

الدوال الأصلية

الدوال الأصلية والتكاملات وحساب المساحات

- 1- تعريف الدوال الأصلية
- 2- الدوال الأصلية للدوال من الشكل $u' u''$
- 3- الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'}{u^n}$
- 4- الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'}{u}$
- 5- الدوال الأصلية للدوال من الشكل $u' e^u$
- 6- الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
- 7- المعادلات التفاضلية والدوال الأصلية
- 8- التكاملات والدوال الأصلية وحساب المساحات
- 9- التكامل بالتجزئة وتطبيقاته
- 10- التكامل بالتجزئة والدوال الأصلية

تعريف الدوال الأصلية

1- الدالة الأصلية لدالة على مجال:

تعريف

f دالة معرفة على المجال I

نسبى دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة

للإشتقاق على I مشتقتها F' هي f

من أجل كل x من I ، $F'(x) = f(x)$

مثال:

* الدالة F معرفة على \mathbb{R} بـ $F(x) = x^2 - 3x + 1$

هي دالة أصلية على \mathbb{R} للدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 2x - 3$

لأن من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $F'(x) = f(x) = 2x - 3$

* الدالة G المعرفة على \mathbb{R} بـ $G(x) = x^2 - 3x - \sqrt{x}$ هي كذلك

دالة أصلية على \mathbb{R} للدالة f

لأن من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا $G'(x) = 2x - 3 = f(x)$

تمرين:

نعتبر الدالتين f و F المرفقتين على $]-1, +\infty[$ كما يلي:

$$F(x) = \frac{x-1}{x+1} - 2x \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1, +\infty[$

حل التمرين:

طريقة:

يثبت أن F دالة أصلية لـ f على مجال I يكفي

أن تثبت أن F قابلة للاشتقاق على I وإذا من أجل كل x من I

$$F'(x) = f(x)$$

الحل:

بما أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$

$$F'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} - 2 = \frac{2 - 2(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(2x^2 + 4x)}{(x+1)^2} = f(x)$$

تمرين:

$$F(x) = 2\sqrt{x^2+1} \quad f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (1)$$

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

$$F(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \quad f(x) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \quad (2)$$

$$F'(x) = 2 \cdot -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2} \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} \quad (3)$$

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3} = f(x)$$

2- مجموعة الدوال الأصلية لدالة:

خواص (دون برهان):

• إذا كانت f دالة مستمرة على المجال I فإن f تقبل دوالاً أصلية

على I .

* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي الدوال $F(x) + K$ حيث K عدد حقيقي ثابت

نتيجة:

دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط

مثال:

لنكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$

كل الدوال الأصلية للدالة f على \mathbb{R} هي الدوال F المعرفة على \mathbb{R}

بـ $F(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + K$ حيث K عدد حقيقي ثابت

الدوال الأصلية للدوال من الشكل $u' u^n$

$$u'(x) \times [u(x)]^r$$

$$r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$$

$$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + K$$

تقريباً:

تُعرف على الشكل $u' u^n$ للدالة f ($n \in \mathbb{N}^*$) وحين مجموعة "دوالها الأصلية على المجال I "

$$I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x-1)^4 \quad (1)$$

$$u' u^n$$

$$F(x) = \frac{(x-1)^5}{5} + K$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} \cdot (x+2)^3$$

$$\frac{1}{5} u' u^n$$

$$F(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{(x+2)^4}{4} + K$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 3(3x+4)^5 \quad (3)$$

$$u' u^n$$

$$F(x) = \frac{(3x+4)^6}{6} + K$$

$$f(x) = e^x (e^x + 1)^2 \quad (4)$$

$$u' u^n$$

$$F(x) = \frac{(e^x + 1)^3}{3} + K$$

$$I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3}{3} x^2 (x^3 + 1)^4 \quad (5)$$

$$u(x) = x^3 + 1$$

$$u'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{3} [3x^2 (x^3 + 1)^4]$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 + 1)^5}{5} + K$$

$$f(x) = 3 \cos x \sin^2 x \quad (6)$$

$$F(x) = 3 \cdot \frac{\sin^3 x}{3} + K$$

$$F(x) = \sin^3 x + K$$

$$f(x) = \tan^3 x \left[\frac{1}{\cos^2 x} \right] \quad (7)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} \tan^3 x \quad u' u'' \quad \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$F(x) = \frac{\tan^4 x}{4} + K$$

$$f(x) = -20x \left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^3 \quad (8)$$

$$= -20(-x) \left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^3$$

$$= 20x \cdot u$$

$$F(x) = 20 \cdot \frac{\left(8 - \frac{x^2}{2}\right)^4}{4} + K$$

$$f(x) = e^{-2x} (e^{-2x} + 2)^3 \quad (9)$$

$$\quad \quad \quad \left(\downarrow \right. \\ \quad \quad \quad -2e^{-2x})$$

$$f'(x) = \frac{-2}{-2} e^{-2x} (e^{-2x} + 2)^3$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot -2e^{-2x} (e^{-2x} + 2)^3$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot u' \cdot u$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-2x} + 2}{4} + K$$

الدوال الأصلية للدوال عند الشكل $\frac{u'}{u^n}$

$$\frac{u'}{u^n} \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$$

$$= \frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$$

من أجل كل x هذا $u(x) \neq 0$

تمرين:

تعرّف على الشكل $\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) و عين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على مجال I .

$$I =]2, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{5}{(x-2)^7} \quad (1)$$

$$f(x) = 5 \cdot \frac{1}{(x-2)^7}$$

$$F(x) = 5 \cdot \frac{1}{(7-1)(x-2)^{7-1}}$$

$$F(x) = -\frac{5}{6(x-2)^6} + K$$

$$I =]-1, +\infty[\quad f(x) = \frac{-2}{(x+1)^3} \quad (2)$$

$$F(x) = \frac{+2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + K$$

$$I =]\frac{1}{2}, +\infty[\quad f(x) = \frac{2}{(2x+1)^3} \quad (3)$$

المطلوب: إثبات مبرك الحبارو خاصة فنضيف المتكامل

$$F(x) = \frac{-1}{2(2x-1)^2} + K$$

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{1/x}{(\ln x)^2} = \frac{u'}{u^2}$$

$$F(x) = \frac{-1}{\ln x} + K$$

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \frac{u'}{u^n} \quad (5)$$

$$F(x) = \frac{-1}{e^x + 1} + K$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{2(x^2-2x+1)^2} \quad (6)$$

$$\frac{2x-1}{2(x^2-2x+1)^2} = \frac{u'}{2u^n}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2-2x+1} \right)$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2-2x+1)} + K$$

$$f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4} \quad (7)$$

$$F(x) = \frac{-9}{3(x^3+1)^3} + K$$

$$= \frac{2 \times 3x^2}{(x^3+1)^4} \frac{2u'}{u^n}$$

$$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$F(x) = \frac{1}{2 \cos^2 x} + K$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad (8)$$

$$= (-1)(-3) \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \frac{u'}{u^3}$$

$$f(x) = \frac{-e^x - 2}{(e^x + 2x)^2} \quad (9)$$

$$F(x) = \frac{1}{e^x + 2x} + K$$

$$I = [1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x + 2)^2} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x + 2)^2}$$

$$F(x) = -\frac{1}{\ln x + 2} + K$$

الدوال الأصلية من الشكل $\frac{u'}{u}$

خاصية:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق وموجبة تماماً على مجال I فإن الدالة $f: x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا مد

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad ; \quad \text{احل كل } x \in I$$

الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على I

تمرين:

تعرف على الشكل $\frac{u'}{u}$ وعين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

$$I =]1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{1}{x-1} \frac{u'}{u} \quad (1)$$

$$F(x) = \ln(x-1) + K$$

$$f(x) = \frac{2x}{2x^2+1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2x}{x^2+1} \frac{u'}{u}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + K$$

$$f(x) = \frac{6x+3}{x^2+x+1} \quad (3)$$

$$\frac{3(2x+1)}{x^2+x+1}$$

$$F(x) = 3 \ln(x^2+x+1) + K$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \frac{u'}{u} \quad (4)$$

$$F(x) = \ln(\sin x) + K$$

تطبيق 1:

عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة f على المجال I :

$$I =]-2, +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x+2} \quad (1)$$

$$F(x) = \ln(x+2) + K$$

$$f(x) = \frac{-2e^x}{e^x + 1} \quad (2)$$

$$= -2 \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$F(x) = -2 \ln(e^x + 1)$$

التطبيق 2:

نعتبر الدالة f المعرفة على $] -2, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2}$

(1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}, \quad] -2, +\infty[$$

(2) استنتج دالة أصلية للدالة f على $] -2, +\infty[$

حل التطبيق 2:

(1) تعيين العددين الحقيقيين

$$f(x) = \frac{a(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{ax + 2a + b}{(x+2)^2} = \frac{2x + 3}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 3 \Rightarrow 4 + b = 3 \Rightarrow b = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

② استنتاج الدالة الأصلية؛

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{u} - \frac{1}{(x+2)^2} \cdot \frac{1}{u}$$

$$F(x) = 2 \ln(x+2) + \frac{1}{(x+2)} + C$$

تطبيق 3:

لتكن الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ كما يلي

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$$

1- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x

$$f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1} \quad \text{من } [0, +\infty[$$

2- استنتج دالة أصلية للدالة f على $[0, +\infty[$.

حل التطبيق:

تعيين a و b

$$f(x) = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

٢- استنتاج الدالة الأصلية :

$$F(x) = e^x + x + \ln(e^x + 1) + K$$

الدوال الأصلية للدوال من الشكل $e^{u(x)}$

حاصبة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن :

• الدالة $f: x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل

$$f'(x) = u'(x) e^{u(x)} \quad \text{كل } x \text{ من } I$$

• الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto u'(x) \cdot e^{u(x)}$ على I

تمارين:

تعرف على الشكل $e^{u(x)}$ و u' و عيّن مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = e^{4x+1} \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x e^{-x^2} \quad (2)$$

$$I =]0, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{3}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \sin x \cdot e^{\cos x} \quad (4)$$

$$I =]-1, +\infty[\quad , \quad f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} \quad (5)$$

حل التمارين:

$$f(x) = e^{4x+1} = \frac{4}{4} e^{4x+1} = \frac{1}{4} \cdot 4 e^{4x+1} \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4x+1} + K$$

$$f(x) = x e^{-x^2} = -2x e^{-x^2} \quad (2)$$

$$= \frac{-2}{-2} x e^{-x^2} = -\frac{1}{2} \cdot (-2x e^{-x^2})$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + K$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \quad (3) \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{-1} 3 \cdot \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \\
 &= -3 \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}
 \end{aligned}$$

$$F(x) = -3 e^{\frac{1}{x}} + K$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x e^{\cos x} \quad (4) \\
 &= -1 - \sin x e^{\cos x}
 \end{aligned}$$

$$F(x) = -e^{\cos x} + K$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{-1}{\sqrt{x+1}} \cdot e^{\sqrt{x+1}} \quad (5) \\
 &= -2 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot e^{\sqrt{x+1}}
 \end{aligned}$$

$$F(x) = -2 e^{\sqrt{x+1}} + K$$

تطبيق:

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = 4x e^{2x}$

عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة F

المعرفة بـ $F(x) = (ax + b) e^{2x}$ دالة أصلية لـ f على \mathbb{R}

حل التطبيق:

حتى تكون F دالة أصلية لـ f يجب أن F تقبل

الاشتقاق على \mathbb{R}

$$F'(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= a(e^{2x}) + 2e^{2x}(ax+b) \\ &= ae^{2x} + 2ax e^{2x} + 2be^{2x} \\ &= (2ax + 2b + a) e^{2x} \end{aligned}$$

نضبط F' دالة أصلية لـ f يجب

$$F'(x) = f(x)$$

$$(2ax + a + 2b) e^{2x} = 4x \cdot e^{2x}$$

$$2a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$a + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = -2$$

$$b = -1$$

$$F(x) = (-2x - 1) e^{2x}$$

الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

$$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

$$2\sqrt{u(x)} + K$$

طريقة

لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال

$$u'u'' \text{ أو } \frac{u'}{u^n} \text{ أو } \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ مع تحديد عبارة } u(x)$$

2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عدد حقيقي K بحيث

$$f = K \times \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ أو } f = K \cdot \frac{u'}{u^n} \text{ أو } f = K \times u'u''$$

3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

تطبيق

عينا دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \quad u'u' \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x + K$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 5x + K$$

$$g(x) = \frac{2}{x^2} \quad \frac{u'}{u^n} \quad (2)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$G(x) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{1} x^{-1} \right) + K$$

$$G(x) = -\frac{2}{x} + K$$

$$h(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

③

$$H(x) = 3 \cdot \frac{-1}{2x^2} - \frac{2\sqrt{u(x)}}{2} + K$$

$$H(x) = \frac{-3}{2x^2} - 2\sqrt{x} + K$$

تمرين:

عین دالة أصلية على مجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$$

$$I = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$$

حل التمرين:

$$f(x) = (x+1)(x^2+2x+5)^2$$

$u' u^n$ ④

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x+1)(x^2+2x+5)^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (2x+2)(x^2+2x+5)^2$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+2x+5)^3}{3}$$

$$g(x) = \frac{2 \times 3x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$u(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ ②}$$

$$u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$g(x) = 3 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$F(x) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + 1} + K$$

تمرين:

تعرف على الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ وعين مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I .

طريقة:

لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو

$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ أو $\frac{u'}{u^n}$ مع تحديد عبارة $u(x)$

2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عدد حقيقيا K حيث

$$f = K \times \frac{u'}{\sqrt{u}} \quad \text{أو} \quad f = K \cdot \frac{u'}{u^n} \quad \text{أو} \quad f = K \times u'u^n$$

3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad I =]1, +\infty[\quad (1)$$

$$F(x) = 2\sqrt{x-1} + K$$

$$f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}} \quad (2)$$

$$= 2 \cdot \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}$$

$$F(x) = 4\sqrt{e^x-1} + K$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

(3)

$$F(x) = 2\sqrt{\sin x} + K$$

$$f(x) = \frac{-2 \sin x}{-2\sqrt{2 \cos x + 3}}$$

$-2 \sin x$

(4)

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2 \cos x + 3}$$

$$F(x) = -\sqrt{2 \cos x + 3} + K$$

$$I =]1, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln x}}$$

(5)

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x}}$$

$$F(x) = 2\sqrt{\ln(x)} + K$$

المعادلات التفاضلية والدوال الأصلية

(1) تعريف

(2) المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$ مع تطبيقات

(3) المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$ مع تطبيقات

(4) المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = -\omega^2 y$ مع تطبيقات

تعريف

المعادلة التفاضلية:

تعريف:

معادلة تفاضلية هي معادلة:

1. المجهول فيها دالة غالباً ما نرمز إليها بالرمز y ، و x أو حرف آخر.

2. تظهر فيها بعض المشتقات y' (المشتقة الأولى) أو مشتقات من رتبة أكبر y'' (...).

3. نسبي حل لمعادلة تفاضلية (E) في مجال I كل دالة φ تحقق (E) في I

مثال:

الدالة $y: x \mapsto 1 + \sin x$ هي حل في R للمعادلة

التفاضلية $y' = \cos x$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$:

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال I وكانت F دالة أصلية

لها على I فإن طول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ هي الدوال y
حيث: $y = F(x) + c$ مع c عدد ثابت.

تمرين 1:

حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية:

$$y' = 2x^2 + x - 1 \quad (1)$$

$$y' = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} \quad (2)$$

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2} \quad (3)$$

$$y' = 3 \sin(2x) \quad (4)$$

حل التمرين:

$$y' = f(x) \quad (1)$$

$$y = 2 \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + \frac{1}{2} x^2 - x + c$$

$$y = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - x + c$$

$$y' = f(x) \quad (2)$$

$$y = 2 \left(\frac{1}{2} x^2 \right) + x + \frac{1}{x} + c$$

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \quad (3)$$

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$y = x - \frac{1}{x} + c$$

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \quad (4)$$

$$y' = 3 \sin(2x)$$

$$y = 3 \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) + c$$

$$y = -\frac{3}{2} \cos(2x) + c$$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

مبرهنة:

إذا كانت f دالة مستمرة على المجال I وإذا كانت F دالة أصلية لـ f على I وكانت G دالة أصلية للدالة F على I فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = f(x)$ هي الدوال y حيث

$$y = G(x) + C_1 x + C_2 \quad \text{مع } C_1 \text{ و } C_2 \text{ عدديان حقيقيان ثابتان.}$$

تمرين:

حل في \mathbb{R} المعادلة التفاضلية

$$y'' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \quad (1)$$

$$y'' = \cos(2x + 3) \quad (2)$$

$$y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2} \quad (3)$$

$$y'' = \cos(2x) - 2 \sin x \quad (4)$$

حل التمرين:

$$y'' = 4x^3 - 3x^2 - 1 \quad (1)$$

$$y' = 4 \left(\frac{1}{4} x^4 \right) - 3 \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - x + C_1$$

$$y' = x^4 - x^3 - x + C_1$$

$$y = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$y'' = \cos(2x + 3) \quad (2)$$

$$y' = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C_1$$

$$y = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos(2x+3) \right) + C_1 x + C_2$$

$$y = -\frac{1}{4} \cos(2x+3) + C_1 x + C_2$$

(3)

$$y'' = \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{x^4}{x^2} + \frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$y'' = x^2 + x + \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{x} + C_1$$

$$y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} x^4 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - \ln|x| + C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{6} x^3 - \ln|x| + C_1 x + C_2$$

$$y' = \cos(2x) - 2 \sin x$$

(4)

$$y' = \frac{1}{2} \sin(2x) + 2 \cos(x) + C_1$$

$$y = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x + 2 \sin(x) + C_1 x + C_2$$

المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = -\omega^2 y$ (دون برهان).

إذا كان ω عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -\omega^2 y$ هي الدوال y حيث:

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \text{ مع } C_1 \text{ و } C_2 \text{ عددا حقيقيين}$$

ثابتان.

مثال:

يمكننا أن نتأكد من أن الدوال y حيث

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \text{ مع } C_1 \text{ و } C_2 \text{ عددا حقيقيين}$$

ثابتان، حلول للمعادلة التفاضلية $y'' = -\omega^2 y$ وذلك بإشتقاق الدالة y مرتين

مثال:

حلول المعادلة التفاضلية $y'' = -2y$ في R هي الدوال

$$y = C_1 \cos(x\sqrt{2}) + C_2 \sin(x\sqrt{2}) \text{ حيث:}$$

مع C_1 و C_2 عددا حقيقيين ثابتان

تمرين:

$$y'' + y = 0 \quad (1)$$

$$y'' + 9y = 0 \quad (2)$$

$$4y'' + \pi^2 y = 0 \quad (3)$$

حل التمرين:

$$y = C_1 \cos(x\sqrt{2}) + C_2 \sin(x\sqrt{2}) \quad (1)$$

$$y'' = -y$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y'' = -9y$$

$$y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

$$4y'' + \pi^2 y = 0$$

$$4y'' = -\pi^2 y$$

$$y'' = -\frac{\pi^2}{4} y$$

$$y = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

②

③

④

التكاملات والتوال الأصلية وحساب المساحات

تعريف التكامل:

تعريف:

ف دالة مستمرة على المجال I ، a و b عددين حقيقيين من I يسمي العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I ، التكامل من a إلى b لـ f ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x) dx$. نقرأ "التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ " تفاضل x .

ملاحظة:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x) dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية

F للدالة f على المجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. يمكن استبدال المتغير x بأحد الأحرف t, u, v, \dots

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

خواص التكامل:

أ- علاقة شال:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

ب- خطية التكامل المحدود

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

ج- خطية التكامل المحدود

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

د- إذا كان $a < b$ و f موجبة على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx > 0$

هـ- إذا كان $a < b$ و من أجل x من $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{فإن} \quad f(x) \leq g(x)$$

خاصية:

f دالة مستمرة و موجبة على المجال I ، a و b عدنان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحنى f في لهله متعامد و F دالة أصلية لـ f على I . مساحة الميز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ ، $x = b$ و $y = 0$ هو العدد

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{الحقيقي}$$

تمرين:

احسب التكاملات التالية:

$$\int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad (3)$$

حل التمرين:

$$\int_{-1}^2 (-3x^2 + 1) dx = \left[-3 \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^2 \quad (1)$$

$$= \left[-x^3 + x \right]_{-1}^2$$

$$= \left[-(2)^3 + 2 \right] - \left[-(-1)^3 + (-1) \right]$$

$$= -6$$

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x-1} \right]_0^1 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2-1} - \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} [e - e^{-1}]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} \quad (2)$$

$$= [-\cos \pi] - [-\cos(-\pi)]$$

$$= -\cos \pi + \cos(-\pi)$$

$$= 1 + (-1) = 0$$

تمرين:

احسب التكاملات:

$$\int_0^2 (0,01x^2 - x) dx = \left[0,01 \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \quad (3)$$

$$= \left[0,01 \frac{2^3}{3} - \frac{1}{2} (2)^2 \right] - \left[0,01 \frac{(0)^3}{3} - \frac{1}{2} (0)^2 \right]$$

$$= \left[0,01 \cdot \frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right] - [0,01 \cdot 0 - 1 \cdot 0]$$

$$= \left[\frac{0,08}{3} - \frac{4}{2} \right]$$

$$\int_1^2 (x+1)^3 dx = \left[\frac{(x+1)^4}{4} \right]_1^2 \quad (2)$$

$$= \left(\frac{(2+1)^4}{4} \right) - \left(\frac{(1+1)^4}{4} \right) = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \left(2t - 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \left[2 \cdot \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{t} \right]_{1/2}^2 \quad (3)$$

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = \left[\ln|x| - \sqrt{x} \right]_1^4 \quad (4)$$

$$\int_1^2 2x(x^2-1) dt = \left[\frac{(x^2-1)^2}{2} \right]_1^2 \quad (5)$$

$$\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = \left[2\sqrt{E} \right]_1^{10} \quad (6)$$

$$\int_3^4 \frac{5x}{(x^2-2)^3} dx = 5 \int_3^4 \frac{x}{(x^2-2)^3} \quad (7)$$

$$= 5 \int_3^4 \frac{2x}{2(x^2-2)^3}$$

$$= 5 \times \frac{1}{2} \int_3^4 \frac{2x}{(x^2-2)^3}$$

$$= \frac{5}{2} \left[\frac{-1}{2(x^2-2)^2} \right]$$

$$\int_0^3 (3x-6)(x^2-4x+1)^3 dx = 3 \int_0^3 (x-2)(x^2-4x+1)^3 dx \quad (8)$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (2x-4)(x^2-4x+1)^3$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{(x^2-4x+1)^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \left[2\sqrt{t+1} \right]_0^3$$

$$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1} dt = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{4t^3}{t^4+1}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\ln |t^4+1| \right]_1^2$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = -2 \int_0^3 \frac{-dx}{2\sqrt{4-x}}$$

$$= -2 \left[\sqrt{4-x} \right]_0^3$$

$$\int_0^\pi \sin(2t) dt = \left[-\frac{1}{2} \cos(2t) \right]_0^\pi$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \left[\sqrt{2x+1} \right]_1^2$$

$$\int_0^\pi \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[-\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^\pi$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x \cos x dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x \sin x dx$$

$$= \left[\frac{(\sin(x))^2}{2} \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \left[\frac{-1}{\sin x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \quad (16)$$

$$\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_1^3 = \int_1^3 \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx \quad (17)$$

$$= - \int_1^3 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = - \left[e^{\frac{1}{x}} \right]_1^3$$

$$\int_0^1 2^{3x} dx = \int_0^1 (2^3)^x dx \quad (18)$$

$$= \int_0^1 (8)^x dx = \int_0^1 e^{x \ln 8} dx \leftarrow e^{\ln a^x} = a^x$$

$$= \int_0^1 e^{x \ln 8} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 8} \int_0^1 \ln 8 \cdot e^{x \ln 8} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 8} \left[e^{x \ln 8} \right]_0^1 = \frac{1}{\ln 8} \left[e^{\ln 8^x} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\ln 8} \left[8^x \right]_0^1$$

تمرين

1. جد عددين حقيقيين a و b حيث من اجل كل عدد حقيقي x من $R - \{-3, 3\}$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$$

2. استنتج $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-9} dx$

حل التمرين

$$\frac{a}{(x-3)} + \frac{b}{(x+3)} = \frac{a(x+3) + b(x-3)}{x^2-9} \quad (1)$$

$$= \frac{ax+3a+bx-3b}{x^2-9} = \frac{(a+b)x + 3a-3b}{x^2-9}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \Rightarrow a=-b \dots (1) \\ 3a-3b=1 \dots (2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) فنجد

$$3(-b) - (3b) = 1 \Rightarrow -3b - 3b = 1$$

$$\Rightarrow -6b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{6}$$

$$a - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

اذن

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6(x-3)} - \frac{1}{6(x+3)}$$

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-9} dx = \frac{1}{6} \int_{-1}^2 \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{6} \left[\ln|x-3| - \ln|x+3| \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{6} \left[\left[\ln|2-3| - \ln|5| \right] - \left[\ln|-1-3| - \ln|2| \right] \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[\left[-\ln 5 \right] - \left[\ln 4 - \ln 2 \right] \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[-\ln 5 - \ln 4 + \ln 2 \right]$$

تقريباً:

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1, +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{4}{(x+1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في الشكل المقابل.

1. احسب $\int_1^3 f(x) dx$

2. فسر النتيجة بيانياً

3. احسب $\int_0^3 f(x) dx$

حل التقريب:

① الحساب

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \left(x - \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 + 4 \cdot \frac{1}{x+1} \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{1}{2} (3)^2 + \frac{4}{3+1} \right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{4}{2} \right]$$

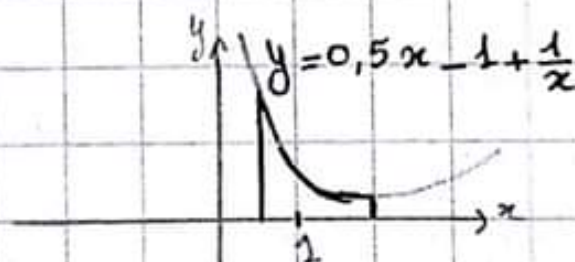
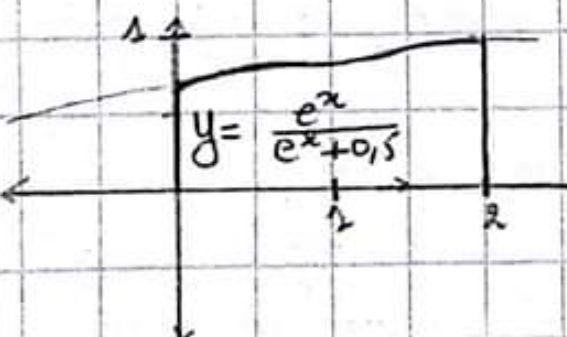
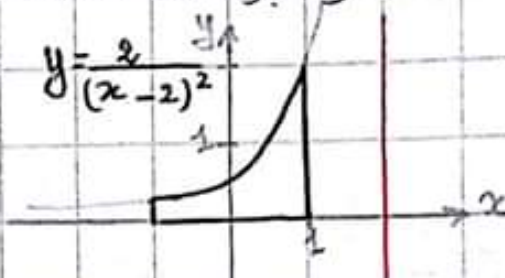
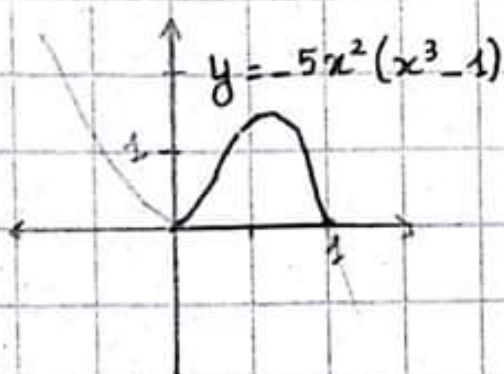
(2) التفسير البياني:

النتيجة السابقة هي مساحة الحيز المحصور

بين (C) و محور الفواصل والمستقيمان $x=1$ و $x=3$

تمرين:

في الحالات الأربع التالية، احسب مساحة الحيز الملون
مقدرة بوحدة المساحات.



حل التمرين:

إذا كان الوحد أسفل نصيف (-)

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{(x-2)^2} dx$$

$$= 2 \left[\frac{-1}{x-2} \right]_{-1}^1$$

$$= 2 \left[\frac{-1}{1-2} + \frac{1}{-1-2} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{2}{3} \right] = \frac{4}{3} \text{ u.a.}$$

$$\int_0^1 -5x^2(x^3-1) dx$$

(2)

$$= \frac{-5}{3} \int_0^1 3x^2(x^3-1) dx$$

$$= \frac{-5}{3} \left[\frac{(x^3-1)^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{-5}{3} \left[0 - \frac{1}{2} \right] = \frac{5}{6} \text{ u.a}$$

$$\int_{0,5}^2 (0,5x - 1 + \frac{1}{x}) dx$$

(3)

$$= \left[\frac{0,5}{2} x^2 - x + \ln|x| \right]_{0,5}^2 \text{ u.a.}$$

$$\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+0,5} dx = \left[\ln(e^x+0,5) \right]_0^2 = \text{u.a. (4)}$$

التكامل بالتجزئة ونظريته

قانون التكامل بالتجزئة

$$(u.v)' = u'v + v'u$$

$$\left[\frac{f}{g}(x) \right]_a^b \int_a^b (u.v)' dx = \int_a^b (u'v) dx + \int_a^b (v'u) dx$$

$$\int_a^b (v'u) dx = [u.v]_a^b - \int_a^b (u'v) dx$$

1- المكاملة بالتجزئة:

مبرهنة:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I . بحيث

أن الدالتين المشتقتين u' و v' مستمرتان على I

من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

تمرين:

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$I = \int_1^2 (x-1) e^x dx$$

طريقة:

لاستعمال المكاملة بالتجزئة نكتب f على الشكل $u.v'$

حل التمرين:

$$I = \int_0^1 (x-1) e^x dx$$

①

$u(x) = (x-1)$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$$\int_a^b u v' = [u v]_a^b - \int_a^b u' v$$

$$I = \int_0^1 (x-1) e^x dx = [(x-1) e^x]_0^1 - \int_0^1 1 e^x dx$$

$$= [(x-1) e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$= [(1-1) e^1 - (0-1) e^0] - [e^1 - e^0]$$

$$= +1 - e + 1 = 2 - e$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx$$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = -\cos x$	$v'(x) = \sin x$

$$J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x dx$$

$$J = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} - [-\sin x]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$J = \left[\left(-\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \right) - (0 \cdot \cos 0) \right] - \left[(-\sin \frac{\pi}{3}) - (-\sin 0) \right]$$

$$J = \left[\left(-\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - (0) \right] - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين:
عين باستخدام المكاملة بالتجزئة، الدالة الأصلية للدالة
 $x \mapsto \ln x$ والتي تنعدم عند 1

طريقة:
يمكننا دائما وضع $u(x) = \ln(x)$ ، $v'(x) = 1$ حيث $u'(x) = \frac{1}{x}$

حل التمرين:

$u(x) = \ln(x)$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$

الدالة الأصلية لدالة والتي تنعدم من أجل قبة

مبرهنة:

ف دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I .
الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I والتي تنعدم من أجل
 a هي الدالة $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

—————

$\ln x$ تنعدم عند 1

$$\int_1^x \ln(t) dx = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \cdot t dt$$

$$= [t \ln t]_1^x - [t]_1^x$$

$$= x \ln x - x - 1$$

ملاحظة:

الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$ هي

الدوال $x \mapsto x \ln x - x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ وبصفة عامة

نثبت بانتباغ نفس الطريقة ان الدوال الأصلية للدالة

$x \mapsto \ln(x+a)$ على المجال $] -a, +\infty[$ هي الدوال

$x \mapsto (x+a) \ln(x+a) - x + c$ مع c عدد حقيقي ثابت.

تمرين

باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملين I و J

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx$$

(1)

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{1}{2} x^2$	$v'(x) = x$

$$I = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e$$

$$J = \int_{\frac{1}{2}}^e \ln(x-1) \, dx$$

(2)

$u(x) = \ln(x-1)$	$u'(x) = \frac{1}{x-1}$
$v(x) = x-1$	$v'(x) = 1$

$$J = \int_2^e \ln(x-1) dx = \left[(x-1) \ln(x-1) \right]_2^e - \int_2^e \frac{1}{x-1} \cdot (x-1) dx$$

$$= \left[(x-1) \ln(x-1) \right]_2^e - \left[x \right]_2^e$$

$$I = \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

(3)

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = \sin x$	$v'(x) = \cos x$

$$I = \left[x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= \left[x \sin x \right]_0^{\pi} + \left[\cos x \right]_0^{\pi} = -2$$

$$J = \int_0^1 x e^x dx$$

(4)

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$$J = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[x e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1$$

$$I = \int_{-1}^0 x \sqrt{1-x} dx$$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$	$v'(x) = \sqrt{1-x}$

(5)

$$= \left[-\frac{2}{3} x (1-x)^{3/2} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -\frac{2}{3} (1-x)^{3/2} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x (1-x)^{3/2} \right]_{-1}^0 + \frac{2}{3} \int_{-1}^0 (1-x)^{3/2} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x (1-x)^{3/2} \right]_{-1}^0 + \frac{2}{3} \left[-\frac{(1-x)^{3/2 + \frac{3}{2}}}{5/2} \right]$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x (1-x)^{3/2} \right]_{-1}^0 + \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{5} (1-x)^{5/2} \right]$$

$$I = \int_1^2 (x-2) e^x dx$$

$u(x) = x-2$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

(6)

$$I = \left[(x-2) e^x \right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx$$

$$= \left[(x-2) e^x \right]_1^2 - \left[e^x \right]_1^2$$

$$J = \int_0^{\pi/3} 3x \sin 3x dx$$

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = -\cos 3x$	$v'(x) = 3 \sin 3x$

(7)

$$J = [-x \cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \, dx$$

$$= [-x \cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

تمرين:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} \, dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} \, dx \quad \text{نضع}$$

باستعمال المكاملة بالتجزئة عبر عن I بدلالة J .

٢- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

ب- استنتج قيمة J .

٣- احسب قيمة I .

حل التمرين:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{-x}}} = \frac{1}{\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}}} \quad \cdot 2$$

$$= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

تكاملاً $J = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \, dx$

$$J = - \int \frac{e^x}{e^{-x} + 1} dx$$

$$J = - \left[\ln(e^{-x} + 1) \right]_0^1$$

استنتاج I:

مكاملة بالتجزئة:

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$	$\frac{u'}{v}$
$v(x) = \frac{1}{e^x + 1}$	$v'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$	

$$I = \left[\frac{-x}{e^x + 1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

$$= \left[\frac{-x}{e^x + 1} \right]_0^1 + \left[-\ln(e^{-x} + 1) \right]$$

تمرين:

باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين، أحسب التكاملين التاليين:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x \, dx$$

$$I = \int_0^1 x^2 e^x \, dx$$

حل التمرين:

$u(x) = x^2$	$u'(x) = 2x$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$$I = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx$$

(1)

$$= [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx$$

المرّة الثانية

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = e^x$	$v'(x) = e^x$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - 2 \left[[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right]$$

$$= [x^2 e^x]_0^1 - 2 [x e^x]_0^1 + 2 [e^x]_0^1$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x dx$$

$u(x) = x^2$	$u'(x) = 2x$
$v(x) = -\cos x$	$v'(x) = \sin x$

②

$$I = [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \cos x dx$$

$$= [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx$$

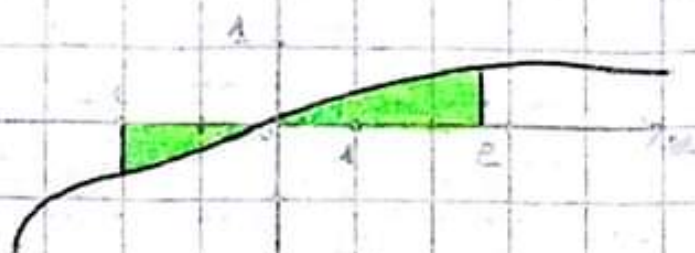
مرّة ثالثة

$$= [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \left[[x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} \right]$$

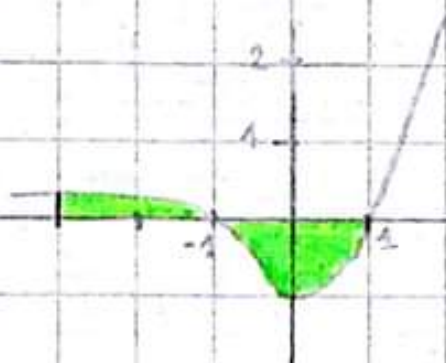
تَمَرِينٌ

احسب بوحدة المساحات (u.a) مساحة الخيز الملون

$$y = \ln(x+3) - 1$$



$$y = (x^2 - 1)e^x$$



حل التمرين:

$$\ln(x+3) = 1$$

①

$$x+3 = e \Rightarrow x = e-3$$

$$A = \int_{-1}^{e-3} (\ln(x+3) - 1) dx + \int_{e-3}^e (\ln(x+3) - 1) dx$$

=

$u(x) = \ln(x+3)$	$u'(x) = \frac{1}{x+3}$
$v(x) = x+3$	$v'(x) = 1$

$$\int_{e-3}^e \ln(x+3) = \left[(x+3) \ln(x+3) \right]_{e-3}^e - \int_{e-3}^e 1 dx$$

$$= \left[(x+3) \ln(x+3) \right]_{e-3}^e - \left[x \right]_{e-3}^e$$

-47-

$$A = \left[- \left[(x+3) \ln(x+3) - x \right] \right]_{-1}^{e-3} + \left[(x+3) \ln(x+3) - x \right]_{e-3}^e$$

$$A = \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) e^x dx + \int_{-1}^1 - \left[(x^2 - 1) e^x dx \right] \textcircled{2}$$

$$u(x) = (x^2 - 1) \quad u'(x) = 2x$$

$$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$$

$$A = \left[\left[(x^2 - 1) e^x \right]_{-3}^{-1} - \int_{-3}^{-1} 2x e^x dx \right] - \left[\left[(x^2 - 1) e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x e^x dx \right]$$

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$$

$$A = \left[\left[(x^2 - 1) e^x \right]_{-3}^{-1} - 2 \left(\left[x e^x \right]_{-3}^{-1} - \left[e^x \right]_{-3}^{-1} \right) \right] -$$

$$\left[\left[(x^2 - 1) e^x \right]_{-1}^1 - 2 \left(\left[x e^x \right]_{-1}^1 - \left[e^x \right]_{-1}^1 \right) \right]$$

النتيجة الكاملة بالتجزئة والدوال الأصلية:

نظريتين:

1. x عدد حقيقي موجب تماما. باستعمال المكاملة بالتجزئة
احسب $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$

2. استنتج دالة أصلية لـ $\frac{\ln x}{x^2}$ على $x \in]0, +\infty[$

حل التمرين 1:

(1)

$u(x) = \ln t$	$u'(x) = \frac{1}{t}$
$v(x) = -\frac{1}{t}$	$v'(x) = \frac{1}{t^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{-\ln(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2} dt \\
 &= \left[\frac{-\ln(t)}{t} \right]_1^x + \left[\frac{-1}{t} \right]_1^x \\
 &= \left[+\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln 1}{1} \right] - \left[\frac{-1}{x} - 1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

(2) استنتج دالة أصلية لـ $\frac{\ln x}{x^2}$ بعد دالة الأصلية.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1 \\
 F(1) &= 0 \quad \text{هنا دالة الأصلية لـ } \frac{\ln x}{x^2} \text{ لأن } x \rightarrow \frac{\ln x}{x^2}
 \end{aligned}$$