizado.

Tabla 5.6

ANGULO	N (kN)	V (kN)	M (kN.m)
$\beta = 0^\circ$	-30	0	-45
$\beta = 45^\circ$	-21,21	-21,21	-36,21
$\beta = 90^\circ$	0	-30	-15

Con los resultados obtenidos, graficamos los diagramas finales de fuerza axial, fuerza cortante y momento flector, tal como se muestran en la figura 5.98

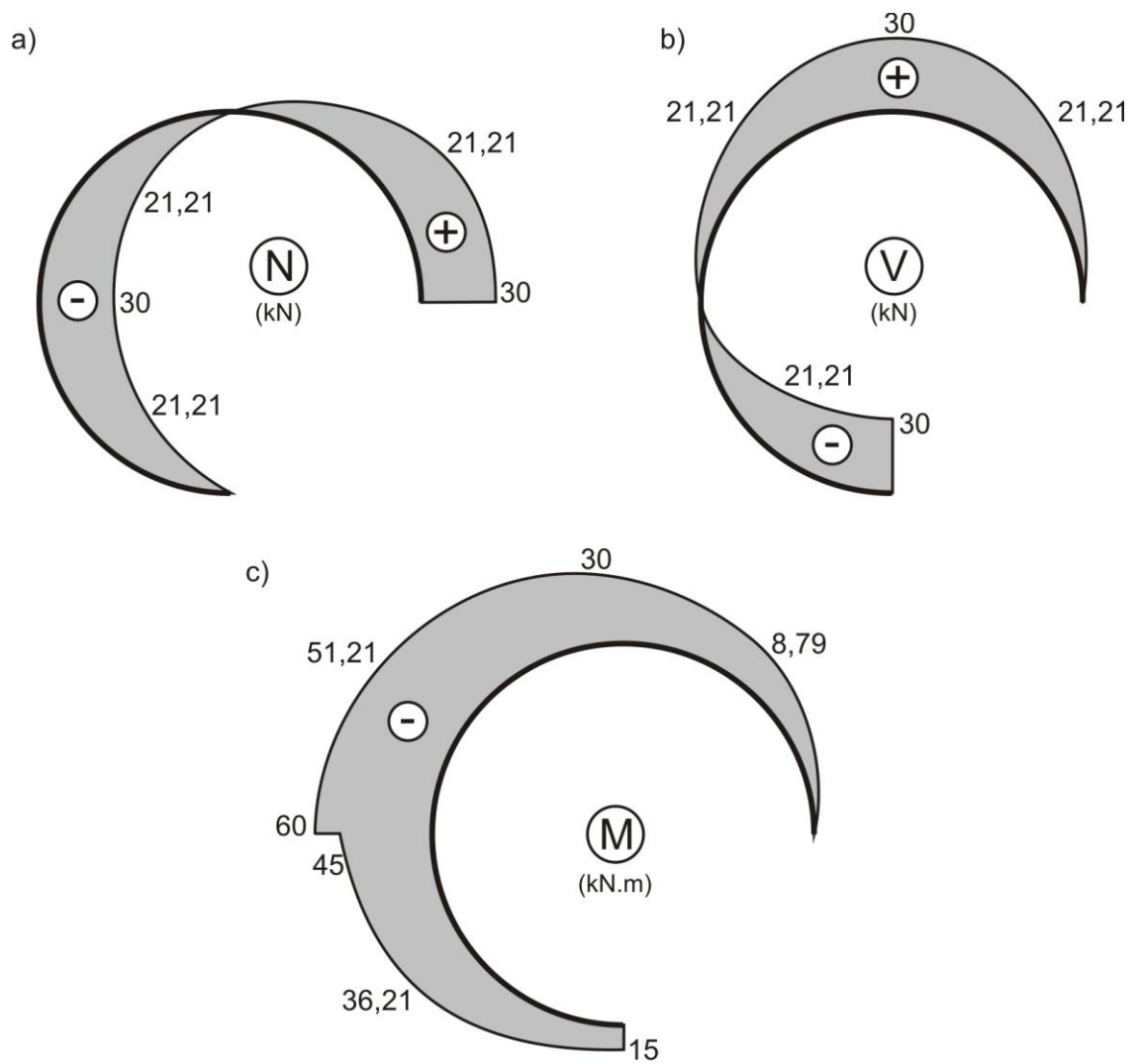


Fig. 5.98

5.5 DIAGRAMAS EN ESTRUCTURAS ESPACIALES

PROBLEMA 5.34 Graficar los diagramas de fuerzas interiores para la estructura mostrada en la figura 5.99

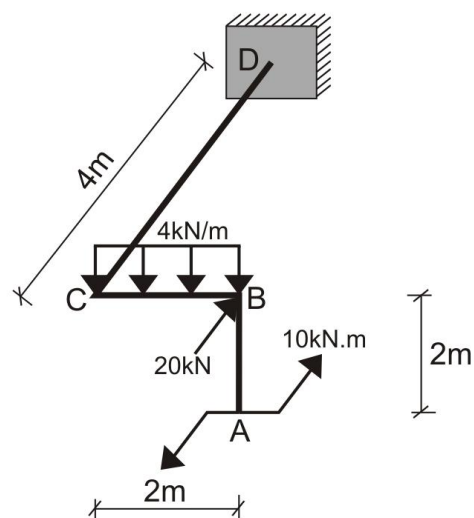


Fig. 5.99

Solución:

Como se sabe, en el empotramiento D existen seis reacciones, tres fuerzas y tres momentos, los cuales no es necesario calcularlos si iniciamos del extremo libre y avanzamos hacia el empotramiento.

En la figura 5.100 se muestran las orientaciones positivas de los ejes coordenados para cada tramo de la estructura.

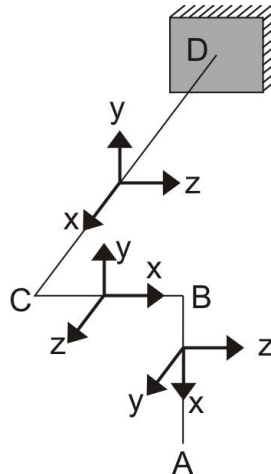


Fig. 5.100

TRAMO AB:

Para analizar cada tramo, proyectamos las fuerzas y momentos en los planos donde actúan, tal como se hizo cuando en el capítulo 1 se calculó momentos respecto a los ejes coordenados.

$$N = 0$$

$$V_Y = 0$$

$$V_Z = 0$$

$$M_X = M_{\text{torsor}} = 10 \text{ kN.m}$$

$$M_Y = 0$$

$$M_Z = 0$$

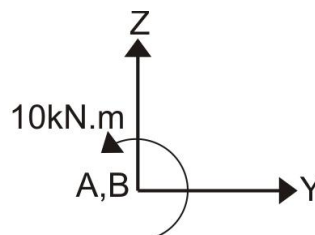


Fig. 5.101

TRAMO BC:

Efectuamos en forma análoga al caso anterior, proyectando las fuerzas y momentos en los planos actuantes del tramo analizado.

$$N = 0$$

$$V_Y = 4X_2$$

$$\Rightarrow V_{Y(X_2=0)} = 0$$

$$V_{Y(X_2=2)} = 8 \text{ kN}$$

$$V_Z = -20\text{kN}$$

$$M_X = M_{\text{torsor}} = 0$$

$$M_Y = 20X_1 + 10 \quad \Rightarrow \quad M_{Y(X_1=0)} = 10\text{kN.m}$$

$$M_{Y(X_1=2)} = 50\text{kN.m}$$

$$M_Z = -4X_2 \left(\frac{X_2}{2} \right) = -2X_2^2 \quad \Rightarrow \quad M_{Z(X_2=0)} = 0$$

$$M_{Z(X_2=1)} = -2\text{kN.m}$$

$$M_{Z(X_2=2)} = -8\text{kN.m}$$

Para este último caso, se analizan tres puntos, debido a que se trata de una parábola cuadrática.

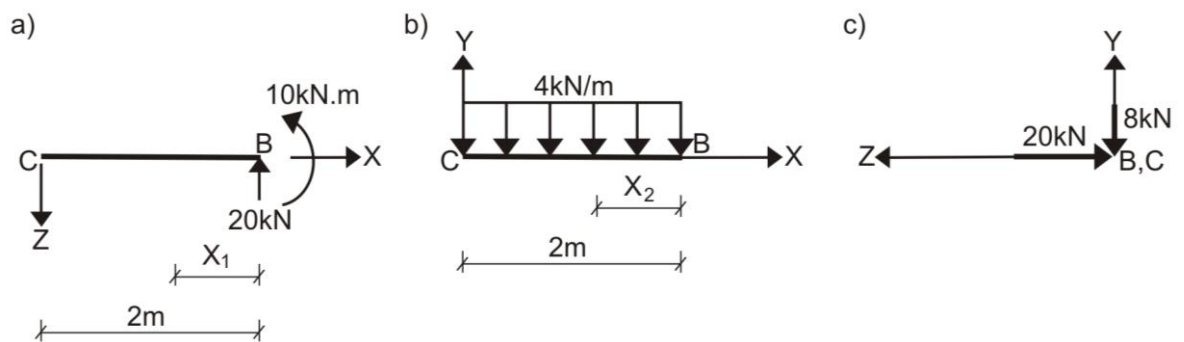


Fig. 5.102

TRAMO CD:

Continuamos con la misma forma de análisis, es decir, proyectando fuerzas y momentos en los planos actuantes del tramo analizado.

$$N = -20\text{kN} \quad (\text{COMPRESION})$$

$$V_Y = -8\text{kN}$$

$$V_Z = 0$$

$$M_X = M_{\text{torsor}} = -8\text{kN.m}$$

$$M_Y = 10 + 40 = 50\text{kN.m}$$

$$M_Z = -8X_3 \quad \Rightarrow \quad M_{Z(X_3=0)} = 0$$

$$M_{Z(X_3=4)} = -32\text{kN.m}$$

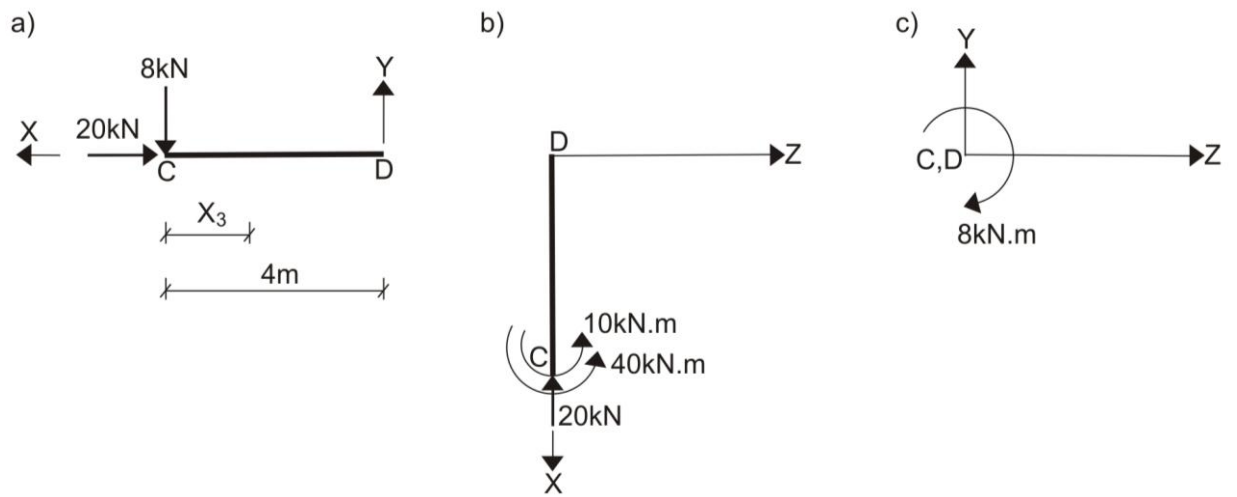


Fig. 5.103

De esta manera, graficamos los diagramas finales de fuerzas internas, que se muestran en la figura 5.104

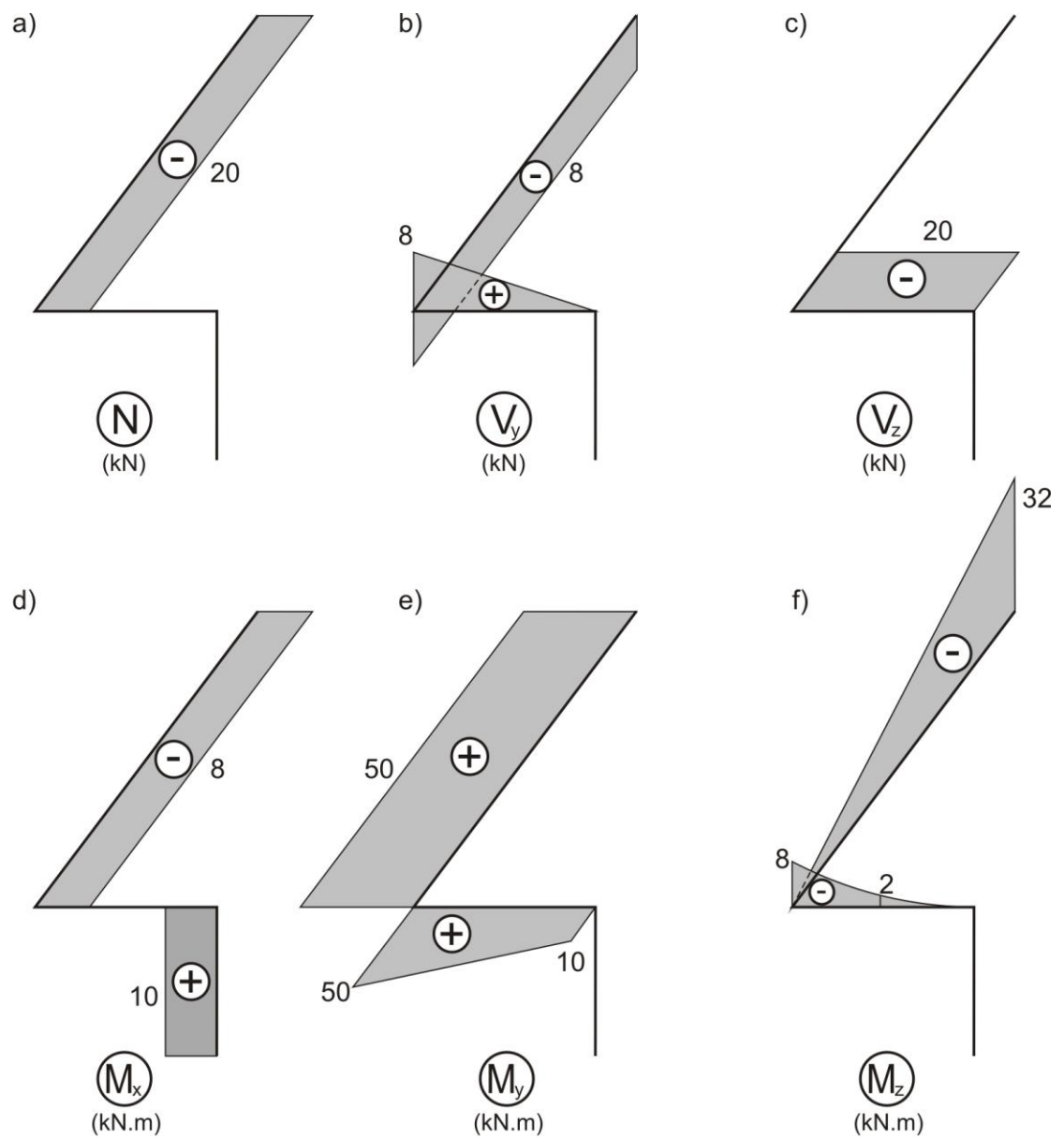


Fig. 5.104

BIBLIOGRAFIA

1. **Gere James – Timoshenko Stephen.** Mecánica de materiales. Grupo Editorial Iberoamericana. México, 1986. – 825p.
2. **Miroliubov I.N. y otros.** Problemas de resistencia de materiales. Editorial Escuela Superior. Moscú, 2005. – 396p.
3. **Nelson James – McCormac Jack.** Análisis de estructuras. Editorial Alfaomega. México, 2006. – 582p.
4. **Pytel Andrew – Jaan Kiusalaas.** Ingeniería Mecánica: Estática. Internacional Thomson Editores. México, 1999. – 526p.
5. **Uribe Escamilla Jairo.** Análisis de estructuras. Editorial Uniandes. Colombia, 2004. – 840p.
6. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 142p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. Lima, 2008. – 335p.
10. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 159p.
11. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales. Lima, 2009. – 336p.
12. **Volmir A.** Problemas de Resistencia de materiales. Editorial MIR. Moscú, 1986. – 478p.

INDICE

PROLOGO	02
 CAPITULO 1. FUERZAS Y MOMENTOS	
1.1. Operaciones con vectores	04
1.2. Fuerzas concurrentes	11
1.3. Momento de una fuerza respecto a un punto. Teorema de Varignon	17
1.4. Momento de una fuerza respecto a los ejes cartesianos	27
1.5. Cupla o par de fuerzas	40
1.6. Traslación de fuerzas. Par de transporte	42
1.7. Reducción de fuerzas paralelas	45
1.8. Fuerzas distribuidas	48
 CAPITULO 2. EQUILIBRIO	
2.1. Diagrama de cuerpo libre	57
2.2. Cálculo de reacciones de estructuras simples	59
2.3. Cálculo de reacciones de estructuras con rótulas intermedias	70
2.4. Cálculo de estructuras compuestas	79
2.5. Cálculo de reacciones de estructuras espaciales	91
 CAPITULO 3. CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA	
3.1. Centroide de alambres	96
3.2. Centroide de áreas	98
3.3. Momentos de inercia de áreas planas	102
3.4. Momentos de inercia de perfiles metálicos	106
 CAPITULO 4. ARMADURAS	
4.1. Método de los nudos	111
4.2. Método de las secciones	124
 CAPITULO 5. DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS	
5.1. Fuerzas internas	144
5.2. Diagramas en vigas	155
5.3. Diagramas en pórticos	189
5.4. Diagramas en arcos	210
5.5. Diagramas en estructuras espaciales	215
 BIBLIOGRAFIA	 219