

# Cálculo

William E. Boyce

Richard C. DiPrima



CECSA





# Cálculo

---

---

---

---

---

Calculus



# Cálculo

William E. Boyce  
Richard C. DiPrima

Rensselaer Polytechnic Institute

---

TERCERA REIMPRESIÓN  
MÉXICO, 2005

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.  
MÉXICO

Para establecer comunicación  
con nosotros puede hacerlo por:



**correo:**  
Renacimiento 180, Col. San Juan  
Tlihuaca, Azcapotzalco,  
02400, México, D.F.



**fax pedidos:**  
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102



**e-mail:**  
info@patriacultural.com.mx



**home page:**  
www.patriacultural.com.mx

Título original de la obra:

*CALCULUS* / William E. Boyce, Richard C. DiPrima

ISBN: 0-471-09333-5

Copyright © MCMLXXXVIII, John Wiley & Sons, Inc. All Rights Reserved

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas

Coordinación editorial: Verónica Estrada Flores

Diseño de interiores: EDITEC, S.A. DE C.V.

Diseño de portada: Cesar Leyva Acosta

Traducción:

Ing. Virgilio González Pozo

Ing. Químico

UNAM

Revisión técnica:

M. en C. Miguel Lara Aparicio

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias

UNAM

### *CÁLCULO*

Derechos reservados respecto a la primera edición en español:

© 1994, 2005, William E. Boyce, Richard C. DiPrima / John Wiley & Sons, Inc.

© 1994, COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V.

© 2005, GRUPO PATRIA CULTURAL, S.A. DE C.V.

bajo el sello de Compañía Editorial Continental

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,

Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial

Registro núm. 43

ISBN 968-26-1234-9

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México

Printed in Mexico

**Primera edición: 1994**

Segunda reimpresión: 1999

Tercera reimpresión: 2005



A Elsa y Maureen





# CÁLCULO

Nuestro objetivo principal consiste en presentar en forma clara y coherente los temas que por lo común se enseñan en los cursos de introducción al cálculo. Esto significa poner énfasis en los resultados y en los métodos que hacen del cálculo una herramienta importante para resolver problemas en otros campos, con una abundancia de aplicaciones que demuestran el poder y la versatilidad de los métodos, y poniendo algo de atención a la estructura lógica del tema.

A lo largo del libro nos hemos concentrado en los resultados y métodos útiles, o al menos de utilidad potencial, para quienes hacen uso del cálculo para resolver problemas en otros campos. De acuerdo con ello, hemos dedicado a cada tema principal lo suficiente como para alcanzar esos resultados. Hemos tratado de enmarcar las definiciones y los teoremas con cuidado en lo que pensamos es su forma más útil, aunque quizá no la más general. Hemos incluido numerosos ejemplos para que los estudiantes puedan ver estos métodos en acción.

Para llegar a ser un usuario eficaz del cálculo, creemos que un estudiante no sólo debe tener una colección de fórmulas y reglas, sino algo de comprensión y apreciación de la manera en la que encajan entre sí, y determinada capacidad para distinguir entre los problemas que son de mera rutina y los que implican asuntos delicados del análisis. Aunque no es un libro particularmente teórico (hay relativamente pocas deltas y épsilons), hemos tratado de ser sinceros para señalar dónde son necesarios los argumentos sutiles y por qué los aparentemente simples y plausibles pueden fallar.

También hemos sido bastante selectivos en las demostraciones presentadas en el texto, incluyendo sólo las que parecen instructivas. En consecuencia, hemos omitido algunas demostraciones debido a que son muy difíciles para la mayor parte de los estudiantes en este nivel, y en otros casos porque son demasiado tediosas y repetitivas. Hay muchas otras demostraciones que se bosquejan en los grupos de problemas, en donde los profesores pueden usarlas si lo desean. Junto con las demostraciones se presentan contraejemplos. Algunos pocos, muy simples, se intercalan en el texto en lugares adecuados para indicar que las hipótesis citadas en ciertos teoremas son en verdad necesarias para llegar a

## Prefacio

la conclusión. También a este respecto aparecen algunos contraejemplos más complicados en los grupos de problemas.

Se dice a veces que la amplia disponibilidad de computadoras baratas y eficientes reduce la necesidad que tienen los estudiantes de hoy de estudiar cálculo. Creemos que, en todo caso, la realidad es al contrario. En el mundo natural, dondequiera que cambian las cantidades variables entre sí, o dondequiera que se considera que algo es el resultado de la acumulación de un gran número de pequeños componentes, es allí donde se presenta el cálculo. El hecho de que la mayor parte de los estudiantes tengan a su alcance inmensos recursos de cómputo, y quizá en realidad los tengan en sus escritorios, aumenta en forma extraordinaria la clase de los problemas a los que se les puede aplicar con éxito las ideas y los conceptos del cálculo, entre otras cosas. Esto hace más urgente la necesidad que tienen los estudiantes de dominar las ideas y los conceptos del cálculo, así como de estudiar su traducción a algoritmos numéricos.

Como el empleo del cálculo para la resolución de problemas con frecuencia conduce finalmente a una necesidad de resultados numéricos, se infiere que hay que considerar las posibilidades del cómputo numérico en la enseñanza del cálculo. Reconocemos explícitamente esta posibilidad al presentar determinados algoritmos numéricos, como el método de Newton, las reglas del trapecioide y de Simpson para integración, y el método de Runge-Kutta para resolver problemas con valor inicial de primer orden. Quizá lo más importante sea el hecho de que la posible necesidad del cálculo numérico es una idea que se mantiene en todo el libro. Se manifiesta de diversas formas, por ejemplo, en el énfasis que se da a la estimación de errores o residuos, en el estudio de la rapidez de convergencia de determinadas series infinitas, y en el sencillo hecho de pedir respuestas numéricas en algunos problemas y darlas en algunos de los ejemplos.

Un libro de texto no es un compendio o un programa de lecciones que deban seguirse al detalle; más bien, es una armazón sobre la que el profesor puede colgar los frutos de su propia experiencia en matemáticas. En este libro hay algunos capítulos que se deben cubrir por entero como el 3 (La derivada) y el 6 (La integral). Hay muchos otros capítulos que están organizados de tal modo que los temas más importantes se presentan al inicio del capítulo, y otros menos relevantes, que a veces incluyen aplicaciones, cerca del final del capítulo. Así, un profesor tiene bastante libertad de selección para decidir hasta dónde avanzar en determinados temas. También hay alguna flexibilidad posible para reordenar algunos de los capítulos.

Respecto a las aplicaciones, este libro decididamente tiene más material del que se puede emplear en cualquier curso. Por otro lado, no hemos tratado de ser vastos en este aspecto, lo cual, en cualquier caso, es un objetivo ilusorio. Hemos tratado de presentar una extensión razonable de aplicaciones con objeto de hacer creíble el punto de vista de que el cálculo tiene amplias aplicaciones y es de mucha utilidad en muchos campos. De las aplicaciones a la mecánica y a la física aparecen buenos ejemplos, como resultado tanto de nuestros propios intereses como de la larga historia del desarrollo interdependiente de esos temas y del cálculo. Sin embargo, también hemos incluido alguna discusión de las aplicaciones fuera de las ciencias físicas. Invitamos a los profesores que no encuentren sus aplicaciones favoritas a que las intercalen en los lugares adecuados de sus cursos.

A continuación de cada sección se encuentra un grupo de problemas, incluyendo algunos ejercicios bastante concretos dispuestos más o menos en orden de dificultad



creciente, seguidos, en la mayor parte de los casos, por un surtido de problemas. Al final del libro se dan las respuestas a los problemas de número non. También está disponible, en el idioma inglés, un manual de soluciones para uso del profesor.

Algunos problemas están marcados con un asterisco, lo cual significa que se consideran más difíciles, con frecuencia porque son más teóricos que la mayor parte. Otros problemas se marcan con el símbolo ©, que son los de naturaleza computacional. Para la mayor parte de ellos se necesita una calculadora, y para algunos es deseable contar con una microcomputadora.

Como tratamos de que este libro sea autosuficiente, no hemos preparado bibliografía alguna en el sentido acostumbrado; sin embargo, hay algunas citas específicas en las notas a los pies de páginas. También hay una lista breve de referencias que se incluyen principalmente como guía para aquellos estudiantes que deseen profundizar en los temas relacionados con el cálculo.

Hemos incluido notas históricas a los pies de página y observaciones en diversos puntos del libro, al igual que hemos hecho una lista de algunos trabajos históricos en las referencias. Nuestro objetivo no es tan sólo dar el crédito merecido a los pioneros del tema, sino también dejar en claro a los estudiantes que el cálculo, tal como lo conocemos, se desarrolló durante muchos años, y es el resultado sólo de la larga batalla intelectual de los matemáticos más destacados del mundo con sus ideas, profundas y elusivas.

Las partes del libro tienen numeración decimal. Así, la sección 6.3 es la tercera sección del capítulo 6. La figura 6.3.2 es la segunda figura de la sección 6.3, e igualmente para los problemas y definiciones. Se emplean los símbolos □ y ■ para indicar el final de una demostración y de un ejemplo, respectivamente.

\*

\*

\*

El manuscrito de este libro se había casi terminado cuando murió Dick DiPrima, en 1984. Fue triste para nosotros que no pudiera participar en el proceso final de la edición y la publicación. Sin embargo, durante este periodo he tenido siempre presente su preocupación por la claridad y la minuciosidad. Tal como se ve ahora impreso, estoy seguro de que a él le hubiera gustado el libro en el que trabajamos juntos durante tanto tiempo.

*William E. Boyce*  
Troy, New York



# CÁLCULO

Al escribir este libro hemos recibido cuantiosa y valiosa ayuda de muchas personas. En general, debemos mucho a nuestros colegas, nuestros estudiantes y nuestros maestros, así como a otros autores, todos los cuales han influido en nuestros puntos de vista sobre el cálculo y sobre cómo se debe exponer. Sin embargo, nos gustaría citar aquí y dar las gracias a aquellas personas que han brindado una ayuda específica en la preparación del libro.

Entre quienes leyeron el manuscrito, o partes de él, antes de su publicación, están

RODNEY CARR *University of Michigan*  
PETER COLWELL *Iowa State University*  
PAUL DAVIS *Worcester Polytechnic Institute*  
CHARLES G. DENLINGER *Millersville State College*  
BRUCE EDWARDS *University of Florida*  
GARRET J. ETGEN *University of Houston*  
STUART GOLDENBERG *California Polytechnic  
State University*  
RONALD GRIMMER *Southern Illinois University*  
DOUGLAS W. HALL *Michigan State University*  
HAL G. MOORE *Brigham Young University*  
IVAN NIVEN *University of Oregon*  
ALFRED SCHMIDT *Rose Hulman Institute of  
Technology*  
DONALD SHERBERT *University of Illinois*

Expresamos nuestro profundo agradecimiento a cada uno de ellos, reconociendo el tiempo y esfuerzo que dedicaron. Siempre tuvimos en cuenta sus sugerencias, que con frecuencia adoptamos.

Tenemos una deuda múltiple con David Moskovitz, profesor emérito en Carnegie Mellon University. Por un lado, como estudiantes en sus cursos, aprendimos mucha matemática. También aprendimos de él algo sobre la enseñanza, a partir del ejemplo que nos dio como auténtico maestro en el salón de clases. Con respecto a este libro, leyó el manuscrito completo, y gran parte de él por segunda vez, con minuciosidad. Hizo comentarios detallados que para nosotros tuvieron gran valor para obtener el libro terminado. El manual de soluciones para uso del profesor fue preparado por Charles W. Haines y Thomas C. Upson, de Rochester Institute of Technology. Nuestro agradecimiento especial va dirigido a ellos, no sólo por el enorme esfuerzo que representa el haber recopilado, escrito y editado ese material, sino además por la lectura de lo

## Reconocimientos

que casi fue el manuscrito final, verificar cada una de las respuestas de cada problema, y corregir en muchos de ellos detalles importantes.

También agradecemos a Keith Howell y a Julie Hummon su ayuda al preparar los grupos de problemas de repaso al final de cada capítulo, y a Caroline Haddad no sólo por ayudar a este respecto, sino por su ayuda en la corrección de galeras.

Casi en su totalidad, el manuscrito fue escrito a máquina, con la maestría y eficiencia que le son características, por Helen D. Hayes. Quienes pasaron a máquina algunas partes más pequeñas fueron Ava M. Biffer y Victoria R. Lee. Expresamos a cada una de ellas nuestro reconocimiento por el trabajo, hecho bien y con gusto.

Por último, y como lo más importante, estoy agradecido a mi esposa Elsa K. Boyce por haber revisado las pruebas de galera y de página en su totalidad, por haber actuado como consultora general en asuntos tanto del análisis como de la exposición, y sobre todo, por su respaldo y aliento inquebrantables durante los años que este libro se estuvo preparando.

*W. E. Boyce*



# CÁLCULO

Este libro tiene por objeto guiarle en el estudio del cálculo diferencial e integral, normalmente en conjunto con las clases en el aula. Aunque el cálculo tiene muchas ramificaciones y generalizaciones que puede uno seguir hasta muy adentro de los dominios de la matemática avanzada, la experiencia demuestra que un estudiante razonablemente bien preparado puede aspirar a alcanzar un conocimiento suficiente del cálculo con uno o dos años de estudio. Esperamos que este libro le ayude a hacerlo.

El aprendizaje de las matemáticas con un libro de texto implica leerlo en forma muy activa. Aunque en general hemos tratado de indicar todos los pasos principales, conviene que usted, lector, tenga papel y lápiz a la mano para comprobar los cálculos, si es necesario, a medida que avance. Se deben examinar con extremo cuidado las definiciones y los teoremas. Algunos de ellos son el resultado de años de refinamiento de parte de los sabios matemáticos del pasado, y hemos dado una gran importancia a la redacción de cada uno de ellos. Trate de estar seguro de que comprende cabalmente lo que se presenta. También, tenga cuidado de pensar en lo que no se dice; a veces, es muy fácil descuidarse y creer que el enunciado de una definición o de un teorema contiene más de lo que dice.

Aunque este libro trata principalmente de los métodos y aplicaciones del cálculo, más que de la teoría, hemos incluido las demostraciones de algunos de los problemas del texto y hemos delineado otras en los grupos de problemas. Creemos que vale la pena estudiar las demostraciones, no sólo para convencerse de la verdad de los enunciados que puedan no ser obvios en forma intuitiva, sino que, quizá lo más importante, porque son un ejemplo del pensamiento matemático y, con frecuencia, contienen métodos que se pueden transferir a la solución de otros tipos de problemas.

Lo más importante de todo es que si desea usted adquirir eficiencia en el cálculo, debe resolver los problemas, no sólo unos pocos, ahora sí y mañana no, sino que debe ser en forma regular. Para lograrlo, debe usted emplear una idea o un método matemático suficiente como para sentirse completamente cómodo con ellos y poder confiar en conocer cómo emplearlos en forma correcta. Con frecuencia, lo anterior exige algo de tiempo, pero en general sólo se logra resolviendo problemas de diversos tipos que exploten la idea o el

## Al estudiante

método en diferentes formas. Aunque al final del libro se dan las respuestas a los problemas de número impar, sólo las debe consultar una que otra vez, y nunca hasta que al menos haya hecho un gran esfuerzo por resolver el problema.

Al resolver un problema debe usted pensar en los resultados que está obteniendo. Con frecuencia pregúntese: “¿En verdad parece razonable este resultado?” Si es así, entonces puede ser correcto; si no es así, casi con seguridad es incorrecto. Compruebe sus respuestas siempre que pueda, posiblemente tratando por segunda vez con un método distinto, o introduciendo valores numéricos para comprobar un caso determinado.

Parte del placer que sentimos los que amamos a la matemática lo suficiente como para dedicarle nuestro tiempo a la enseñanza o a escribir sobre ella, se deriva de su lado artístico. Es bella la demostración nítida e incisiva de un teorema posiblemente inesperado, o la solución elegante de un problema difícil. Esperamos que se deje ver este aspecto de las matemáticas en las páginas de este libro, y que como resultado de ello se refuerce su propia apreciación estética de esta disciplina.

Por último, aunque los diferentes individuos pueden tener distintos niveles de talento para las matemáticas, como para otras cosas, como la música y el arte, puede usted elevar su nivel de eficiencia mediante el trabajo arduo y la práctica diligente. En la mayor parte de los casos puede elevar ese nivel mucho, quizá más de lo que usted hubiera pensado al principio. Por tanto, establezca metas ambiciosas y, a continuación, rinda sus mejores esfuerzos para alcanzarlas.

W. E. B.



# CÁLCULO

## Capítulo uno:

### Funciones 1

- 1.1 Números, conjuntos, intervalos y valores absolutos 2
- 1.2 Desigualdades 8
- 1.3 Relaciones y gráficas 15
- 1.4 Funciones 27
- 1.5 Ejemplos de funciones 35
- 1.6 Funciones trigonométricas 44

## Capítulo dos:

### Límites y funciones continuas 57

- 2.1 La aparición natural de las operaciones de límite 58
- 2.2 Límite de una función 66
- 2.3 Operaciones con límites 79
- 2.4 Límites laterales, límites al infinito y límites infinitos 90
- 2.5 Funciones continuas 100
- 2.6 Propiedades de las funciones continuas 108

## Capítulo tres:

### La derivada 119

- 3.1 Definición de la derivada; la regla para potencias 120
- 3.2 El álgebra de las derivadas 131
- 3.3 Derivadas de orden superior y antiderivadas 141
- 3.4 Aproximaciones lineales 149
- 3.5 Funciones compuestas y la regla de la cadena 159
- 3.6 Derivadas de las funciones trigonométricas 170
- 3.7 Derivación implícita 180

## Capítulo cuatro:

### Aplicaciones de la derivada 189

- 4.1 El teorema del valor medio y algunas de sus consecuencias 189
- 4.2 Máximos y mínimos de funciones 200
- 4.3 Aplicaciones de los máximos y mínimos 213
- 4.4 Problemas de razones relacionadas 224
- 4.5 Método de Newton 231

## Contenido

**Capítulo cinco:**

**Algunos temas geométricos 241**

- 5.1 Dibujo de curvas 241
- 5.2 Ecuaciones cuadráticas, parábolas y traslación de ejes 257
- 5.3 Elipses 268
- 5.4 Hipérbolas 275
- 5.5 Ecuaciones paramétricas 284

**Capítulo seis:**

**La integral 299**

- 6.1 Notación de suma: área 300
- 6.2 La integral de Riemann 313
- 6.3 Propiedades de la integral de Riemann 322
- 6.4 El teorema fundamental del cálculo 335
- 6.5 Integración por sustituciones 346
- 6.6 Integración numérica 354

**Capítulo siete:**

**Aplicaciones de la integral 369**

- 7.1 Más sobre áreas de regiones planas 370
- 7.2 Volumen 379
- 7.3 Longitud de arco y área de una superficie 392
- 7.4 Aplicaciones a la mecánica 404
- 7.5 Aplicaciones a las ciencias biológicas y a las ciencias sociales 413

**Capítulo ocho:**

**Funciones elementales trascendentes 425**

- 8.1 Funciones inversas 426
- 8.2 La función logaritmo natural 435
- 8.3 La función exponencial 447
- 8.4 Algunas aplicaciones de la función exponencial 459
- 8.5 Logaritmos y exponenciales de otras bases 468
- 8.6 Las funciones trigonométricas inversas 477
- 8.7 Las funciones hiperbólicas y las funciones hiperbólicas inversas 491

**Capítulo nueve:**

**Métodos de integración 503**

- 9.1 Más sobre el tema de sustitución 505
- 9.2 Integración por partes 509
- 9.3 Integrales donde intervienen senos y cosenos 517
- 9.4 Integrales donde intervienen otras funciones trigonométricas 524
- 9.5 Sustituciones trigonométricas 531
- 9.6 Fracciones parciales 537
- 9.7 Fracciones parciales: factores cuadráticos repetidos 545

**Capítulo diez:**

**Ecuaciones diferenciales de primer orden 553**

- 10.1 Ecuaciones lineales 554
- 10.2 Ecuaciones de variables separables 564
- 10.3 Métodos numéricos 575

**Capítulo once:**

**Formas indeterminadas, regla de L'Hospital e integrales impropias 587**

- 11.1 Formas indeterminadas y la regla de L'Hospital 588
- 11.2 Otras formas indeterminadas; extensiones de la regla de L'Hospital 599
- 11.3 Integrales impropias 608
- 11.4 Criterio de comparación para las integrales impropias 618

**Capítulo doce:**

**Series infinitas 631**

- 12.1 Sucesiones 631
- 12.2 Convergencia y divergencia de las series 643
- 12.3 El criterio de comparación 654
- 12.4 El criterio de la razón 662
- 12.5 El criterio de la integral 668
- 12.6 Series alternantes 678
- 12.7 Convergencia absoluta y convergencia condicional 684
- 12.8 Resumen de los criterios de convergencia 691

**Capítulo trece:**

**Aproximación de Taylor y series de potencias 695**

- 13.1 Polinomios de Taylor 696
- 13.2 El teorema del residuo de Taylor y las series de Taylor 702
- 13.3 Series de potencias y radio de convergencia 712
- 13.4 Propiedades algebraicas de las series de potencias 719
- 13.5 Derivación e integración de las series de potencias 727
- 13.6 La serie binomial y algunas otras series 735

**Capítulo catorce:**

**Coordenadas polares 743**

- 14.1 El sistema de coordenadas polares 743
- 14.2 Dibujo de curvas en coordenadas polares 753
- 14.3 Área y longitud de arco en coordenadas polares 767

**Capítulo quince:**

**Vectores y geometría analítica tridimensional 779**

- 15.1 Vectores en dos dimensiones 780
- 15.2 El producto escalar 788
- 15.3 Vectores en tres dimensiones 795
- 15.4 El producto vectorial 802
- 15.5 Planos y rectas 813
- 15.6 Funciones vectoriales de una variable 823
- 15.7 Longitud de arco y curvatura 835
- 15.8 Dinámica de las partículas 845
- 15.9 Las leyes de Kepler 853
- 15.10 Cilindros, superficies de revolución y superficies cuádricas 863

**Capítulo dieciséis:**

**Derivación de funciones de varias variables 879**

- 16.1 Funciones, límites y continuidad 879
- 16.2 Derivadas parciales 889

- 16.3 Funciones diferenciables y la regla de la cadena 900
- 16.4 El gradiente y la derivada direccional 911
- 16.5 El plano tangente y la recta normal 924
- 16.6 Máximos y mínimos de funciones de dos variables 932
- 16.7 Problemas de extremos con restricciones 943
- 16.8 Funciones implícitas 952

**Capítulo diecisiete:**

**Integrales múltiples 963**

- 17.1 Integrales dobles 963
- 17.2 Integrales iteradas 974
- 17.3 Aplicaciones de las integrales dobles 990
- 17.4 Integración empleando coordenadas polares 1005
- 17.5 Integrales triples 1016
- 17.6 Integración empleando coordenadas cilíndricas 1031
- 17.7 Integración empleando coordenadas esféricas 1043

**Capítulo dieciocho:**

**Integrales de línea y de superficie 1057**

- 18.1 Integrales de línea 1057
- 18.2 Independencia de la trayectoria 1070
- 18.3 Teorema de Green 1086
- 18.4 Área de una superficie e integrales de superficie 1095
- 18.5 Ecuaciones paramétricas de superficies 1109
- 18.6 La divergencia y el rotacional 1121
- 18.7 El teorema de la divergencia 1128
- 18.8 El teorema de Stokes 1142

**Bibliografía recomendada 1153**

**Respuestas a los problemas de número impar A-1**

**Índice I-1**





# CÁLCULO

## Capítulo 1

## Funciones

Antes de embarcarnos en el estudio del cálculo propiamente dicho es esencial contar con ciertos conceptos básicos firmemente arraigados en la mente. El principal es la idea de función. Hasta ahora, el lector ha encontrado numerosos ejemplos de funciones elementales; por ejemplo, funciones como

$$y = x^2 - 1,$$

o bien

$$x = \sqrt{2t + 1},$$

así como muchas otras más. Con expresiones como las anteriores fue que los matemáticos comenzaron a emplear el término de “función” en un sentido técnico. Sin embargo, el concepto de función es mucho más profundo y mucho más general que lo que sugieren los anteriores y sencillos ejemplos, y el mundo matemático, en forma gradual, se dio cuenta de ello durante los siglos dieciocho y diecinueve. En una forma u otra las funciones subyacen a todos los aspectos del cálculo, y por tanto este capítulo se enfoca a dar una comprensión satisfactoria de esta idea crucial.

Aun cuando el lector esté familiarizado con gran parte del material de este capítulo, debe examinarlo con cuidado, poniendo especial atención a la definición y descripción de las funciones en la sección 1.4.

## 1.1 NÚMEROS, CONJUNTOS, INTERVALOS Y VALORES ABSOLUTOS

Lo natural para comenzar el estudio del cálculo es un repaso de algunas de las propiedades del sistema de los números reales. Como suponemos que el lector ha tenido una larga experiencia con estos números, de lo que se trata en esta parte es de repasar algo de la terminología asociada con los números y los conjuntos de números con que nos encontraremos en el libro.

### Números reales

En los cursos elementales se acostumbra comenzar a partir de los **enteros positivos** 1, 2, 3, . . . y las operaciones de suma y de multiplicación. Aplicando estas operaciones a los enteros positivos no se obtiene otra clase de números. Si se introduce la resta, que es la operación inversa de la suma, se obtiene el **cero** y los **enteros negativos**  $-1, -2, -3, \dots$ . Además, la introducción de la división (excepto entre cero), que es la operación inversa de la multiplicación, conduce a las fracciones positivas y negativas, como  $\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \dots$ . El conjunto de estos números es el de los **números racionales**, o sea, números que se pueden escribir como razones de dos enteros.

Sin embargo, nada más con los números racionales no podemos calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno, ni resolver ecuaciones polinomiales simples como  $x^2 - 3 = 0$ , ni calcular la circunferencia de un círculo con diámetro igual a uno. Para estos fines necesitamos los **números irracionales**, como  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$ , que no se pueden expresar como una razón entre dos enteros. Los números racionales, junto con los irracionales, forman el conjunto de los **números reales**. A este conjunto lo denotaremos con  $R^1$ .

### Representación geométrica de los números reales

Un concepto fundamental en las matemáticas, que relaciona al álgebra con la geometría, es la representación geométrica de los números reales como puntos en una recta. Se hace esto seleccionando un punto en la recta para representar el 0, y otro para representar el 1. Con ello se determina una escala en términos de la cual se pueden indicar los números reales restantes en forma de puntos sobre la recta. Los números reales positivos corresponden, por convención, a los puntos a la derecha del 0, y los reales negativos a los puntos a la izquierda del 0, como se ve en la figura. 1.1.1. Cada número real se asocia de modo único con un sólo punto en la recta y viceversa. Debido a esta correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta, se usan con frecuencia las palabras “número real” y “punto” en forma indistinta, y a la recta se le llama recta numérica, o eje real.

### Conjuntos

Será conveniente que de vez en cuando usemos algo de la terminología relacionada con **conjuntos** de objetos matemáticos, en especial conjuntos de números reales que tienen





Figura 1.1.1

determinada propiedad. Por ejemplo, nos podríamos referir al conjunto de los enteros pares positivos, o al conjunto de los números racionales. Lo más importante que se debe recordar acerca de un conjunto en matemáticas es que debe haber una regla que nos diga sin ambigüedades si determinado objeto es miembro del conjunto o no. Por ejemplo, no podemos hablar acerca del conjunto de los números positivos reales grandes. En el sentido matemático esto no es un conjunto, porque no hemos especificado regla alguna para determinar si algún número positivo real en particular es miembro o no del conjunto. Por otro lado, el conjunto de los números reales mayores que diez millones sí está bien definido.

Con frecuencia usaremos las letras mayúsculas  $A, B, C, \dots$  para indicar conjuntos, y las minúsculas  $a, b, c, \dots$  para indicar a los miembros de un conjunto. La notación  $x \in S$  indica que  $x$  es miembro de  $S$ ; si  $s$  no pertenece a  $S$ , entonces se escribe  $x \notin S$ . La notación normal para describir un conjunto es dar un elemento genérico del conjunto, seguido de una barra y, a continuación, la regla que determina la pertenencia al conjunto, y todo lo anterior encerrado en llaves. Por ejemplo, podemos identificar al conjunto  $A$  de todos los números reales negativos escribiendo

$$A = \{x | x < 0\}.$$

También, si sólo hay pocos miembros en el conjunto, simplemente se escriben. Por ejemplo,

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

A veces, podremos emplear una notación semejante, aun cuando el conjunto tenga muchos elementos, como en el caso

$$C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}.$$

En estos casos suponemos que la regla general que determina la pertenencia a los conjuntos es obvia cuando se escriben algunos miembros; los tres puntos suspensivos (elipsis) indican que el proceso continúa en forma indefinida.

Recordaremos las siguientes propiedades y conceptos importantes asociados con los conjuntos:

1. Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales**, lo cual se escribe  $A = B$  si, y sólo si,  $A$  y  $B$  tienen exactamente los mismos elementos.
2.  $A$  está contenido en  $B$ , o  $A$  es un **subconjunto** de  $B$ , lo cual se escribe  $A \subset B$ , si, y sólo si cada elemento de  $A$  está también en  $B$ . Si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ , entonces  $A = B$ .
3. El conjunto **vacío** es el que no tiene elementos, y se denota con  $\emptyset$ .
4. La **unión** de  $A$  y  $B$ , que se escribe  $A \cup B$ , es el conjunto de los elementos que están en  $A$  o en  $B$ , o en ambos. Así,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ (o ambos)}\} \quad (1)$$

5. La **intersección** de  $A$  y  $B$ , que se escribe  $A \cap B$ , es el conjunto de los elementos que están tanto en  $A$  como en  $B$ . Así,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}. \quad (2)$$

6. El **complemento** de  $A$  con respecto a  $S$ , que se escribe  $S - A$ , es el conjunto de los elementos que están en  $S$ , pero no en  $A$ . Así,

$$S - A = \{x \mid x \in S \text{ y } x \notin A\}. \quad (3)$$

Si  $S$  es un conjunto no vacío de números reales, y si existe un número  $M$  tal que  $x \leq M$  para toda  $x \in S$ , se dice entonces que  $S$  está **acotado por arriba**. Igualmente, si existe un número  $m$  tal que  $m \leq x$  para toda  $x \in S$ , entonces se dice que  $S$  está **acotado por abajo**. A los números  $M$  y  $m$  se les llama **cota superior** y **cota inferior** de  $S$ , respectivamente. De un conjunto  $S$  que está acotado tanto por arriba como por abajo simplemente se dice que está **acotado**; si no es así, se le llama **no acotado**. Por ejemplo, el conjunto  $A$  de todos los enteros pares positivos está acotado por abajo (por el cero), pero no por arriba; por tanto,  $A$  es un conjunto no acotado. Por otro lado, el conjunto

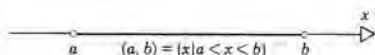
$$B = \left\{ x \mid x = \frac{1}{n} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

está acotado tanto por arriba como por abajo (por 1 y 0, respectivamente), y por tanto es un conjunto acotado.

## Intervalos

Con frecuencia nos encontraremos con conjuntos especiales de números reales que se conocen como **intervalos**. Para un par dado de números reales  $a$  y  $b$ , y  $a < b$ , el **intervalo abierto**  $(a, b)$  es el conjunto de números reales  $x$  tales que  $a < x < b$  (véase figura 1.1.2). En símbolos

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}. \quad (4)$$



**Figura 1.1.2** Intervalo abierto.

En forma análoga, el **intervalo cerrado**  $[a, b]$  está dado por

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad (5)$$

como se ve en la figura 1.1.3. Obsérvese que el intervalo cerrado  $[a, b]$  contiene a los

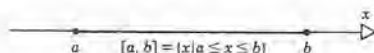


Figura 1.1.3 Intervalo cerrado.

puntos extremos, mientras que el intervalo abierto  $(a, b)$  no los contiene. Nótese también que hemos empleado paréntesis rectangulares o circulares, respectivamente, para indicar si los puntos extremos están o no contenidos en el intervalo. Desde luego, el intervalo puede contener a uno de los puntos extremos, pero no al otro. A este intervalo se le representa como  $[a, b)$  o  $(a, b]$ , dependiendo de cuál es el punto extremo que se incluye. Todos los intervalos mencionados hasta ahora son intervalos **acotados**.

Con frecuencia haremos referencia a un intervalo como el  $\{x | x > a\}$ . En este caso emplearemos el símbolo “infinito”  $\infty$  y escribiremos

$$(a, \infty) = \{x | x > a\} \quad \text{o} \quad [a, \infty) = \{x | x \geq a\}. \quad (6)$$

De igual forma se escribe

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\} \quad \text{o} \quad (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}. \quad (7)$$

El conjunto de todos los números reales es el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Haremos notar que los símbolos  $\infty$  y  $-\infty$  no representan números reales y no comparten las propiedades aritméticas del sistema de los números reales. Los intervalos como  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  y  $(-\infty, \infty)$  son ejemplos de intervalos **no acotados**.

## Valor absoluto

Dos de las propiedades importantes de un número real son su signo y su magnitud. Geométricamente, el signo nos dice la ubicación, a la derecha o a la izquierda del origen en la recta numérica, y la magnitud es la distancia desde el origen al punto. Para aislar la propiedad de magnitud, se introduce el **valor absoluto** de un número real  $a$ , que se representa con  $|a|$ , y se define por

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Así,  $|2| = 2$ ,  $|0| = 0$ , y  $|-1/3| = 1/3$ . Es claro que el valor absoluto de cualquier número real  $a$  es no negativo, y representa, geométricamente, la distancia desde el origen hasta el punto  $a$  (véase figura 1.1.4). Además,  $|a - b|$  es la distancia entre los puntos  $a$  y  $b$ . Esto es claro si  $a > b$ , en cuyo caso la distancia entre los puntos es  $a - b = |a - b|$ .

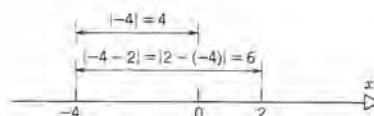


Figura 1.1.4



Si  $a < b$ , entonces la distancia entre los puntos es  $b - a = -(a - b) = |a - b|$ . En este sentido, se puede pensar que  $|a| = |a - 0|$ .

### EJEMPLO 1

Resolver la ecuación

$$|2x - 4| = |3 - x|. \quad (9)$$

En el intervalo  $[2, 3]$ , tanto  $2x - 4$  como  $3 - x$  son no negativos, y por tanto la ecuación (9) se reduce a

$$2x - 4 = 3 - x$$

y su solución es  $x = \frac{7}{3}$ . Por otro lado, en los intervalos  $(-\infty, 2)$  y  $(3, \infty)$  ya sea  $2x - 4$  ó  $3 - x$  (pero no ambos) es negativo. Entonces, la ecuación 9 se transforma en

$$2x - 4 = -(3 - x),$$

y la solución es  $x = 1$ . Por tanto, los números  $x = 1$  y  $x = \frac{7}{3}$  son las soluciones de la ecuación 9. ■

El valor absoluto da un modo alternativo de definir a un conjunto acotado. El conjunto  $S$  es acotado si existe un número positivo  $K$  tal que  $|x| \leq K$  para toda  $x \in S$ . En este caso,  $K$  es la cota superior y  $-K$  es la cota inferior de  $S$ .

El valor absoluto se puede expresar en términos del símbolo de raíz cuadrada como sigue. El signo radical indica siempre la raíz cuadrada no negativa; así,  $\sqrt{a}$  representa al número *no negativo* cuyo cuadrado es  $a$ . Por ejemplo,  $\sqrt{25} = 5$ ,  $\sqrt{(-5)^2} = 5$ , y en general

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

En consecuencia,

$$|x| = \sqrt{x^2}. \quad (11)$$

Una fuente de errores y confusiones frecuentes es el no tener el cuidado suficiente con el signo al extraer raíces cuadradas, en especial cuando el signo puede cambiar a medida que una variable toma distintos valores. Por ejemplo,  $\sqrt{(x+2)^2} = x+2$  para  $x \geq -2$ , pero  $\sqrt{(x+2)^2} = -(x+2)$  cuando  $x < -2$ .

Respecto a la multiplicación y a la división, el valor absoluto tiene las propiedades de que si  $x$  y  $y$  son números reales, entonces

$$|xy| = |x| |y|, \quad (12)$$

y

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0. \quad (13)$$

Se puede establecer con facilidad la ecuación 12 si se consideran por separado los cuatro casos  $x \geq 0, y \geq 0$ ;  $x < 0, y \geq 0$ ;  $x \geq 0, y < 0$ ;  $x < 0, y < 0$ . El mismo procedimiento también demuestra la ecuación 13, con la excepción de que se debe excluir a  $y = 0$ .

## PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 4, determinar  $A \cup B$  y  $A \cap B$ .

1.  $A = (-1, 2)$ ,  $B = [0, 4)$
2.  $A = [-3, 3]$ ,  $B = (-5, 1)$
3.  $A = (-\infty, 0)$ ,  $B = (0, \infty)$
4.  $A = \{x | x^2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | (x - 1)^2 = 4\}$
5. Si  $A = \{0, 2\}$  y  $B = \{0, 2, 4\}$ , determinar si cada una de las afirmaciones siguientes es correcta y explicar la respuesta.
  - (a)  $2 \in A$
  - (c)  $A \in B$
  - (b)  $2 \subset B$
  - (d)  $A \subset B$
6. Si  $A = \{0, 2\}$  y  $B = \{0, 2, \{0, 2\}\}$ , determinar si cada una de las afirmaciones siguientes es correcta y explicar la respuesta.
  - (a)  $2 \in A$
  - (c)  $A \in B$
  - (b)  $2 \subset B$
  - (d)  $A \subset B$

En cada uno de los problemas 7 a 10 determinar  $A - B$ .

7.  $A = [2, 3]$ ,  $B = (2, 3)$
8.  $A = R^1$ ,  $B = \{x | x^2 < 4\}$
9.  $A = [0, 1]$ ,  $B = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1)$
10.  $A = R^1$ ,  $B = [-3, 3] \cap (0, 4)$

En los problemas 11 a 16, determinar si el conjunto está acotado por arriba o acotado por abajo.

11.  $S = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$
12.  $S$  es el conjunto de los enteros positivos.
13.  $S = \{x | x \leq 1\}$
14.  $S = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$
15.  $S = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n = 2, 3, \dots \right\}$

$$16. S = \{x | x^2 > 3\}$$

17. Determinar el conjunto  $S = \{s | x^2 + x - s > 0 \text{ para toda } x \in R^1\}$ .

18. Determinar el conjunto  $S = \{s | x^2 - 3x + s < 0 \text{ para alguna } x \in R^1\}$ .

En los problemas 19 a 24 calcular todos los valores de  $x$  que satisfagan la ecuación dada.

19.  $|2x + 3| = 1$
20.  $|3x - 5| = 6$
21.  $|1 - x| = x - 1$
22.  $|6 - x| = |2x - 7|$
23.  $\left| \frac{3 - x}{3 + x} \right| = 4$
24.  $|3x - 1| = 5 + 2x$
25. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(|x| + x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

26. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \begin{cases} x, & x \geq y; \\ y, & x < y. \end{cases}$$

En los problemas 27 y 28 demostrar lo que se dice teniendo en cuenta los cuatro casos que se mencionaron en el texto.

$$27. |xy| = |x| |y| \quad 28. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$$

### \* Compleción de los números reales

Un conjunto acotado de números reales tiene muchas cotas superiores y muchas cotas inferiores. Por ejemplo, una vez que se haya encontrado una cota superior, cualquier número mayor también es cota superior. A la menor de las cotas superiores se le llama **mínima cota superior**, y a la mayor de las cotas inferiores se le llama **máxima cota inferior**. Una propiedad vital del sistema de los números reales es que *todo conjunto acotado no vacío de números reales*

tiene una mínima cota superior y una máxima cota inferior. A este enunciado se llama **propiedad de completación** del sistema de los números reales. Un conjunto que está acotado por un lado, pero no por el otro, tiene una máxima cota inferior o una mínima cota superior, de acuerdo con el caso, pero no ambas cotas.

La propiedad de completación es asombrosamente sencilla de enunciar, pero en todo caso no es obvia su validez, y tiene muchas y profundas consecuencias que se pueden describir por completo sólo en cursos más avanzados de análisis matemático.

En los problemas 29 a 32, calcular la mínima cota superior y la máxima cota inferior, si existen, del conjunto dado de números reales.

$$29. S = \left\{ x \mid x = \frac{n-1}{n+1} \text{ para } n = 1, 2, \dots \right\}$$

$$30. S = \left\{ x \mid x = \frac{(-1)^n}{n} \text{ para } n = 1, 2, \dots \right\}$$

$$31. S = \{ y \mid y = x^2 + 2x \text{ para } -2 \leq x \leq 1 \}$$

$$32. S = \left\{ y \mid y = \frac{1}{1+x^2} \text{ para } -\infty < x < \infty \right\}$$

## 1.2 DESIGUALDADES

Con frecuencia necesitaremos determinar al conjunto de números reales que satisfacen cierta desigualdad, como por ejemplo  $4 - 2x < 5$ , o bien  $-4 < 2 - 3x \leq 14$ ; a esto se le llama resolver la desigualdad. El tratamiento algebraico de las desigualdades se basa en las dos propiedades siguientes de los números reales:

1. Si  $a < b$ , entonces  $a + c < b + c$  para todo número real  $c$ .
2. Si  $a < b$ , y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$ ; si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$ .

Los siguientes ejemplos muestran la solución de desigualdades.

### EJEMPLO 1

Determinar todos los números reales que satisfacen la desigualdad

$$4 - 2x < 5 \tag{1}$$

Para despejar a  $x$  sumamos  $-4$  a ambos lados de la desigualdad y obtenemos  $-2x < 1$ . A continuación, dividimos la desigualdad entre  $-2$  e invertimos el sentido de la desigualdad, porque  $-2$  es un número negativo; con ello se obtiene

$$x > -\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Así, si  $x$  satisface la desigualdad  $4 - 2x < 5$ , entonces necesariamente  $x > -\frac{1}{2}$ . No hemos demostrado todavía que para cada  $x > -\frac{1}{2}$  se satisface la desigualdad  $4 - 2x > 5$ . Podemos hacerlo simplemente invirtiendo nuestros argumentos; comenzamos con  $x > -\frac{1}{2}$  y multiplicamos por  $-2$  para obtener  $-2x < 1$ , y a continuación sumamos  $4$  a ambos lados de la desigualdad para obtener  $4 - 2x > 5$ . Así, la solución de la desigualdad (1) es el conjunto  $S = \{x \mid x > -\frac{1}{2}\}$ , o sea el intervalo  $(-\frac{1}{2}, \infty)$ . ■



El ejemplo 1 muestra que hay dos etapas en la “resolución” de una desigualdad. Primero, desarrollando la desigualdad se deduce una condición necesaria para que  $x$  esté en determinado conjunto  $S$ . El segundo paso es demostrar que la condición también es suficiente, esto es, que si  $x \in S$ , entonces se satisface la desigualdad original. De este modo la solución de la desigualdad es el conjunto  $S$ . En general,  $S$  es un intervalo o una unión de intervalos; sin embargo, es posible que  $S$  sólo conste de puntos aislados, o aun que sea el conjunto vacío. La segunda parte del argumento se desarrolla invirtiendo los pasos de la primera parte. Siempre que se hayan empleado operaciones como suma y multiplicación, no habrá dificultad en invertir los pasos y, en general, se omite esta parte del argumento.

## EJEMPLO 2

Determinar los números reales que satisfacen la desigualdad

$$-4 < 2 - 3x \leq 14. \quad (3)$$

Obsérvese primero que la desigualdad dada es equivalente al par de desigualdades

$$-4 < 2 - 3x \quad \text{y} \quad 2 - 3x \leq 14, \quad (4)$$

cada una de las cuales se puede manejar de modo semejante al ejemplo 1. De la primera desigualdad de (4) tenemos que  $3x < 5$ , ó  $x < 2$ . La segunda desigualdad de (4) da  $3x \geq -12$ , ó  $x \geq -4$ . Por tanto, la solución de ambas desigualdades es el conjunto  $S = \{x \mid -4 \leq x < 2\}$  o sea el intervalo  $[-4, 2)$ .

También se puede manejar ambos lados de (3) al mismo tiempo. Primero sumamos  $-2$  a cada miembro de (3), y obtenemos  $-6 < -3x \leq 12$ . A continuación se divide entre  $-3$  y se invierte el sentido de las desigualdades; así,  $2 > x \geq -4$ , o sea  $-4 \leq x < 2$ , que es el mismo resultado que se obtuvo antes. ■

## EJEMPLO 3

Determinar los números reales que satisfacen la desigualdad

$$x^2 - 2x - 1 > 2. \quad (5)$$

Primero sumamos  $-2$  a ambos lados de la desigualdad, con lo cual se obtiene  $x^2 - 2x - 3 > 0$ ; a continuación, factorizando el lado izquierdo obtenemos

$$(x - 3)(x + 1) > 0. \quad (6)$$

La desigualdad (6) es válida cuando ambos factores tienen el mismo signo; esto es, cuando  $x - 3 > 0$  y  $x + 1 > 0$ , o bien cuando  $x - 3 < 0$  y  $x + 1 < 0$ . Es útil representar geométricamente la situación, como se muestra en la figura 1.2.1. Es claro que  $x - 3$

y  $x + 1$  son positivos si  $x > 3$ , y son negativos si  $x < -1$ . Por tanto, los intervalos para los cuales es válida la desigualdad (5) son  $(-\infty, -1)$  y  $(3, \infty)$ , y el conjunto de puntos para los cuales se satisface la desigualdad es  $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ . ■

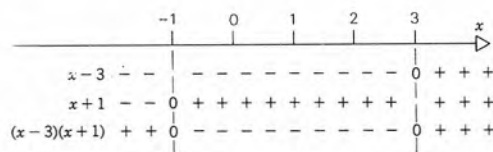


Figura 1.2.1

## EJEMPLO 4

Determinar los números reales que satisfacen la desigualdad

$$\frac{(x - 3)(x + 1)}{(x + 2)} > 0, \quad x \neq -2. \quad (7)$$

Esto es una prolongación del ejemplo 3, y se puede resolver empleando el diagrama que aparece en la figura 1.2.2. La expresión dada es positiva cuando los tres factores son positivos, o cuando uno es positivo y dos son negativos. Así, la desigualdad (7) se satisface cuando  $-2 < x < -1$ , o bien cuando  $x > 3$ , esto es, se satisface mediante el conjunto  $(-2, -1) \cup (3, \infty)$ . ■

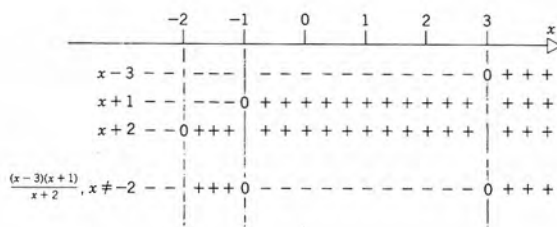


Figura 1.2.2

## EJEMPLO 5

Determinar los números reales que satisfacen la desigualdad

$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{x} - 2 \leq 2, \quad x \neq 0. \quad (8)$$

Es conveniente considerarla como dos desigualdades separadas. Primero, si

$$\frac{1}{x} - 2 \leq 2,$$

entonces

$$\frac{1}{x} \leq 4.$$

Por tanto

$$\text{o bien } x < 0, \text{ o bien } x \geq \frac{1}{4}. \quad (9)$$

A continuación, si

$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{x} - 2,$$

entonces

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{2},$$

por tanto

$$0 < x < 2. \quad (10)$$

Estos resultados se indican en la figura 1.2.3. Finalmente, para satisfacer tanto la ecuación 9 como la 10, se debe tener que

$$1/4 \leq x < 2. \quad (11)$$

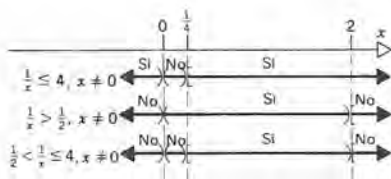


Figura 1.2.3

Un error en el que se incurre con frecuencia al resolver desigualdades es multiplicar ambos lados de una desigualdad por una cantidad que puede cambiar el signo, como por ejemplo  $x - 2$ , sin tener en cuenta el hecho de que si la cantidad es negativa, entonces se debe invertir el sentido de la desigualdad. Otro error que a veces se comete es asegurar que si  $b > a$  entonces  $b^2 > a^2$ ; es decir, elevar la desigualdad al cuadrado. Esto no es válido a menos que  $b + a > 0$ ; nótese que  $4 > -6$ , pero que  $16 < 36$ .

Se presentan con frecuencia desigualdades en las que intervienen valores absolutos. En tales casos el siguiente resultado es fundamental.

**Teorema 1.2.1**

Si  $r > 0$ , entonces  $|x| \leq r$  si y sólo si  $-r \leq x \leq r$ ; análogamente,  $|x| \geq r$  si y sólo si  $x \leq -r$  o  $x \geq r$ .

Se pueden expresar resultados análogos en términos de  $< y >$ ; por ejemplo,  $|x| < r$  si y sólo si  $-r < x < r$ . Un argumento que convence acerca de la validez del teorema 1.2.1 se puede dar recurriendo al razonamiento geométrico. Primero, si la distancia de 0 a  $x$  es menor o igual que  $r$ , de tal modo que  $|x| \leq r$ , entonces  $x$  debe estar en el intervalo  $[-r, r]$ . También, si  $x \in [-r, r]$ , entonces la distancia de 0 a  $x$  es menor o igual que  $r$ . Esto se muestra en la figura 1.2.4. Un argumento semejante se aplica a la segunda parte del teorema.  $\square$

**Figura 1.2.4**

Se tiene una pequeña extensión del teorema con el resultado  $|x - a| \leq r$  si y sólo si  $-r \leq x - a \leq r$ , o bien  $a - r \leq x \leq a + r$ . Por tanto

$$|x - a| \leq r \quad \text{si y sólo si} \quad x \in [a - r, a + r]. \quad (12)$$

Geométricamente (12) establece que si la distancia de  $a$  a  $x$  es menor o igual que  $r$ , entonces  $x$  debe estar en un intervalo centrado en  $a$  que se extiende  $r$  unidades en cada sentido; y recíprocamente, si  $x$  está en este intervalo, entonces se encuentra dentro de  $r$  unidades de distancia de  $a$ . A un intervalo abierto  $(a - r, a + r)$  se le llama a veces **vecindad** de  $a$ .

**EJEMPLO 6**

Determinar los números reales que satisfacen la desigualdad

$$|x + 3| < 2. \quad (13)$$

Esta desigualdad indica que la distancia desde  $-3$  a  $x$  debe ser menor que 2. En consecuencia,  $x$  está en el intervalo  $(-5, -1)$ . Analíticamente, la ecuación 13 es equivalente a  $-2 < x + 3 < 2$ , y entonces  $-5 < x < -1$ , o sea que  $x \in (-5, -1)$ . ■

**EJEMPLO 7**

Determinar los números reales que satisfacen la desigualdad

$$|2x + 3| \leq 5. \quad (14)$$



Esta desigualdad se puede escribir de la siguiente manera:

$$|2x + 3| = |2(x + \frac{3}{2})| = 2|x + \frac{3}{2}| \leq 5$$

de la cual se sigue que

$$|x + \frac{3}{2}| \leq \frac{5}{2}.$$

Por tanto, la distancia desde  $-\frac{3}{2}$  hasta  $x$  no puede ser mayor que  $\frac{5}{2}$ . En consecuencia,  $x$  debe estar en el intervalo  $[-4, 1]$ . ■

### EJEMPLO 8

Determinar los números reales que satisfacen la desigualdad

$$\left| \frac{1}{x} - 2 \right| > 3, \quad x \neq 0. \quad (15)$$

Sea  $u = 1/x$ ; entonces (15) adquiere la forma  $|u - 2| > 3$ . Por tanto  $u$  debe estar a más de 3 unidades de 2, y entonces  $u > 5$ , ó  $u < -1$ . En consecuencia,

$$\text{si } u > 5, \text{ entonces } \frac{1}{x} > 5,$$

de modo que

$$0 < x < \frac{1}{5},$$

y

$$\text{si } u < -1, \text{ entonces } \frac{1}{x} < -1,$$

y

$$-1 < x < 0.$$

Por tanto, la solución de la desigualdad (15) es  $-1 < x < \frac{1}{5}$ ,  $x \neq 0$ , o sea,  $x \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{5})$ . ■

Finalizaremos esta sección con un resultado que nos permite calcular el valor absoluto de una suma.

#### Teorema 1.2.2

(Desigualdad del triángulo)

Si  $x$  y  $y$  son números reales, entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (16)$$

## 14 FUNCIONES

La desigualdad (16) es muy importante y su demostración es sencilla. Primero, obsérvese que

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad (17)$$

para todos los valores de  $x$ ; el lado izquierdo es una igualdad si  $x \leq 0$ , y el lado derecho es una igualdad si  $x \geq 0$ . De modo semejante,

$$-|y| \leq y \leq |y|. \quad (18)$$

Sumando las expresiones 17 y 18 se obtiene

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

y entonces (16) es consecuencia del teorema 1.2.1.  $\square$

El problema 21 que aparece en seguida pide otra demostración del teorema 1.2.2, y los problemas 22 a 25 indican algunos usos elementales de la desigualdad del triángulo, el cual se puede generalizar en forma considerable y tiene aplicaciones mucho más allá del presente contexto.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 expresar el conjunto dado en forma de intervalo o de unión de intervalos.

1.  $S = \{x \mid |x + 3| < 3\}$

2.  $S = \{x \mid |3 - 2x| < 1\}$

3.  $S = \{t \mid 0 < |t - 1| < 1\}$

4.  $S = \{w \mid |2 - 3w| > 3\}$

5.  $S = \{x \mid |x - a| < \epsilon\}$  donde  $a$  y  $\epsilon$  son números dados y  $\epsilon > 0$ .

6.  $S = \{x \mid 0 < |x - a| < \epsilon\}$ , donde  $a$  y  $\epsilon$  son números dados y  $\epsilon > 0$ .

En los problemas 7 a 20 determinar el conjunto de números que satisface la desigualdad dada. Expresar la respuesta como un intervalo o una unión de intervalos.

7.  $3x - 7 \geq 2 - x$       8.  $2x < 5 - 3x$

9.  $3 < 4x - 1 \leq 6$       10.  $-4 \leq 2 - 3x \leq -2$

11.  $\frac{x-2}{x-3} > 0$ ,  $x \neq 3$       12.  $x^2 + x - 3 > 3$

13.  $7 - \frac{2}{x} > 3$ ,  $x \neq 0$       14.  $6x^2 + 3x - 8 \leq 1$

15.  $-1 < 2 - \frac{1}{x} < 1$ ,  $x \neq 0$

16.  $\frac{x+1}{(x+3)(x-3)} > 0$ ,  $x \neq \pm 3$

17.  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3} \leq 0$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq 3$

18.  $|x - 2| \leq |x + 2|$

19.  $\left|4 - \frac{1}{x}\right| < 1$ ,  $x \neq 0$

20.  $\left|5 + \frac{4}{x}\right| \geq 2$ ,  $x \neq 0$

21. Demostrar la desigualdad del triángulo, o sea el teorema 1.2.2, revisando los cuatro casos:  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ;  $x < 0$ ,  $y < 0$ ;  $x > 0$ ,  $y < 0$ ;  $y < 0$ ,  $x > 0$ .

En los problemas 22 a 25, se puede obtener el resultado

que se desea mediante el empleo cuidadoso de la desigualdad del triángulo.

22. Si  $x_1, x_2$  y  $x_3$  son números reales, demostrar que

$$|x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

¿Se puede generalizar este resultado para  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ?

23. Si  $x$  y  $y$  son números reales, demostrar que

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

¿En qué condiciones es válida la igualdad?

24. Si  $|x - 1| + |x - 3| < \alpha$  es válida para determinada  $x$ , demostrar que  $\alpha > 2$ . *Sugerencia:*  $2 = |3 - 1| = |(x - 1) - (x - 3)|$ . Generalizar este resultado para demostrar que si  $|x - a| + |x - b| < \alpha$  es válida para determinada  $x$ , entonces  $\alpha > |b - a|$ .

25. Si  $x$  y  $y$  son números reales, demostrar que

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

*Sugerencia:* considere la identidad  $|x| = |(x - y) + y|$ .  
¿En qué condiciones es válida la igualdad?

26. Demostrar que la suma de un número real positivo

y su recíproco es mayor o igual que dos; esto es,  $x + (1/x) \geq 2$ , para  $x > 0$ .

27. Si  $b > a$  y  $b + a > 0$ , demostrar que  $b^2 > a^2$ .

28. Demostrar que  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , y después que  $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$ .

29. Demostrar que

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

¿Cuándo se da la igualdad? A este resultado se le conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Al igual que la desigualdad del triángulo, ésta se puede generalizar en forma considerable.

\*En cada uno de los problemas 30 a 34, encontrar la mínima cota superior y la máxima cota inferior, si existen, del conjunto de números reales dado (véanse problemas 29 a 32 de la sección 1.1).

30.  $S = \{x \mid |x - 2| < 1\}$

31.  $S = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$

32.  $S = \{x \mid x^2 - x - 6 \leq 0\}$

33.  $S = \{x \mid x^2 - x - 6 > 0\}$

34.  $S = \{x \mid x|x + 1| \leq 2\}$

## 1.3 RELACIONES Y GRÁFICAS

### Sistema de coordenadas cartesianas

Se puede extender la correspondencia entre los números reales y los puntos geométricos de manera que se pueda trabajar con los puntos de un plano. Seleccionaremos dos rectas mutuamente perpendiculares cualesquiera, y les asignaremos una dirección positiva y una unidad de medida a cada una, y a su punto de intersección  $O$  le llamaremos **origen**. Se conviene llamar eje  $x$  y eje  $y$  a esas rectas, respectivamente, y orientarlas como se ve en la figura 1.3.1. A cada punto  $P$  del plano se le asigna un par de números, que se llaman sus **coordenadas**. Este par de números ubica al punto en el plano como se ve en la figura 1.3.1. Al primer número se le llama **coordenada  $x$** , o **abscisa**, del punto, y al segundo número se le llama **coordenada  $y$** , u **ordenada**, del mismo. Cuando decimos que un par de números son las coordenadas de un punto, digamos  $(x_0, y_0)$ , se sobreentiende que el primer número es la abscisa y el segundo la ordenada. Al par de números se le llama **par ordenado**. Cualquier punto  $P$  del plano se puede asociar\* con un par

\* La idea de usar pares de números para identificar a los puntos del plano, y a ecuaciones para describir curvas la originaron René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665). Descartes era filósofo y científico,



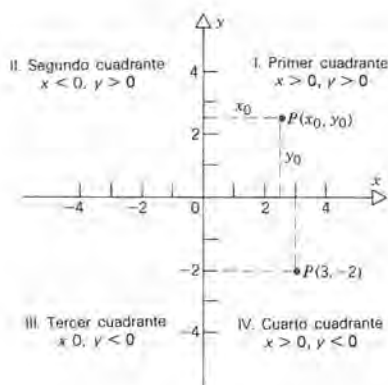


Figura 1.3.1

ordenado único de números reales, y al revés, cualquier par ordenado de números reales se puede asociar con un punto único del plano. Los ejes  $x$  y  $y$  dividen al plano  $xy$  en cuatro **cuadrantes**, como se ve en la figura 1.3.1.

Al conjunto de todos los pares ordenados de números reales se les denota por  $R^2$ :

$$R^2 = \{(x, y) | x \in R^1 \text{ y } y \in R^1\}. \quad (1)$$

De igual manera que en una dimensión, con frecuencia consideramos que los puntos geométricos y sus coordenadas son intercambiables; por ejemplo, se dice con frecuencia “el punto  $(x_0, y_0)$ ” en lugar de “el punto cuyas coordenadas son  $(x_0, y_0)$ .”

### Distancia

La distancia entre dos puntos en el plano se puede calcular con facilidad mediante el teorema de Pitágoras. De acuerdo con la figura 1.3.2, la distancia del origen  $O$  al punto  $P_0$  cuyas coordenadas son  $(x_0, y_0)$  es  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ . Como siempre, el signo radical denota a la raíz cuadrada no negativa de la cantidad que está bajo el radical. Análogamente, si la distancia de  $P_0$  a  $P_1$  se indica mediante  $d(P_0, P_1)$ , entonces

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \quad (2)$$

que dedicaba también algo de tiempo a las matemáticas. Sus resultados y métodos de lo que después se conoció como geometría analítica aparecen en su importante libro *La Géométrie* publicado en 1637. Descartes reconoció el poder del álgebra en la solución de problemas geométricos, y su pensamiento representó una notable ruptura con la tradición y punto de vista griegos acerca de la geometría. El sistema cartesiano, o rectangular, de coordenadas, lleva este nombre en su honor. Fermat era un jurista y matemático aficionado que vivió en Toulouse, al sur de Francia. Sus ideas acerca de la geometría con coordenadas las formuló al principio de 1629, y circularon en su correspondencia, pero no se publicaron sino hasta 1679. Su mayor fama la debe a la afirmación, sin demostración todavía, que se conoce como el último teorema de Fermat, y que es que para valores enteros de  $n > 2$ , es imposible encontrar enteros  $x$ ,  $y$  y  $z$  positivos tales que  $x^n + y^n = z^n$ .



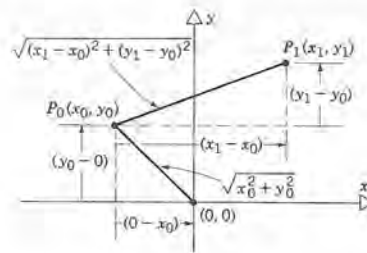


Figura 1.3.2

Nótese que si  $y_0 = y_1$ , cuando están  $P_0$  y  $P_1$  en una recta paralela al eje  $x$ , entonces

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2} = |x_1 - x_0|. \quad (3)$$

## Variables

Con frecuencia se desea considerar dos o más cantidades variables que se relacionan de alguna manera. Por **variable** se entiende un símbolo que puede ser igual a cualquier número de un conjunto determinado de números. O bien, con frecuencia ayuda el imaginarse que la variable es un miembro típico o genérico del conjunto definido. En general, el conjunto es  $R^1$ , o alguno de sus subconjuntos, como por ejemplo, los números positivos, los números entre cero y uno, etc. Con frecuencia se emplean letras como  $x$ ,  $y$  o  $z$  para representar variables que toman valores en  $R^1$ . A estas variables se les llama variables reales.

## Relaciones y gráficas

Las relaciones entre las variables pueden ser de muy diversos tipos, y a veces son en extremo complicadas. Por el momento nos ocuparemos sólo de relaciones en  $R^2$  que se puedan expresar en forma algebraica bastante sencilla. A continuación citamos algunos ejemplos. Cada uno de ellos se describirá después con más detalle.

$$y + 2x = 3,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9,$$

$$|y| = 2|x|,$$

$$y + 2x \geq 3,$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 9.$$

En cada caso hay algunos pares de valores de  $x$  y  $y$  que satisfacen la relación, mientras que otros no lo hacen. En la terminología geométrica se dice que algunos puntos del plano  $xy$  satisfacen la relación, pero otros no. El conjunto de todos los puntos del plano  $xy$  cuyas coordenadas satisfacen una relación determinada es **la gráfica** de la relación.

Los problemas concernientes a las gráficas y las relaciones se pueden dividir en dos categorías principales.

1. Dada una relación entre dos variables  $x$  y  $y$ , hacer un bosquejo de su gráfica en el plano  $xy$ .
2. Dada una descripción geométrica de un conjunto de puntos en el plano  $xy$ , deducir una expresión analítica para la relación cuya gráfica es el conjunto dado de puntos.

El primer problema surge en general cuando se desea representar una relación analítica complicada, quizá para emplear la intuición geométrica para estudiarla. ¡Una foto vale más que mil palabras! El segundo problema se presenta en forma típica cuando se desea sacar ventaja de los potentes procesos computacionales del álgebra para estudiar determinada situación enunciada en términos geométricos.

En el resto de esta sección presentaremos ejemplos de ambos tipos de problemas. Primero veremos las ecuaciones cuyas gráficas son rectas y círculos, respectivamente.

### Líneas rectas

Si  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son dos puntos, y  $x_1 \neq x_2$  (véase figura 1.3.3), entonces, la **pendiente**  $m$  del segmento de recta que une a los dos puntos se define como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (4)$$

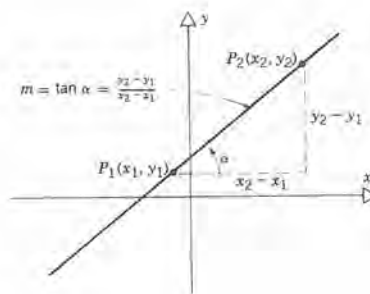


Figura 1.3.3

Una recta tiene la propiedad de que las pendientes de todos los segmentos que unen a puntos de la recta son iguales. A este número se le llama pendiente de la recta. Es claro que la pendiente de una recta es la razón de los cambios de las coordenadas  $x$  y  $y$  al moverse de un punto a otro en la recta. También, la pendiente es la tangente del ángulo comprendido entre la recta y el eje  $x$  positivo. De acuerdo con la figura 1.3.3, vemos que

$$m = \tan \alpha. \quad (5)$$

La pendiente  $m$  de una recta es positiva si los valores de  $y$  aumentan a medida que aumentan los de  $x$ , o si los valores de  $y$  disminuyen a medida que disminuyen los de  $x$ . Es negativa si  $y$  disminuye a medida que  $x$  aumenta, o si  $y$  aumenta a medida que  $x$  disminuye. Se dice que una recta paralela al eje  $y$  tiene una pendiente infinita.

Geométricamente, una recta queda determinada si se conocen su pendiente y un punto de la recta. Supongamos que  $m$  es la pendiente y que  $(x_1, y_1)$  es el punto dado. Entonces, si  $(x, y)$  representa cualquier otro punto de la recta, de la ecuación 4 se obtiene

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \quad (6)$$

o bien

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (7)$$

como la ecuación de la recta dada. La ecuación 7 también puede escribirse en la siguiente forma:

$$y - mx = y_1 - mx_1 \quad (8)$$

o bien

$$y = mx + b, \quad (9)$$

en la cual  $b$  es la ordenada al origen, o sea la ordenada del punto en el cual la recta interseca al eje  $y$ .

Para una recta paralela al eje  $x$ , la pendiente  $m$  es igual a cero, y la ecuación 7 se simplifica y queda como

$$y = y_1. \quad (10)$$

Análogamente, la ecuación de una recta paralela al eje  $y$  tiene la forma

$$x = x_1. \quad (11)$$

aunque esta ecuación no se puede obtener asignando valor alguno a  $m$  en la ecuación 7.

De acuerdo con las ecuaciones 7, 10 y 11 es claro que en la ecuación de una recta las variables  $x$  y  $y$  aparecen elevadas a la primera potencia, y no hay productos de  $x$  por  $y$ . A estas ecuaciones, surjan o no geométricamente, se les llama **ecuaciones lineales**. Al revés, la gráfica de cualquier ecuación lineal con dos variables es una recta. La ecuación lineal más general es

$$Ax + By = C, \quad (12)$$

en la cual  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes, y  $A$  y  $B$  no son iguales a cero simultáneamente. Si

$B \neq 0$ , entonces, dividiendo la ecuación 12 entre  $B$ , toma la forma  $y = - (A/B)x + (C/B)$ ; la pendiente  $m$  es igual a  $- A/B$ . Si  $B = 0$ , entonces  $A \neq 0$ , y la ecuación 12 se reduce a  $x = C/A$ , lo cual es una recta paralela al eje  $y$ .

### EJEMPLO 1

Definir la gráfica de la relación

$$y + 2x = 3. \quad (13)$$

Es una ecuación lineal, y por tanto su gráfica es una recta. Poniendo la ecuación en la forma  $y = - 2x + 3$ , se ve que la pendiente de la recta es  $- 2$ , y que pasa por el punto  $(0, 3)$ . Esta información determina por completo a la recta que corresponde a la ecuación 13. En la práctica, el modo más fácil de dibujar la recta es ubicar dos puntos de ella y trazar la recta que pase por ellos. Se puede encontrar un segundo punto haciendo  $y = 0$  en la ecuación 13, de donde  $x = \frac{3}{2}$ . La recta que pasa por los puntos  $(0, 3)$  y  $(\frac{3}{2}, 0)$  se muestra en la figura 1.3.4. ■

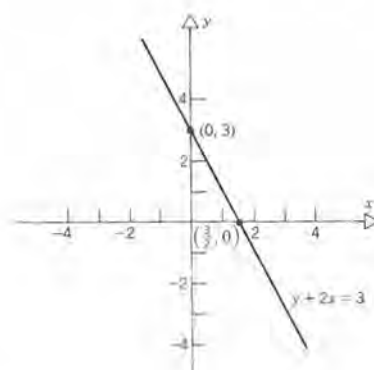


Figura 1.3.4

### EJEMPLO 2

Hallar la ecuación de la recta que se muestra en la figura 1.3.5, que pasa por los puntos  $(- 1, 2)$  y  $(3, 1)$ .

De acuerdo con las coordenadas de los puntos dados, la pendiente  $m$  de la recta es

$$m = \frac{1 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{1}{4}. \quad (14)$$



Entonces, de la ecuación 7,

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x + 1), \quad (15)$$

o sea,

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}.$$

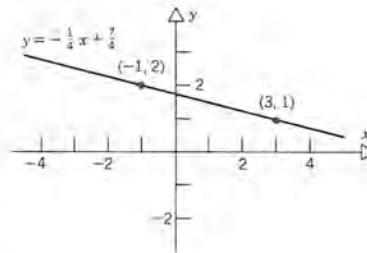


Figura 1.3.5

## Círculos

Un círculo es una figura plana que consta de todos los puntos que se encuentran a una distancia fija (el radio) de un punto dado llamado centro. Supongamos que  $(x_0, y_0)$  es el centro del círculo, que  $(x, y)$  es un punto arbitrario del círculo, y que  $r$  es el radio; entonces, de acuerdo con la fórmula de la distancia (2),

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (16)$$

es una relación que satisfacen sólo los puntos del círculo, y ningún otro punto más en el plano  $xy$ . Por ejemplo, la figura 1.3.6 muestra el círculo para el cual  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 1$ , y  $r = 3$ .

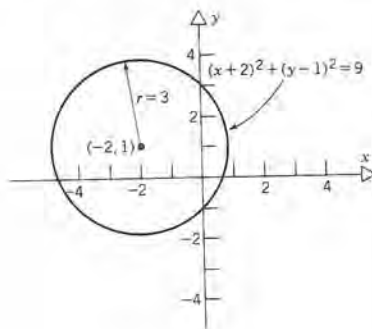


Figura 1.3.6

**EJEMPLO 3**

Determinar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0. \quad (17)$$

Para escribir una ecuación general de un círculo que sea cuadrática en  $x$  y  $y$ , que tenga la forma de la ecuación 16, es necesario que (a) los coeficientes de  $x^2$  y  $y^2$  sean los mismos cuando aparezcan estos términos del mismo lado de la ecuación, y (b) que no aparezca el término del producto  $xy$ . De este modo se puede obtener la forma (16) agrupando los términos en los que aparece cada una de las variables y completando el cuadrado. En el caso presente tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 - 2y &= 4, \\ (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) &= 4 + 4 + 1, \end{aligned}$$

o sea

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9. \quad (18)$$

La ecuación 18 tiene la forma (16) siendo  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 1$  y  $r = 3$ . La gráfica de la ecuación 18, y por tanto también de la 17, es un círculo de radio tres cuyo centro está en  $(-2, 1)$  (véase figura 1.3.6). ■

**Ejemplos de otras ecuaciones y gráficas**

Las relaciones pueden tener la forma de una ecuación o de una desigualdad en las que intervienen dos variables, o aun de varias ecuaciones o desigualdades. Las gráficas o relaciones tienen muchas formas distintas. La gráfica de una relación no necesita ser una sola curva en el plano  $xy$ , o, ciertamente, puede no constar de curvas en absoluto.

**EJEMPLO 4**

Halle la gráfica de la relación

$$|y| = 2|x|. \quad (19)$$

Para emplear la definición de valor absoluto de un número que dimos en la sección 1.1, debemos tener en cuenta por separado cada uno de los cuatro cuadrantes del plano  $xy$ .

- I. Si  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , entonces la ecuación 19 es  $y = 2x$ .
- II. Si  $x < 0$ ,  $y \geq 0$ , entonces la ecuación 19 es  $y = -2x$ .
- III. Si  $x < 0$ ,  $y < 0$ , entonces la ecuación 19 es  $-y = -2x$ , o  $y = 2x$ .

IV. Si  $x \geq 0$ ,  $y < 0$ , entonces la ecuación 19 es  $-y = 2x$ .

Combinando esta información vemos que cuando  $x$  y  $y$  tienen los mismos signos (primero y cuarto cuadrantes), entonces la ecuación 19 se reduce a  $y = 2x$ ; cuando  $x$  y  $y$  tienen signos opuestos (segundo y cuarto cuadrantes), la ecuación 19 se reduce a  $y = -2x$ . Por tanto, la gráfica de la ecuación 19 consta de dos rectas que se intersecan, como se ve en la figura 1.3.7. ■

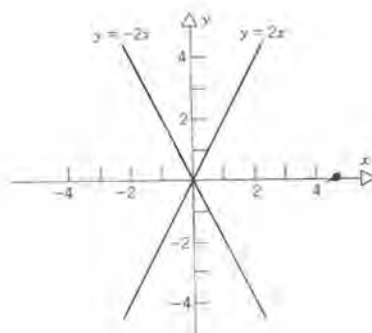


Figura 1.3.7

### EJEMPLO 5

Halle la gráfica de la relación

$$y + 2x \geq 3. \quad (20)$$

Este ejemplo tiene que ver con el ejemplo 1, y los puntos de la recta de ese ejemplo también satisfacen la relación (20). Además, si comenzamos de un punto en la recta  $y + 2x = 3$  que se muestra en la figura 1.3.8 y aumentamos ya sea  $x$  o  $y$ , se sigue satisfaciendo la relación (20). Sin embargo, si disminuimos ya sea  $x$  o  $y$ , entonces ya no se satisface la relación (20). Por tanto, la gráfica de esta relación es la región del plano que queda arriba y a la derecha de la recta  $y + 2x = 3$ , incluyendo la recta misma. Esta región del plano se muestra sombreada en la figura 1.3.8. ■

### EJEMPLO 6

Halle la gráfica de la relación

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 9. \quad (21)$$

Este ejemplo tiene que ver con el ejemplo 3. Un punto satisface a la relación (21)

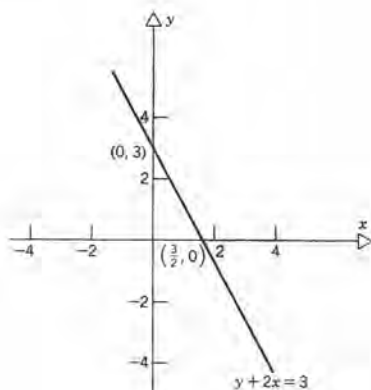


Figura 1.3.8

si, y sólo si su distancia al punto  $(-2, 1)$  es menor que tres unidades. Por tanto, la gráfica de la relación (21) es el conjunto de puntos que quedan dentro, pero no en, el círculo que corresponde a la ecuación  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ . Estos puntos se muestran sombreados en la figura 1.3.9. ■

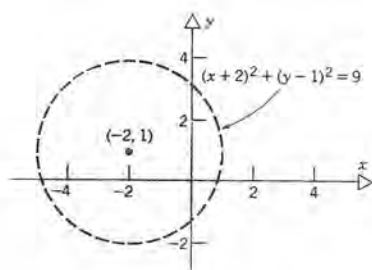


Figura 1.3.9

## EJEMPLO 7

Hallar la gráfica de la relación

$$y - |y| = 2(x - |x|). \quad (22)$$

Como en el ejemplo 4, se aconseja examinar cada cuadrante por separado. A continuación indicamos la forma que toma la ecuación 22 en cada cuadrante:

- I. Si  $x \geq 0, y \geq 0$ , entonces la ecuación 22 es  $0 = 0$ .
- II. Si  $x \leq 0, y \geq 0$ , entonces la ecuación 22 es  $0 = 4x$ .



III. Si  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ , entonces la ecuación 22 es  $2y = 4x$ .

IV. Si  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$ , entonces la ecuación 22 es  $2y = 0$ .

La primera afirmación es una identidad, que no impone restricciones a  $x$  o a  $y$ , mientras sean no negativos simultáneamente. Por tanto, todo punto en el primer cuadrante, incluyendo los ejes  $x$  y  $y$  positivos, y el origen, pertenece a la gráfica de la ecuación 22. Las afirmaciones segunda y cuarta muestran de nuevo que los ejes  $x$  y  $y$  positivos pertenecen a la gráfica de la ecuación 22. La tercera afirmación dice que la parte de la recta  $y = 2x$  que queda en el tercer cuadrante es también parte de la gráfica. En la figura 1.3.10 se muestra la gráfica de la ecuación 22. ■

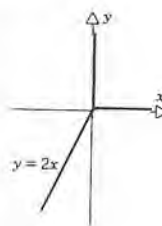


Figura 1.3.10

Finalmente, nótese que lo que parece ser, superficialmente, una relación entre dos variables reales puede, de hecho, no serlo, ya que puede no haber un par de valores de  $x$  y  $y$  que la satisfagan.

## EJEMPLO 8

Hallar la gráfica de

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + 9 = 0. \quad (23)$$

Como el lado izquierdo de la ecuación 23 siempre es estrictamente positivo, independientemente de los valores de  $x$  y  $y$ , no hay puntos cuyas coordenadas satisfagan a esta ecuación. Si bien este hecho es obvio viendo la forma de la ecuación 23, no es tan obvio si los términos de la ecuación se desarrollan de acuerdo con el teorema del binomio. Si se hace lo anterior, la ecuación toma la forma siguiente:

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y + 14 = 0, \quad (24)$$

y no es tan claro que no hay ningún par de valores de  $x$  y  $y$  que la satisfacen. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 4, calcular la distancia entre el par dado de puntos.

1.  $(2, -3)$  y  $(-1, 4)$
2.  $(0, -\pi)$  y  $(\pi/2, 0)$
3.  $(t, |t|)$  y  $(|t|, -t)$
4.  $(t, -1)$  y  $(1, t)$

5. Demostrar que el punto medio del segmento de recta que une a los puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$  es el punto

$$P_3\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

En los problemas 6 a 9, determinar si el triángulo cuyos vértices son los puntos dados es rectángulo, equilátero o isósceles.

6.  $(-6, 4)$ ,  $(-3, -2)$ ,  $(5, 2)$   
 7.  $(-3, -2)$ ,  $(-6, 9)$ ,  $(3, 2)$   
 8.  $(-2, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(0, -4)$   
 9.  $(-2, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(0, 1 + 2\sqrt{3})$

En los problemas 10 a 13, deducir una ecuación para la recta que tenga las propiedades dadas.

10. Pasa por  $(1, 2)$ , pendiente  $-2$ .  
 11. Pasa por el origen y su pendiente es 1.  
 12. Pasa por  $(-1, 3)$  y por  $(-1, -1)$ .  
 13. Pasa por  $(-1, -1)$  y por  $(2, 3)$ .

En los problemas 14 a 17, hacer un dibujo gráfica de la ecuación dada.

14.  $3x + 6y - 6 = 0$     15.  $2y = 4x - 7$   
 16.  $x - y + 2 = 0$     17.  $x + y = 2$

18. **Rectas paralelas.** Se dice que dos rectas en el plano son **paralelas** si coinciden, o bien no se intersectan.

a) Demostrar que las rectas  $y = 4x - 3$  y  $2y - 8x = 1$  son paralelas.

b) Demostrar que las dos rectas  $y = m_1x + b_1$  y  $y = m_2x + b_2$  son paralelas si y sólo si  $m_1 = m_2$  y que coinciden si y sólo si  $m_1 = m_2$  y  $b_1 = b_2$ .

c) Demostrar que las dos rectas  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  y  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  son paralelas si y sólo si  $A_1B_2 = A_2B_1$  (por simplicidad, suponer que  $A_1, B_1, A_2$  y  $B_2$  son distintos de cero).

19. **Rectas perpendiculares.** Se dice que dos rectas son **perpendiculares** (u **ortogonales**) si se intersectan en ángulos rectos (véase figura 1.3.11).

a) Si la pendiente de una recta es  $m_1 \neq 0$ , demostrar que la pendiente  $m_2$  de la otra es  $m_2 = -1/m_1$ . Sugerencia:  $m_1 = \tan \alpha$ ,  $m_2 = ?$

b) Demostrar que las dos rectas  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  y  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  son perpendiculares si y sólo si  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ .

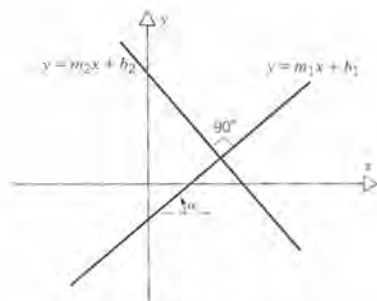


Figura 1.3.11

En los problemas 20 a 23, deducir una ecuación para la recta que tenga las propiedades dadas.

20. Paralela a la recta  $2x - 3y = 4$ , que pase por  $(2, -5)$ .  
 21. Paralela a la recta  $x + 2y = -5$ , que pase por  $(-2, 2)$ .  
 22. Perpendicular a la recta  $2x - 3y = 4$ , que pase por  $(2, -5)$ .  
 23. Perpendicular a la recta  $x + 2y = -5$ , que pase por  $(-2, 2)$ .

En los problemas 24 a 27, determinar el centro y calcular el radio del círculo dado.

24.  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$   
 25.  $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$   
 26.  $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 6 = 0$   
 27.  $4y - 4x - x^2 - y^2 = 0$

En los problemas 28 a 31, determinar los puntos de intersección de las gráficas del par dado de ecuaciones.

28.  $y = 3x - 4$      $y = 3x + y = 4$   
 29.  $y = 2x$      $x^2 + y^2 = 9$   
 30.  $y = |x|$      $2y - x = 2$   
 31.  $x + 2 = y^2$  y  $2y - x - 3 = 0$

En los problemas 32 a 39, hacer un bosquejo de la gráfica de la relación dada.

32.  $2y - x < 5$   
 33.  $x + 3y \geq 8$   
 34.  $|y - x| = 2$   
 35.  $|y - x| = |y + x|$   
 36.  $(x - 2y)(2x - y) \geq 0$   
 37.  $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 > 16$   
 38.  $|x| + |y| = 0$

39.  $y - |y| = x + |x|$

En los problemas 40 a 43, deducir una ecuación o una desigualdad que satisfaga las coordenadas del conjunto dado de puntos en  $R^2$ .

40. Todos los puntos del semiplano derecho, sin incluir al eje  $y$ .

41. Todos los puntos que estén a menos de dos unidades del punto  $(-1, -3)$ .

42. Todos los puntos que estén a más de tres unidades, pero a menos de cuatro unidades, del origen.

43. Todos los puntos equidistantes de  $(-1, 3)$  y  $(4, 2)$ .

44. Bosquejar la gráfica de las ecuaciones

$$y = |2 + 3x| \text{ y } y = |3 - 2x|.$$

Determinar el conjunto de números reales para los cuales se satisface la desigualdad  $|2 + 3x| \geq |3 - 2x|$ .

45. Determinar el conjunto de números reales para los cuales se satisface la desigualdad  $|2x| < |4 - x|$  (véase problema 44).

## 1.4 FUNCIONES

En esta sección principiaremos a desarrollar uno de los conceptos centrales del cálculo: el de **función**. Es una idea\* que ha evolucionado en forma gradual a lo largo de siglos, y que se puede describir en varias formas ligeramente distintas, aunque complementarias. En las conversaciones ordinarias, la palabra “función” tiene varias acepciones, una de las cuales es determinado tipo de dependencia de una cantidad con respecto a otra. Es éste el significado de la palabra que deseamos aclarar en forma suficiente para emplearlo en matemáticas.

### Funciones como relaciones o transformaciones

Al principio empleamos la palabra “función” para describir relaciones sencillas entre variables. Por ejemplo, el volumen  $V$  de una esfera es una función de su radio  $r$ :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \quad (1)$$

El área de la superficie  $S$  de un cubo es una función del lado  $s$ :

$$S = 6s^2. \quad (2)$$

La temperatura  $C$  en grados centígrados es función de la temperatura  $T$  en grados Fahrenheit:

\* El empleo de la palabra “función” en sentido matemático se debe a Leibniz, quien la adoptó al principio de 1673 para describir cualquier cantidad que varía a lo largo de una curva. Durante el siglo y medio siguiente se expandió y refinó el concepto, y a veces fue la causa de agrias disputas entre los principales matemáticos del siglo 18, incluyendo a Euler y a Lagrange. La notación  $f(x)$  para los valores de la función se debe a Euler (1734). En 1837, Peter Gustav Lejeune Dirichlet formuló lo que es en esencia la definición moderna que se da en esta sección. Dirichlet (1805-1869) fue profesor en Berlín y después en Göttingen; también es famoso por sus trabajos acerca de la teoría de los números, de las series de Fourier, y de las ecuaciones diferenciales parciales.



$$C = \frac{5}{9}(T - 32). \quad (3)$$

O también podríamos tener simplemente a  $y$  dada como función de  $x$  de acuerdo con determinada fórmula, como

$$y = \sqrt{4 - x^2}. \quad (4)$$

Se dio un gran paso en el siglo diecinueve cuando se estableció que el concepto de función no necesita que haya una fórmula explícita como las que aparecen en las ecuaciones 1 a 4. Por ejemplo, para cualquier número real positivo  $x$  hay determinado número  $p$  de números primos que no son mayores que  $x$ . Si  $x = 20$ , los primos menores que 20 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. Por tanto, correspondiendo a  $x = 20$ , el valor de  $p$  es 8. Es posible, en principio, calcular el valor de  $p$  asociado con cualquier valor finito de  $x$  si simplemente se hace una lista ordenada de los números primos y a continuación se les cuenta. Sin embargo, no hay fórmula que dé el valor de  $p$  para un valor arbitrario de  $x$ . No obstante, de manera semejante a como se consideró  $V$  como función de  $r$  en la ecuación 1, parece razonable también considerar que  $p$  es función de  $x$ .

Primero exploremos informalmente la idea de función, y pospondremos una definición formal para darla más adelante en esta sección. En cada uno de los ejemplos anteriores hay tres cualidades que se deben subrayar: dos conjuntos  $X$  y  $Y$  y una regla que asigna a cada elemento del conjunto  $X$  uno y sólo un elemento del conjunto  $Y$ . Los conjuntos  $X$  para las ecuaciones 1 a 4 son, respectivamente,  $\{r | r \geq 0\}$ ,  $\{s | s \geq 0\}$ ,  $\{T | T \geq T_0\}$ , en donde  $T_0 \cong -459.7$  corresponde al cero absoluto, y  $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ . El conjunto  $Y$  especifica el tipo de valores que asigna la función. En cada ecuación de la 1 a la 4 se trata de números reales, y por tanto se puede decir que  $Y$  es  $R^1$ . Podríamos usar también subconjuntos de  $R^1$  que comprendieran todos los valores de la función; así, para la ecuación 1 podríamos decir que  $Y$  es el conjunto de todos los números no negativos, o quizá el conjunto de todos los números mayores que  $-2$ . En los primeros catorce capítulos de este libro sólo nos interesarán funciones para las que los conjuntos  $X$  y  $Y$  son también subconjuntos de  $R^1$ . A estas funciones se les llama **funciones reales de variable real**. Sin embargo, en el concepto general de función como relación o dependencia no se requiere que los conjuntos  $X$  y  $Y$  sean conjuntos de números reales.

En general a las funciones se les denota mediante letras como  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $\phi$  y  $\psi$ . Si  $f$  es una función y  $x \in X$ , entonces el elemento  $y \in Y$  asignado a  $x$  mediante la función  $f$ , se denota como  $f(x)$ . El símbolo  $f(x)$  se lee “efe de equis”; hacemos hincapié en que no significa “ $f$  por  $x$ ”, sino que es más bien el **valor de la función  $f$  en  $x$** , o la **imagen** del punto  $x$  bajo la función  $f$ . Así, si  $g$  es la función asociada con la ecuación 1, entonces

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad r \geq 0; \quad (5)$$

y, por ejemplo,

$$g(2) = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi, \quad g(3) = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi.$$

Igualmente, si  $h$  es la función asociada con la ecuación 3, entonces

$$h(T) = \frac{5}{9}(T - 32), \quad T \geq T_0, \quad (6)$$



y, por ejemplo,

$$h(77) = \frac{5}{9}(45) = 25.$$

Al conjunto  $X$  se le llama el **dominio** de la función, y al conjunto  $Y$  se le llama el **codominio**. Nótese que la función obra sobre *cada elemento de*  $X$ , pero que no es necesario que todos los elementos de  $Y$  sean valores de  $f(x)$ . Además, aunque una función debe asignar un valor único a  $Y$  para cada elemento  $x$  de  $X$ , el mismo valor puede asignarse a dos o más valores de  $x$ . Por ejemplo, si  $\phi$  es la función asociada con la ecuación 4, entonces

$$\phi(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2, \quad (7)$$

y

$$\phi(-1) = \sqrt{3}, \quad \phi(1) = \sqrt{3}.$$

Por tanto, el valor  $\sqrt{3}$  se asigna tanto a  $-1$  como a  $1$ .

Los elementos de  $Y$  que en realidad  $f$  asigna a elementos de  $X$  forman la imagen de  $f$ . Emplearemos la notación

$$f(X) = \{y | y = f(x), \quad x \in X\} \quad (8)$$

para identificar a la imagen de la función  $f$  cuyo dominio es  $X$ . La imagen  $f(X)$  es un subconjunto del codominio  $Y$ . Para la ecuación 5,  $g(X) = [0, \infty)$ , y para la ecuación (7),  $\phi(X) = [0, 2]$ ; nótese que en cada uno de estos casos hemos seleccionado a  $Y$  como  $R^1$ .

Se dice que una función  $f$  de variable real está **acotada** si su imagen es un conjunto acotado; de no ser así la función es **no acotada**. Así,  $f$  es acotada si existe un número  $K$  tal que  $|f(x)| \leq K$  para toda  $x \in X$ . Por ejemplo, la función  $g$  de la ecuación 5 es no acotada, pero la función  $\phi$  de la ecuación 7 sí lo es.

Con frecuencia se habla de funciones en términos de variables. La **variable independiente** asume valores del dominio, y la **variable dependiente** asume valores en la imagen; se da un valor a la variable independiente y a continuación la función asigna un valor a la variable dependiente. En este caso está implícito el concepto de que una función es una **transformación** o **aplicación** que opera sobre elementos de su dominio  $X$  para producir elementos en su codominio  $Y$ . Este punto de vista subraya la idea de que una función es una cosa activa. Hace algo. Por ejemplo, la función  $g$  de la ecuación 5 toma un número real en  $[0, \infty)$  y lo transforma en otro número real. Este aspecto de transformación o aplicación de una función se muestra en forma esquemática en la figura 1.4.1.

Casi del mismo modo resulta útil pensar en una función en términos de una computadora o una calculadora; acepta una *entrada* (un número del dominio) y, cuando se oprimen los botones correctos, produce una *salida* única (el número correspondiente en la imagen).

A continuación formalizaremos nuestra descripción con una definición de función.

**DEFINICIÓN 1.4.1** Una función  $f$  es una regla (transformación, aplicación) que asigna a cada elemento  $x$  de un conjunto  $X$  un elemento  $y$ , y sólo uno, de un

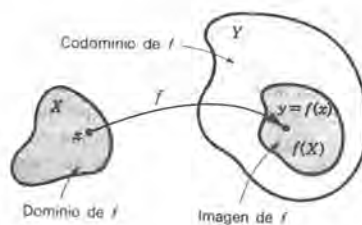


Figura 1.4.1

conjunto  $Y$ . A los conjuntos  $X$  y  $Y$  se les llama el dominio y el codominio de la función  $f$ , respectivamente. El valor de la función  $f$  para el elemento  $x$  se indica mediante  $f(x)$  y la imagen  $f(X) \subset Y$  está dada por  $f(X) = \{y | y = f(x), x \in X\}$ .

Si  $x$  y  $y$  son números reales, entonces el par ordenado  $(x, y)$  o  $(x, f(x))$  para cada  $x \in X$  está identificado con un punto en el plano  $xy$ . El conjunto de todos esos puntos es la **gráfica** de la función  $f$  y proporciona una representación geométrica de la función. Las gráficas de las funciones relacionadas con las ecuaciones 1 y 4 se muestran en las figuras 1.4.2 y 1.4.3, respectivamente. El requisito de que se asigne un valor único de  $y$  a cada  $x$  en el dominio  $X$  de la función corresponde al siguiente enunciado geométrico: si  $x_0$  es cualquier punto en el dominio de la función  $f$ , entonces la recta  $x = x_0$ , que es paralela al eje  $y$ , interseca a la gráfica de la función una vez y sólo una. Así, la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (9)$$

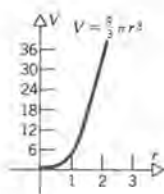


Figura 1.4.2

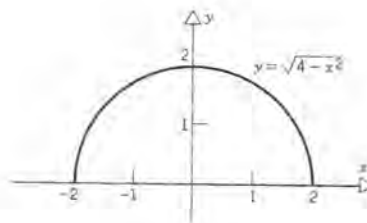


Figura 1.4.3

que se muestra en la figura 1.4.4 no representa una función. Desde luego que es cierto que la función  $\phi$  definida por la ecuación 7

$$\phi(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [-2, 2]$$

y que se muestra en la figura 1.4.3 satisface a la ecuación 9, pero hay otras funciones que también la satisfacen. Una de ellas está dada por

$$\psi(x) = -\sqrt{4 - x^2}, \quad x \in [-2, 2] \quad (10)$$

cuya gráfica es el semicírculo inferior de la figura 1.4.4. La gráfica de otra relación que no puede ser la de una función se muestra en la figura 1.4.5. Obsérvese que la recta  $x = x_0$  interseca a la gráfica más de una vez.

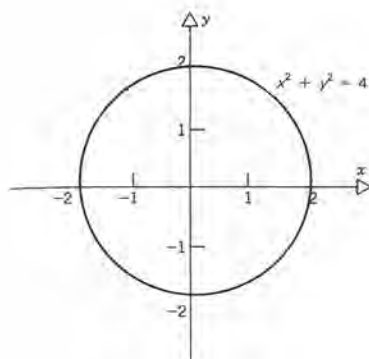


Figura 1.4.4

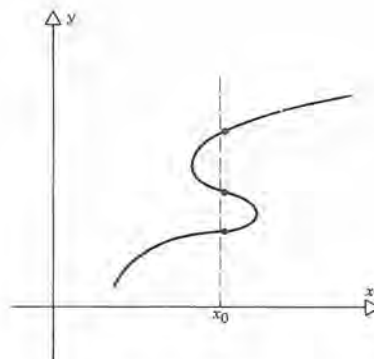


Figura 1.4.5

Hemos tratado de hacer una cuidadosa distinción entre una función  $f$  y su valor  $f(x)$  para el elemento  $x \in X$ . Son dos cosas diferentes, y debe quedar claro de acuerdo con la definición que se dio antes; se debe tener siempre en cuenta la diferencia entre ellas. Sin embargo, en matemáticas, como en otras áreas de nuestra existencia, se emplean a veces expresiones imprecisas, cuando no es probable que ocasionen confusiones, para ahorrar tiempo y para evitar frases que de otro modo serían complicadas. Así, por ejemplo, se acostumbra hablar de “la función  $f(x) = x^2 + 1$ ”, o bien de “la función  $x^2 + 1$ ” en lugar de “la función  $f$  cuyos valores están dados por  $f(x) = x^2 + 1$ ”. De acuerdo con el antiguo uso matemático usaremos esa fraseología cuando no parezca probable confusión alguna.

Es más, el dominio  $X$  y el codominio  $Y$  de una función pueden no darse explícitamente. Por ejemplo, podríamos hablar de la función

$$\phi(x) = \sqrt{4 - x^2},$$

sin especificar el dominio  $X$ . Porque esta función  $\phi(x)$  sólo se puede calcular si  $4 - x^2 \geq 0$ ; por tanto el dominio  $X$  de  $\phi$  debe ser un subconjunto de  $[-2, 2]$ . Cuando no se da el dominio, se sobreentiende que *el dominio de la función es el conjunto de todos los valores de la variable independiente para los cuales se pueden calcular valores de la función*. Así, para la función  $\phi$  se sobreentiende que el dominio es  $[-2, 2]$ . De nuevo hacemos notar que una función debe actuar sobre cada elemento de su dominio y asignarlo a uno y sólo un valor de su codominio.



### Álgebra de las funciones reales

Si  $f$  y  $g$  son funciones reales, entonces se definen las operaciones algebraicas entre ellas en términos de las operaciones correspondientes con los números reales. Se dice que las funciones  $f$  y  $g$  son **iguales** si tienen el mismo dominio  $X$  y si  $f(x) = g(x)$  para toda  $x \in X$ . Además, si  $f$  y  $g$  tienen el dominio  $X$ , entonces su suma  $f + g$ , su resta  $f - g$ , su producto  $fg$  y su cociente  $f/g$  se definen de modo natural, o sea

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), & x \in X, \\(f - g)(x) &= f(x) - g(x), & x \in X, \\(fg)(x) &= f(x)g(x), & x \in X, \\(f/g)(x) &= f(x)/g(x), & x \in X, \quad g(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Además, para cualquier constante  $c$ ,

$$(cf)(x) = cf(x), \quad x \in X.$$

Como  $f(x)$  y  $g(x)$  son números reales, estas operaciones obedecen a las usuales leyes conmutativa, asociativa y distributiva.

Terminaremos esta sección con algunos ejemplos que muestran distintos aspectos del concepto de función.

#### EJEMPLO 1

Sea la función

$$f(x) = \frac{2}{1 + x^2}.$$

Los valores de esta función se pueden calcular para toda  $x \in \mathbb{R}^1$ ; por tanto  $X = \mathbb{R}^1$ . Como la función asigna números reales a los elementos del dominio, podemos también considerar que  $Y = \mathbb{R}^1$ . Es fácil evaluar  $f(0) = 2$ , y observar que  $0 < f(x) < 2$  para  $x \neq 0$ . Además,  $f(x)$  toma valores positivos que disminuyen cada vez más a medida que  $x$  se aleja del origen en cualquier dirección. Así, la gráfica de esta función se debe asemejar al bosquejo de la figura 1.4.6. La imagen de  $f$  es  $f(X) = (0, 2]$ . ■

#### EJEMPLO 2

Se tiene la relación

$$y = \begin{cases} x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x = 0 \\ 1 - x, & -2 \leq x \leq -1. \end{cases}$$

Esta relación define una función  $f$  cuya gráfica se muestra en la figura 1.4.7. El dominio



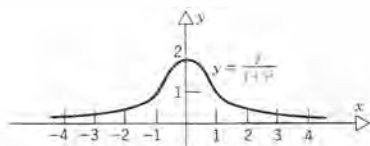


Figura 1.4.6

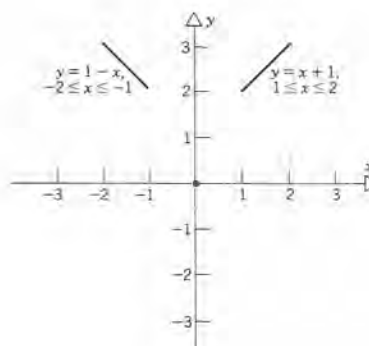


Figura 1.4.7

de  $f$  es  $X = [-2, 1] \cup \{0\} \cup [1, 2]$ , y su imagen es  $f(X) = [2, 3] \cup \{0\}$ . Este ejemplo muestra que no se necesita de una fórmula simple para definir a una función; también, que el dominio no necesita ser un intervalo. ■

### EJEMPLO 3

Para la función

$$f(x) = \sqrt{x+3},$$

calcular  $f(s+7)$ ,  $f(1/t)$  y  $f[f(u)]$ ; determinar los valores de  $s$ ,  $t$  y  $u$  para los cuales es válida cada una de las expresiones.

Primero, el dominio de  $f$  consta de aquellos puntos para los cuales  $x+3 \geq 0$ , o sea el intervalo  $[-3, \infty)$ , y por tanto éste es el dominio de  $f$ . A continuación, si se sustituye  $x$  por  $s+7$ , obtenemos

$$f(s+7) = \sqrt{s+7+3} = \sqrt{s+10},$$

la cual es válida para  $s \geq -10$ . También, si sustituimos a  $x$  por  $1/t$ , entonces

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{1}{t}+3} = \sqrt{\frac{1+3t}{t}},$$

para aquellos valores de  $t$  tales que  $(1+3t)/t \geq 0$ . Para esto se necesita que o bien  $t > 0$ , o bien que  $t \leq -\frac{1}{3}$ . Finalmente, si sustituimos a  $x$  por  $r(u) = \sqrt{u+3}$ , tenemos que

$$f[f(u)] = \sqrt{\sqrt{u+3}+3},$$

siempre que  $u \geq -3$ . ■

En la sección siguiente continuaremos con la descripción de las funciones y sus gráficas.

## PROBLEMAS

1. Sea  $f(x) = 2 - 3x$ . Calcular cada una de las siguientes cantidades:

(a)  $f(3)$       (c)  $-f(3)$   
 (b)  $f(-3)$     (d)  $-f(-3)$

2. Sea  $f(x) = x^2 + 4$ . Calcular cada una de las siguientes cantidades:

(a)  $f(2)$       (c)  $2f(\frac{1}{2})$   
 (b)  $f(\frac{1}{2})$     (d)  $\frac{f(2)}{2}$

En los problemas 3 a 8, determinar el dominio  $X$  y la imagen  $f(X)$  de la función dada.

3.  $f(x) = \frac{1}{x-3}$       4.  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

5.  $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$       6.  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$

7.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$       8.  $f(x) = \frac{x}{1-x}$

9. Si  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , para  $-1 \leq x \leq 1$ , deducir una expresión para cada una de las siguientes funciones, y decir para qué valores de la variable independiente es válida la fórmula.

(a)  $f(s-1)$     (c)  $f\left(\frac{1}{u}\right)$   
 (b)  $f(-t)$       (d)  $f[f(w)]$

10. Sea  $g(x) = 1/(4-x^2)$  para  $x \neq \pm 2$ . Deducir una expresión para cada una de las funciones siguientes, y decir para qué valores de la variable independiente es válida la fórmula.

(a)  $g(2-s)$     (c)  $g\left(\frac{u}{2}\right)$   
 (b)  $g(2t)$       (d)  $g[g(w)]$

En los problemas 11 a 16, calcular  $[f(x+h) - f(x)]/h$ , y expresar el resultado de la manera más sencilla posible.

11.  $f(x) = 2x - 3$       12.  $f(x) = x^2$

13.  $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$     14.  $f(x) = x^3$

15.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$

16.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$

17. Sea  $\phi(x) = |x+2| + |x-2|$ . Evaluar  $\phi(-3)$ ,  $\phi(-1)$ ,  $\phi(1)$  y  $\phi(3)$ . Deducir una fórmula para  $\phi$  en la cual no aparezcan valores absolutos. Hacer un esquema de la gráfica de la función  $\phi$ .

En los problemas 18 a 23, determinar si la relación dada define a  $y$  como función de  $x$ .

18.  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$       19.  $y^2 = x$ ,  $x \in [0, \infty)$

20.  $|y| = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$

21.  $y = |2x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$

22.  $|y| = 2x$ ,  $x \in [0, \infty)$

23.  $y^2 = 1 - x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$

24. Se define a la función  $\pi$  de números primos como sigue:  $\pi(x)$  es el número de números primos menor o igual que  $x$ . El dominio de esta función es  $X = \{x | x > 0\}$ . ¿Cuánto es  $\pi(4)$ ,  $\pi 5.5$ ,  $\pi(8.9)$ ? Hacer un bosquejo de la gráfica de la función  $\pi$  para  $0 < x \leq 10$ .

25. Determinar una función  $f$  sencilla que tenga las siguientes propiedades. Su dominio es  $\mathbb{R}^1$ ,  $f(-2) = 0$ ,  $f(3) = 0$ , y  $f(0) = -36$ .

26. Determinar una función sencilla  $f$  con las propiedades siguientes: su dominio es  $[-2, 2]$ , y  $f(-2) = f(0) = f(2) = 0$ .

## 1.5 EJEMPLOS DE FUNCIONES

En esta sección describiremos varias funciones reales de variable real que se presentan con frecuencia cuando se estudia cálculo. Se puede tener un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones que se traten recurriendo a la experiencia adquirida con el dibujo, mediante el ejercicio de un juicio razonable, y al evaluar la función en unos cuantos puntos. Después veremos que algunas técnicas del cálculo son muy útiles para hacer un esquema de la gráfica de una función.

### Polinomios

Una clase muy grande y útil de funciones son los polinomios. En general, un **polinomio** es una función  $P$  que se define mediante una ecuación de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad (1)$$

en la cual  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son constantes reales y  $a_n \neq 0$ . El número  $n$  es un entero no negativo que se llama **grado** del polinomio. Como la ecuación 1 da un valor de  $P(x)$  para cada valor de  $x$ , el dominio de un polinomio es  $R^1$ . Sin embargo, la imagen puede ser  $R^1$ , o algún subconjunto de él. En los siguientes ejemplos veremos tres polinomios simples: una función constante, una función lineal, y una función cuadrática.

### EJEMPLO 1

Se tiene la función  $f$  definida como

$$f(x) = k \quad (2)$$

en la cual  $k$  es constante. El dominio de la función constante es  $R^1$  y todo punto del dominio queda transformado en el punto  $k$ . Por tanto, la imagen es el conjunto que consta del elemento  $k$  único. La gráfica de la función constante es una recta paralela al eje  $x$ . La recta está a  $|k|$  unidades arriba del eje  $x$  si  $k > 0$ , y está a  $|k|$  unidades por debajo del eje  $x$  si  $k < 0$ . Véase figura 1.5.1. ■

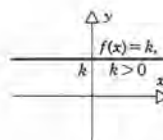
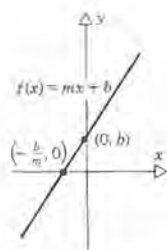


Figura 1.5.1 Función constante.

### EJEMPLO 2

Sea la función  $f$  definida por



**Figura 1.5.2**  
Función lineal.

$$f(x) = mx + b, \quad (3)$$

en la cual  $m$  y  $b$  son constantes; por tanto  $f$  es un polinomio de primer grado. Como se ve en la figura 1.5.2, la gráfica de  $f$  es la recta cuya pendiente es  $m$ , que pasa por  $(0, b)$ . El dominio de  $f$  es  $R^1$ . Si  $m \neq 0$ , su imagen también es  $R^1$ ; si  $m = 0$ , entonces  $f$  es una función constante y su imagen es sólo el número  $b$ . Si  $m = 1$  y  $b = 0$ , entonces la ecuación 3 se reduce a  $f(x) = x$ . En este caso, a  $f$  se le llama función identidad; aplica a cada valor de  $x$  en sí mismo. Como su gráfica es una recta, a veces a la función  $f$  de la ecuación 3 se le llama función **lineal**. ■

### EJEMPLO 3

Se tiene la función  $f$  definida por

$$f(x) = x^2 - 2x - 3. \quad (4)$$

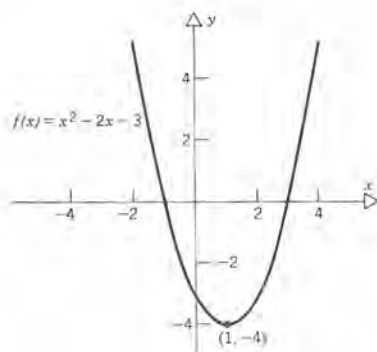
Podemos escribir esta función en su forma factorizada

$$f(x) = (x + 1)(x - 3),$$

de donde se deduce que  $f(-1) = f(3) = 0$ ,  $f(x) > 0$  para  $x$  en  $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ , y  $f(x) < 0$  para  $-1 < x < 3$ . Además, completando el cuadrado de la ecuación 4, se obtiene

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4.$$

Esto demuestra que  $f(1) = -4$  y que  $f(x) > -4$  para los demás valores de  $x$ . Como  $f(x)$  se comporta como  $x^2$  cuando  $|x|$  es grande, la imagen de  $f$  es  $[-4, \infty)$ . En la figura 1.5.3 se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ ; es una parábola con su vértice en  $(1, -4)$ . A una función de la forma  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  se le llama función **cuadrática**, siendo  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  constantes y  $a_2 \neq 0$ . La gráfica de una función cuadrática siempre es una parábola. ■



**Figura 1.5.3** Función cuadrática.



## Funciones racionales

En algunos aspectos los polinomios son análogos a los números enteros; por ejemplo, la suma o el producto de dos polinomios cualesquiera es nuevamente un polinomio. Sin embargo, al igual que la división de enteros puede conducir a números que no son enteros (los números racionales), también la división de un polinomio entre otro puede conducir a funciones que no son polinomios. A las funciones que se originan como la razón de dos polinomios se les llama **funciones racionales**; así, una función racional  $R$  tiene la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (5)$$

siendo  $P$  y  $Q$  polinomios. Como no se permite la división entre cero, una función racional no está definida en aquellos puntos, si es que los hay, en los cuales el denominador es igual a cero. Así, el dominio de una función racional puede ser, o no, todo  $\mathbb{R}^1$ . Los dos ejemplos siguientes son funciones racionales sencillas.

### EJEMPLO 4

Sea la función  $f$  definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}. \quad (6)$$

Como el denominador nunca es cero, el dominio de esta función es todo  $\mathbb{R}^1$ . El empleo del cálculo ayuda mucho a bosquejar la gráfica de esta función; sin embargo, se puede hacer un esquema razonablemente bueno empleando métodos más elementales. Es claro que  $f(0) = 0$ , que  $f(x) > 0$  cuando  $x > 0$ , y que  $f(x) < 0$  cuando  $x < 0$ . Por tanto, la gráfica pasa por el origen, y por lo demás se encuentra completamente en el primero y tercer cuadrantes. Además, cuando  $x$  es grande y positiva,  $f(x)$  es pequeña y positiva porque  $x^2 + 1 \cong x^2$  y  $f(x) \cong x/x^2 = 1/x$ . Por tanto, para  $x$  grande y positiva la gráfica de  $f$  se encuentra ligeramente arriba del eje  $x$ . El caso es semejante para valores grandes y negativos de  $x$ , excepto que la gráfica se encuentra ligeramente por debajo del eje  $x$ . Esta información, junto con el hecho de que  $f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(2) = \frac{2}{5}$  y  $f(-2) = -\frac{2}{5}$  nos permite bosquejar la gráfica de la función (6) (véase figura 1.5.4). Los puntos  $P$  y  $Q$  en los que  $f(x)$  alcanza su valor máximo y mínimo se llaman, respectivamente, puntos máximo y mínimo; el cálculo se presta especialmente para determinar a esos puntos. Para este ejemplo particular se tiene que las coordenadas de  $P$  y  $Q$  son  $P(1, \frac{1}{2})$  y  $Q(-1, -\frac{1}{2})$ . Así, la imagen de la función (6) es  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . ■

### EJEMPLO 5

Se tiene la función  $f$  definida por

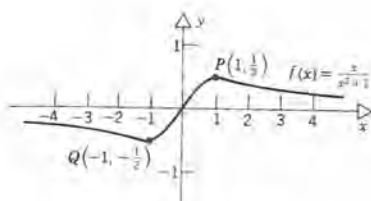


Figura 1.5.4

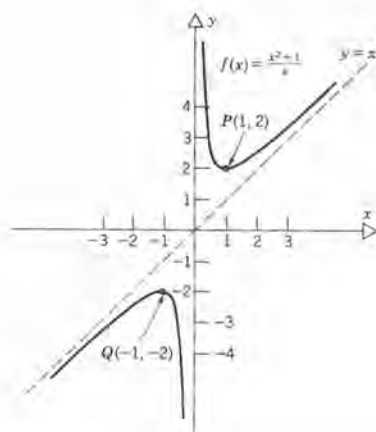


Figura 1.5.5

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}. \quad (7)$$

Esta función es la recíproca de la que aparece en el ejemplo 4. El denominador es cero cuando  $x = 0$ , y por tanto el dominio de  $f$  es  $\mathbb{R}^1$  sin incluir al punto cero. Cuando  $x$  se acerca a cero,  $f(x) \approx 1/x$ , y por tanto  $f(x)$  toma valores que son de magnitud muy grande y que tienen el mismo signo de  $x$ . Si reformulamos la ecuación 7 en la forma

$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$

veremos entonces que, cuando  $x$  es de magnitud grande y positiva,  $f(x)$  es sólo ligeramente mayor que  $x$ . Análogamente, cuando  $x$  es de magnitud grande y negativa,  $f(x)$  es sólo ligeramente menor que  $x$ . Finalmente,  $f(1) = 2$ , y  $f(-1) = -2$ . La gráfica de esta función se bosqueja en la figura 1.5.5. De nuevo, el cálculo podría ayudar a hacer el esquema de la gráfica de esta función, en especial para ubicar los puntos mínimo y máximo relativos,  $P(1, 2)$  y  $Q(-1, -2)$ . La imagen de esta función es  $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ . ■

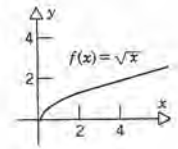
### Función raíz cuadrada

Consideremos la función definida por

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0. \quad (8)$$

La ecuación 8 es la función raíz cuadrada, que asocia a cada número  $x$  real y no negativo,

el número real no negativo cuyo cuadrado es  $x$ . La función raíz cuadrada aumenta en forma progresiva a medida que  $x$  aumenta, y su gráfica se muestra en la figura 1.5.6.



**Figura 1.5.6**  
Función raíz cuadrada.

### Función valor absoluto

Esta función se define mediante

$$f(x) = |x|, \quad (9)$$

o también como

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

El dominio de la función valor absoluto es  $(-\infty, \infty)$ , o sea  $\mathbb{R}^1$ . Su imagen es  $[0, \infty)$ .

La gráfica de la función  $f(x) = |x|$  consta de dos semirrectas, cuyas pendientes son 1 y -1, respectivamente, que se intersecan en el origen como se ve en la figura 1.5.7.

Las gráficas de otras funciones en las que intervienen valores absolutos también se pueden bosquejar con facilidad. Supongamos que se define a la función  $g$  mediante

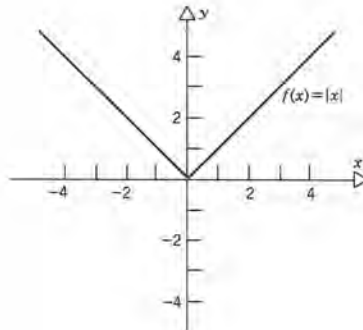
$$g(x) = |2x - 3|. \quad (11)$$

Para expresar esta función sin símbolos de valor absoluto, notamos que

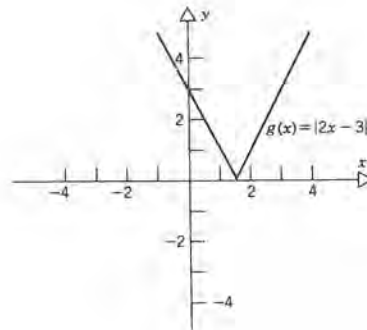
$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \geq \frac{3}{2}, \\ -(2x - 3), & x < \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (12)$$

La gráfica de  $g$  también está formada por dos semirrectas, con pendiente 2 y -2,

**Figura 1.5.7**  
Función valor absoluto.



**Figura 1.5.8**



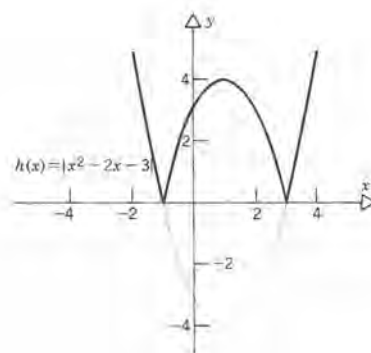
respectivamente, que se intersecan en el punto  $(\frac{3}{2}, 0)$  en el eje  $x$ . Nótese que esta gráfica se puede obtener a partir de la gráfica de  $y = 2x - 3$  mediante una reflexión, con respecto al eje  $x$ , de la parte de la gráfica para la cual  $y$  es negativa (véase figura 1.5.8).

Otro ejemplo más es la función  $h$  definida mediante

$$h(x) = |x^2 - 2x - 3|. \quad (13)$$

Se obtiene la gráfica de esta función a partir de la que aparece en la figura 1.5.3 reflejando de nuevo la parte de la gráfica de  $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$  para la cual  $f(x) < 0$  con respecto al eje  $x$ . El resultado se ve en la figura 1.5.9, que es la gráfica de la función  $h$ .

Figura 1.5.9



### Función signo

Esta función se define mediante

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (14)$$

En la figura 1.5.10 se muestra la gráfica de la función signo. Esta función tiene el valor 1 si  $x > 0$ ; -1 si  $x < 0$  y 0 si  $x = 0$ . Por tanto, su imagen es  $\{-1, 0, 1\}$ . Nótese que el valor de la función signo se puede emplear para obtener el signo de la variable independiente.

### Función mayor entero

Esta función  $f$  se define mediante

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = \text{mayor entero } n \text{ tal que } n \leq x. \quad (15)$$

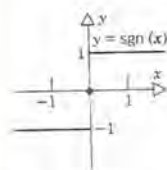
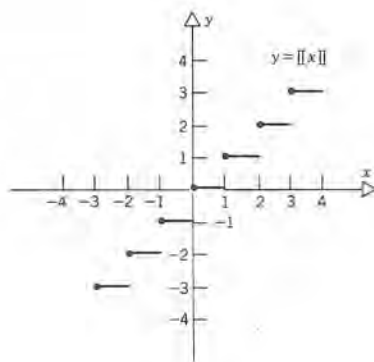


Figura 1.5.10  
Función signo



Así,  $\llbracket -3 \rrbracket = -3$ ;  $\llbracket -1.5 \rrbracket = -2$ ,  $\llbracket 0 \rrbracket = 0$ ;  $\llbracket 1.1 \rrbracket = 1$ . En la figura 1.5.11 se presenta la gráfica de la función mayor entero. Su dominio es  $\mathbb{R}^1$  y su imagen es el conjunto de todos los enteros. La función mayor entero es constante en cada intervalo de la forma  $[n, n + 1)$ , siendo  $n$  entero. En cada punto entero  $x = n$  el valor de la función  $\llbracket x \rrbracket$  cambia de  $n - 1$  a  $n$ ; se dice que la función tiene un salto o un escalón de magnitud unitaria en cada punto entero. La función mayor entero es un ejemplo de una clase de funciones conocidas como **funciones escalón**.



**Figura 1.5.11**  
Función mayor entero

Se pueden describir algunos fenómenos cotidianos mediante la función mayor entero, o variaciones de ella. Por ejemplo, el porte de correspondencia de primera clase en Estados Unidos salta determinada cantidad por cada onza de peso adicional, pero es constante entre los saltos. Muchos taxímetros están calibrados de modo semejante, con un incremento dado en la tarifa por cada determinada distancia. Es claro que en estas aplicaciones el dominio de la función es  $[0, \infty)$ , porque no tienen significado pesos ni distancias negativas.

## EJEMPLO 6

Hacer un bosquejo de la función  $f$  dada por

$$f(x) = \llbracket 2x - 3 \rrbracket. \quad (16)$$

La gráfica de esta función es semejante a la de la función  $\llbracket x \rrbracket$  misma. El valor de  $\llbracket 2x - 3 \rrbracket$  aumenta en una unidad cada vez que el valor de  $2x - 3$  pasa por un entero. Es claro que  $2x - 3$  asume valores enteros no sólo cuando  $x$  mismo es entero, sino también cuando  $x$  es igual a la mitad de un número impar. Así, los saltos de  $\llbracket 2x - 3 \rrbracket$  se presentan en los puntos  $x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \dots$ . En la figura 1.5.12 se muestra la gráfica de  $f$ . ■

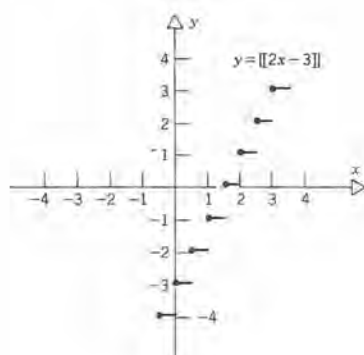


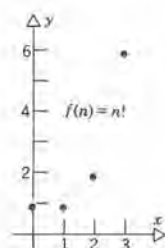
Figura 1.5.12

### Función factorial

El dominio de la función factorial es el conjunto de los números enteros positivos y la función se define como

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n. \quad (17)$$

La función factorial aumenta mucho muy rápidamente cuando aumenta  $n$ . Por ejemplo,  $f(5) = 120$ ,  $f(10) \approx 3.63 \times 10^6$ , y  $f(20) \approx 2.43 \times 10^{18}$ . Por comodidad, en la escritura de fórmulas en las que interviene la función factorial con frecuencia se requiere que 0 esté en el dominio de ella y se define  $0! = 1$ . La gráfica de la función factorial consta de los puntos aislados  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(4, 24)$ ,  $\dots$  (véase figura 1.5.13).



**Figura 1.5.13**  
Función factorial.

### Una función patológica

Todas las funciones que se han descrito hasta ahora tienen gráficas que son curvas razonablemente suaves o están formadas por segmentos de recta en el plano  $xy$ , a excepción de la función factorial, que sólo está definida para los enteros no negativos. Sin embargo, es posible encontrar casos más complicados, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 7

Sea la función  $f$  definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases} \quad (18)$$

La ecuación 18 define una función en  $\mathbb{R}^1$  porque para cada valor de  $x$  en  $\mathbb{R}^1$  está asociado un valor correspondiente de  $f(x)$ , que puede ser 0 ó 1, según el caso. Por tanto, la imagen de  $f$  es el conjunto de los dos números 0 y 1. La gráfica de esta función consiste en un conjunto de puntos en el eje  $x$  y al mismo tiempo en otro conjunto de puntos en la recta  $y = 1$ . Sin embargo, no es una curva y es imposible trazar un esquema aceptable.

■

## Funciones pares e Impares

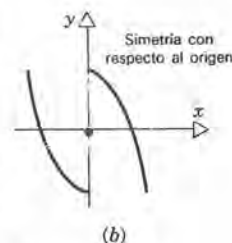
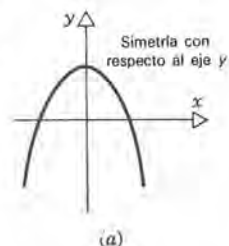
Una función  $f$  cuyo dominio es  $X$  es **par** si  $-x \in X$  siempre que  $x \in X$ , y si

$$f(-x) = f(x), \quad x \in X. \quad (19)$$

Análogamente,  $f$  es **impar** si  $-x \in X$  siempre que  $x \in X$  y si

$$f(-x) = -f(x), \quad x \in X. \quad (20)$$

Los términos “par” e “impar” se originan en el hecho de que  $x^2, x^4, \dots$  son funciones pares, mientras que  $x, x^3, \dots$  son funciones impares. De acuerdo con la ecuación 19 se sigue inmediatamente que la gráfica de una función par es **simétrica con respecto al eje  $y$** . Igualmente, de acuerdo con la ecuación 20, la gráfica de una función impar es **antisimétrica con respecto al eje  $y$** , o **simétrica con respecto al origen**. En la figura 1.5.14 se muestran ejemplos de gráficas de funciones par e impar.



**Figura 1.5.14**  
a) Función par.  
b) Función impar.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20 hacer un esquema de la gráfica de la función dada. También, determinar la imagen de cada función.

1.  $f(x) = |3 + 2x|$

2.  $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$

3.  $f(x) = |x + 2| - |x - 1|$

4.  $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$

5.  $g(x) = 2\llbracket x \rrbracket$

6.  $g(x) = \llbracket 2x \rrbracket$

7.  $g(x) = -\llbracket x \rrbracket$

8.  $g(x) = \llbracket -x \rrbracket$

9.  $f(x) = x^2 - 1$

10.  $g(x) = |x^2 - 1|$

11.  $f(x) = 2x^2 + x - 6$

12.  $g(x) = |2x^2 + x - 6|$

13.  $g(x) = x(x - 1)(x + 2)$

14.  $h(x) = (x + 3)(2x + 1)(4 - x)$

15.  $\phi(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad |x| \leq 3$

16.  $\phi(x) = \sqrt{x^2 - 9}, \quad |x| \geq 3$

17.  $\psi(x) = \frac{x}{1 - x^2}, \quad x \neq \pm 1$

18.  $\psi(x) = \frac{1 - x^2}{x}, \quad x \neq 0$

19.  $\psi(x) = \frac{1 - x}{1 + x}, \quad x \neq -1$

20.  $\psi(x) = x|x|$



## 44 FUNCIONES

21. Se tiene la función
- $f$
- definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Hacer un esquema de las gráficas de  $f(x+2)$  y  $f(x-2)$ .

22. La función escalón unitario de Heaviside se define mediante

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Hacer una gráfica de  $H(t)$ . También hacer un esquema de la gráfica de  $f(t) = H(t) - H(t - \pi)$ .

23. Se define un intervalo del eje  $x$  en el tiempo  $t$  mediante el conjunto de puntos para los cuales la función  $H(x)H(2t-x)$  es diferente de cero. ¿Cuál es este intervalo para  $t = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2$ ? Véase la definición de la función  $H$  en el problema 22.
24. El costo de la dejada en un taxi, en algún lugar de Estados Unidos es de 50 centavos por el primer quinto de milla, y de 10 centavos cada quinto de milla adicional. Deducir una fórmula para el costo  $C$  en dólares, como función de las millas recorridas  $x$ , para  $0 \leq x \leq 2$ .

En los problemas 25 a 30, decir si la función es par, impar, o ninguno de los dos casos.

25.  $f(x) = -3x$       26.  $f(x) = 3x^2 + 4$

27.  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 4$

28.  $f(x) = \frac{2x}{4 + 3x^2}$

29.  $f(x) = \phi(|x|)$ , para cualquier función  $\phi$

30.  $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

31. Demostrar que la suma de dos funciones pares es una función par, y que la suma de dos funciones impares es una función impar. ¿Qué puede decir el lector de la suma de una función par y otra impar?
32. Demostrar que el producto de dos funciones impares es una función par, que el producto de dos funciones impares es una función par, y que el producto de una función impar por una función impar es una función impar.
33. Sea  $f$  una función con la propiedad de que siempre que  $x$  está en su dominio, entonces  $-x$  está en su dominio. Si  $f$  no es ni par ni impar, demostrar que  $f$  es la suma de una función  $g$  par y una función  $h$  impar.

## 1.6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Suponemos que el lector está familiarizado con las funciones trigonométricas por sus estudios de geometría y trigonometría. En cálculo, y en general en las ciencias teóricas, las funciones trigonométricas tienen una importancia mucho mayor que la de tan sólo su empleo para relacionar los lados de triángulos. En esta sección repasaremos las definiciones de las funciones trigonométricas y algunas de sus propiedades.

## Radianes

En trigonometría se manejan con frecuencia los grados como unidad de medición de ángulos;  $90^\circ$  constituyen un ángulo recto,  $360^\circ$  forman un círculo completo, y así sucesivamente. En cálculo se usa invariablemente una unidad distinta de medición llamada el radián. Sea el círculo  $x^2 + y^2 = R^2$  que se ve en la figura 1.6.1. Se puede ubicar un punto  $P$  en la circunferencia del círculo dando un ángulo  $\theta$  en radianes, medido en sentido levógiro a partir del eje  $x$  positivo si  $\theta > 0$ , y en dextrógiro si  $\theta < 0$ ; o bien, se puede medir por la distancia  $|s|$  a lo largo de la circunferencia,\* medido

\* Suponemos que se conoce cómo medir la distancia a lo largo de un círculo. En la sección 7.3 trataremos el tema de la distancia a lo largo de una curva, incluyendo la distancia a lo largo del círculo como caso especial.



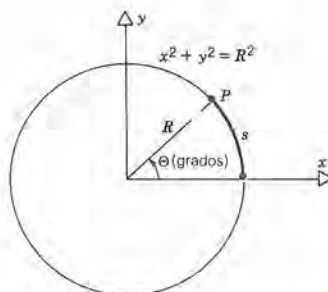


Figura 1.6.1

en sentido levógiro si  $s > 0$  y en sentido dextrógiro si  $s < 0$ . La figura 1.6.1 muestra que el ángulo  $\Theta$  medido en grados tiene la misma razón con respecto a  $360^\circ$  que la que tiene el número  $s$  con respecto a  $2\pi R$ , que es la circunferencia del círculo:

$$\frac{\Theta}{360^\circ} = \frac{s}{2\pi R}. \quad (1)$$

Nótese que en la ecuación 1 no hay restricciones para  $\Theta$  ni para  $s$ ; pueden ser positivos o negativos y tener cualquier magnitud. También, obsérvese que ambos lados de la ecuación 1 son cantidades adimensionales, o sea números puros; es decir, no tienen dimensiones físicas. En especial, el lado derecho de la ecuación 1 es la razón de dos longitudes. El número

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{2\pi}{360^\circ} \Theta \quad (2)$$

se puede emplear como otra medida del tamaño del ángulo dado. A esta unidad de medición se le llama **radián**. El lado izquierdo de la ecuación 2 es equivalente a

$$s = R\theta, \quad (3)$$

que es la relación fundamental entre el radio  $R$ , el ángulo central  $\theta$ , medido en radianes, y la longitud correspondiente  $s$ . Si  $s = 2\pi R$ , que es la circunferencia del círculo, entonces, de acuerdo con la ecuación 3,  $\theta = 2\pi$ . En consecuencia, como también hay  $360^\circ$  en un círculo completo,

$$2\pi \text{ radianes equivalen a } 360^\circ. \quad (4)$$

En forma semejante,  $\pi$  radianes equivalen a  $180^\circ$ ,  $\pi/2$  radianes a  $90^\circ$ , etcétera. Un radián es equivalente a  $360^\circ/2\pi$  o sea aproximadamente  $57^\circ 18'$ . Se pueden deducir con facilidad otras equivalencias entre radianes y grados. De aquí en adelante cuando mencionemos ángulos siempre supondremos que están medidos en radianes.

Los estudiantes que estén acostumbrados a medir ángulos en grados se podrán

preguntar por qué se desea introducir el radián. La razón es que determinadas fórmulas básicas en el cálculo con funciones trigonométricas toman su forma más simple sólo cuando se emplean radianes.

### Definición de las funciones trigonométricas

En trigonometría se definieron estas funciones para valores de un ángulo. En este libro se definen para valores de una variable real. Consideremos al círculo unitario que se muestra en la figura 1.6.2. Dado cualquier número real  $\theta$ , se localiza el punto  $P(\theta)$  en

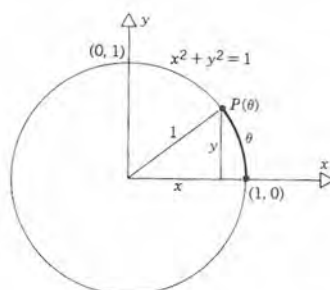


Figura 1.6.2

la circunferencia de este círculo unitario como sigue. Desde el punto  $(1, 0)$  se mide la distancia  $|\theta|$  en sentido levógiro si  $\theta > 0$ , y en sentido dextrógiro si  $\theta$  es negativa. Como en este caso el radio  $R = 1$ , se deduce que la longitud de un arco es numéricamente igual a la magnitud del ángulo subtendido, medido en radianes. Por tanto, el ángulo subtendido por el arco que corresponde a  $\theta$  es precisamente el ángulo que tiene el valor  $\theta$  en radianes. Sean  $(x, y)$  las coordenadas del punto  $P(\theta)$ . Se definen las seis funciones trigonométricas como sigue:

$$\sin \theta = y, \quad (5a)$$

$$\cos \theta = x, \quad (5b)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad x \neq 0 \quad (5c)$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad y \neq 0 \quad (6a)$$

$$\sec \theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad x \neq 0 \quad (6b)$$

$$\csc \theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad y \neq 0. \quad (6c)$$

El dominio de las funciones seno y coseno es  $R^1$ . El dominio de las funciones secante y tangente es  $R^1$ , excepto aquellos valores de  $\theta$  para los cuales  $x = 0$ , o sea,  $\theta = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$ . El dominio de las funciones cotangente y cosecante es  $R^1$ , excepto aquellos valores de  $\theta$  para los cuales  $y = 0$ , que son  $\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ .

Como las demás funciones trigonométricas se pueden expresar en términos de  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$ , es natural concentrar nuestra atención principalmente en estas dos últimas funciones, y hasta cierto punto en la función tangente. Los valores de las funciones trigonométricas para  $\theta = \pi/6, \pi/4$ , y  $\pi/3$  se pueden encontrar fácilmente a partir de triángulos como los de la figura 1.6.3. La tabla 1.1 contiene los valores de las funciones seno, coseno y tangente para diversos valores de  $\theta$ . Naturalmente, los valores de las seis funciones para cualquier  $\theta$  se pueden obtener con una calculadora de bolsillo.

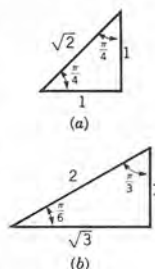


Figura 1.6.3

Tabla 1.1 Valores de  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  y  $\tan \theta$  para diversos valores de  $\theta$ .

$\theta$ radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\theta$ grados	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definido	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	no definido	0

## Periodicidad

Se dice que una función  $f$  es **periódica** y que su periodo es  $p$ , si para cada  $x$  en el dominio de  $f$  el punto  $x + p$  también está en el dominio de  $f$ , y  $f(x + p) = f(x)$ . Al número mínimo positivo  $p$  que tenga esta propiedad se le llama **periodo fundamental**. Veamos las funciones trigonométricas. Si se aumenta el número  $\theta$  en  $2\pi$ , el punto  $P(\theta + 2\pi)$  de la circunferencia del círculo unitario está en la misma posición que el punto  $P(\theta)$  y por tanto tiene las mismas coordenadas (véase figura 1.6.4). Por tanto todas las funciones trigonométricas son *periódicas de periodo  $2\pi$*  para todos los valores de  $\theta$  para los cuales están definidas. Esto es,

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta, \quad (7)$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta, \quad (8)$$

y así sucesivamente. En consecuencia, es suficiente conocer las funciones trigonométricas para  $\theta$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  para determinar esas funciones en los demás puntos.

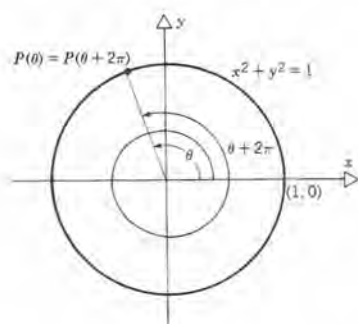


Figura 1.6.4

Un examen detenido de las funciones tangente y cotangente muestra que estas dos funciones son realmente periódicas, con un periodo menor igual a  $\pi$ . Véase problema 17. Por tanto,  $\pi$  es el periodo fundamental de la tangente y de la cotangente;  $2\pi$  es el periodo fundamental de las otras cuatro funciones.

### Funciones pares e impares

Si el punto  $P(\theta)$  tiene coordenadas  $(x, y)$ , entonces, de acuerdo con la figura 1.6.5, es obvio que el punto  $P(-\theta)$  tiene coordenadas  $(x, -y)$ . Por tanto,

$$\cos(-\theta) = x = \cos \theta, \quad (9)$$

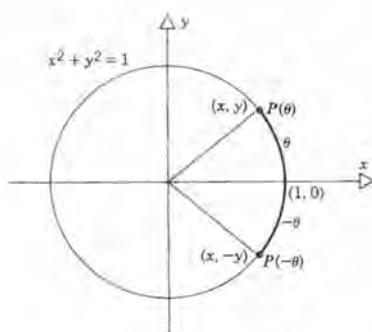


Figura 1.6.5

de modo que la función coseno es función par. También

$$\sin(-\theta) = -y = -\sin \theta, \quad (10)$$

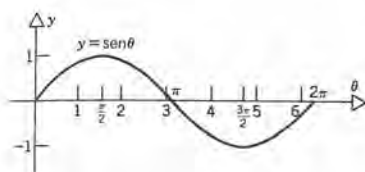


$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\tan \theta, \quad (11)$$

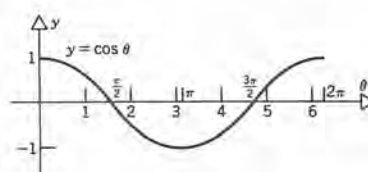
y por tanto las funciones seno y tangente son funciones impares. Se pueden deducir relaciones semejantes para las demás funciones trigonométricas. Nótese, por ejemplo, que si la gráfica de la función seno se conoce para  $\theta$  en  $[0, \pi]$ , entonces se puede usar el hecho de que es impar para tener la gráfica en  $[-\pi, 0]$ , y se puede emplear su periodicidad con periodo de  $2\pi$  para obtener la gráfica para los demás valores de  $\theta$ .

### Gráficas de las funciones trigonométricas

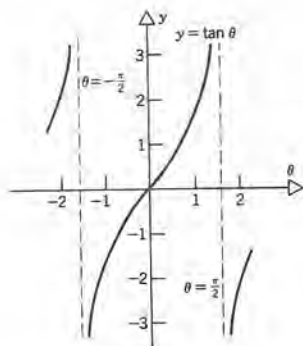
En las figuras 1.6.6 a 1.6.11 se muestran las gráficas de las seis funciones trigonométricas. Las funciones seno y coseno están acotadas y su imagen es  $[-1, 1]$ . Las demás funciones trigonométricas no tienen cota; la imagen de las funciones tangente y cotangente es  $(-\infty, \infty)$ , y la de las funciones secante y cosecante es  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ .



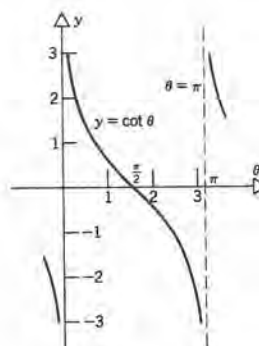
**Figura 1.6.6** Función seno.



**Figura 1.6.7** Función coseno.



**Figura 1.6.8** Función tangente.



**Figura 1.6.9** Función cotangente.

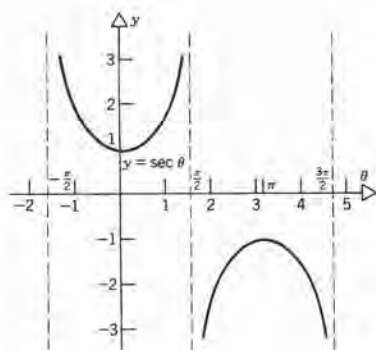


Figura 1.6.10 Función secante.

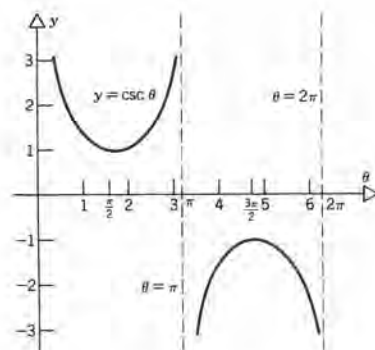


Figura 1.6.11 Función cosecante.

## Identidades

Hay muchas relaciones entre las seis funciones trigonométricas. Suponemos que el lector está razonablemente familiarizado con las identidades trigonométricas comunes. Algunas de las más importantes se mencionan aquí como referencia.

**Identidades pitagóricas.** Como el punto  $P(\theta)$  siempre está en el círculo unitario  $x^2 + y^2 = 1$ , la consecuencia inmediata es que

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (12)$$

Dividiendo entre  $\cos^2 \theta$  y  $\sin^2 \theta$  respectivamente, se obtiene

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta. \quad (13)$$

**Fórmulas de traslación.** Si las coordenadas del punto  $P(\theta)$  son  $(x, y)$  entonces las coordenadas del punto  $P(\theta + \pi/2)$  son  $(-y, x)$ , y por tanto

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -y = -\sin \theta \quad (14)$$

y

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = x = \cos \theta. \quad (15)$$

Así, por ejemplo, se puede obtener la gráfica de la función coseno trasladando la gráfica de la función seno una distancia  $\pi/2$  hacia la izquierda. Esto se muestra en la figura 1.6.12.

**Ley de los cosenos.** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  los lados de un triángulo, y sea  $\theta$  el ángulo opuesto al lado  $c$ . Véase figura 1.6.13. Entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta. \quad (16)$$

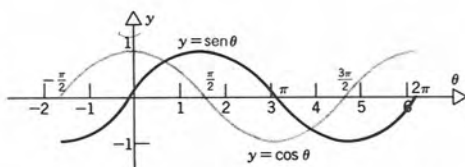


Figura 1.6.12

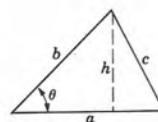


Figura 1.6.13

Esta fórmula se puede deducir directamente usando trigonometría (véase problema 33).

**Fórmulas para sumas y restas.** Sean  $\theta$  y  $\phi$  números reales cualesquiera. Entonces

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi, \quad (17)$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi, \quad (18)$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi, \quad (19)$$

$$\sin(\theta - \phi) = \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi. \quad (20)$$

Estas identidades deben ser muy familiares para el lector y son fundamentales. Se deducen en los problemas 34 y 35. Nótese que las identidades de traslación (14) y (15) se pueden deducir haciendo que  $\phi = \pi/2$  en las ecuaciones 17 y 19, respectivamente.

**Fórmulas para ángulos dobles.** Si se hace  $\phi = \theta$  en las ecuaciones 17 y 19, se obtiene

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad (21)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta. \quad (22)$$

Mediante el teorema de Pitágoras, podemos también expresar a  $\cos 2\theta$  en la siguiente forma:

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad (23)$$

o también

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1. \quad (24)$$

**Fórmulas para la mitad de un ángulo.** Si en las ecuaciones 23 y 24 hacemos que  $\theta = \phi/2$ , y a continuación despejamos  $\sin \phi/2$  y  $\cos \phi/2$ , respectivamente, obtenemos

$$\sin \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{2}}, \quad (25)$$

$$\cos \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \phi}{2}}. \quad (26)$$

La elección del signo + o - depende del cuadrante en el que se encuentre  $\phi/2$ . Por ejemplo,

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

y

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{1}{2} \frac{3\pi}{2} = - \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{3\pi}{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Fórmulas para productos.** Si sumamos las ecuaciones 17 y 18 obtenemos

$$\cos \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)]. \quad (27)$$

Restando la ecuación 17 de la 18, el resultado es

$$\sin \theta \sin \phi = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)]. \quad (28)$$

Y finalmente, sumando las ecuaciones 19 y 20 obtenemos

$$\sin \theta \cos \phi = \frac{1}{2} [\sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)]. \quad (29)$$

Esta lista de identidades de ninguna manera es exhaustiva; sin embargo es suficiente para la mayor parte de nuestros fines. Nótese que conociendo las identidades (9), (10), (12), (17) y (19),

$$\cos(-\theta) = \cos \theta,$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta,$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi,$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi,$$

las demás identidades, a excepción de la ley de los cosenos, se pueden deducir con



facilidad. También será útil familiarizarse con las gráficas de las funciones, al menos las de seno, coseno y tangente.

Terminaremos esta sección con una observación acerca de la clasificación de las funciones. Una función real  $f$ , de variable real  $x$  se llama **algebraica** si  $f(x)$  se puede calcular efectuando un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces con la variable  $x$ . Todos los polinomios, funciones racionales y funciones radicales son funciones algebraicas. A las funciones que no son algebraicas se les llama **trascendentes**. Las funciones trigonométricas son funciones trascendentes, aunque no demostraremos esto aquí.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8 emplear las identidades del texto para evaluar la cantidad que se presenta. Comprobar las respuestas con una calculadora para evaluar directamente la función dada.

$$1. \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2. \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$3. \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$4. \cos\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$5. \sin \frac{\pi}{8}$$

$$6. \cos \frac{\pi}{8}$$

$$7. \cos \frac{\pi}{12}$$

$$8. \sin \frac{\pi}{12}$$

En los problemas 9 a 14 hacer un esquema de la gráfica de la función dada.

$$9. f(x) = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$10. f(x) = 2 \sin \frac{1}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 4\pi$$

$$11. f(x) = -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$12. f(x) = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$13. f(x) = 2 \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$14. f(x) = |\sin x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

15. A partir de las definiciones, demostrar que la función secante es función par, y que las funciones cosecante y cotangente son funciones impares.

16. A partir de las definiciones, demostrar que si  $n$  es entero positivo, entonces cada una de las funciones trigonométricas es periódica y su periodo es  $2n\pi$ ; esto es, por ejemplo, demostrar que  $\sin(\theta + 2n\pi) = \sin \theta$ .

17. Localizar en el círculo unitario los puntos  $P(\theta)$  y  $P(\theta + \pi)$ . Con las coordenadas de esos dos puntos, demostrar que  $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ , y que  $\cot(\theta + \pi) = \cot \theta$ . En consecuencia, las funciones tangente y cotangente son periódicas, y su periodo es  $\pi$ .

En los problemas 18 a 21 encontrar el periodo fundamental de la función dada.

$$18. f(x) = \sin 2x \quad 19. f(x) = \sin \frac{1}{2}x$$

$$20. f(x) = 3 \cos 3x \quad 21. f(x) = 2 \cos(\frac{1}{3}x + 4)$$

22. Demostrar que las funciones  $f(x) = ax + b$  y  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , no son periódicas. De modo más general se puede demostrar que la única función racional que es periódica es la función constante  $f(x) = c$ , que puede tener cualquier periodo.

Deducir cada una de las identidades de los problemas 23 a 26 haciendo  $\theta = (x + y)/2$  y  $\phi = (x - y)/2$  en las fórmulas (27) a (29).

$$23. \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$24. \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$25. \sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

$$26. \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

## 54 FUNCIONES

27. Si  $a \sin \theta + b \cos \theta = R \sin(\theta + \delta)$  para toda  $\theta$ , siendo  $a$ ,  $b$  y  $\delta$  constantes, demostrar que  $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ , y que  $\delta$  es el ángulo tal que  $\cos \delta = a/R$ , y que  $\sin \delta = b/R$ . La función  $f(\theta) = R \sin(\theta + \delta)$  es periódica con periodo  $2\pi$ , y su imagen es  $[-R, R]$ . Su gráfica es una curva del seno comprendida entre  $y = -R$  y  $y = R$ , y está desplazada una distancia  $\delta$  a la izquierda del

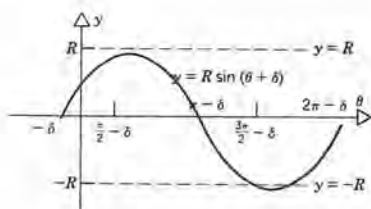


Figura 1.6.14

origen (véase figura 1.6.14). Los números  $R$  y  $\delta$  se llaman **amplitud** y **ángulo de fase**, respectivamente, de la función periódica.

28. Se tiene  $f(\theta) = \sin a\theta$ , en donde  $a$  es una constante positiva llamada **frecuencia**. Demostrar que el periodo de  $f(\theta)$  es  $2\pi/a$ ; por tanto el periodo disminuye a medida que la frecuencia aumenta. Para las demás funciones trigonométricas se tienen resultados semejantes.

En los problemas 29 a 32 emplear el resultado del problema 27 para expresar cada una de las sumas o diferencias en la forma  $R \sin(\theta + \delta)$ . A continuación bosquejar la gráfica de la función dada.

29.  $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$       30.  $\frac{3}{\sqrt{2}} (\sin \theta - \cos \theta)$

31.  $3 \sin \theta - 2 \cos \theta$       32.  $-\sin \theta + \cos \theta$

33. Para deducir la ley de los cosenos, se traza una perpendicular al lado  $a$  que pase por el vértice opuesto a él, como en la figura 1.6.13. Sea  $h$  la longitud de esta perpendicular. Empleando trigonometría y el teorema de Pitágoras obtener el resultado que se desea.

34. En este problema describiremos a grandes rasgos la

deducción de la identidad  $\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$ . A partir de ella se deduce la identidad para  $\cos(\theta + \phi)$  sustituyendo  $\phi$  por  $-\phi$ . Analizando la figura 1.6.15,

- (a) Deducir una ecuación para  $c^2$  empleando la ley de los cosenos.  
 (b) Deducir una ecuación para  $c^2$  empleando la fórmula para la distancia entre dos puntos. Nótese que las coordenadas de  $P(\theta)$  son  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , y las de  $P(\phi)$  son  $(\cos \phi, \sin \phi)$ .  
 (c) Igualar las dos ecuaciones para obtener el resultado deseado.

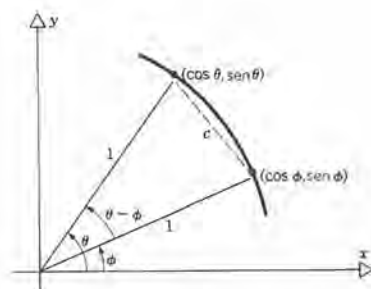


Figura 1.6.15

35. Deducir la identidad

$$\sin(\theta - \phi) = \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi$$

empleando el resultado del problema 34 y las ecuaciones 14 y 15. La identidad para  $\sin(\theta + \phi)$  es consecuencia de reemplazar  $\phi$  por  $-\phi$ .

En los problemas 36 y 37 demostrar la identidad que aparece; suponer que  $h \neq 0$ .

36.  $\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$

37.  $\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = -\frac{\sin(h/2)}{h/2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$

38. Si  $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ , calcular  $f(\pi/4)$ ,  $f(3\pi/4)$ ,  $f(5\pi/4)$ , y  $f(7\pi/4)$ . ¿Para cuál de esos valores de  $x$  se cumple que  $f(x) = \sin x$ ?



## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 8 hacer un bosquejo de la gráfica de la ecuación dada.

1.  $3x - 2y = 12$
2.  $x + 3y \leq 0$
3.  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 1 = 0$
4.  $x^2 + y^2 - 6x + 2y > 6$
5.  $x + |x| = y + |y|$
6.  $|y + 2| = |x - 3|$
7.  $y = |1 + 2 \cos x|$
8.  $|y| = 1 + 2 \cos x$

En los problemas 9 a 16 determinar el dominio  $X$  y la imagen  $f(X)$  de la función dada. También, hacer un esquema de la gráfica de  $y = f(x)$ .

9.  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$
10.  $f(x) = |3x - 4|$
11.  $f(\sin x) = x \sin 2x$
12.  $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$
13.  $f(x) = |x| - |x - 1|$
14.  $f(x) = |3 - x| + |5 + 2x|$
15.  $f(x) = 2 - x - x^2$
16.  $f(x) = |2 - x - x^2|$

En los problemas 17 a 24, determinar el conjunto de números que satisfacen la desigualdad dada. Expresar la respuesta en forma de intervalo, o de unión de intervalos.

17.  $x^2 \geq 16$
18.  $3 - \frac{2}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$
19.  $-7 < \frac{6}{x} + x < 5; \quad x \neq 0$
20.  $|2x - 3| < |x + 1|$
21.  $|3x + 1| \geq 2$
22.  $2 < x^2 + x < 6$
23.  $\cos 2x \geq \frac{1}{2}$
24.  $\sin(x - \pi/6) \leq \frac{1}{2}$
25. Deducir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(2, 5)$  que sea paralela a la recta  $x + 2y = 4$ .
26. Deducir la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(-2, 1)$  y que sea perpendicular a la recta  $2x - 3y = 6$ .
27. Deducir la ecuación del círculo con centro en  $(-3, 1)$  que pase por el punto  $(2, 3)$ .
28. Deducir la ecuación del círculo con centro en  $(3, 2)$  que sea tangente al eje  $y$ .
29. Deducir una ecuación que satisfagan todos los puntos que estén a una distancia de  $(-1, 3)$  que sea el doble de su distancia a  $(4, 2)$ .

30. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que sean equidistantes del origen y de la recta  $x = -2$ .

En los problemas 31 a 38 bosquejar la función dada y determinar su dominio  $X$  y su imagen  $f(X)$  en forma de intervalo o de unión de intervalos.

31.  $f(x) = \lfloor x \rfloor + x$
32.  $f(x) = \lfloor x \rfloor - 2x$
33.  $f(x) = x(x - 4)(x + 4)/4$   
¿Es esta función par, impar, o ninguno de los dos casos?
34.  $f(x) = |x^3 - 16x|/4$   
¿Es esta función par, impar, o ninguno de los dos casos?
35.  $f(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor}, \quad x \geq 1$
36.  $g(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad x \geq 1$
37.  $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$
38.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

En los problemas 39 a 42 hacer un esquema de la gráfica de la función dada.

39.  $f(x) = \left| \cos \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) \right|$
40.  $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
41.  $f(x) = 2 \tan 2x$
42.  $f(x) = \frac{1}{2} \tan \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right)$

En los problemas 43 y 44 deducir una expresión que sea equivalente a la función dada.

43.  $\sec^2 x$  en términos de  $\tan x$
44.  $\csc^2 x$  en términos de  $\sec x$
45. Si  $b > a > 0$ , demostrar que  
$$b^2 > ab > a^2,$$
  
y que

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

¿Es válido alguno de los dos resultados si se sustituye la condición de que  $b > a > 0$  por la condición de que  $b > a$ ?

46. Si  $a$  y  $b$  son números reales no negativos, demostrar que si  $a^2 < b^2$ , entonces  $a < b$ .

*Sugerencia:*  $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ .

47. Demostrar que si  $a > 0$  y  $b > 0$ , entonces  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}$ .

*Sugerencia:* demostrar que  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq a + b$ , y a continuación usar el resultado del problema 46.



# CÁLCULO

## Capítulo 2

### Límites y funciones continuas

El cálculo se desarrolló como medio para resolver dos tipos de problemas, que desde la antigüedad habían aparecido en diversas formas. A continuación se presentan ejemplos de estos problemas.

1. Si un objeto se mueve en una recta de tal modo que su posición  $s$  y el tiempo  $t$  se relacionan mediante la ecuación  $s = f(t)$  para una función  $f$  dada, calcular la velocidad del objeto en cualquier tiempo.
2. Si  $f$  es una función dada, calcular el área limitada por la gráfica de  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ .

El primero de los problemas se resuelve mediante el proceso de *derivación*, y el segundo mediante el proceso de *integración*. El primer curso de cálculo se ocupa principalmente de aclarar la naturaleza de estos dos procesos, de desarrollar técnicas por medio de las cuales se puedan usar con eficiencia y de indicar algunas de sus aplicaciones.

Tanto la derivación como la integración son *procesos de límite*; esto es, dependen de un concepto matemático que se conoce como *límite*. En este capítulo describiremos el concepto, presentando primero algunos de los conceptos matemáticos de modo intuitivo, y después refinando estas ideas y tratándolas con más detalle. En los capítulos 3 y 6, respectivamente, regresaremos al estudio de la derivación y de la integración.

## 2.1 LA APARICIÓN NATURAL DE LAS OPERACIONES DE LÍMITE

El concepto matemático de límite es un refinamiento de una noción intuitiva que se presenta con frecuencia en nuestras vidas cotidianas. Comenzaremos con un ejemplo.

### Velocidad

Imaginémonos una partícula (protón, automóvil, cohete) que se mueve en una línea recta, el eje  $s$ . Supongamos que conocemos la posición  $s$  de la partícula con respecto a un origen fijo en cada instante  $t$ ; esto es, conocemos  $s = f(t)$ . Nuestra experiencia con los objetos en movimiento nos da una idea intuitiva de la velocidad; pero ¿qué significa exactamente hablar de la velocidad  $v$  de la partícula en el tiempo  $t$ , y cómo podemos calcular esta velocidad?

### EJEMPLO 1

Galileo (1564-1642) descubrió que la posición de un cuerpo que cae libremente está dada aproximadamente por

$$s = 16t^2, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde  $s$  se mide en pies y  $t$  en segundos. Suponiendo que la ecuación 1 describe en forma correcta la posición de determinado cuerpo que cae, calcular su velocidad promedio para los intervalos de tiempo desde  $t = 1$  hasta  $t = 2$ , y desde  $t = 2$  hasta  $t = 3$ , respectivamente. También, calcular la velocidad cuando  $t = 2$ .

La velocidad promedio durante el intervalo de tiempo  $[1, 2]$  es el cambio de posición durante este intervalo, dividido entre el tiempo transcurrido. Así, empleando una notación obvia,

$$v_p(1, 2) = \frac{64 - 16}{2 - 1} = 48 \text{ pie/seg.}$$

Análogamente, para el intervalo  $[2, 3]$

$$v_p(2, 3) = \frac{144 - 64}{3 - 2} = 80 \text{ pie/seg.}$$

El cálculo de la velocidad cuando  $t = 2$  es algo más difícil, porque es natural que no tenga sentido formar la razón del cambio de la posición al tiempo transcurrido en un instante. Lo que podemos hacer es calcular la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo muy corto. Por ejemplo, si  $t > 2$ , entonces la velocidad promedio durante el intervalo  $[2, t]$  es

$$v_p(2, t) = \frac{16t^2 - 64}{t - 2}, \quad t > 2. \quad (2)$$

Igualmente, si  $t < 2$ , entonces la velocidad promedio para el intervalo  $[t, 2]$  es

$$v_p(t, 2) = \frac{64 - 16t^2}{2 - t}, \quad 0 \leq t < 2. \quad (3)$$

Como los lados derechos de las ecuaciones 2 y 3 son los mismos, la velocidad promedio durante cualquier intervalo que principie o termine en 2 está dada por

$$v_p = h(t) = \frac{16t^2 - 64}{t - 2}, \quad t \geq 0, \quad t \neq 2. \quad (4)$$

Obsérvese que hemos empleado una notación funcional para expresar a  $v_p$  en términos del extremo del intervalo de tiempo. El dominio de la función  $h$  es  $[0, 2) \cup (2, \infty)$ . Debemos excluir a  $t = 2$  porque, como se hizo notar antes, la razón no tiene significado entonces. Sin embargo, ¿qué sucede si asignamos valores a  $t$  que sean cercanos a 2? En la tabla 2.1 se presentan algunos resultados. Hasta con un examen superficial de los datos de la tabla se aprecia que a medida que se le da a  $t$  valores más y más cercanos a 2, la velocidad promedio toma valores más y más cercanos a 64. Esta conclusión es más evidente si factorizamos el numerador del lado derecho de la ecuación 4 y escribimos

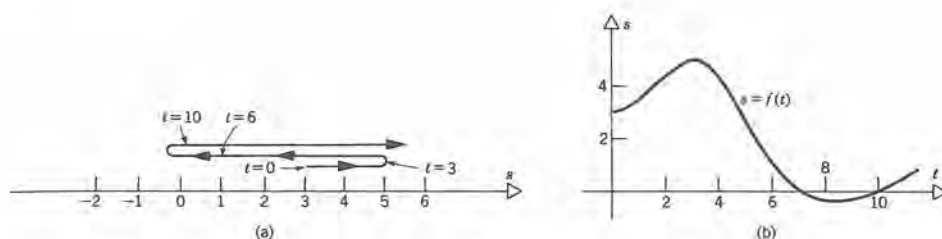
**Tabla 2.1** Velocidad promedio, de acuerdo con la ecuación 4, para diversos intervalos de tiempo.

$t$	Intervalo de tiempo	$v_p$
1	$[1, 2]$	48
1.5	$[1.5, 2]$	56
1.9	$[1.9, 2]$	62.4
1.99	$[1.99, 2]$	63.84
1.999	$[1.999, 2]$	63.984
2.001	$[2, 2.001]$	64.016
2.01	$[2, 2.01]$	64.16
2.1	$[2, 2.1]$	65.6
2.5	$[2, 2.5]$	72
3	$[2, 3]$	80

$$v_p = \frac{16(t - 2)(t + 2)}{t - 2} = 16(t + 2), \quad t \geq 0, \quad t \neq 2. \quad (5)$$

Obsérvese que  $t = 2$  se debe seguir excluyendo de nuestra consideración, ya que la ecuación 5 se deduce a partir de la ecuación 4. Sin embargo, no cabe duda ahora que  $v_p$  toma valores más y más cercanos a 64 a medida que a  $t$  se le asignan valores más y





**Figura 2.1.1** (a) Partícula que se mueve a lo largo de una recta.  
(b) Posición de la partícula como función del tiempo.

más cercanos a 2. ¿Tiene sentido ahora decir que la velocidad cuando  $t = 2$  es 64 pie/s? Al menos de modo tentativo, contestaremos afirmativamente esta pregunta. ■

Regresemos ahora al caso general en el que suponemos que  $s = f(t)$ . Si el eje  $s$  es horizontal y está dirigido hacia la derecha, entonces un valor positivo o negativo de  $s$  corresponde a una posición a la derecha o a la izquierda del origen, respectivamente. Por ejemplo, el movimiento podría ser como el que se muestra en la figura 2.1.1a, para el cual la gráfica correspondiente de  $f$  se muestra en la figura 2.1.1b. La velocidad promedio durante el intervalo de tiempo de  $t_1$  a  $t_2$  está dada por

$$v_p(t_1, t_2) = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (6)$$

Nótese que la velocidad promedio es *el cambio neto de posición dividido entre el tiempo transcurrido*, lo cual no necesariamente es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. Desde luego que esos dos conceptos serán lo mismo si la partícula siempre viaja en la dirección positiva. Para el caso que se presenta en la figura 2.1.1 la velocidad promedio puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del intervalo de tiempo que se considera. A un cociente de la forma (6) se le llama **cociente de diferencias**, y su nombre es explícito en este caso de posición y tiempo.

Aunque tiene cierto interés, la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo no da la velocidad de la partícula en un instante específico del intervalo de tiempo. En realidad, ¿qué queremos decir con velocidad en un instante  $t_0$  específico, o *velocidad instantánea* en el tiempo  $t_0$ ? Tenemos un concepto intuitivo de velocidad instantánea, en contraste con la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo. Sin embargo, se tiene dificultad en la medición de la velocidad instantánea, porque lo que medimos (o calculamos) directamente es una velocidad promedio durante un intervalo de tiempo de  $t_0$  a  $t$ ,

$$v_p(t_0, t) = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad t \neq t_0. \quad (7)$$

Obsérvese que, como en el ejemplo 1,  $t$  puede ser mayor o menor que  $t_0$ . Mientras más corto sea el intervalo de tiempo más se aproximará la velocidad promedio a nuestro



concepto de velocidad instantánea en  $t_0$ . Sin embargo, al tratar de tomar intervalos de tiempo más y más cortos encontraremos que, independientemente de la exactitud de reglas y relojes, la exactitud de nuestras mediciones finalmente dejará mucho que desear. Es aquí donde el matemático tiene la ventaja, porque no hay dificultad alguna en *pensar* en intervalos de tiempo, y de distancia, arbitrariamente cortos. Así, lo que debemos hacer en la ecuación 7 es asignar valores a  $t$  que sean más y más cercanos a  $t_0$ . Describiremos este proceso diciendo que  $t$  tiende a  $t_0$ , y escribiendo  $t \rightarrow t_0$ . Cuando  $t \rightarrow t_0$ , el numerador y el denominador de la ecuación 7 tienden a cero, y en el punto  $t_0$  el cociente tiene la forma indeterminada, sin significado,  $0/0$ . Sin embargo, el cociente se puede aproximar a un número definido a medida que  $t \rightarrow t_0$ . En realidad, se debe hacer así si nuestra concepción de velocidad instantánea es realista.

El proceso que hemos descrito y representado en el ejemplo 1 se puede resumir del siguiente modo, empleando la notación que se acostumbra en cálculo:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} v_p(t_0, t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (8)$$

Así, si el cociente de diferencias, en la ecuación 8, tiene un límite definido cuando  $t \rightarrow t_0$ , este número es entonces la velocidad en  $t_0$ .

Es importante comprender cómo se debe interpretar la ecuación 8. Iniciamos con una idea conceptual de velocidad en un instante, obtenida de nuestra experiencia cotidiana. Podría parecer razonable formular a continuación una definición precisa de velocidad, y después idear algunas formas de calcularla. En lugar de ello, calculamos una cantidad relacionada, la velocidad promedio durante un intervalo corto de tiempo, y a continuación pasamos al límite a medida que se hace más y más corto el intervalo. Si con este proceso se obtiene un valor límite definido, entonces *definimos* a este valor como la velocidad en el instante dado. Así, la ecuación 8 es la *definición* de la velocidad en el instante  $t_0$ . Aunque esta manera de proceder podrá parecer ambigua al principio, nótese que conduce a una fórmula para la velocidad que puede tratar uno de evaluar en casos especiales, como lo hicimos en el ejemplo 1. Seguiremos un procedimiento análogo en muchos otros casos que encontraremos después. Desde luego que una definición como la ecuación 8 debe considerarse al principio en forma tentativa, hasta que se pueda determinar si su empleo conduce a algunas inconsistencias. En el caso de la velocidad, se cuenta con siglos de experiencia que validan la definición (8).

## Pendiente

Examinaremos ahora, desde el punto de vista geométrico, el procedimiento que usamos para calcular la velocidad de una partícula que se mueve en línea recta. La interpretación geométrica de la ecuación 7 se muestra en la figura 2.1.2. Los puntos  $(t_0, s_0)$  y  $(t, s)$  se indican en la gráfica de  $s = f(t)$ , y el cociente de diferencias  $(s - s_0)/(t - t_0)$  de la ecuación 7 es precisamente la pendiente de la recta (la *recta secante*) que pasa por estos dos puntos. En otras palabras, dada la posición  $s$  de la partícula como función del tiempo  $t$ , la *velocidad promedio durante cualquier intervalo de tiempo es la pendiente de la secante que une al par correspondiente de puntos en la gráfica de  $s = f(t)$ .*

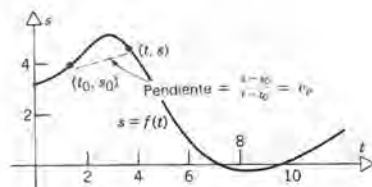


Figura 2.1.2

Veamos ahora la interpretación geométrica de la ecuación 8 cuando  $t \rightarrow t_0$ . En la figura 2.1.3 hemos trazado las rectas secantes cuyas pendientes son

$$\frac{s_2 - s_0}{t_2 - t_0}, \quad \frac{s_4 - s_0}{t_4 - t_0}, \quad \frac{s_6 - s_0}{t_6 - t_0}, \dots \quad (9)$$

para  $t_2, t_4, t_6, \dots$  mayores que, pero sucesivamente más próximos a  $t_0$ , y las secantes cuyas pendientes son

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}, \quad \frac{s_3 - s_0}{t_3 - t_0}, \quad \frac{s_5 - s_0}{t_5 - t_0}, \dots \quad (10)$$

para  $t_1, t_3, t_5, \dots$  menores que, pero sucesivamente más próximos a  $t_0$ . Parece razonable, intuitivamente, que estas pendientes tiendan a la pendiente de la recta que es “tangente” a la gráfica de  $s = f(t)$  en  $(t_0, s_0)$ . En efecto, así es como *definimos* la pendiente  $m$  de la recta tangente\* a una curva en un punto, a saber

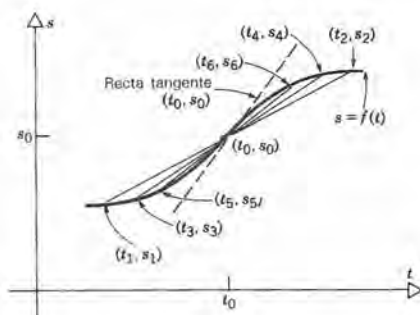


Figura 2.1.3 Rectas secantes que tienden a la línea tangente cuando  $t \rightarrow t_0$ .

\* El problema de determinar la recta tangente a una curva dada fue considerado por lo griegos, pero sólo con éxito, en unos cuantos casos especiales. Por ejemplo, Apolonio de Perga (c. 262-190 A. C.) sabía cómo construir tangentes a secciones cónicas.

Descartes y Fermat hallaron un método general para encontrar tangentes. La solución de Descartes estaba en su tratado general de geometría analítica (1637), pero la solución de Fermat no fue publicada sino hasta 1679. Sin embargo, otros matemáticos conocían el trabajo de Fermat a través de su correspondencia, y es algo más aproximado al punto de vista moderno. Sin embargo, ni Descartes ni Fermat percibieron en forma satisfactoria la necesidad de una operación de límite.

$$m = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \quad (11)$$

Comparando la ecuación 11 con la ecuación 8 llegamos a la conclusión de que los problemas para calcular la velocidad de una partícula en movimiento y para determinar la pendiente de la tangente a una curva son matemáticamente idénticos. Es un hecho de primordial importancia, ya que proporciona un enlace entre la mecánica y la geometría, que puede ser útil para estudiar ambas disciplinas. De mayor importancia es el hecho de que ilustra el papel unificador de las matemáticas. Cuando se dan cantidades fundamentales tanto en matemáticas (velocidad) como en geometría (pendiente) mediante el mismo proceso matemático, con seguridad es aconsejable estudiar el proceso y sus propiedades para aplicar a continuación los resultados en ambos campos. En realidad, a medida que avancemos, encontraremos muchas otras áreas en las que se pueden emplear los mismos resultados matemáticos.

## EJEMPLO 2

Calcular la pendiente  $m$  de la recta tangente a la gráfica de  $y = 4 - x^2$  en el punto  $(1, 3)$ .

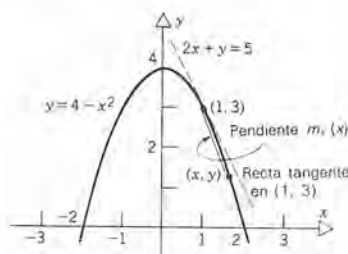
En la figura 2.1.4 se muestra la gráfica de  $y = 4 - x^2$ . La pendiente  $m_s(x)$  de la secante que une al punto  $(1, 3)$  con el punto arbitrario  $(x, y)$  es

$$m_s(x) = \frac{y - 3}{x - 1} = \frac{4 - x^2 - 3}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

Factorizando el numerador obtenemos

$$m_s(x) = \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = -(1 + x), \quad x \neq 1.$$

Figura 2.1.4



Ahora es fácil ver que si se asignan valores de  $x$  más y más cercanos a 1, entonces  $m_s(x)$  toma valores más y más cercanos a  $-2$ . En consecuencia,

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} m_s(x) = -2$$

es la pendiente de la recta tangente en  $(1, 3)$ . Esta recta tangente tiene la ecuación

$$y - 3 = -2(x - 1)$$



o bien

$$2x + y = 5. \blacksquare$$

### EJEMPLO 3

Bajo determinadas condiciones, la masa que se muestra en la figura 2.1.5 oscila de tal manera que para todo tiempo  $t$  su posición es

$$s = f(t) = 2 \cos t.$$

Calcular la velocidad  $v$  de la masa cuando  $t = t_0 = 2\pi/3$ .

En la figura 2.1.6 se muestra la gráfica de  $s = 2 \cos t$ . La velocidad promedio de la masa durante un corto intervalo de tiempo entre  $2\pi/3$  hasta  $t$  está dado por el cociente de diferencias

$$\begin{aligned} v_p(t) &= \frac{f(t) - f(2\pi/3)}{t - 2\pi/3} \\ &= \frac{2 \cos t - 2 \cos(2\pi/3)}{t - 2\pi/3} \end{aligned}$$

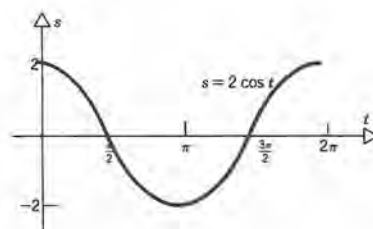
**Tabla 2.2** Velocidad promedio  $v_p(t)$ , de acuerdo con la ecuación 12, para diversos valores de  $t$ .

$t$	$v_p(t)$
$\frac{\pi}{2} \approx 1.57080$	-1.909859
2.0	-1.776642
2.05	-1.753676
2.09	-1.734243
2.094	-1.732248
2.0943	-1.732098
2.0944	-1.732048
2.0945	-1.731998
2.095	-1.731748
2.1	-1.729239
2.15	-1.703363
$\frac{5\pi}{6} \approx 2.61799$	-1.398114

Nota:  $2\pi/3 \approx 2.094395$ ;  
 $\sqrt{3} \approx 1.732051$ .



**Figura 2.1.5** Sistema vibratorio de resorte y masa.



**Figura 2.1.6** Posición de la masa como función del tiempo.



$$= \frac{2 \cos t + 1}{t - 2\pi/3}, \quad t \neq \frac{2\pi}{3}, \quad (12)$$

en las que  $t$  puede ser mayor o menor que  $2\pi/3$ . En este caso no podemos simplificar la última expresión de la ecuación 12 factorizando, como lo hicimos en los ejemplos anteriores. Sin embargo, si evaluamos  $v_p(t)$  para valores de  $t$  cercanos a  $2\pi/3$ , obtendremos los datos de la tabla 2.2. De acuerdo con esos resultados parece que  $v_p(t)$  tiende a un valor cercano a  $-1.73205$  cuando  $t \rightarrow 2\pi/3$ . Por tanto, llegamos a la conclusión de que este valor es la velocidad de la masa cuando  $t = 2\pi/3$ . En efecto, es posible demostrar que  $v = -\sqrt{3}$  cuando  $t = 2\pi/3$ . ■

Para terminar esta sección, subrayaremos la naturaleza tentativa de la conclusión que sacamos en el ejemplo 3. Si bien parecen convincentes los datos de la tabla 2.2, se debe tener cuidado al sacar conclusiones firmes únicamente a partir de cálculos numéricos. Para trabajar con límites de una manera más segura, necesitamos establecer un mejor entendimiento de las propiedades básicas de los límites. Éste es el objeto de las siguientes secciones.

## PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 4 se da la posición  $s$  de una partícula como función del tiempo  $t$ . Para el instante  $t_0$  dado, calcular en cada caso, la velocidad promedio  $v_p$  durante el intervalo  $[t_0, t]$  y la velocidad  $v$  en  $t_0$ .

1.  $s = 5t^2 - 3$ ,  $t_0 = 1$
2.  $s = t^2 + 3t$ ,  $t_0 = 2$
3.  $s = 2t^3 - t^2$ ,  $t_0 = 2$
4.  $s = t^3 - 3t + 4$ ,  $t_0 = 3$

En los problemas del 5 al 10, calcular la pendiente  $m$  de la recta tangente a la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes. También deducir la ecuación de la recta tangente.

5.  $y = 3x^2 + 1$ ; (1, 4)
6.  $y = x^3 + 1$ ; (-1, 0)
7.  $y = 2x^2 - 3x + 4$ ; (2, 6)
8.  $y = \frac{1}{x}$ ; (2,  $\frac{1}{2}$ )
9.  $y = \frac{5}{x+3}$ ; (2, 1)
10.  $y = \frac{x-3}{x+2}$ ; (2, -4)

11. (a) Demostrar que si  $s = 16t^2$  como en el ejemplo 1, entonces la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo es igual a la velocidad instantánea en la mitad de dicho intervalo.  
(b) Si  $s = t^3$ , determinar la velocidad instantánea en el punto  $t = t_0$ . También, determinar la velocidad promedio en el intervalo  $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$ . Nótese que en contraste con la parte, (a), estas dos cantidades no son las mismas, aunque la velocidad promedio tiende a la velocidad instantánea cuando  $\tau \rightarrow 0$ .
12. El área  $S$  de la superficie de una esfera se relaciona con el radio  $r$  mediante  $S = 4\pi r^2$ .  
(a) Determinar la rapidez promedio a la cual  $S$  cambia cuando  $r$  cambia de  $r_0$  a  $r_0 + h$ .  
(b) Determinar la rapidez instantánea a la que cambia  $S$  cuando cambia  $r$ , siendo  $r = r_0$ .  
(c) Determinar la rapidez a la que cambia  $S$  cuando cambia  $r$ , siendo  $r = 2$ .
13. Si se arroja un objeto verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial  $v_0$ , y si se considera constante a la fuerza de gravedad, y si no se tienen en cuenta las demás fuerzas, entonces la posición  $s$  del objeto en el tiempo  $t$  está dada por

## 66 LÍMITES Y FUNCIONES CONTINUAS

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

en la cual  $g$  es la aceleración de la gravedad.

(a) Definiendo y examinando un cociente adecuado de diferencias, calcular la velocidad del objeto en cualquier tiempo  $t$ .

(b) Determinar el tiempo en el que el objeto alcanza su altura máxima.

En los problemas del 14 al 21 formar el cociente de diferencias  $[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$ . Calcular el valor de este cociente para varios valores de  $x$  cercanos a  $x_0$  y estimar el valor límite cuando  $x \rightarrow x_0$ .

$$14. f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x_0 = 1$$

$$15. f(x) = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x_0 = 2$$

$$16. f(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}, \quad x_0 = 1$$

$$17. f(x) = (x^2 - 5)^{3/2}, \quad x_0 = 3$$

$$18. f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$19. f(x) = \tan x, \quad x_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$20. f(x) = \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$21. f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

22. La atracción gravitacional de la Tierra sobre una partícula en el espacio a una distancia  $r$  del centro del planeta está dada por  $f(r) = GMm/r^2$ , siendo  $M$  la masa de la Tierra,  $m$  la masa de la partícula y  $G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$  la constante de gravitación universal. Calcular la rapidez a la que cambia la atracción gravitacional con  $r$  cuando la partícula está a una distancia  $r_0$  del centro de la Tierra. Nótese que la fórmula dada para  $f(r)$  no se aplica a menos que la partícula esté arriba de la superficie terrestre, esto es, a menos que  $r$  sea mayor que aproximadamente 6370 kilómetros.

## 2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En los ejemplos de la sección 2.1 tratamos de calcular la velocidad de una partícula en movimiento en determinado momento, o la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. En cada caso, fue necesario finalmente tener en cuenta el comportamiento en el límite de determinada razón o cociente de diferencias, a medida que a la variable independiente se le daban valores más y más cercanos a determinado valor especial. He aquí algunos ejemplos más de este tipo de operación de límite.

### EJEMPLO 1

Calcular la pendiente  $m$  de la recta tangente a la gráfica de

$$y = g(x) = 0.5x^3 + 1 \quad (1)$$

en el punto  $(-1, 0.5)$ . En la figura 2.2.1 se muestra la gráfica de esta función.

Procediendo como en la sección 2.1, calcularemos primero la pendiente  $m_s(x)$  de la secante desde el punto  $(-1, 0.5)$  hasta algún otro punto  $(x, y)$  de la gráfica. Esta pendiente la da el cociente de diferencias

$$m_s(x) = \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$$

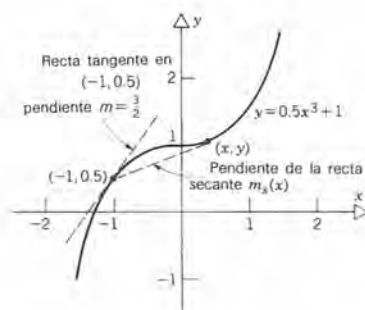


Figura 2.2.1

$$\begin{aligned}
 &= \frac{0.5x^3 + 1 - (-0.5 + 1)}{x + 1} \\
 &= \frac{x^3 + 1}{2(x + 1)}, \quad x \neq -1.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Para calcular la pendiente de la tangente debemos hacer tender  $x \rightarrow -1$  y determinar el límite del cociente de diferencias (2). En su forma actual no está claro cómo se comporta este cociente a medida que  $x \rightarrow -1$ ; tanto el numerador como el denominador tienden a cero a medida que  $x \rightarrow -1$ , y en el límite  $x = -1$  el cociente adquiere la forma indeterminada  $0/0$ . Sin embargo, se puede superar la dificultad si notamos que el numerador se puede escribir en la siguiente forma:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 m_s(x) &= \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{2(x + 1)} \\
 &= \frac{x^2 - x + 1}{2}, \quad x \neq -1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

De acuerdo con la ecuación 3 no es difícil ver que  $m_s$  toma valores cercanos a  $\frac{3}{2}$  cuando a  $x$  se le asignan valores cercanos a  $-1$ . Por tanto, llegamos a la conclusión de que

$$m = \lim_{x \rightarrow -1} m_s(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{2} = \frac{3}{2} \tag{4}$$

es la pendiente de la recta tangente deseada. ■



**EJEMPLO 2**

Calcular la pendiente  $m$  de la tangente a la gráfica de

$$y = \operatorname{sen} x$$

en  $x = 0$ .

En la figura 2.2.2 se ve una parte de la gráfica de la función seno. De nuevo, primero determinaremos la pendiente  $m_s$  de la secante desde el origen hasta algún otro punto  $(x, \operatorname{sen} x)$  de la gráfica. Esta pendiente es

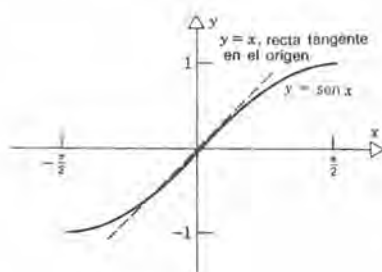
$$m_s(x) = \frac{\operatorname{sen} x - 0}{x - 0} = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad x \neq 0. \quad (5)$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente debemos hacer que  $x \rightarrow 0$  y determinar el límite de  $m_s(x)$ . Como no hay un modo obvio de simplificar la expresión para  $m_s(x)$  en la ecuación 5, sólo podemos estimar el límite por medio de cálculos numéricos. El lector debe evaluar  $m_s(x)$  para algunos valores de  $x$  cercanos a 0; recuérdese que  $x$  está en radianes. Después de hacer esto, parecería plausible que

$$m = \lim_{x \rightarrow 0} m_s(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (6)$$

Provisionalmente, aceptaremos por ahora esta conclusión, y la demostraremos en la sección siguiente. ■

En cada uno de los ejemplos anteriores quisimos calcular el límite de un cociente de diferencias asociado con determinada función. Como estos cocientes son a su vez funciones, el problema matemático con el que nos enfrentamos en cada caso es determinar el límite de una función a medida que la variable independiente se aproxima a un valor determinado. Hasta ahora hemos procedido en una forma bastante intuitiva, sin tratar de decir exactamente lo que significa el límite. Sin embargo, para poder proseguir mucho más allá, necesitamos formular un enunciado cuidadoso del significado de este concepto. Recordemos algunas características comunes de los ejemplos



**Figura 2.2.2**



que hemos considerado, tanto en esta sección como en la anterior. Los expresaremos en términos de una función  $f$  que depende de una variable  $x$ , a medida que  $x$  se acerca a un valor determinado  $c$ .

1. Consideramos a valores de  $x$  cercanos a, y a ambos lados del punto  $c$  en el cual se busca el límite. Sin embargo, el punto mismo  $c$  se excluye específicamente de nuestra consideración.
2. En realidad, la función  $f$  puede hasta no tener un valor en el punto  $c$  al cual nos acercamos. De hecho, en todos los ejemplos hasta ahora  $f(c)$  tiene la forma  $0/0$  que no tiene significado.
3. Sin embargo, la función  $f$  toma valores cercanos a un solo número  $L$  cuando a  $x$  se le dan valores cercanos a  $c$ .

Bajo esas circunstancias, parece razonable decir que  $f(x)$  tiende al límite  $L$  a medida que  $x$  tiende a  $c$ . La notación

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad (7)$$

es una forma compacta de hacer este enunciado.

Hacemos notar que el límite  $L$  es un número asociado con una función en un punto (el punto  $c$ ). También hay otros números asociados con esta función en el mismo punto, por ejemplo  $f(c)$ , que es el valor de la función en  $c$ . Mientras que  $L$  y  $f(c)$  con frecuencia son iguales entre sí, no necesitan serlo. El ejemplo que sigue ayudará a aclarar la distinción entre el *límite* de una función en un punto y el *valor* de la función allí.

### EJEMPLO 3

Sea

$$f(x) = |x|; \quad (8)$$

véase figura 2.2.3a. De acuerdo con la gráfica de  $y = |x|$  vemos que si  $x$  es cercano a cero, entonces también  $f(x)$  se acerca a cero; en realidad,  $x$  y  $f(x)$  están siempre a la misma distancia de cero. Por tanto,  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , o sea

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

A continuación sea

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0; \end{cases} \quad (9)$$

véase figura 2.2.3b. Nótese que  $g(x) = f(x)$  para  $x \neq 0$ . También, de acuerdo con la

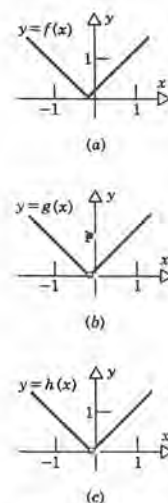


Figura 2.2.3

afirmación 1, sólo se tienen en cuenta los puntos en el límite cuando  $x$  se acerca a 0. Por tanto,  $g(x)$  debe tener el mismo límite que  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Esto no altera el hecho de que  $g(0) = 1$ , lo cual parece “no natural.” Sin embargo,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$ .

Finalmente, veamos la función

$$h(x) = |x|, \quad x \neq 0, \quad (10)$$

que está indefinida para  $x = 0$  (véase figura 2.2.3c). El mismo argumento que empleamos para  $g(x)$  se aplica también a  $h(x)$ , y entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0,$$

a pesar del hecho de que no se da valor para  $h(0)$ . ■

Como en los tres casos del ejemplo 3 el límite es cero cuando  $x$  tiende a cero, es claro que *el límite de una función en un punto no tiene que ver con el valor que la función tiene en ese punto, aun cuando la función no tenga valor alguno en el punto.*

Los siguientes dos ejemplos muestran que hay funciones simples que no tienen límites en determinados puntos.

#### EJEMPLO 4

Se tiene la función

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket \quad (11)$$

definida en la sección 1.5 (véase figura 2.2.4). Determinar si  $f$  tiene límite cuando  $x \rightarrow 0$ .

De acuerdo con la gráfica, vemos que si  $x$  es negativo y cercano a cero, entonces el valor de la función en cada punto es  $-1$ . Análogamente, si  $x$  es positivo y cercano a cero, entonces la función tiene el valor 0 en cada punto. El valor límite aparente de  $f$  depende por tanto de si  $x$  es positivo o negativo. Como no hay un *número único* al cual  $f(x)$  se acerque cuando  $x \rightarrow 0$ , se dice que  $f(x)$  no tiene límite cuando  $x \rightarrow 0$ , o que no existe el  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Nótese que  $f(0) = 0$ , pero esto no tiene que ver con la existencia del límite cuando  $x \rightarrow 0$ . ■

#### EJEMPLO 5

Se tiene la función

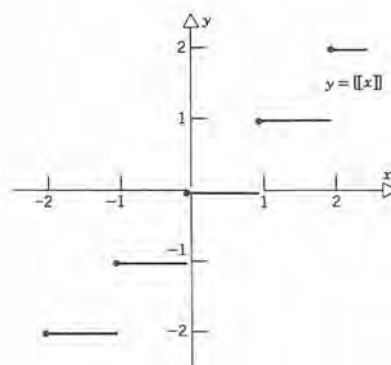


Figura 2.2.4

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0. \quad (12)$$

En este caso,  $f(x)$  crece sin cota a medida que  $x \rightarrow 0$ ; en la figura 2.2.5 se muestra la gráfica de  $f$ . Como los valores de  $f(x)$  no están próximos a algún número determinado cuando  $x$  es pequeño, llegamos de nuevo a la conclusión de que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe. Obsérvese que en este caso  $f(0)$  tampoco existe. ■

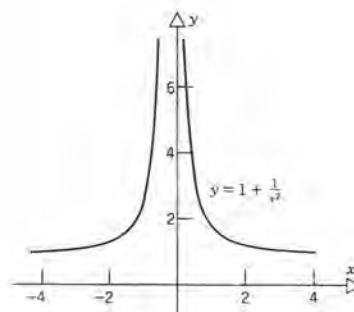


Figura 2.2.5

Pasaremos ahora a la definición formal del **límite** de una función en un punto; esto es, daremos un significado preciso a la ecuación (7). La idea básica es que  $f(x)$  debe tomar valores cercanos a  $L$  cuando  $x$  se acerque (pero no sea igual) a  $c$ . La dificultad principal es decir con exactitud lo que significa “cerca.” ¿Qué tan cerca es “cerca”?

Para indicar cómo se supera esta dificultad, presentamos el siguiente diálogo entre un partidario convencido, Juan, y un indeciso, Pedro. Recuérdese que  $|x - c|$  es la distancia entre  $x$  y  $c$ , y que  $|f(x) - L|$  es la distancia de  $f(x)$  a  $L$ .



- JUAN: Tenemos la función  $f$  que muestra la figura 2.2.6a. Aun cuando no está definida en  $x = c$ , afirmo que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .
- PEDRO: No te creo. ¿Puedes demostrarme que  $f(x)$  queda cerca de  $L$  cuando  $x$  está cerca de  $c$ ? En otras palabras, demuéstrame que  $|f(x) - L|$  es pequeño cuando  $|x - c|$  es pequeño.
- JUAN: ¿Cómo quieres que sea  $|f(x) - L|$ ?
- PEDRO: Digamos que menor que  $\frac{1}{10}$ .
- JUAN: Déjame hacer algunos cálculos . . . Para esta función en particular restringiré a  $x$  de tal modo que  $0 < |x - c| < \frac{1}{30}$ . Si lo hago, entonces  $|f(x) - L| < \frac{1}{10}$ . Mira la figura 2.2.6b. Está claro que  $|x - c| > 0$  está allí porque a mí no me preocupa el punto  $c$  mismo.
- PEDRO: Sí, pero toma nota de que también hay puntos fuera de  $0 < |x - c| < \frac{1}{30}$ , siendo  $|f(x) - L| < \frac{1}{10}$ . Por ejemplo, mira el punto  $P$  de la figura 2.2.6b.
- JUAN: ¿Y qué? Yo no dije que hubiera encontrado *todos* los puntos para los que  $|f(x) - L| < \frac{1}{10}$ . Sólo dije que, para esta función, si  $0 < |x - c| < \frac{1}{30}$ , entonces  $|f(x) - L| < \frac{1}{10}$ , que es lo que tú querías.
- PEDRO: En cuanto a eso tienes razón; pero no estoy convencido todavía de que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ . Retiro mi  $\frac{1}{10}$  y te doy a cambio  $\frac{1}{100}$ . Ahora, algunos de los puntos en  $0 < |x - c| < \frac{1}{30}$  ya no funcionan;  $|f(x) - L| > \frac{1}{100}$  para algunos puntos.
- JUAN: Correcto. Puedo manejar la situación. Si tú cambias tu número, yo cambiaré también el mío. Déjame hacer algunos cálculos . . . Ahora, restringiré a  $x$  de tal modo que  $0 < |x - c| < \frac{1}{70}$ ; entonces  $|f(x) - L| < \frac{1}{100}$ . ¿De acuerdo? Mira la figura 2.2.6c.
- PEDRO: Sí, pero supongamos que te doy  $\frac{1}{1000}$  en lugar de  $\frac{1}{100}$ .
- JUAN: Podríamos seguir así todo el día y no tendríamos objeto. ¿Por qué no dices tan sólo  $\epsilon$ , siendo  $\epsilon$  cualquier número positivo: un décimo, un centésimo, un milésimo . . . ?
- PEDRO: Bien. Pero no olvides que  $\epsilon$  puede ser muy, pero muy pequeño. En realidad  $\epsilon$  puede ser arbitrariamente pequeño.
- JUAN: Está bien. Lo que tengo que hacer es determinar un número  $\delta$  que dependa de  $\epsilon$  y que se haga menor a medida que  $\epsilon$  se haga menor, y que tenga la propiedad de que para cada  $x$  en  $0 < |x - c| < \delta$  se infiera que  $|f(x) - L| < \epsilon$ . He aquí a mi  $\delta$  (mira la figura 2.2.6d) y toma nota de cómo depende de  $\epsilon$ . ¿Estás de acuerdo con que sí funciona?
- PEDRO: Me temo que sí. Me convenciste de que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .

La definición de límite está dada en esencia en la última afirmación de Juan. La adoptaremos como definición formal.

**DEFINICIÓN 2.2.1** (*Límite de una función*). Sea  $f$  definida en cada punto de algún intervalo abierto que contenga al punto  $c$ , con la posible excepción del mismo  $c$ . Entonces, se dice que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  es  $L$ , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L,$$



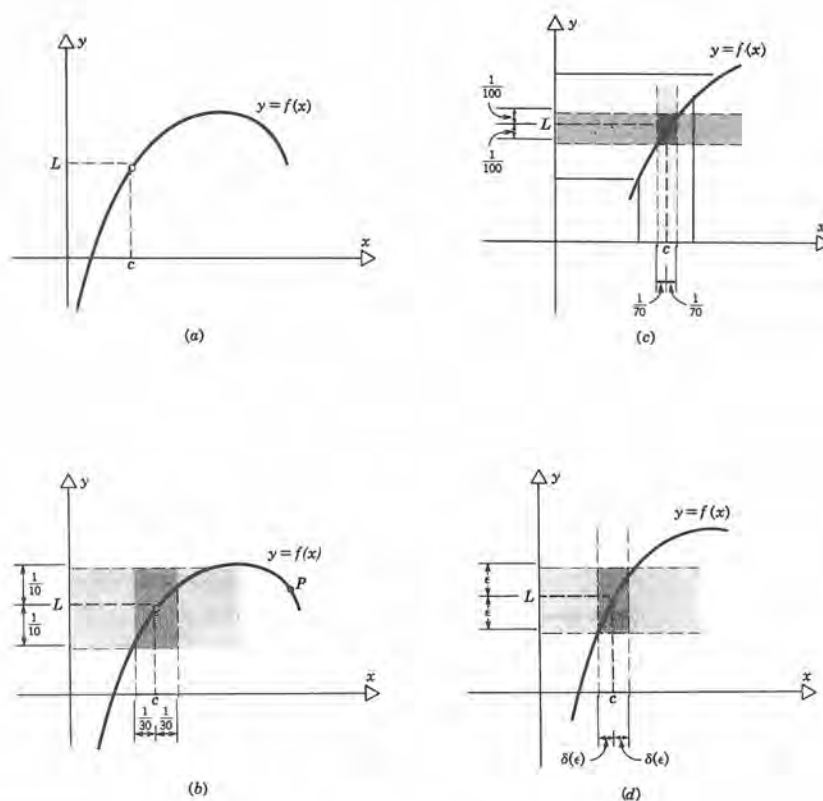


Figura 2.2.6

si para todo número  $\epsilon > 0$  existe un número correspondiente  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Subrayamos que el enunciado

“si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ ”

quiere decir que para cada  $x$  que satisfaga la primera desigualdad, debe ser consecuencia que  $f(x)$  satisfaga la segunda desigualdad. Un enunciado equivalente es

“ $|f(x) - L| < \epsilon$  para toda  $x$  en  $0 < |x - c| < \delta$ .”

También notemos que el conjunto de puntos  $0 < |x - c| < \delta$  no es un intervalo, porque no está incluido el punto  $x = c$ . Emplearemos los términos **intervalo perforado**, o **vecindad perforada** para indicar un conjunto de puntos como el  $0 < |x - c| < \delta$ , esto es, un intervalo cuyo punto medio se ha suprimido (véase figura 2.2.7).

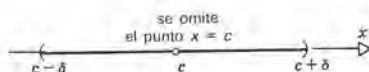


Figura 2.2.7

La definición 2.2.1 afirma con precisión lo que se conoce como el límite\* de una función en un punto, que es una de las ideas fundamentales de la matemática. Podríamos regresar, usando la definición 2.2.1, para verificar que todos los límites con que nos hemos encontrado antes en forma geométrica intuitiva satisfacen en efecto el enunciado de la definición. A continuación veremos los siguientes dos ejemplos muy sencillos.

### EJEMPLO 6

Se tiene la función constante  $f(x) = k$ , siendo  $k$  cualquier número en  $R^1$ . Mediante la definición 2.2.1 comprobar que

$$\lim_{x \rightarrow c} k = k. \quad (13)$$

La ecuación 13 afirma que en este caso el límite  $L$  es igual a  $k$ . Para confirmar esto debemos demostrar que para cada número  $\epsilon > 0$ , hay un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - k| < \epsilon$  (véase figura 2.2.8). Es claro que para toda  $x$

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 \quad (14)$$

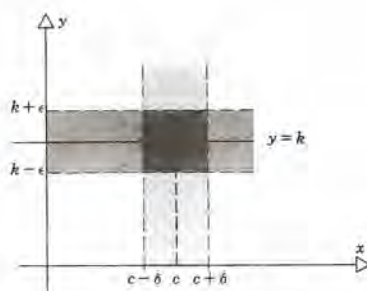


Figura 2.2.8

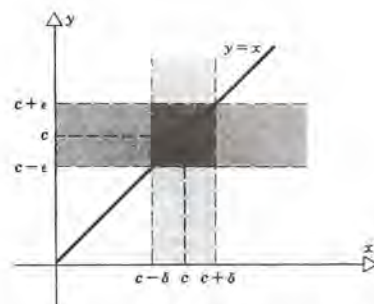


Figure 2.2.9

\* Los límites y las operaciones con límites los emplearon libremente en el siglo xviii Fermat, Newton, Leibniz y otros. Sin embargo, el concepto no estaba completamente comprendido en esa época, ni tampoco muchos años después. Durante el siglo xviii avanzaron enormemente los métodos y las aplicaciones del cálculo, pero la idea fundamental implícita de límite permaneció imprecisa. Fue Augustin Louis Cauchy (1789-1857) quien formuló una definición de límite sustancialmente equivalente a la definición 2.2.1, y con ello dio un paso gigantesco para dar al cálculo una firme fundamentación lógica, y publicó su trabajo en tres célebres libros de texto en 1821, 1822 y 1829. Cauchy, quien vivió en París la mayor parte de su vida, fue el matemático francés más eminente de su tiempo. Su nombre está ligado a muchos teoremas importantes del análisis y variables complejas.

y esto siempre es menor que  $\epsilon$ , sin importar que  $\epsilon$  se haya dado. Por tanto, en este caso se puede escoger  $\delta$  como cualquier número positivo. Entonces, si  $x$  satisface a  $0 < |x - c| < \delta$ , en consecuencia  $|f(x) - k| < \epsilon$ , y se comprueba la ecuación 13. ■

## EJEMPLO 7

Sea  $f(x) = x$  para toda  $x$  en  $\mathbb{R}^1$ . Empleando la definición 2.2.1, comprobar que

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c. \quad (15)$$

De nuevo, debemos demostrar que para cada  $\epsilon > 0$  hay una  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$  entonces  $|f(x) - c| < \epsilon$  (véase figura 2.2.9). En este caso  $|f(x) - c| = |x - c|$  y es claro que  $|x - c| < \epsilon$  cuando  $x$  se encuentra lo bastante cerca de  $c$ , de hecho más cerca que la distancia  $\epsilon$ . Así, podemos escoger a  $\delta = \epsilon$ . Entonces, si  $0 < |x - c| < \delta$  se infiere que  $|f(x) - c| < \epsilon$ , y se verifica la ecuación 15. Nótese de nuevo que la selección de  $\delta$  no es única; cualquier número positivo  $\delta < \epsilon$  se pudo emplear igualmente.

Se puede emplear también la definición para establecer la inexistencia de límites, por ejemplo para el caso que se describió en el ejemplo 4.

Sea  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ . Empleando la definición 2.2.1 demostrar que no existe el  $\lim_{x \rightarrow 0} \lfloor x \rfloor$ .

Todo lo que se necesita es refinar ligeramente el argumento que se dio en el ejemplo 4. Demostremos primero que 0 no es el límite. Tomemos una  $\epsilon > 0$ , digamos  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Debemos entonces examinar si podemos hacer que la cantidad

$$|f(x) - L| = |\lfloor x \rfloor - 0| = |\lfloor x \rfloor|$$

sea menor que  $\epsilon$  restringiendo simplemente a  $x$  para que esté lo suficientemente cerca de cero. En particular, supongamos que  $x$  queda en  $0 < |x| < \delta$ , en donde  $\delta$  es un número positivo (véase figura 2.2.10). Para algunos de los valores de  $x$  (aquellos para

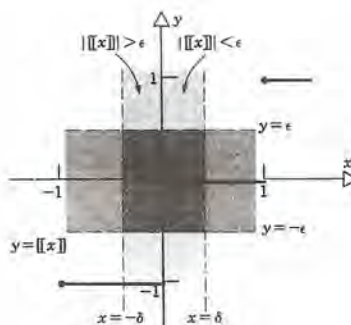


Figura 2.2.10



los cuales  $x > 0$  y  $f(x) = 0$ ) vemos que  $|[x]| < \epsilon$ , al menos cuando  $\delta < 1$ . Sin embargo, para otros valores de  $x$  (aquellos para los cuales  $x < 0$  y  $f(x) = -1$ ), y *sin importar qué tan pequeño se escoja*  $\delta$ , la desigualdad  $|[x]| < \epsilon$  no es cierta. Como todo conjunto  $0 < |x| < \delta$  contiene puntos en donde  $x < 0$ , llegamos a la conclusión que en este caso no hay  $\delta$  que satisfaga la definición 2.2.1. Con ello hemos demostrado que  $L = 0$  no es el límite de  $[x]$  cuando  $x \rightarrow 0$ . De modo semejante, podemos demostrar que ningún otro valor de  $L$  podrá funcionar. Así, nos vemos forzados a llegar a la conclusión de que  $[x]$  no tiene un límite cuando  $x \rightarrow 0$ . ■

Sin embargo, el principal empleo de la definición 2.2.1 no es verificar la existencia o no existencia de límites de funciones específicas como las de los ejemplos de esta sección. En lugar de ello, se emplea la definición principalmente para desarrollar las propiedades generales de los límites, que se aplican a clases grandes de funciones. Estudiaremos algunas de esas propiedades en la próxima sección. Entre otras cosas, demostraremos cómo calcular los límites de una clase muy grande de funciones, las llamadas funciones algebraicas, empleando tan sólo los resultados de los ejemplos 6 y 7 y las propiedades que describiremos en la sección 2.3.

En toda esta sección hemos subrayado que  $f(x)$  tiene un límite en un punto  $c$  sólo si  $f(x)$  se aproxima a determinado número  $L$  único a medida que  $x$  se acerca a  $c$ . Así, una función no puede tener dos o más límites diferentes en el mismo punto. Este hecho se describe en el siguiente teorema:

### Teorema 2.2.1

#### (Unicidad del límite)

Si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = M,$$

entonces  $L = M$ .

La demostración es por reducción al absurdo y muestra cómo se puede basar un argumento en la definición 2.2.1. Supongamos primero que  $L < M$ . Entonces, sea  $\epsilon = (M - L)/3$  y obsérvese que  $\epsilon < 0$ ; véase figura 2.2.11. De acuerdo con la definición 2.2.1, hay una  $\delta_1$  tal que

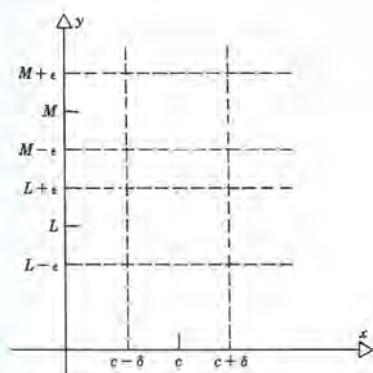
$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta_1, \text{ entonces } L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon. \quad (16)$$

Análogamente, también hay una  $\delta_2 > 0$  tal que

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta_2, \text{ entonces } M - \epsilon < f(x) < M + \epsilon. \quad (17)$$

Sea  $\delta$  la menor de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Entonces, para  $0 < |x - c| < \delta$ , son válidas las conclusiones





**Figura 2.2.11** La gráfica no se puede encontrar en ambas bandas sombreadas cuando  $0 < |x - c| < \delta$ .

de las ecuaciones 16 y 17. En particular,

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } f(x) < L + \epsilon \text{ y } f(x) > M - \epsilon. \quad (18)$$

Sin embargo, esta última afirmación es imposible porque  $L + \epsilon < M - \epsilon$ . En forma geométrica, para que  $0 < |x - c| < \delta$ , la gráfica de  $f$  debe quedar al mismo tiempo en las dos bandas horizontales que se muestran en la figura 2.2.11. Esto no puede suceder, porque las bandas no se traslapan y  $f(x)$  sólo tiene un valor único para toda  $x$ . En consecuencia, la hipótesis de que  $L < M$  debe ser falsa. Igualmente, uno puede probar que  $L > M$  también es imposible. Por tanto, la única alternativa que queda debe ser verdad, que es  $L = M$ , lo cual demuestra el teorema.  $\square$

Finalmente, cerraremos esta sección con unas palabras acerca de nuestra filosofía a propósito de los límites. Creemos que todos los estudiantes deben tratar de alcanzar una idea razonablemente clara de lo que es un límite, y debe ver cómo se formula una definición precisa de este concepto. Sin embargo, es un hecho histórico que muchas aplicaciones importantes del cálculo, por ejemplo en mecánica, se desarrollaron antes de la formulación de una buena definición de límite. Por tanto, no es imposible que los estudiantes de hoy aspiren a tener un conocimiento del cálculo suficiente para poder trabajar sin antes lograr habilidad en el empleo de la definición de límite, y antes de comprender en detalle algunas de sus ramificaciones. En realidad, es suficiente una comprensión geométrica intuitiva del límite para la mayor parte del material que contiene este libro. Por tanto, proseguiremos tan rápido como sea posible para *emplear* los límites en la descripción del cálculo y sus aplicaciones, en lugar de detenernos para hacer más detallado nuestro concepto del límite mismo. Esto significa que en este capítulo se presentarán muchos conceptos algo relacionados, pero no se estudiarán con gran detalle analítico. Si bien ninguno de estos conceptos es especialmente difícil por sí mismo, el lector debe avanzar lo suficientemente lento como para desarrollar un sentido de cada idea nueva, y para que no se abrume por los efectos acumulativos. Se encontrarán más detalles en algunos de los problemas, como en los problemas del 26 al 33 en el siguiente grupo.

## PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 16, determinar si la función dada tiene límite en el punto indicado. Si es así, calcular el límite. Emplear métodos intuitivos o geométricos, para no recurrir a la definición 2.2.1.

$$1. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \quad x \neq -2; \quad \text{límite cuando } x \rightarrow -2$$

$$2. f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}, \quad x \neq 3; \quad \text{límite cuando } x \rightarrow 3;$$

$$20, \quad x = 3;$$

$$3. f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, \quad x \neq 2; \quad \text{límite cuando } x \rightarrow 2$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}{x + 1}, & x \neq -1; \\ -2, & x = -1; \end{cases}$$

límite cuando  $x \rightarrow -1$

$$5. f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}, \quad x \neq 1, 3;$$

límite cuando  $x \rightarrow 1$ ; cuando  $x \rightarrow 3$

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{límite cuando } x \rightarrow 0; \\ \text{cuando } x \rightarrow 1 \end{array}$$

$$7. f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}, \quad x \neq -1, 2;$$

límite cuando  $x \rightarrow -1$ ; cuando  $x \rightarrow 2$

$$8. f(x) = \frac{x}{x + 1}, \quad x \neq -1;$$

límite cuando  $x \rightarrow -1$ ; cuando  $x \rightarrow 0$ ; cuando  $x \rightarrow 1$

$$9. f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \quad x \geq 0 \text{ y } x \neq 1;$$

límite cuando  $x \rightarrow 1$

*Sugerencia:* multiplicar por  $(\sqrt{x} + 1)/(\sqrt{x} + 1)$ .

$$10. f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}, \quad x \geq 0 \text{ y } x \neq 4;$$

límite cuando  $x \rightarrow 4$

$$11. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}; \quad \text{límite cuando } x \rightarrow 0$$

$$12. f(x) = \lfloor 2x \rfloor; \quad \text{límite cuando } x \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$13. f(x) = \lfloor 2x - 3 \rfloor; \quad \begin{array}{l} \text{límite cuando } x \rightarrow \frac{1}{2}; \\ \text{cuando } x \rightarrow \frac{1}{4} \end{array}$$

$$14. f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0; \quad \text{límite cuando } x \rightarrow 1$$

$$15. f(x) = \sqrt{|x|}; \quad \text{límite cuando } x \rightarrow 0$$

$$16. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad \text{límite cuando } x \rightarrow 0;$$

En los problemas del 17 al 22, calcular los valores de  $f(x)$  para algunos valores de  $x$  cerca del punto  $x_0$  dado. Emplear esta información para estimar el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow x_0$ .

$$17. f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad x_0 = 0$$

$$18. f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}, \quad x_0 = 0$$

$$19. f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$20. f(x) = \frac{1}{x} - \csc x, \quad x_0 = 0$$

$$21. f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad x_0 = 0$$

$$22. f(x) = \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - x}}{x}, \quad x_0 = 0$$

23. Considere la función  $f|x| = x$ . Tratar de hallar la pendiente de una recta tangente a la gráfica de  $f$  en el origen. Formular el cociente de diferencias e investigar su comportamiento en el límite.

24. Se tiene la función  $f$  definida por

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Demostrar que, en cualquier intervalo perforado  $0 < |x| < \delta$  alrededor del origen,  $f(x)$  toma todos los valores en  $[-1, 1]$ . A continuación demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  no existe.

25. Emplear la sustitución  $x = c + h$  para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c + h)$ . *Sugerencia:* escribir la definición de los dos límites que aparecen en la ecuación dada.

Los problemas 26 a 33 tratan del empleo de la definición de límite en el caso de funciones específicas.

26. Sea  $f(x) = 3x$  y tener en cuenta los puntos cercanos a  $x = 2$ .

- (a) Determinar a  $\delta_1$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - 6| < \frac{1}{10}$ .  
 (b) Determinar a  $\delta_2$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta_2$ , entonces  $|f(x) - 6| < \frac{1}{100}$ .  
 (c) Determinar a  $\delta(\epsilon)$  tal que si  $0 < |x - 2| < \delta$ , entonces  $|f(x) - 6| < \epsilon$ .

27. Sea  $f(x) = 2x + 1$ , siendo  $c = 1$  y  $L = 3$ .

- (a) Determinar a  $\delta_1$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - L| < \frac{1}{10}$ .  
 (b) Determinar a  $\delta_2$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta_2$ , entonces  $|f(x) - L| < \frac{1}{100}$ .

- (c) Determinar a  $\delta(\epsilon)$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

En los problemas del 28 al 33 hacer lo mismo que en el problema 27.

28.  $f(x) = 1 - 2x$ ,  $c = -2$ ,  $L = 5$

29.  $f(x) = 3x - 8$ ,  $c = 2$ ,  $L = -2$

30.  $f(x) = ax + b$  donde  $a \neq 0$ ,  $c = 2$ ,  $L = 2a + b$

31.  $f(x) = ax + b$  donde  $a \neq 0$ ,  $c = x_0$ ,  $L = ax_0 + b$

\* 32.  $f(x) = x^2$ ,  $c = 2$ ,  $L = 4$ .

*Sugerencia:* restringir primero a  $\delta$  de tal modo que  $\delta < 1$ .

\* 33.  $f(x) = 1/x$ ,  $c = 2$ ,  $L = \frac{1}{2}$ .

*Sugerencia:* restringir primero a  $\delta$  de tal modo que  $\delta < 1$ .

## 2.3 OPERACIONES CON LÍMITES

En la sección 2.2 encontramos los límites de algunas funciones revisando sus gráficas. Con frecuencia es necesario llevar a cabo cálculos analíticos con límites, y para ello se necesita determinado conocimiento de algunas de las propiedades de los límites. Estas propiedades también son muy útiles para calcular límites de funciones complicadas.

Las propiedades de los límites enunciadas en los teoremas 2.3.1 a 2.3.5 en esta sección son geoméricamente plausibles, y se pueden demostrar empleando la definición de límite que se dio en la sección 2.2. Las demostraciones no son especialmente difíciles, pero deseamos concentrarnos en los *usos* de estas propiedades, y no en sus demostraciones formales. Por tanto, en los problemas 33 a 35 hemos ubicado algunas de las demostraciones, y hemos omitido las demás.

Los primeros dos teoremas se relacionan con operaciones algebraicas con límites.

### Teorema 2.3.1

Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$  y  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$ . Entonces

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A + B; \quad (1)$$



$$(b) \lim_{x \rightarrow c} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \alpha A, \text{ para cualquier constante } \alpha; \quad (2)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = [\lim_{x \rightarrow c} f(x)][\lim_{x \rightarrow c} g(x)] = AB; \quad (3)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ siempre que } B \neq 0. \quad (4)$$

Vale la pena hacer notar que combinando las partes (a) y (b) del teorema 2.3.1 obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow c} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \beta \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \alpha A + \beta B, \quad (5)$$

para cualesquiera constantes  $\alpha$  y  $\beta$ . Si  $\alpha = 1$  y  $\beta = -1$ , entonces la ecuación 5 se reduce a

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = A - B. \quad (6)$$

Además, por aplicación repetida de las ecuaciones 5 y 3, podemos ampliarlas con facilidad a cualquier número finito de términos; así,

$$\lim_{x \rightarrow c} [\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x)] = \alpha_1 \lim_{x \rightarrow c} f_1(x) + \cdots + \alpha_n \lim_{x \rightarrow c} f_n(x), \quad (7)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow c} [f_1(x) \cdots f_n(x)] = [\lim_{x \rightarrow c} f_1(x)] \cdots [\lim_{x \rightarrow c} f_n(x)]. \quad (8)$$

### Teorema 2.3.2

Si  $f$  es función tal que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ,  $n$  es entero positivo, y  $L \geq 0$  cuando  $n$  es par, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{1/n} = \lim_{x \rightarrow c} f(x)^{1/n} = L^{1/n}. \quad (9)$$

Estos dos teoremas dicen que si las funciones  $f$  y  $g$  tienen límites en un punto  $c$ , y si se efectúan operaciones algebraicas con  $f$  y  $g$ , entonces se deben llevar a cabo las mismas operaciones con sus límites. Sobre la base de estas propiedades es fácil calcular límites de *funciones algebraicas*, esto es, aquellas funciones generadas por un número *finito* de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíz. Los ejemplos siguientes muestran este hecho.

Recuérdese que en los ejemplos 6 y 7 de la sección 2.2, demostramos que



$$\lim_{x \rightarrow c} k = k \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c} x = c. \quad (10)$$

### EJEMPLO 1

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 4)$ .

Si escribimos  $3x - 4 = (3)(x) + (-4)(1)$ , entonces podemos identificar a  $3x - 4$  con  $\alpha f(x) + \beta g(x)$ , siendo  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -4$ ,  $f(x) = x$  y  $g(x) = 1$ . Empleando las ecuaciones 5 y 10 obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 4) = 3 \lim_{x \rightarrow 2} x - 4 \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2. \blacksquare$$

### EJEMPLO 2

Para cada entero positivo  $n$  determinar  $\lim_{x \rightarrow c} x^n$ .

Para  $n = 1$  el resultado está dado por la segunda de las ecuaciones 10. Para  $n \geq 2$  hacemos que  $f_1(x) = x$ ,  $\dots$ ,  $f_n(x) = x$  en la ecuación 8 y usamos la segunda de las ecuaciones 10. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} x^n = (\lim_{x \rightarrow c} x) \cdots (\lim_{x \rightarrow c} x) = c \cdots c = c^n. \blacksquare$$

### EJEMPLO 3

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 2x^3)$ .

Empleamos la ecuación 5 y el resultado del ejemplo 2, con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 2x^3) &= 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 \\ &= 5 \cdot 4 - 2 \cdot 8 = 4. \blacksquare \end{aligned}$$

### EJEMPLO 4

Calcular el  $\lim_{x \rightarrow -1} (2 - 3x + 4x^2 - x^3)$ .

Empleando la ecuación 7 junto con el resultado del ejemplo 2, encontramos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (2 - 3x + 4x^2 - x^3) &= \lim_{x \rightarrow -1} 2 - 3 \lim_{x \rightarrow -1} x + 4 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} x^3 \\ &= 2 - 3(-1) + 4(1) - (-1) = 10. \blacksquare \end{aligned}$$

El método de los ejemplos 1 a 4 se puede emplear para calcular el límite de cualquier polinomio en cualquier punto, esto es,

$$\lim_{x \rightarrow c} (k_0 + k_1x + \cdots + k_nx^n) = k_0 + k_1c + \cdots + k_nc^n. \quad (11)$$

En otras palabras, si  $P$  es cualquier polinomio, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c). \quad (12)$$

Un procedimiento muy semejante nos permite calcular límites de funciones racionales, esto es, de funciones que son cocientes de dos polinomios.

### EJEMPLO 5

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{5x^2 - 2x^3}{x^3 + 1}.$$

Según el teorema 2.3.1(d), tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{5x^2 - 2x^3}{x^3 + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} (5x^2 - 2x^3)}{\lim_{x \rightarrow c} (x^3 + 1)}, \quad (13)$$

*siempre y cuando* existan el límite del numerador y el del denominador, y siempre que este último no sea cero. Mediante la ecuación 12 evaluamos el lado derecho de la ecuación 13, y encontramos que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{5x^2 - 2x^3}{x^3 + 1} = \frac{5c^2 - 2c^3}{c^3 + 1}, \quad (14)$$

mientras que  $c^3 + 1 \neq 0$ . Por ejemplo, si  $c = 2$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 2x^3}{x^3 + 1} = \frac{4}{9}.$$

Por otro lado, si  $c = -1$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 1) = 0$ , y no se aplica entonces el teorema 2.3.1(d). De hecho, se puede demostrar que  $(5x^2 - 2x^3)/(x^3 + 1)$  aumenta sin cota cuando  $x \rightarrow -1$ , y el cociente no tiene límite en este punto. ■

Cuando se manejan funciones racionales, se supone en general que todo factor común que aparece en el denominador y el numerador se simplifica. Así, si

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (15)$$

en la cual  $P$  y  $Q$  son polinomios, suponemos que  $P$  y  $Q$  no tienen factores comunes. Entonces, procediendo como en el ejemplo 5, llegamos a la conclusión de que

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = \frac{P(c)}{Q(c)} = R(c), \quad (16)$$

siempre que  $Q(c) \neq 0$ . Si  $Q(c) = 0$ , pero  $P(c) \neq 0$ , entonces  $R(x)$  se hace no acotada cuando  $x \rightarrow c$ , y no existe el  $\lim_{x \rightarrow c} R(x)$ .

### EJEMPLO 6

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5}$ .

De acuerdo con la ecuación 12, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5) = 9$ , y de acuerdo con el teorema 2.3.2 se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{9} = 3. \quad \blacksquare$$

### EJEMPLO 7

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 4} \right)^{-1/3}$$

Primero observemos que

$$\left( \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 4} \right)^{-1/3} = \left( \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{2x^2 + 5x + 1} \right)^{1/3}$$

Empleamos la ecuación 16 y tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{2x^2 + 5x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 5x + 1)} = -\frac{1}{8}.$$

A continuación se aplica el teorema 2.3.2 con el resultado de que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 4} \right)^{-1/3} = \left( -\frac{1}{8} \right)^{1/3} = -\frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

Los límites como el del ejemplo 7 son muy difíciles de comprobar empleando directamente la definición de límite; esto es, determinando realmente un intervalo perforado  $0 < |x - c| < \delta$  en el cual se satisfaga el requisito de que  $|f(x) - L| < \epsilon$ . En consecuencia, esos ejemplos demuestran el poder y la utilidad de los teoremas generales para el cálculo de límites de funciones específicas.

Subrayamos que los teoremas 2.3.1 y 2.3.2 dicen que si  $f$  y  $g$  tienen límites en el

punto  $c$ , los tienen también  $f + g$ ,  $fg$ , etc. Por otro lado, lo recíproco no es necesariamente cierto. Por ejemplo, si

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

entonces ni  $f$  ni  $g$  tienen límite cuando  $x \rightarrow 0$ . Sin embargo,

$$f(x) + g(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 + x^2, \quad x \neq 0,$$

y por tanto la función  $f + g$  tiene un límite (en este caso 1) cuando  $x \rightarrow 0$ .

También es esencial el requisito de que  $B \neq 0$  en la parte (d) del teorema 2.3.1. Recordemos que encontramos el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (17)$$

en el ejemplo 2 de la sección 2.2. Desafortunadamente, no nos ayuda el teorema 2.3.1 para evaluar este límite, porque el denominador tiende a cero y obtenemos la expresión  $0/0$  sin significado. Por lo tanto, en esos casos debemos usar otros métodos. Regresaremos al límite de la ecuación 17 después de describir algunas propiedades más de los límites.

### Teorema 2.3.3

- (a) Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |L|$ .
- (b) Si  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ .

Estas propiedades son plausibles desde el punto de vista geométrico, y las figuras 2.3.1 y 2.3.2 muestran las partes (a) y (b) del teorema, respectivamente. Nótese que la parte (b) puede no ser cierta si  $|f(x)| \rightarrow L \neq 0$  cuando  $x \rightarrow c$ , porque en ese caso el  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  puede no existir. Por ejemplo, consideremos la función signo

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

y su valor absoluto

$$|\operatorname{sgn}(x)| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

cuyas gráficas se muestran en la figura 2.3.3. Entonces

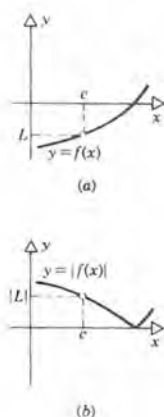


Figura 2.3.1



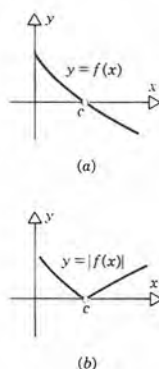


Figura 2.3.2

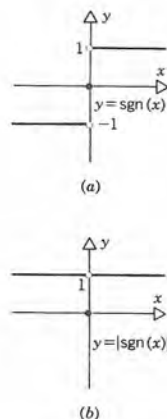


Figura 2.3.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1,$$

pero no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ .

A la siguiente propiedad de los límites se le llama a veces el principio del emparedado.

### Teorema 2.3.4

#### (Principio del emparedado)

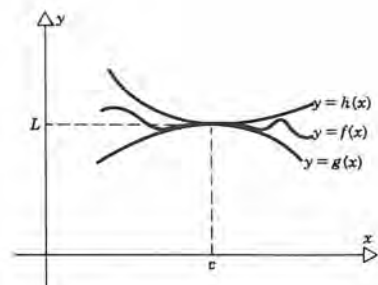
Supóngase que

(a)  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  y que  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ ;

(b)  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  en algún intervalo perforado  $0 < |x - c| < r$  alrededor de  $x = c$ ;

entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .

En otras palabras, si la función  $f$  está acotada por arriba y por abajo por otras funciones que tienden al límite  $L$  cuando  $x$  tiende a  $c$ , entonces  $f$  no tiene otra alternativa que tender también a  $L$  (véase figura 2.3.4). El principio del emparedado es muy útil para calcular los límites de determinadas funciones que no caen en alguna de las categorías que se han considerado ya. Para aplicar este principio a una función determinada  $f$  es necesario encontrar otras dos funciones  $g$  y  $h$  que estén a ambos lados de  $f$  y que se sepa que tienden al mismo límite  $L$  en el punto  $c$  en cuestión. Los ejemplos siguientes muestran esta idea.



**Figura 2.3.4**  
El principio del emparedado.

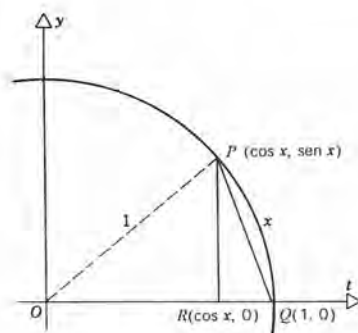
### EJEMPLO 8

Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (18)$$

Consideremos el triángulo  $PQR$  de la figura 2.3.5. Se ve claramente que

$$\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2. \quad (19)$$



**Figura 2.3.5**  
 $\sin^2 x + (1 - \cos x)^2 \leq x^2$ .

Como  $\overline{PQ} \leq \text{arc } PQ = x$ , la ecuación 19 se transforma en

$$\sin^2 x + (1 - \cos x)^2 = \overline{PQ}^2 \leq x^2. \quad (20)$$

Como todos los términos de la ecuación 20 son no negativos, se deduce que

$$\sin^2 x \leq x^2 \quad \text{y que} \quad (1 - \cos x)^2 \leq x^2.$$

En consecuencia, extrayendo raíces cuadradas obtenemos que

$$0 \leq |\operatorname{sen} x| \leq |x|, \quad (21)$$

y también

$$0 \leq |1 - \cos x| \leq |x|. \quad (22)$$

El principio del emparedado se aplica a las ecuaciones 21 y 22 siendo  $g(x) = 0$  para toda  $x$ , y  $h(x) = |x|$ . Como  $|x| \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , llegamos a la conclusión de que

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sen} x| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |1 - \cos x| = 0.$$

El teorema 2.3.3 también implica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0.$$

De acuerdo con la ecuación 6, este último resultado equivale a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad \blacksquare$$

Los resultados del ejemplo 8 se pueden reformular del modo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0. \quad (23)$$

Empleando estos resultados cuando  $x = 0$ , es posible obtener los resultados correspondientes en cualquier punto  $x = c$ , o sea

$$\lim_{x \rightarrow c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c, \quad \lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c; \quad (24)$$

véanse los problemas 15 y 16.

En el ejemplo 2 de la sección 2.2 encontramos que para calcular la pendiente de la recta tangente a  $y = \operatorname{sen} x$  cuando  $x = 0$  era necesario evaluar  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)/x$ . Podemos ahora llevar a cabo este cálculo empleando el principio del emparedado.

## EJEMPLO 9

Calcular

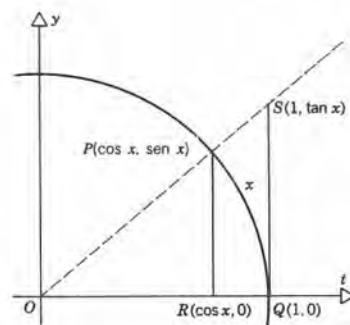
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Veamos primero los valores de  $x$  en  $(0, \pi/2)$ . En la figura 2.3.6 se comparan las áreas del triángulo  $OPR$ , el sector  $OPQ$  del círculo, y el triángulo  $OSQ$ . Es claro que

$$\text{área del triángulo } OPR < \text{área del sector } OPQ < \text{área del triángulo } OSQ. \quad (25)$$

**Figura 2.3.6**

Área  $\triangle OPR <$  área del sector  $OPQ <$  área  $\triangle OSQ$ .



Calculando estas áreas en términos de  $x$  tenemos que

$$\frac{1}{2} \cos x \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x.$$

Multiplicando por  $2/\operatorname{sen} x$ , que es número positivo, obtenemos

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Finalmente, tomando el recíproco de cada término e invirtiendo, por lo tanto, las desigualdades, llegamos a

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (26)$$

Sustituyendo  $x$  por  $-x$  obtenemos la misma desigualdad para  $x$  en  $(-\pi/2, 0)$ . Como sabemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ , y que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/\cos x = 1$ , podemos emplear la ecuación 26 y el principio del emparedado para obtener el resultado

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad (27)$$

Esto confirma la conclusión tentativa a la que habíamos llegado anteriormente. ■

Por último, mencionaremos un resultado menos fuerte relacionado con el principio del emparedado.

### Teorema 2.3.5

Si  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ , y si  $f(x) \geq g(x)$  en un intervalo perforado alrededor de  $c$ , y si existe el  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq L$ .



Este teorema da una cota inferior de  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  siempre que se sepa que existe este límite. Hay un enunciado semejante para las cotas superiores.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 14 evaluar el límite dado y decir qué propiedades de los límites se usan en los cálculos.

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + x - 5)$
  2.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4)$
  3.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2)^5$
  4.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 2)^{50}$
  5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$
  6.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 - x + 5}$
  7.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right)$
  8.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)^{64}}{(x - 3)^{87}}$
  9.  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{1 + 2x^2}$
  10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{5x + 1}{x^2 + 16}}$
  11.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$
  12.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (x^3 - 2x^2 + 3x + 4)$
  13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{6x^2 + 4x - 1} \right)^{1/2}$
  14.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 - 3x - 3}{2x^3 + 6x^2 - 3x + 1} \right)^{4/3}$
15. Si  $x = c + h$ , nótese que

$$\sin x = \sin c \cos h + \cos c \sin h$$

También nótese que si  $x \rightarrow c$ , entonces  $h \rightarrow 0$ . Con las ecuaciones 18 demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c.$$

16. Seguir un procedimiento semejante al del problema 15 para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$$

En los problemas 17 a 20, evaluar el límite dado. Se pueden emplear las ecuaciones 24.

17.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (1 - \sin^3 x)$
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} [4 \cos^2 x - \sin^2 x]^{1/2}$
19.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x \sin x - \cos x)$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi} \left( \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{4} \right)$$

En los problemas 21 a 26 reformular la expresión dada para que se pueda aplicar la ecuación 27, y a continuación emplear los resultados para evaluar el límite que se pide.

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x^2}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x \cos 4x}$$

27. Si  $f(x) = x \sin(1/x)$  siendo  $x \neq 0$ , emplear el principio del emparedado para calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .
28. Con el principio del emparedado, demostrar que  $2x/(x^2 + 1) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .
29. Demostrar, con un ejemplo, que es necesaria la hipótesis "existe el  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ " en el teorema 2.3.5; esto es, determinar funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f(x) \geq g(x)$  para  $x$  cerca de  $c$ , que  $g$  tenga un límite, pero  $f$  no.
30. (a) Determinar funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f + g$  tenga límite cuando  $x \rightarrow 0$ , pero que ni  $f$  ni  $g$  tengan límite cuando  $x \rightarrow 0$ .
- (b) ¿Es posible que  $f$  y  $f + g$  tengan límites cuando  $x \rightarrow 0$ , pero que  $g$  no tenga? Si es posible, citar un ejemplo; si no es posible, indicar por qué.
31. (a) Determinar funciones  $f$  y  $g$  tales que  $fg$  tenga límite cuando  $x \rightarrow 0$ , pero que ni  $f$  ni  $g$  lo tengan cuando  $x \rightarrow 0$ .
- (b) ¿Es posible que tengan límites  $f$  y  $fg$  cuando  $x \rightarrow 0$ , pero que no lo tenga  $g$ ? Si es posible, dar un ejemplo; si no es posible, explicar por qué.

## 90 LÍMITES Y FUNCIONES CONTINUAS

32. Si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = 1$ , demostrar que  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  no existe.

33. **Demostración del teorema 2.3.1(a).** Dada  $\epsilon > 0$ , sea  $\epsilon' = \epsilon/2$ . Hay una  $\delta_1$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta_1$ , entonces  $|f(x) - A| < \epsilon'$ . Análogamente, hay una  $\delta_2$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta_2$ , entonces  $|g(x) - B| < \epsilon'$ . Sea  $\delta$  la menor de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ .

(a) Emplear la desigualdad del triángulo para demostrar que

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|.$$

(b) Demostrar que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) + g(x) - (A + B)| < \epsilon$ .

34. **Demostración del teorema 2.3.1(b).** Obsérvese que el teorema es cierto si  $\alpha = 0$ . Si  $\alpha \neq 0$ , para toda  $\epsilon > 0$  dada, sea  $\epsilon' = \epsilon/|\alpha|$ . Hay una  $\delta$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - A| < \epsilon'$ . Demostrar que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|\alpha f(x) - \alpha A| < \epsilon$ .

35. **Demostración del teorema 2.3.4.** Sea  $\epsilon > 0$  dado. Hay una  $\delta_1$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta_1$ , entonces  $|g(x) - L| < \epsilon$ . También, hay una  $\delta_2$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta_2$ , entonces  $|h(x) - L| < \epsilon$ . Sea  $\delta$  la mínima de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $r$ . Demostrar que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

## 2.4 LÍMITES LATERALES, LÍMITES AL INFINITO Y LÍMITES INFINITOS

En la sección 2.2 hemos definido el límite de una función en un punto, concepto que expresa la ecuación

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L. \quad (1)$$

Exploraremos ahora algunas generalizaciones de esta idea.

### Límite por la derecha y límite por la izquierda

Al definir el significado de la ecuación 1 tuvimos cuidado de tener en cuenta puntos en ambos lados de  $c$ . Sin embargo, también es posible manejar límites en los que sólo se tienen en cuenta puntos de un lado de  $c$ . A estos límites se les llama **límites laterales**.

Al número  $L$  se le llama **límite por la derecha** de  $f$  en  $c$  si  $f(x)$  tiende a  $L$  cuando  $x$  tiende a  $c$ , manteniendo la condición de que  $x > c$ ; el **límite por la izquierda** es semejante, excepto que sólo se tienen en cuenta los puntos  $x < c$ .

De forma más exacta, sea  $f$  definida en un intervalo abierto  $(c, b)$ . Se dice entonces que  $f$  tiene límite  $L$  por la derecha, que se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L, \quad (2)$$

si para cada  $\epsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } c < x < c + \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon. \quad (3)$$

Igualmente, si  $f$  está definida en un intervalo abierto  $(a, c)$  se dice que  $f$  tiene límite  $L$  por la izquierda, lo cual se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L, \quad (4)$$

si para toda  $\epsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } c - \delta < x < c, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon. \quad (5)$$

Los siguientes ejemplos muestran la existencia de límites laterales para algunas funciones sencillas.

### EJEMPLO 1

Se tiene la función

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

De acuerdo con la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  en la figura 2.4.1, o calculando  $\sqrt{x}$  para unos cuantos valores positivos de  $x$  llegamos a la conclusión de que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Véase también el problema 33. Por otro lado, no tiene sentido hablar de la existencia (o no existencia) de  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ya que  $f$  no está definida en los puntos a la izquierda de  $x = 0$ . ■

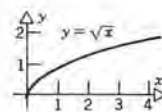


Figura 2.4.1

### EJEMPLO 2

Se tiene la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 2.4.2.

En este caso,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1,$$

y además

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

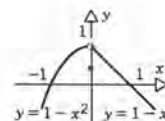


Figura 2.4.2

Como de costumbre, estos resultados no dependen del valor de  $f(0)$ , ni de si  $f$  está o no definida en  $x = 0$ . ■

### EJEMPLO 3

Se tiene la función

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket.$$

De acuerdo con la gráfica de la figura 2.4.3, vemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

y que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe. Recuerdese los ejemplos 4 y 8 en la sección 2.2. ■

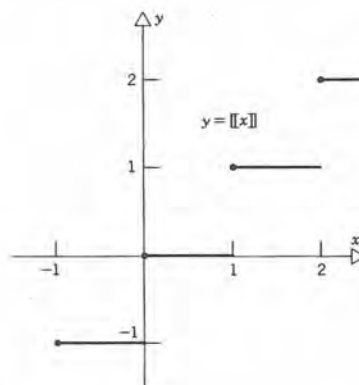


Figura 2.4.3

Los ejemplos 2 y 3 nos sugieren la siguiente relación entre límites laterales y el límite de una función, tal como se había definido antes.

#### Teorema 2.4.1

La función  $f$  tiene límite  $L$  en el punto  $c$  si y sólo si existen el límite izquierdo y el límite derecho en  $c$ , y ambos son iguales a  $L$ ; esto es,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L. \quad (6)$$

En el problema 37 se bosqueja una demostración de este teorema.



**Límites cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$** 

Hasta ahora hemos descrito límites sólo en puntos finitos. Sin embargo, también es posible tener en cuenta límites de funciones en el infinito, esto es, cuando la variable independiente se vuelve no acotada. Si una variable  $x$  aumenta sin cota, se dice que  $x$  tiende al infinito (positivo) y se escribe  $x \rightarrow \infty$ . Igualmente, si  $x$  disminuye sin cota, se dice que  $x$  tiende al infinito negativo, y se escribe  $x \rightarrow -\infty$ .

Si  $f(x)$  tiende a un número cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces se escribe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L. \quad (7)$$

En forma más precisa, la ecuación 7 significa que para cada  $\epsilon > 0$ , existe un número  $N > 0$ , que en general depende de  $\epsilon$ , tal que

$$\text{si } x > N, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon. \quad (8)$$

De igual modo, se escribe

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad (9)$$

si para cada  $\epsilon > 0$  existe un número  $N > 0$ , que depende de  $\epsilon$ , tal que

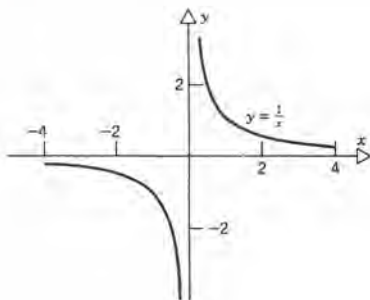
$$\text{si } x < -N, \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \epsilon. \quad (10)$$

**EJEMPLO 4**

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0;$$

véase figura 2.4.4.



**Figura 2.4.4**

Cuando  $x \rightarrow \infty$ , o cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x)$  toma valores más y más cercanos a cero. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \blacksquare \quad (11)$$

### Propiedades algebraicas

Como es de esperarse, los teoremas 2.3.1 a 2.3.5 siguen siendo válidos si se cambia  $\lim_{x \rightarrow c}$  por  $\lim_{x \rightarrow c^+}$ ,  $\lim_{x \rightarrow c^-}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  o  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ . Los ejemplos que siguen muestran cómo se pueden emplear esas propiedades para evaluar los límites al infinito.

### EJEMPLO 5

Si  $n$  es un entero positivo fijo, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0. \quad (12)$$

Este resultado es consecuencia de la ecuación 11, si se emplea la ecuación 8 de la sección 2.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \dots \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) \\ &= 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

De igual modo,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \quad (13)$$

También se pueden comprobar las ecuaciones 12 y 13 mediante las definiciones (8) y (19) (véase problema 34. ■

### EJEMPLO 6

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 7x - 6}{4x^2 - 3x + 6}. \quad (14)$$

La regla del cociente [teorema 2.3.1(d)] no se aplica directamente, porque ni el numerador ni el denominador de la expresión de la ecuación 14 tiene límite; ambos aumentan sin cota cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Para poder emplear el teorema 2.3.1(d) debemos primero dividir tanto el numerador como el denominador de la ecuación 14 entre  $x^2$ . Con ello se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 7x - 6}{4x^2 - 3x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + (7/x) - (6/x^2)}{4 - (3/x) + (6/x^2)}.$$

Ahora bien, suponiendo que existan todos los límites que se necesitan (lo cual se puede comprobar recorriendo nuestros pasos en sentido inverso), tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 7x - 6}{4x^2 - 3x + 6} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} [3 + (7/x) - (6/x^2)]}{\lim_{x \rightarrow -\infty} [4 - (3/x) + (6/x^2)]} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + 7 \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) - 6 \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^2)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) + 6 \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^2)} \\ &= \frac{3 + 7 \cdot 0 - 6 \cdot 0}{4 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0} = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En general, el límite de cualquier función racional para la que el grado del numerador es menor que o igual al grado del denominador, cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow -\infty$  se puede manejar como en el ejemplo 6. Normalmente no indicaremos el cálculo del límite con tanto detalle; sin embargo, siempre debemos tener en mente que es el conocimiento de que existen los límites individuales a cada paso lo que nos permite proseguir.

## Funciones acotadas y no acotadas

En la sección 1.4 dijimos que una función está **acotada** en un intervalo si existe un número  $K > 0$  tal que

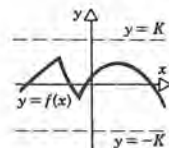
$$|f(x)| \leq K, \quad (15a)$$

o, de modo equivalente,

$$-K \leq f(x) \leq K \quad (15b)$$

para toda  $x$  en el intervalo. El intervalo puede ser abierto o cerrado, acotado o no acotado. Si  $f$  no está acotada en un intervalo, se dice que es **no acotada** en él. Geométricamente, la gráfica de una función acotada  $y = f(x)$  queda entre las líneas horizontales  $y = K$  y  $y = -K$ , como se ve en la figura 2.4.5.

Por ejemplo, la función  $f(x) = \sin x$  está acotada en todo intervalo, porque  $|\sin x| \leq 1$  para toda  $x$  en  $\mathbb{R}^1$ . Por otro lado, la función



**Figura 2.4.5**  
Una función acotada.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0, \quad (16)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 2.4.6 no está acotada en el intervalo  $(0, c)$  para ninguna  $c > 0$ , y también es no acotada en  $(d, 0)$  para toda  $d < 0$ . Sin embargo, en un intervalo alejado del origen como el  $(1, 5)$ , la función  $f$  está acotada.

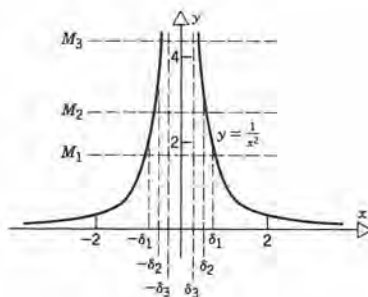


Figura 2.4.6

La función  $f(x) = 1/x^2$  no tiene límite cuando  $x \rightarrow 0$  porque  $f(x)$  aumenta sin cota cuando  $x \rightarrow 0$ . El hecho de que el límite no exista a causa de esta razón en particular se expresa normalmente escribiendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

En forma más general, se dice que una función  $f$  tiende a  $\infty$  (positivo) cuando  $x$  tiende a  $c$ , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty, \quad (17)$$

si para cada número  $M > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } f(x) > M. \quad (18)$$

Esto se muestra en forma geométrica en la figura 2.4.6 para la función  $f(x) = 1/x^2$ . Nótese que mientras mayor sea  $M$ , se debe escoger una  $\delta$  más pequeña.

Análogamente, se dice que  $f$  tiende a  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $c$ , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty, \quad (19)$$

si para cada  $M > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } 0 < |x - c| < \delta, \text{ entonces } f(x) < -M. \quad (20)$$



Se pueden llevar a cabo modificaciones obvias en estas definiciones para abarcar los casos  $x \rightarrow c^+$ ,  $x \rightarrow c^-$ ,  $x \rightarrow \infty$  y  $x \rightarrow -\infty$ .

### EJEMPLO 7

Calcular el límite por la izquierda y el límite por la derecha de la función

$$f(x) = \frac{2-x}{x}, \quad x \neq 0.$$

cuando  $x \rightarrow 0$ . En la figura 2.4.7 se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ .

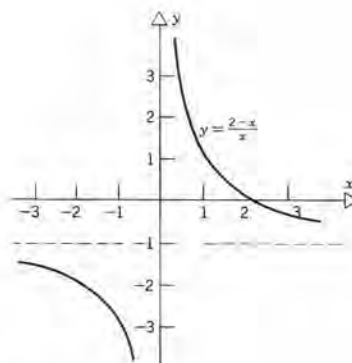


Figura 2.4.7

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2}{x} - 1 \right) = \infty,$$

ya que  $2/x$  es positivo cuando  $x > 0$  y se vuelve no acotado cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Igualmente,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2}{x} - 1 \right) = -\infty.$$

Como  $f$  se hace no acotada, pero en direcciones opuestas, cuando  $x \rightarrow 0$  desde la derecha y la izquierda, respectivamente, *no es correcto* decir que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . Nótese la diferencia entre esta función y  $f(x) = 1/x^2$ , cuya gráfica se mostró en la figura 2.4.6. ■

Para concluir, subrayaremos de nuevo que  $\infty$  y  $-\infty$  *no son números*. Por tanto, se debe emplear con cuidado especial el teorema 2.3.1 acerca de los límites de sumas, restas, productos y cocientes en aquellos casos en los que  $f$  ó  $g$  o ambas tiendan a  $\infty$  o  $-\infty$ .

$a - \infty$ . En especial, se puede emplear el teorema 2.3.1 en los casos en los que se tenga  $\infty + \infty$ ,  $\infty \pm L$ ,  $L/\infty$ ,  $\infty/L$ ,  $\infty \cdot \infty$  e  $\infty \cdot L$  para  $L \neq 0$ . En estos casos los límites son, respectivamente,  $\infty$ ,  $\infty$ ,  $0$ ,  $\infty$ ,  $0$ ,  $\infty$  e  $\infty$ . También se puede emplear en los casos correspondientes en los que se sustituye  $\infty$  por  $-\infty$ . Sin embargo, el teorema 2.3.1 no se aplica a los casos indeterminados de la forma  $\infty - \infty$ ,  $\infty/\infty$  ó  $0 \cdot \infty$ . En esos casos no se puede decir nada en general acerca de los límites, y se debe manejar en forma individual cada problema, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 8

Determinar si existe cada uno de los siguientes límites. En caso afirmativo, calcularlo.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \right);$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right);$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2}{x} - \left( \frac{2}{x} - 5 \right) \right].$

Nótese que si hubiéramos tratado de aplicar el teorema 2.3.1, cada una de esas expresiones sería de la forma  $\infty - \infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ , y no podríamos sacar conclusiones acerca del límite. Sin embargo, si llevamos a cabo las simplificaciones algebraicas obvias antes de calcular el límite en cada caso, obtendremos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x} \right) = -\infty; \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1-x}{x^2} \right) = \infty; \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{2}{x} - \left( \frac{2}{x} - 5 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (5) = 5. \quad (23)$$

Por tanto, llegamos a la conclusión de que una expresión de la forma  $\infty - \infty$  puede tender ya sea a  $\infty$  o a  $-\infty$ , o a cualquier número finito. Existe una situación semejante para las formas indeterminadas  $\infty/\infty$  y  $0 \cdot \infty$ . ■

## PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 12, determinar si existen  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ . Calcular cada límite cuando exista. Trabajar en forma intuitiva y en forma geométrica; no es necesario que use las definiciones formales.

1.  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}; \quad c = 2, -2, 1$

2.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \quad c = 1, -1$

3.  $f(x) = (4 - x^2)^{1/3}; \quad c = 2$

4.  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}; \quad c = 2$

5.  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}; \quad c = -1$

6.  $f(x) = [x] - x; \quad c = 1$

7.  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 - x^2, & x > 0; \end{cases} \quad c = 0$

8.  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & -1 < x < 1; \\ x, & x > 1; \end{cases} \quad c = 1$

9.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x < 0; \\ x^2, & x > 0; \end{cases} \quad c = 0$

10.  $f(x) = \begin{cases} \sec x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0; \\ \csc x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad c = 0$

11.  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0; \\ 1, & x = 0; \\ \sin 3x, & x > 0; \end{cases} \quad c = 0$

12.  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}; \\ \sin 3x, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad c = \pi/2$

En los problemas 13 a 30, calcular el límite indicado, o bien demostrar que no existe. Trabajar en forma intuitiva o geométrica; no es necesario que use las definiciones formales.

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x}{1 - x}$

14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + 1}$

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{2x^3 - 6x^2 + x + 1}$

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 4x^2 + 8}{2x^3 - 5x + 4}$

18.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

19.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 4} \right)^{1/2}$

20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-x^2 + 3x + 2}{8x^2 - 2x + 5} \right)^{1/3}$

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x - \cos x)$

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 4}{x^2 + 1}$

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 - 9}$

25.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$

27.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^4}}$

28.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x)$

29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{x}$

30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

31. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2;$  (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2;$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0;$  (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$

(c)  $f(0) = 1;$

32. Trazar la gráfica de una función que satisfaga todas las condiciones siguientes:

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1;$  (d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty;$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2;$  (e)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty;$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1;$  (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2.$

33. Emplear la definición (3) para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ , esto es, dada  $\epsilon > 0$ , determinar  $\delta > 0$  tal que si  $0 < x < \delta$ , entonces  $0 < \sqrt{x} < \epsilon$ .

34. Emplear la definición (8) para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^n) = 0$ ; esto es, dada  $\epsilon > 0$ , determinar  $N$  tal que si  $x > N$ , entonces  $1/x^n < \epsilon$ .

35. Emplear la definición (18) para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x^2) = \infty$ ; esto es, dada  $M > 0$ , determinar una  $\delta > 0$  tal que si  $0 < |x| < \delta$ , entonces  $1/x^2 > M$ .



36. Emplear la definición (18) para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x^3) = \infty$ ; esto es, dada  $M > 0$  determinar  $\delta > 0$  tal que si  $0 < x < \delta$ , entonces  $1/x^3 > M$ .
37. **Demostración del teorema 2.4.1.(a)** Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ , y que  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ . Dada una  $\epsilon > 0$ , hay una  $\delta_1$  tal que si  $c < x < c + \delta_1$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Igualmente, hay una  $\delta_2$  tal que si  $c - \delta_2 < x < c$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Sea  $\delta$  el mf

de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Demostrar que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ .

- (b) Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ . Dada  $\epsilon > 0$ , hay una  $\delta$  tal que si  $0 < |x - c| < \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Demostrar que si  $c < x < c + \delta$ , entonces  $|f(x) - L| < \epsilon$ . Por tanto,  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ . De modo semejante, demostrar que  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ .

## 2.5 FUNCIONES CONTINUAS

El conjunto de todas las funciones es extremadamente grande y variado. En realidad, es tan extenso que no se puede decir mucho acerca de las propiedades de todas las funciones en general. Además, en el estudio del cálculo nos interesan principalmente las funciones cuyas gráficas sean curvas razonablemente suaves. Por tanto, para obtener subclases de funciones con propiedades útiles e interesantes, se imponen algunas restricciones que descartan las funciones más irregulares y patológicas. En esta sección presentaremos el concepto de una **función continua**, y mostraremos que muchas funciones pertenecen a esta clase. En la sección 2.6 estudiaremos algunas propiedades importantes de las funciones continuas.

En la sección 2.3 hemos demostrado que si  $P$  es un polinomio, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) \quad (1)$$

en cada punto  $c$ . Igualmente, si  $R(x) = P(x)/Q(x)$  es una función racional, entonces

$$\lim_{x \rightarrow c} R(x) = R(c), \quad (2)$$

siempre que el denominador  $Q(c) \neq 0$ . En otras palabras, en cada uno de esos casos el valor de la función en  $x = c$  es el mismo que el límite a medida que  $x$  se acerca a  $c$ . La propiedad expresada mediante las ecuaciones 1 y 2 se conoce como *continuidad*, y también la tienen muchas otras funciones además de los polinomios y las funciones racionales. Veremos después que el concepto de una función continua\* es crucial en

\* Euler y otros matemáticos del siglo XVIII usaron el término "función continua" en un sentido distinto al actual. Bernhard Bolzano (1781-1848), sacerdote y erudito de Bohemia, fue quien dio la definición esencialmente moderna de continuidad y desarrolló algunas de sus consecuencias en un trabajo escrito en 1817. Desafortunadamente su trabajo, que se publicó en Praga en forma privada y no se le dio difusión, casi no recibió atención durante muchos años. Mientras tanto, Cauchy empleó la misma definición algunos años después en los libros que ya se mencionaron, y fue a través de él que se conoció ampliamente la noción de continuidad. Sin embargo, la comprensión completa del concepto siguió siendo elusiva, hasta para un matemático tan grande como Cauchy. Pasaron algunas décadas más para poder resolver algunas de las preguntas remanentes asociadas con esta profunda idea.



el desarrollo del cálculo, pero en esta sección nuestra descripción será algo informal. Comenzaremos dando una definición.

**DEFINICIÓN 2.5.1** Supongamos que el dominio de la función  $f$  comprende un intervalo abierto que contiene al punto  $c$ . Entonces, se dice que  $f$  es continua en  $c$  si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe y si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c). \quad (3)$$

Además, se dice que  $f$  es continua en un intervalo abierto  $(a, b)$  si es continua en cada punto del intervalo.

Aunque la definición 2.5.1 parece bastante sencilla, resulta que el concepto de función continua es sutil. Para comprender con más claridad lo que implica la continuidad, es útil examinar algunas funciones que no tienen esta propiedad en determinados puntos, esto es, funciones que son *discontinuas*. Hay cuatro modos en los que con frecuencia puede ser discontinua una función en un punto; los tres más importantes implican la inexistencia de un límite.

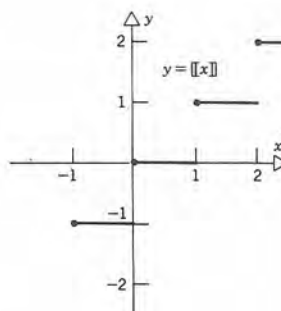
1. **Discontinuidad de salto.** Una función  $f$  tiene una discontinuidad de salto en el punto  $c$  si tiene límites por la derecha y por la izquierda en  $c$ , pero estos límites son diferentes entre sí; esto es,

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x). \quad (4)$$

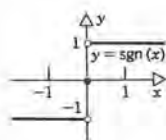
El salto de  $f$  en  $c$  es la diferencia entre los límites por la derecha y por la izquierda en ese lugar. Por ejemplo, la función el mayor entero

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket, \quad (5)$$

cuya gráfica aparece en la figura 2.5.1 tiene un salto igual a uno en cada entero. Otra función con discontinuidad de salto es la función signo,



**Figura 2.5.1**  
Discontinuidades de  
salto en  $x = 0, \pm 1, \dots$



**Figura 2.5.2**  
Discontinuidad  
de salto en  $x = 0$ .

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Esta función tiene un salto igual a dos en  $x = 0$  (véase figura 2.5.2).

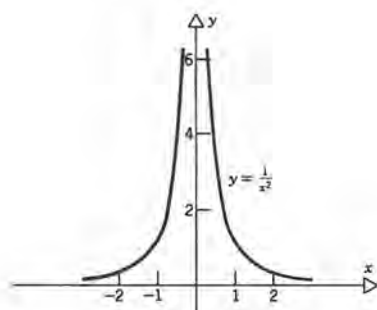
2. **Discontinuidad infinita.** Una función  $f$  tiene una discontinuidad infinita en  $c$  si es no acotada en todo intervalo alrededor de  $c$ . Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0 \quad (7)$$

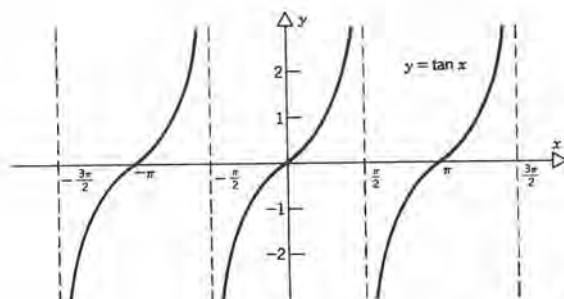
tiene una discontinuidad infinita en  $x = 0$  (véase figura 2.5.3). Igualmente, la función

$$g(x) = \tan x, \quad x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (8)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 2.5.4 tiene una discontinuidad infinita en cada múltiplo impar de  $\pi/2$ . En cada uno de estos ejemplos la función no está definida en el punto de discontinuidad, y por tanto también es discontinua por



**Figura 2.5.3** Discontinuidad  
infinita en  $x = 0$ .



**Figura 2.5.4** Discontinuidades  
infinitas en  
 $x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$

ese motivo. Sin embargo, es un asunto de poca importancia; independientemente de cómo se pueda definir la función en ese punto, permanece la discontinuidad infinita. También es posible que una función sea no acotada sólo a uno de los lados del punto de discontinuidad, y aproximarse a un límite finito por el otro lado. Por ejemplo, la función

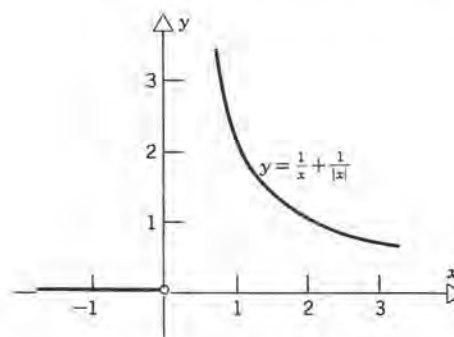
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0, \quad (9)$$

tiene esta propiedad, como se ve en la figura 2.5.5. Este comportamiento también se considera ser una discontinuidad infinita.

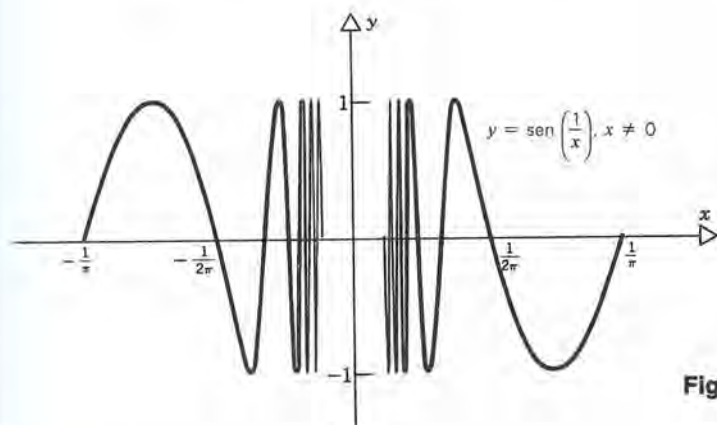
3. **Discontinuidad oscilatoria.** Un tipo de discontinuidad algo más complicado es el que recibe el nombre de discontinuidad oscilatoria, como por ejemplo en la función

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad (10)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 2.5.6. Esta función no tiene límite cuando



**Figura 2.5.5** Discontinuidad lateral infinita en  $x = 0$ .



**Figura 2.5.6** Discontinuidad oscilatoria en  $x = 0$ .

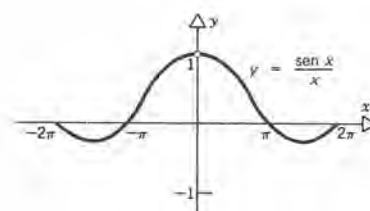
$x \rightarrow 0$  debido a su comportamiento de oscilaciones rápidas en todo intervalo (perforado) en la vecindad de  $x = 0$ . Para establecer este hecho, veamos la posibilidad de que  $f$  tenga un límite cuando  $x$  tiende a cero. Supongamos primero que el límite sea cero. Sin embargo, observamos que  $f$  tiene el valor uno en cada punto  $x = 2/\pi, 2/5\pi, 2/9\pi, 2/13\pi, \dots$ . Como algunos de esos puntos se encuentran en cada intervalo perforado alrededor de  $x = 0$ , se infiere que no hay intervalo perforado alrededor de  $x = 0$  dentro del cual  $f(x)$  siempre tenga valores cercanos a cero. Por tanto,  $f$  no tiene el límite cero cuando  $x$  tiende a cero. Se puede emplear un argumento semejante para refutar la idea de que  $f$  tiene cualquier otro número como límite. Por tanto, la función  $\text{sen}(1/x)$  no tiene límite en  $x = 0$ , y en consecuencia es discontinua allí.

4. **Discontinuidad removible.** Una función tiene discontinuidad removible en  $c$  si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  existe y si  $f(c)$  o no existe o tiene valor “erróneo”, esto es, si  $f(c) \neq L$ . La discontinuidad se puede quitar simplemente definiendo, o redefiniendo si es necesario, que  $f(c)$  tenga el valor  $L$ . Por ejemplo, sea

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}, \quad x \neq 0. \quad (11)$$

La gráfica de  $f$  está bosquejada en la figura 2.5.7. Aunque  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , la función es discontinua en  $x = 0$  porque  $f(0)$  no está definida. Sin embargo, podemos definir una nueva función  $g$  que esencialmente es la misma que  $f$ , y que, además, es continua en  $x = 0$ . Por ejemplo

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (12)$$



**Figura 2.5.7** Discontinuidad removible en  $x = 0$ .

El  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 1$ , y por tanto  $g$  es continua en  $x = 0$ . Podemos considerar que  $g$  es una “extensión” de  $f$ , y con frecuencia no es necesario distinguir entre las dos. En lenguaje geométrico la función  $f$  es discontinua en  $x = 0$  porque su gráfica tiene un “agujero” o “hueco” en ese punto. Sin embargo, ampliando adecuadamente la definición de  $f$ , podemos llenar el agujero y eliminar la discontinuidad.

Esta lista de tipos de discontinuidades por ningún concepto es amplia. Por un lado, pueden presentarse combinaciones; por ejemplo, una función puede no ser acotada de



un lado de un punto y oscilatoria del otro. Además, hay algunas discontinuidades que no ajustan en ninguno de los tipos que se describieron. Por ejemplo, veamos de nuevo la función que se mencionó en el ejemplo 7 de la sección 1.5:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases} \quad (13)$$

Si bien esta función es discontinua en todos lados, parece no pertenecer a alguna de las categorías que mencionamos antes.

En cálculo elemental nos interesan casi siempre funciones que sean continuas donde quiera, o en todas partes, excepto en unos cuantos puntos. Los tipos más importantes de discontinuidades son las de salto y las infinitas. Las discontinuidades removibles no tienen mucha importancia porque se pueden eliminar cuando sea necesario, y los otros dos tipos se presentan con poca frecuencia.

Desde un punto de vista analítico, la cuestión de decidir si una función  $f$  dada es continua en un punto  $c$  simplemente es un asunto de determinar el  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  y comprobar si  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Sin embargo, virtualmente en todos los casos, puede uno confiar en su intuición geométrica siempre que se disponga de la gráfica de la función. Si la gráfica muestra un salto o se vuelve no acotada, entonces la función representada es discontinua. La idea de la continuidad se expresa a veces definiendo que una función continua es aquella cuya gráfica consiste en una sola curva ininterrumpida. Si bien esto no es matemáticamente muy preciso, con frecuencia ayuda imaginársela en estos términos. Si no es claro cómo se ve la gráfica de la función, se puede necesitar un análisis más cuidadoso basado en la definición de límite.

Es muy fácil adaptar las propiedades de los límites en la sección 2.3 a las funciones continuas. Esto no debe sorprendernos, en vista de la estrecha relación entre límites y continuidad.

### Teorema 2.5.1

Si las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en el punto  $c$ , entonces las siguientes funciones también son continuas en ese punto:

- (a)  $f + g, f - g, fg, |f|$  y  $\alpha f$  para toda  $\alpha$  constante;
- (b)  $f/g$ , siempre que  $g(c) \neq 0$ ;
- (c)  $(f)^{1/n}$ , siendo  $n$  un entero positivo, y siempre que  $f(c) > 0$  si  $n$  es par.

El teorema 2.5.1 es consecuencia inmediata de las propiedades correspondientes de los límites, descritas en la sección 2.3. Demostraremos una parte de este teorema como ejemplo y dejaremos al lector las demostraciones restantes. Como  $f$  y  $g$  son continuas en  $c$ , la definición de continuidad requiere que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c), \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c). \quad (14)$$

Además, el teorema 2.3.1(a) afirma que

$$\lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x);$$

y por tanto, de acuerdo con la ecuación 14, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) &= f(c) + g(c) \\ &= (f + g)(c). \end{aligned}$$

Por tanto, la función  $f + g$  también es continua de acuerdo con la definición de continuidad. Las demás partes del teorema 2.5.1 se demuestran de un modo semejante.  $\square$

### Continuidad y funciones racionales y algebraicas

Al principio de esta sección hicimos notar que los polinomios son continuos en todos los puntos, y las funciones racionales son continuas en todos los puntos cuando el denominador es diferente de cero. Estos hechos se expresan en las ecuaciones 1 y 2, respectivamente. Las funciones algebraicas más generales en las que intervienen extracciones de raíces también son continuas en todos los puntos en los que se cumplen las condiciones de las partes (b) y (c) del teorema 2.5.1.

### Continuidad de las funciones trigonométricas

No es difícil demostrar que las funciones seno y coseno son continuas en todos los puntos. Recordemos primero que en el ejemplo 8 de la sección 2.3 demostramos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0, \quad (15)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 = \cos 0; \quad (16)$$

por tanto, las funciones seno y coseno son continuas en cero.

Para demostrar que  $\sin x$  es continua en cualquier punto  $c$  arbitrario, observemos que

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin[c + (x - c)] \\ &= \sin c \cos(x - c) + \cos c \sin(x - c) \\ &= \sin c \cos h + \cos c \sin h, \end{aligned}$$

donde  $h = x - c$ . Como el límite cuando  $x$  tiende a  $c$  es el mismo que el límite cuando  $h$  tiende a cero, de acuerdo con el teorema 2.3.1 tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c \lim_{h \rightarrow 0} \cos h + \cos c \lim_{h \rightarrow 0} \sin h.$$

De acuerdo con las ecuaciones 15 y 16 obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c, \quad (17)$$

y por tanto  $\sin x$  es continua en todos los puntos. De un modo muy semejante, es posible demostrar que  $\cos x$  también es continua en todos los puntos.

Si se formulan las demás funciones trigonométricas en términos de seno y coseno, y empleando el teorema 2.5.1, encontraremos que las funciones  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  son también continuas en todos los puntos en los cuales sus respectivos denominadores sean diferentes de cero.

La clase de las funciones continuas es mucho más grande de lo que puede dar idea esta descripción, y contiene muchas funciones distintas de las algebraicas y las trigonométricas. Encontraremos después algunas de estas otras funciones, pero mientras tanto en la sección siguiente regresaremos a considerar algunas de las propiedades fundamentales compartidas por todas las funciones continuas.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 14 determinar todos los puntos donde la función dada sea discontinua, e identificar el tipo de discontinuidad. En cada caso, el dominio de la función consta de todos los puntos para los cuales se puede evaluar la fórmula dada.

$$1. f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad 2. f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$3. f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 4 \\ 2x - 6, & x > 4 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x - \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$7. f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \quad 8. f(x) = \llbracket x \rrbracket - x$$

$$9. f(x) = \operatorname{sgn}(1 - x^2) \quad 10. f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$$

$$11. f(x) = \operatorname{sgn}(1 + \sin x)$$

$$12. f(x) = \cos \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$13. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$14. f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0$$

En los problemas 15 a 20, la función dada no está definida en  $x = 0$  y por tanto es discontinua en ese punto. En cada caso determinar si es posible asignar un valor a  $f(0)$  de tal modo que se elimine la discontinuidad.

$$15. f(x) = \frac{x}{|x|} \quad 16. f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$$

$$17. f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad 18. f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$19. f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}} \right) \quad 20. f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

21. Suponer que

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 1 \\ cx^2 + dx + e, & x > 1 \end{cases}$$

en la cual  $a, \dots, e$  son constantes. ¿Bajo qué condición de los coeficientes es continua  $f$  en  $x = 1$ ?



22. Suponer que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & 0 < x < 1 \\ bx + 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ cx^2, & 2 < x \end{cases}$$

Determinar las condiciones de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que  $f$  sea continua tanto en  $x = 1$  como en  $x = 2$ .

23. Sea  $f(\epsilon)$  el grado del polinomio

$$P(x) = \epsilon x^2 + x - 1.$$

¿Es continua  $f$  para toda  $\epsilon$ ?

24. Determinar dos funciones  $f$  y  $g$  que sean discontinuas en el punto  $c$ , pero que  $f + g$  sea continua en  $c$ .
25. Definir dos funciones  $f$  y  $g$  que sean discontinuas en el punto  $c$ , pero tales que  $fg$  sea continua en ese punto.
26. Definir una función  $f(x)$  tal que  $f$  sea discontinua en  $c$ , pero que  $|f|$  sea continua en  $c$ .
27. Demostrar que si  $|f(x) - f(t)| < |x - t|$  para cada par de puntos  $x$  y  $t$  en el intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f$  es continua en  $(a, b)$ .

## 2.6 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Las funciones continuas tienen determinadas propiedades que son esenciales para el desarrollo del cálculo. En esta sección presentaremos estas propiedades y mencionaremos algunas de sus implicaciones. Aunque las propiedades mismas son muy plausibles geoméricamente, algunas de sus demostraciones son sorprendentemente difíciles. Incluiremos dos de las demostraciones en los problemas 31 y 32.

Como algunas de las propiedades que deseamos describir implican funciones que son continuas en intervalos cerrados, presentaremos primero la idea de continuidad lateral en un punto. Se dice que una función  $f$  es **continua por la izquierda**, en un punto  $c$ , si  $f(c)$  está definida, si existe  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  y si

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c). \quad (1)$$

Análogamente,  $f$  es **continua por la derecha**, en  $c$  si  $f(c)$  está definida, si existe  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  y si

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c). \quad (2)$$

Por ejemplo, la función el mayor entero  $f(x) = [[x]]$  es continua por la derecha en cada punto en el que tiene discontinuidad de salto, pero en esos puntos no es continua por la izquierda (véase figura 2.5.1). De acuerdo con el teorema 2.4.1 la consecuencia es que si  $f$  es tanto continua por la derecha como continua por la izquierda en  $c$ , entonces es continua en ese punto, y viceversa.

Se dice que una función  $f$  es continua en el intervalo cerrado acotado  $[a, b]$  si  $f$  es continua en cada punto del intervalo abierto  $(a, b)$  y si también es continua por la derecha en  $a$  y continua por la izquierda en  $b$ .

### Teorema 2.6.1

Sea  $f$  continua en  $c$ , y supóngase que  $f(c) \neq 0$ . Entonces hay un intervalo abierto  $(c - \delta, c + \delta)$  alrededor de  $c$  en el cual  $f(x)$  tiene el mismo signo que  $f(c)$ .



Otra manera de enunciar la idea que contiene este teorema es que para una función continua un cambio pequeño en la variable independiente da lugar a un cambio pequeño en el valor de la función. La figura 2.6.1 muestra el caso descrito en el teorema 2.6.1, y el siguiente ejemplo también sirve para ilustrar el teorema.

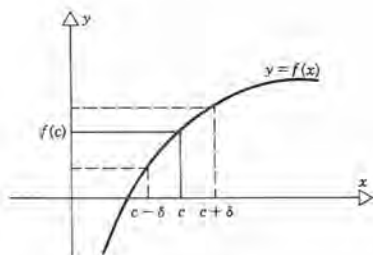


Figura 2.6.1

### EJEMPLO 1

La función

$$f(x) = x^2 - 1 \quad (3)$$

tiene el valor  $f(1.01) = 0.0201 > 0$  cuando  $x = 1.01$ . Determinar un intervalo  $(1.01 - \delta, 1.01 + \delta)$  en el cual  $f(x) > 0$ .

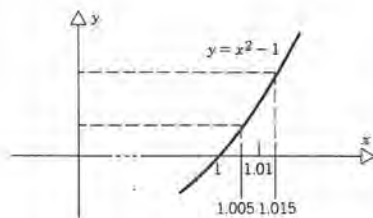


Figura 2.6.2

En la figura 2.6.2 se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ . Hay muchos intervalos que tienen la propiedad requerida. Por ejemplo, sea  $\delta = 0.005$ . El lector puede comprobar que, si  $x$  está en el intervalo  $(1.005, 1.015)$ , entonces  $f(x)$  toma sólo valores positivos. De acuerdo con la gráfica, es claro que sería suficiente cualquier otra  $\delta < 0.01$ . ■

En el ejemplo 1 pudimos determinar con facilidad el intervalo necesario a partir de la gráfica de  $f$ , al observar los puntos en donde cruza al eje  $x$ . Esto no será ya posible si carecemos de una fórmula para  $f(x)$ , sino que sólo sabemos que  $f$  es continua, y que en algún punto, digamos  $x = 1.01$ , tiene un valor distinto de cero. Afortunadamente, en general no es importante realmente determinar el intervalo indicado en el teorema

2.6.1. Más bien, lo que con frecuencia se necesita es tan sólo el conocimiento de que existe ese intervalo.

Los siguientes dos teoremas arrojan más luz sobre la naturaleza de una función continua.

### Teorema 2.6.2

Si la función  $f$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , entonces también tiene las siguientes propiedades:

- (a) **Propiedad de acotamiento.** Hay un número  $K$  tal que  $|f(x)| \leq K$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ ; esto es,  $f$  está acotada en  $[a, b]$ .
- (b) **Propiedad de máximo-mínimo.** Hay números  $M$  y  $m$ , y también puntos  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $[a, b]$  tales que  $f(\alpha) = M$ ,  $f(\beta) = m$ , y  $m \leq f(x) \leq M$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ ; esto es,  $f$  tiene un valor  $M$  máximo y un valor mínimo  $m$  en  $[a, b]$ , y toma esos valores en los puntos  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente.

### Teorema 2.6.3

#### (Propiedad del valor intermedio)

Supongamos que  $f$  es continua en un intervalo  $I$  (no necesariamente cerrado ni acotado). Si  $x_1 < x_2$  son dos puntos cualesquiera en  $I$ , y si  $k$  es cualquier número entre  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$ , entonces hay al menos un punto  $c$  en  $(x_1, x_2)$  en el cual  $f(c) = k$ .

Si una función continua  $f$  tiene un máximo en  $\alpha$  y un mínimo en  $\beta$  como en el teorema 2.6.2(b), entonces podremos identificar a  $\alpha$  y  $\beta$  con  $x_1$  y  $x_2$  si  $\alpha < \beta$  o con  $x_2$  y  $x_1$  si  $\alpha > \beta$ . Entonces el teorema 2.6.3 afirma que  $f$  debe tomar cada valor  $k$  entre su máximo  $M$  y su mínimo  $m$  al menos una vez.

Daremos algunas aplicaciones de estos teoremas aquí, y en los problemas que siguen, pero sólo nos daremos cuenta de su pleno significado más adelante, cuando los volvamos a utilizar con frecuencia. Los siguientes ejemplos muestran que si las hipótesis de los teoremas 2.6.2 y 2.6.3 no se satisfacen, entonces las conclusiones pueden no ser válidas.

### EJEMPLO 2

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (4)$$

En la figura 2.6.3 se muestra la gráfica de  $f$ .

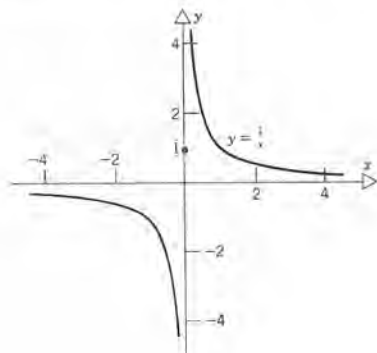


Figura 2.6.3

La hipótesis del teorema 2.6.2 queda violada en el intervalo cerrado y acotado  $[0, 1]$  porque la función  $f$  no es continua allí. Nótese que en este intervalo  $f$  no está acotada, y tampoco tiene valor máximo.

La función  $f$  es continua en el intervalo  $[1, \infty)$ , pero éste es un intervalo no acotado, lo cual viola de nuevo las condiciones del teorema 2.6.2. Nótese que en este intervalo  $f(x)$  no tiene valor mínimo.

Finalmente,  $f$  es continua en el intervalo abierto no acotado  $(0, \infty)$ . En este intervalo  $f(x)$  no tiene valor máximo ni mínimo, ni está acotada. ■

### EJEMPLO 3

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad x = 1. \quad (5)$$

En la figura 2.6.4 se muestra la gráfica de  $f$ .

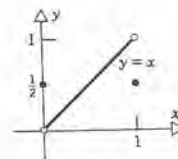


Figura 2.6.4

Nuevamente  $f$  no es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[0, 1]$ . Aunque  $f$  está acotada en  $[0, 1]$ ,  $f(x)$  no tiene ni valor máximo ni valor mínimo.

En el intervalo abierto  $(0, 1)$ , la función  $f$  es continua, pero de nuevo  $f(x)$  no tiene ni valor máximo ni valor mínimo. ■

### EJEMPLO 4

Se tiene la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x < 0; \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 2; \end{cases} \quad (6)$$

cuya gráfica aparece en la figura 2.6.5.

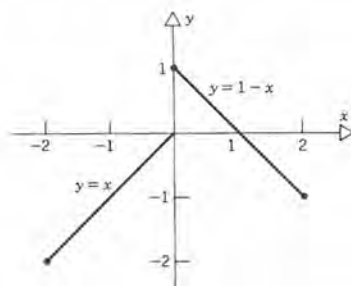


Figura 2.6.5

Obsérvese que  $f$  es discontinua en  $x = 0$ . Como resultado de ello, no se cumple la propiedad del valor intermedio en algunos subintervalos. Por ejemplo, tenemos el intervalo  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ . Entonces  $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$  y  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ , pero  $f$  no toma todos los valores intermedios. Específicamente, cuando  $x$  está en  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , nunca toma valores en  $[0, \frac{1}{2})$ . Nótese también que aún cuando  $f$  es discontinua en  $[-2, 2]$  tiene valores tanto máximos como mínimos, y toma todos los valores intermedios. ■

Las hipótesis de los teoremas 2.6.2 y 2.6.3 son *suficientes* para garantizar las conclusiones enunciadas, pero no son *necesarias*. En otras palabras, hay casos en los que algunas (o hasta todas) las conclusiones son ciertas, aun cuando las hipótesis no se satisfagan.

El teorema 2.6.3, la propiedad de valor intermedio de funciones continuas, tiene varias consecuencias interesantes. El siguiente corolario se conoce a veces como teorema de Bolzano.

### Corolario

#### (Teorema de Bolzano)

Si  $f$  es continua en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , y si  $f(a) f(b) < 0$ , entonces hay al menos un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ . En otras palabras, la ecuación  $f(x) = 0$  tiene al menos una raíz entre  $x = a$  y  $x = b$ .

La hipótesis  $f(a) f(b) < 0$  simplemente es otro modo de decir que  $f(a)$  y  $f(b)$  son de signos opuestos, y que ninguna de ellas es cero. Si se satisfacen las condiciones dadas, puede haber más de un punto en el que  $f(x) = 0$ . También,  $f(x)$  puede ser cero



aun cuando se violen las hipótesis; en otras palabras, las condiciones son suficientes, pero no necesarias.

Una de las aplicaciones del teorema de Bolzano es el aislamiento de raíces de ecuaciones. También es la base de un procedimiento numérico mediante el cual se pueden calcular las raíces con exactitud creciente. El siguiente ejemplo ilustra estas ideas.

## EJEMPLO 5

Considere la ecuación polinomial

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7 = 0. \quad (7)$$

Sustituyendo  $x = 1$  y  $x = 2$  se ve que  $f(1) = -2$  y  $f(2) = 5$ . Como estos valores son de signo contrario, el teorema de Bolzano nos garantiza que la ecuación tiene al menos una raíz en el intervalo  $1 < x < 2$ .

Para ubicar esta raíz con más exactitud, podemos evaluar  $f(x)$  en  $x = 1.5$ , que es el punto medio del intervalo  $(1, 2)$ . El resultado es  $f(1.5) = 0.875$ , y por tanto, de acuerdo con el teorema de Bolzano sabemos que hay al menos una raíz en el intervalo  $(1, 1.5)$ . No tenemos información acerca del número de raíces, si es que las hay, en  $(1.5, 2)$ . A continuación bisecamos el intervalo  $(1, 1.5)$  y calculamos  $f(1.25) = -0.671875$ ; por tanto, hay al menos una raíz en el intervalo  $(1.25, 1.5)$ . Los siguientes tres pasos son

$$f(1.375) \cong 0.068359 \text{ y por tanto hay una raíz en } (1.25, 1.375)$$

$$f(1.3125) \cong -0.309326 \text{ y por tanto hay una raíz en } (1.3125, 1.375)$$

$$f(1.34375) \cong -0.122467 \text{ y por tanto hay una raíz en } (1.34375, 1.375)$$

Si calculamos la raíz empleando el punto medio de este último intervalo, que es  $1.359375$ , podemos estar seguros de que el error de nuestra aproximación no será mayor que  $0.015625$ . Si deseamos alcanzar mayor exactitud, podemos continuar este proceso indefinidamente. En cada paso bisecamos el intervalo de que se trate y escogemos el subintervalo cuyos extremos produzcan signos contrarios para  $f(x)$ . Después de  $n$  pasos la raíz estará confinada en un intervalo de longitud  $1/2^n$ . ■

El procedimiento que se usó en el ejemplo 5 no se restringe a ecuaciones polinomiales, sino que se puede aplicar a cualquier ecuación de la forma  $f(x) = 0$ , en donde  $f$  es una función continua, siempre que se puedan calcular dos puntos  $x = a$  y  $x = b$  tales que  $f(a) f(b) < 0$ . Entonces la bisección conduce en forma sistemática a una estimación numérica tan cercana a la raíz como se necesite.

Los teoremas 2.6.2 y 2.6.3 pueden enunciarse de nuevo de manera más sucinta si adoptamos el punto de vista de que una función es la transformación de su dominio a su imagen.

**Teorema 2.6.4**

La imagen de un intervalo cerrado acotado  $[a, b]$  bajo una función continua  $f$  también es un intervalo cerrado acotado  $[m, M]$ .

En la notación normal para conjuntos, el teorema 2.6.4 establece que el conjunto imagen  $S$  definido por

$$S = \{y \mid y = f(x) \text{ para } x \text{ en } [a, b]\} \quad (8)$$

es el intervalo cerrado acotado  $[m, M]$ . En forma alternativa,

$$S = f([a, b]) = [m, M]. \quad (9)$$

Para mostrar la relación entre los teoremas 2.6.2 y 2.6.3, y el teorema 2.6.4, nótese que si el conjunto imagen  $S$  es un intervalo cerrado acotado, entonces  $f$  es acotada, tiene valores tanto máximo como mínimo y toma todos los valores intermedios. Recíprocamente, si  $f$  tiene las propiedades de máximo-mínimo y de valor intermedio, entonces el conjunto imagen  $S$  es un intervalo cerrado y acotado.

El siguiente ejemplo muestra que no se pueden afirmar los enunciados correspondientes acerca de la imagen de un intervalo abierto bajo una función continua.

**EJEMPLO 6**

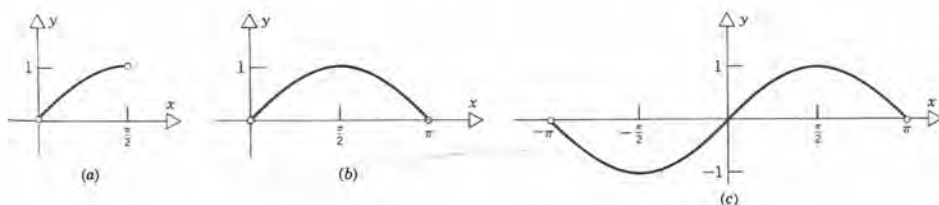
Si

$$f(x) = \sin x \quad (10)$$

determinar la imagen de  $(0, \pi/2)$ , de  $(0, \pi)$  y de  $(-\pi, \pi)$ .

De acuerdo a la gráfica de la figura 2.6.6, es claro que

Figura 2.6.6



- (a) La imagen de  $(0, \pi/2)$  es  $(0, 1)$ .
- (b) La imagen de  $(0, \pi)$  es  $(0, 1]$ .
- (c) La imagen de  $(-\pi, \pi)$  es  $[-1, 1]$ . ■

Como la función  $f$  del ejemplo 6 es continua en cada uno de los intervalos dados, llegamos a la conclusión de que el conjunto imagen de una función continua en un intervalo abierto puede ser tanto abierto, cerrado, semicerrado o semiabierto. También puede no ser acotado, como podemos ver con la función  $f(x) = 1/x$  en el intervalo  $0 < x < 1$ . De modo semejante, no se puede decir nada acerca del conjunto imagen de una función discontinua en un intervalo cerrado acotado. El lector debe construir ejemplos para mostrar esto, o quizá reinterpretar algunos de los que ya hemos presentado.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 decir si la función dada es continua y si el intervalo dado es cerrado y/o acotado. Determinar cuáles (si las hay) de las propiedades de los teoremas 2.6.2 y 2.6.3 no las posee la función.

$$1. f(x) = \tan x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x - 2, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & 0 \leq x < 2 \\ x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \frac{x}{3+x}, \quad x > 0$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2x}{(x-3)}, & x > 3 \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{x}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & -1 < x < 0 \text{ o } 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

En los problemas 11 a 14 las ecuaciones cúbicas que aparecen en ellos tienen tres raíces reales. Emplear el teorema de Bolzano en cada ecuación para determinar los enteros sucesivos entre los que se encuentra cada raíz.

$$11. 2x^3 + x^2 - 18x - 20 = 0$$

$$12. 4x^3 - 17x^2 - 12x + 51 = 0$$

$$13. 8x^3 - 52x^2 - 0.66x + 45 = 0$$

$$14. 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$$

15. Mediante el teorema de Bolzano, demostrar que toda ecuación polinomial de grado impar tiene al menos una raíz real.

16. Determinar el entero positivo mínimo  $n$  tal que la ecuación

$$x^3 + 3x^2 - 30x - 171 = 0$$

tiene una raíz con toda seguridad en  $0 < x < n$ .

En los problemas 17 a 20, la ecuación que aparece tiene una raíz positiva. Emplear el método de bisección del ejemplo 5 para estimar esta raíz. En cada caso, determinar un intervalo de longitud  $0.0078125 = 1/128 = 2^{-7}$  en el cual debe estar la raíz.

$$17. 2 \sin x - x = 0 \quad 18. x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$$



## 116 LÍMITES Y FUNCIONES CONTINUAS

$$\textcircled{c} 19. \frac{2}{x} - \sqrt{x} + 3 = 0 \quad \textcircled{c} 20. 3 \cos x - x^2 = 0$$

21. Demostrar que de todos los rectángulos inscritos en un círculo dado, hay uno cuya área es máxima.
22. Demostrar que de todos los rectángulos con un perímetro determinado, hay uno cuya área es máxima.
23. Supongamos que las dos funciones  $f$  y  $g$  son continuas en  $[0, 1]$ ; además, supongamos que  $f(0) = 2$ ,  $f(1) = -1$ ,  $g(0) = 0$  y  $g(1) = 3$ . Demostrar que hay al menos un punto  $x$  en  $[0, 1]$  para el cual  $f(x) = g(x)$ .
24. (a) Demostrar que en cualquier instante hay al menos un par de puntos diametralmente opuestos en el ecuador cuya temperatura es la misma. *Sugerencia:* suponer que la temperatura varía en forma continua, y formar una función auxiliar que relacione la temperatura en dos puntos diametralmente opuestos.
- (b) Demostrar que el resultado de la parte (a) también es válido para puntos que quedan en cualquier círculo en la superficie terrestre.
- (c) ¿Se aplican también los resultados de las partes (a) y (b) a las presiones barométricas? ¿Y a las altitudes sobre el nivel del mar?
25. Un excursionista parte de la orilla del Gran Cañón a las 8 A. M. y llega hasta el fondo a las 4 P. M. Después de acampar, el excursionista sube al día siguiente por la misma ruta, partiendo de nuevo a las 8 A. M. y alcanzando la orilla a las 4 P. M. Demostrar que hay un punto en la vereda por el cual pasa el excursionista a la misma hora en los dos días.
26. Si  $f(0) = a$  y  $f(1) = b$ , siendo  $0 \leq a, b \leq 1$ , y si  $f$  es continua en  $[0, 1]$ , demostrar que la ecuación  $x = f(x)$  tiene al menos una raíz en  $[0, 1]$ . *Sugerencia:* considere  $g(x) = f(x) - x$ .
27. Hacer un esquema de la gráfica de una función discontinua en un intervalo acotado abierto cuya imagen sea (a) un intervalo abierto y acotado, (b) un intervalo cerrado y acotado.

28. Hacer un esquema de la gráfica de una función discontinua en un intervalo cerrado acotado cuya imagen sea (a) un intervalo abierto y acotado; (b) un intervalo cerrado acotado.
29. Dibuje la gráfica de una función discontinua en un intervalo cerrado y acotado cuya imagen sea un intervalo no acotado.
30. Hacer un esquema de la gráfica de una función continua en un intervalo no acotado cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.
31. **Demostración del teorema 2.6.1.** Supongamos que  $f(c) > 0$ , y sea  $\epsilon = f(c)/2$ . Entonces hay una  $\delta$  tal que si  $|x - c| < \delta$ ,  $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ . Demostrar que si  $|x - c| < \delta$  entonces  $f(x) > f(c) - \epsilon = f(c)/2 > 0$ . ¿Cómo se debe modificar el argumento si  $f(c) < 0$ ?
- \*32. **Demostración del teorema 2.6.3.** Para concretar, supongamos que  $x_1 < x_2$  y que  $f(x_1) > f(x_2)$ ; los demás casos se pueden manejar del mismo modo. Sea  $k$  cualquier número tal que  $f(x_2) < k < f(x_1)$ . Se define el conjunto  $S$  como sigue:

$$S = \{t \mid f(x) > k \text{ para } x_1 \leq x \leq t\}.$$

- (a) Con el teorema 2.6.1 demostrar que el conjunto  $S$  no es vacío.
- (b) Demostrar que el conjunto  $S$  está acotado por arriba, por ejemplo, por  $x_2$ .
- (c) Obsérvese que, de acuerdo con el principio de completación (véase la descripción antes del problema 29 en la sección 1.1), el conjunto  $S$  tiene una mínima cota superior; la indicaremos mediante  $c$ .
- (d) Demostrar que si  $f(c) > k$ , entonces  $c$  no es una cota superior de  $S$ . Por tanto  $f(c) \leq k$ .
- (e) Demostrar que si  $f(c) < k$ , entonces  $S$  tiene cotas superiores menores que  $c$ . Por tanto,  $f(c) \leq k$ .
- (f) Demostrar que  $f(c) = k$ , para completar la demostración.

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 4 determinar la ecuación de la recta tangente a la función dada y en el punto dado. Hacer la gráfica de la función y de la tangente.

1.  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$  en  $(2, 6)$



$$2. f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 1} \text{ en } (-1, -1)$$

$$3. f(x) = \frac{\tan x}{2} \text{ en } (\pi, 0)$$

$$4. f(x) = \cos x \text{ en } (\pi, -1)$$

En los problemas 5 a 8, determinar  $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)] / (x - c)$  para el valor dado de  $c$ .

$$5. f(x) = x^2 + 1, \quad c = 2$$

$$6. f(x) = 2x^2 - 3x, \quad c = 1$$

$$7. f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}, \quad c = 1$$

$$8. f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}, \quad c = 1$$

En los problemas 9 a 32, determinar el límite dado o bien demostrar que no existe.

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{x}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 9}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 - 5x + 6)}{(x - 3)^2}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\|x\|}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{x} \right\|$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad \text{donde}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ x^2, & -3 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3 + 2}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 2}, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3/2} - 3x + 3\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(x + 2)}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x - 2\sqrt{x} + 1)}{x - 4\sqrt{x} + 4}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - \sqrt{x} - 2}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{2x^2}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x \sin(x - \pi)}{x - \pi}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x \csc 2x^2}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3 \sin \pi x}{x - 1}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x^2 - 4}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 5}{x^3 + 1}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{3(x - \pi)}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{x - 1}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{3x^3 - 4}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 4}$$

En los problemas 33 a 36 determinar si la función dada es continua en el punto dado. Si no lo es, indicar el tipo de discontinuidad que se tiene, y si esta discontinuidad es removible, definir a  $f(c)$  para hacer continua a  $f(x)$  en  $(c)$ .

$$33. f(x) = \frac{\sin \pi x}{x - 1} \text{ en } c = 1$$

$$34. f(x) = \frac{\tan 2x}{x + (\pi/2)} \text{ en } c = -\frac{\pi}{2}$$

$$35. f(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ en } c = 0$$

$$36. f(x) = \sin \frac{1}{1 + x} + x \sin \frac{1}{1 + x} \text{ en } c = -1$$

En los problemas 37 y 38, suponer que la función  $f$  es continua en el intervalo  $[a, b]$  excepto por una discontinuidad en el punto  $c$ ;  $a < c < b$ .

37. (a) ¿Puede la propiedad de acotamiento del teorema 2.6.2 seguir siendo válida para la función  $f$ ? Mencionar el nombre de una discontinuidad que no lo permitiría.

(b) Si la propiedad de acotamiento no es válida para la función  $f$ , ¿puede existir un intervalo "máximo" cerrado contenido en  $[a, c]$  para el cual se aplique el teorema 2.6.2? Tratar de determinar esa función.

38. (a) ¿Puede seguir siendo válida la propiedad del valor intermedio del teorema 2.6.3 para la función  $f$ ? Si es así, dar el nombre de la discontinuidad que lo permitiría.

(b) Hallar una función  $f$  para la cual la discontinuidad

# 118 LÍMITES Y FUNCIONES CONTINUAS

en  $x = c$  no sea removible, pero para la cual el teorema 2.6.3 se aplique en  $[c, b]$ .

En los problemas 39 y 40 emplear el teorema de Bolzano para calcular los dos enteros más próximos que rodean a una raíz  $r$  de la ecuación  $f(x) = 0$ . A continuación, calcular la raíz con dos decimales de aproximación.

39.  $f(x) = x^3 - 6x - 16$

40.  $f(x) = x^4 - 14x^2 + x - 51$  raíz positiva

41. (a) Hallar una función  $f$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 1$ .

(b) Hallar una función  $g$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} xg(x) = 2$ .

(c) Hallar una función  $h$  tal que no exista  $\lim_{x \rightarrow 0} xh(x)$ .

42. Una función  $w$  tiene las propiedades  $w(x) \neq 0$  para toda  $x$  en  $\mathbb{R}^1$ , y  $\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0$ .

(a) Determinar una función  $f$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} (wf)(x) = 1$ .

(b) Determinar una función  $g$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} (wg)(x) = -\frac{1}{3}$ .

(c) Determinar una función  $h$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} (wh)(x)$  no exista.

En los problemas 43 a 50 hallar una función  $f$  que tenga exactamente las propiedades dadas y hacer su gráfica. *Sugerencia:* esto sólo se puede hacer empleando funciones racionales.

43. Discontinuidad removible en  $x = 2$ ; no acotada en  $x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ;  $f(-1) = 0$ .

44.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ ;  $f(4) = 0$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ;  $f(-5) = 0$ .

46.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ;  $f(3) = 0$ .

47. Discontinuidad infinita en  $x = 2$ ; discontinuidad de salto en  $x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

48. Discontinuidad infinita en  $x = 1$ ; discontinuidad infinita en  $x = -4$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ .

49. Discontinuidad removible en  $x = 1$ ; discontinuidad infinita en  $x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ ;  $f(-2) = 1$ .

50. Discontinuidad removible en  $x = 0$ ; discontinuidad de salto en  $x = -4$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

# CÁLCULO

## Capítulo 3

### La derivada

El problema de determinar la recta tangente a una curva dada en determinado punto se originó con los matemáticos griegos hace dos mil años. A la mitad del siglo xvii se habían determinado rectas tangentes en varios casos especiales, pero todavía faltaba un método general.

El cálculo diferencial nació durante 1665 ó 1666 cuando Isaac Newton\* concibió por primera vez el proceso que ahora conocemos como derivación, el cual, entre muchas otras cosas, proporcionó un poderoso método para determinar la tangente a una curva esencialmente arbitraria. Como Newton no publicó sus hallazgos, no fueron del conocimiento general, y el cálculo fue redescubierto en forma independiente por

---

\* Isaac Newton (1642-1727) creció en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. Después de graduarse en el Trinity College de la Universidad de Cambridge en 1665, regresó a su casa debido a la peste, que entonces afligía a Inglaterra y que obligó a la Universidad de Cambridge a cerrar sus recintos.

En su aislamiento relativo durante los dos años siguientes, Newton "estaba en el principio de su época de productividad" como dijo él mismo, tiempo después. Los resultados hicieron época: las leyes fundamentales del movimiento y de la gravitación, el principio de sus experimentos de óptica, y muchos de sus resultados básicos en el cálculo.

Newton regresó a Cambridge en su reapertura en 1667 y pasó a ser profesor de matemáticas en 1669. Hizo circular algunos de sus resultados en forma privada entre sus amigos, pero no fue sino hasta 1687, bajo el apremio de Edmund Halley, que Newton publicó su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, trabajo monumental en el que estableció las leyes de la mecánica y de la gravitación, y estableció los fundamentos de gran parte de la investigación de las ciencias físicas a partir de entonces. (Continúa en la pág. siguiente.)



Gottfried Wilhelm Leibniz\*\* aproximadamente ocho a diez años después. Entre los descubrimientos de Newton y Leibniz se encuentran las reglas para derivar potencias (sección 3.1), sumas, productos y cocientes de funciones (sección 3.2), y de funciones compuestas (sección 3.5), al igual que muchos otros resultados que aparecen más adelante en este libro.

El descubrimiento del cálculo por Newton y Leibniz cambió la naturaleza y dirección de las matemáticas. Fue vasto el conjunto de problemas que antes no se podía resolver, aun por los sabios más sobresalientes, que rápidamente quedó al alcance de gente que sólo tenía una destreza ordinaria en matemáticas. Acoplado con la formulación de las leyes del movimiento y la gravitación por parte de Newton, el cálculo de éste y Leibniz también proporcionó las herramientas precisas para emprender investigaciones en las ciencias físicas, que han revolucionado al mundo moderno.

### 3.1 DEFINICIÓN DE LA DERIVADA; LA REGLA PARA POTENCIAS

En la sección 2.1 demostramos que si se relaciona la posición  $s$  de una partícula que se mueve en línea recta con el tiempo  $t$  mediante la función  $f$ , esto es, si

$$s = f(t), \quad (1)$$

Sin embargo, el trabajo de Newton sobre cálculo permaneció en forma de manuscrito durante muchos años; por ejemplo, la descripción más extensa de sus métodos, *De Methodis Serierum et Fluxionum*, la escribió en 1671, pero no se publicó hasta 1736, nueve años después de su muerte. Se publicaron dos resúmenes más cortos de su trabajo matemático en 1704 y 1711, también mucho después de haber sido escritos.

Mientras tanto, había dejado Cambridge en 1696 para ocupar el puesto de Celador, y después de Superior, de la casa británica de moneda; de ahí en adelante se dedicó principalmente a tareas no matemáticas. Murió después de haber sido reconocido con grandes honores por sus contemporáneos y por el gobierno de su país, a los ochenta y cinco años de edad, y está sepultado en la Abadía de Westminster.

\*\* Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fue un sabio cuyos intereses abarcaron muchos campos, incluyendo la filosofía, la lógica y las leyes, así como las matemáticas y las ciencias. Nació en Leipzig y pasó la mayor parte de su vida como consejero, bibliotecario y diplomático de la casa real de Hannover. Viajó mucho y mantuvo una prolífica correspondencia acerca de muchos temas, con otros sabios europeos.

Durante una estadía en París al principio de 1672, Christian Huygens estimuló el interés de Leibniz por las matemáticas. Durante los cuatro o cinco años siguientes Leibniz redescubrió, independientemente de Newton, la mayor parte de las reglas y fórmulas del cálculo elemental. El primer trabajo publicado acerca del cálculo fue el de Leibniz en 1684, en la revista *Acta Eruditorum*.

Mientras que a Newton lo movía principalmente el deseo de comprender el mundo físico, Leibniz fue un pensador más abstracto y filosófico. A través de su vida trató de formular un sistema de razonamiento que pudiera permitir que la gente instruida acometiera razonamientos con el mismo grado de concordancia y certeza que el de los cálculos numéricos.

En el desarrollo del cálculo en la última parte del siglo XVII y la primera del XVIII, tuvo Leibniz más influencia que Newton. Esto se debió en parte a su correspondencia con otros eruditos, mientras que Newton era mucho más reservado. Por ejemplo, en su correspondencia entre Leibniz y los hermanos Jakob y Johann Bernoulli descubrieron muchos de los métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden, ramificación natural del cálculo mismo.



entonces la velocidad está dada por

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \quad (2a)$$

Si hacemos que  $t = t_0 + h$ , entonces  $h \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow t_0$ , y podemos escribir

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad (2b)$$

También observamos que desde un punto de vista geométrico, la velocidad  $v$  es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la ecuación 1 en el punto  $(t, f(t))$ .

Sin embargo, el proceso de límite que indica la ecuación 2 se puede aplicar a una función  $f$  sólo como operación matemática, sin tener en cuenta su posible interpretación en términos de física o de geometría. A este proceso matemático se le conoce como **derivación**, y da un resultado al cual se le llama **derivada**. Veamos la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 3.1.1** Sea  $f$  una función cuyo dominio  $D$  contiene un intervalo abierto en el que está el punto  $x$ . Entonces, el número  $f'(x)$  definido mediante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad (3)$$

siempre que exista este límite, se llama la derivada de  $f$  en  $x$ .

En otras palabras, a cada  $x$  para la cual existe el límite, la ecuación 3 asigna un número único  $f'(x)$ . En consecuencia, la ecuación 3 define una *función*  $f'$ , llamada la *derivada de  $f$* , cuyo valor en  $x$  es  $f'(x)$ . El dominio de  $f'$  consta de aquellos puntos de  $D$  para los cuales existe el límite (3). Si  $f'(x)$  existe en un punto  $x$ , entonces se dice que  $f$  es *derivable* en ese punto. Análogamente, si  $f$  es derivable en todo punto de un intervalo abierto, entonces se dice que  $f$  es derivable en el intervalo.

Para una función derivable  $y = k(x)$ , a veces emplearemos  $y'$  para indicar el valor de su derivada en  $x$ ; esto es,  $y' = f'(x)$ . Es importante recordar que  $f'$  es una función, mientras que  $f'(x)$  y  $y'$  indican el valor de esa función en el punto  $x$ . A veces, al estudiar derivación, ayuda el subrayar la variable independiente. Así, si  $x$  es la variable independiente, podremos decir “la derivada con respecto a  $x$ ”, en lugar de sólo “la derivada”. Ya hemos interpretado a la derivada como velocidad o como pendiente de una recta tangente. En forma más general, si  $y = f(x)$ , entonces la derivada  $f'$  es la *razón de cambio* de  $f$  con respecto a la variable independiente  $x$  y  $f'(x_0)$  es la razón de cambio de  $f$  en el punto  $x = x_0$ .

El requisito de que  $D$  contenga un intervalo abierto al cual pertenezca  $x$ , en la definición 3.1.1, es necesario para estar seguros de que  $x + h$  también está en  $D$  cuando  $h$  es suficientemente pequeño, y para que se puedan tomar en cuenta los puntos  $x + h$  a ambos lados de  $x$  durante el proceso de límite. Finalmente, como puede no existir el límite en la ecuación 3 para algunos puntos en  $D$ , el dominio de  $f'$  no necesita ser todo  $D$ .

La ecuación 3 proporciona un medio para comprender a la derivada conceptualmente, por ejemplo como el límite al que tienden las pendientes de las rectas secantes trazadas en intervalos más y más cortos. Sin embargo, en la mayor parte de los casos no se adapta bien para el cálculo de derivadas de funciones específicas. Por tanto, nuestro objetivo primario en este capítulo será desarrollar un conjunto de reglas y fórmulas que nos permitan calcular, con poco esfuerzo, la derivada de cualquier función perteneciente a alguna de las clases principales. Estas reglas son de dos tipos. Algunas son fórmulas que dan la derivada de una función específica, como  $\sqrt{x}$  o  $\cos x$ . Otras son de naturaleza más general y nos dicen cómo derivar algunas combinaciones de funciones, como pueden ser sumas o productos. Veremos que sólo se necesitan relativamente pocas reglas y fórmulas para derivar la mayor parte de las funciones con las que nos encontraremos usualmente. Sin embargo, primero veremos algunos ejemplos en los cuales calcularemos las derivadas de determinadas funciones específicas empleando directamente la definición 3.1.1.

### EJEMPLO 1

Se tiene una función constante

$$f(x) = c, \quad -\infty < x < \infty \quad (4)$$

donde  $c$  es cualquier número real (véase figura 3.1.1). Entonces, para cada  $x$ ,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0, \quad h \neq 0.$$

En consecuencia,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (5)$$

Así, la derivada de una función constante es cero en todos los puntos. Geométricamente, la gráfica de una función constante es una recta paralela al eje  $x$ . La anulación de la derivada en todos sus puntos quiere decir que la pendiente de la recta tangente en todos los puntos es cero, y por tanto la tangente es la recta misma. ■

### EJEMPLO 2

Se tiene la función identidad

$$f(x) = x, \quad -\infty < x < \infty; \quad (6)$$

(véase figura 3.1.2). Entonces, para toda  $x$ ,

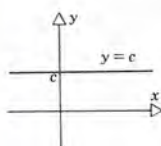


Figura 3.1.1

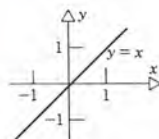


Figura 3.1.2

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = 1, \quad h \neq 0.$$

Por tanto,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1. \quad (7)$$

Por consiguiente, la derivada de la función identidad es uno en todas partes; esto es, la pendiente de la recta  $y = x$  es igual a uno. De nuevo, la tangente es simplemente la misma recta original. ■

### EJEMPLO 3

Sea

$$f(x) = x^3, \quad -\infty < x < \infty; \quad (8)$$

(véase figura 3.1.3). Entonces

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

Para calcular el límite de este cociente de diferencias, es necesario primero transformarlo a una forma más adecuada. De acuerdo con el teorema del binomio, se tiene

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h}$$

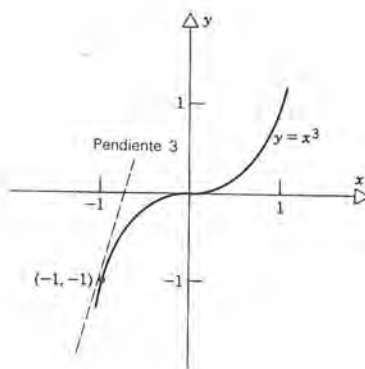


Figura 3.1.3

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
 &= 3x^2 + 3xh + h^2, \quad h \neq 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, para toda  $x$  empleamos las propiedades algebraicas de los límites (teorema 2.3.1) y obtenemos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\
 &= 3x^2.
 \end{aligned} \tag{9}$$

La ecuación 9 nos da la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^3$  en cada punto. Por ejemplo, en el punto  $(-1, -1)$  la recta tangente tiene una pendiente igual a 3, como se ve en la figura 3.1.3. ■

#### EJEMPLO 4

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0; \tag{10}$$

(véase la figura 3.1.4). Entonces, para  $x \neq 0$ ,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

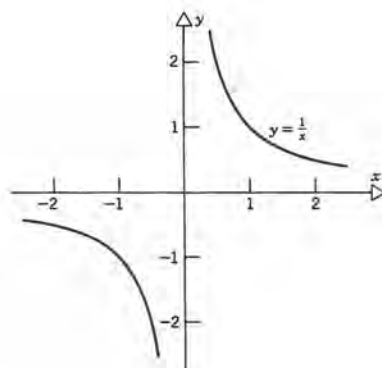


Figura 3.1.4



$$\begin{aligned}
 &= \frac{x - (x + h)}{x(x + h)h} \\
 &= -\frac{h}{x(x + h)h} \\
 &= -\frac{1}{x(x + h)}, \quad h \neq 0.
 \end{aligned}$$

De nuevo empleamos las propiedades algebraicas de los límites y obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x + h)} = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0. \quad (11)$$

Nótese que, en los cálculos que nos condujeron a la ecuación 11, hemos dividido entre  $x + h$ ; por tanto, nos debemos asegurar de que  $x + h \neq 0$ . Como  $x \neq 0$  y como en el proceso de límite manejamos sólo valores pequeños de  $h$ , es suficiente pedir que  $|h| < |x|$ ; con ello, seguramente es válido que  $x + h \neq 0$ . ■

## EJEMPLO 5

Sea

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0; \quad (12)$$

(véase figura 3.1.5). Para  $x > 0$  y  $h$  lo suficientemente pequeña para que  $x + h \geq 0$ , podemos formar el cociente de diferencias

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Para calcular el límite de este cociente de diferencias cuando  $h \rightarrow 0$ , es conveniente emplear el conocido recurso algebraico de racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}, \quad h \neq 0.
 \end{aligned}$$

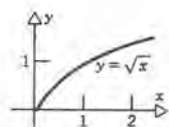


Figura 3.1.5

Así, haciendo que  $h \rightarrow 0$ , se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0. \quad (13)$$

Nótese que para  $x = 0$  no podemos formar el cociente de diferencias, porque si  $h < 0$ ,  $f(0+h) = \sqrt{h}$  no es un número real. Por tanto, en este caso el dominio de la función  $f$  es  $[0, \infty)$ , pero el dominio de la derivada  $f'$  sólo es  $(0, \infty)$ . ■

### La regla para potencias

Un examen de los ejemplos anteriores nos revela un comportamiento que nos sugiere un resultado más general.

#### Teorema 3.1.1

(Regla para potencias)

$$\text{Si } f(x) = x^r, \text{ entonces } f'(x) = rx^{r-1}; \quad (14)$$

el resultado es válido para todo número real  $r$  y para toda  $x$  para los cuales la expresión de  $f'(x)$  también tenga como resultado un número real.

Llamaremos a la ecuación 14 la regla para potencias, porque nos da la derivada de  $x^r$  cuando el exponente  $r$  es constante. Obsérvese que los resultados de los ejemplos del 2 al 5 los da la ecuación 14 si  $r = 1, 3, -1$  y  $\frac{1}{2}$  respectivamente. En sentido algo degenerado, el resultado del ejemplo 1 ( $r = 0$ ) también está comprendido en la ecuación 14.

Por el momento, sólo tomaremos en cuenta valores racionales de  $r$  en la regla para potencias, ya que la interpretación de  $x^r$  cuando  $r$  es irracional necesita de mayor estudio. En la sección 8.3 trabajaremos con exponentes irracionales.

Es importante la regla para potencias porque nos permite evitar cálculos como los de los ejemplos del 1 al 5 cada vez que deseemos derivar una función de la forma  $x^r$ . Sin embargo, como es el caso en general, debemos poner atención a los resultados que obtengamos para evitar errores por descuido. Por ejemplo, si  $f(x) = 1/x$ , entonces  $r = -1$ , y en este caso al aplicar la regla para potencias se obtiene  $f'(x) = -x^{-2}$ . Como vimos en el ejemplo 4, se debe excluir el punto  $x = 0$ , porque  $f$  no es derivable allí. En realidad, ni siquiera está definida  $f(0)$ . Igualmente, si  $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ , entonces  $r = \frac{1}{2}$  y  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = 1/2\sqrt{x}$ , de acuerdo con la regla para potencias. Es natural que este resultado sólo sea válido para  $x > 0$ , como vimos en el ejemplo 5.

Así, al emplear la regla para potencias, debemos tener las precauciones normales para no dividir entre cero o extraer una raíz par de un número negativo.

### EJEMPLO 6

Determinar  $y'$  si  $y = f(x) = x^{2/3}$ .

Usaremos la regla para potencias con  $r = \frac{2}{3}$ , y obtendremos

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}, \quad x \neq 0.$$

Aunque el dominio de  $f$  es  $(-\infty, \infty)$ , el punto 0 está excluido del dominio de su derivada. La gráfica de  $y = x^{2/3}$  se ve en la figura 3.1.6. Sugiere que la recta tangente en  $x = 0$  es el eje  $y$ , que tiene una pendiente infinita. ■

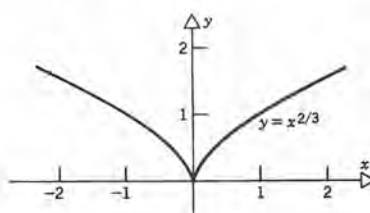


Figura 3.1.6

### EJEMPLO 7

Si  $f(x) = x^{-2}$ , y  $x > 0$ , hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = x^{-2}$  en el punto  $(3, \frac{1}{9})$  (véase figura 3.1.7).

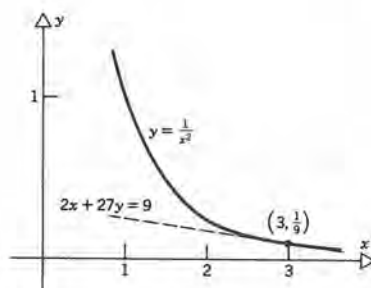


Figura 3.1.7

De acuerdo con la regla para potencias, tenemos que

$$f'(x) = -2x^{-3}, \quad x > 0.$$

Por tanto, la pendiente de la tangente en  $(3, \frac{1}{9})$  es  $f'(3) = -\frac{2}{27}$ . La ecuación de la tangente en este punto es

$$y - \frac{1}{9} = -\frac{2}{27}(x - 3),$$

o bien

$$2x + 27y = 9. \blacksquare$$

**Demostración del teorema 3.1.1 para exponentes racionales.** Estableceremos la validez de la regla para potencias en varios pasos. Primero, supongamos que  $r$  es un número entero positivo  $n$ . Como ya hemos considerado el caso  $n = 1$  en el ejemplo 2, supongamos que  $n \geq 2$ . Entonces,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Mediante el teorema del binomio, como en el ejemplo 3, llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n] - x^n}{h} \\ &= \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}, \quad h \neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Como cada uno de los términos, excepto el primero, del lado derecho de la ecuación 15 contiene una potencia positiva de  $h$ , obtenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} \quad (16)$$

Por consiguiente, la regla para potencias es válida para potencias enteras positivas.

A continuación, supongamos que  $r$  es un entero negativo, digamos  $r = -m$ , siendo  $m$  un entero positivo; esto es,  $f(x) = x^{-m}$ . Entonces,



$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{(x+h)^m} - \frac{1}{x^m}}{h} \\
 &= \frac{x^m - (x+h)^m}{hx^m(x+h)^m} \\
 &= -\frac{(x+h)^m - x^m}{h} \cdot \frac{1}{x^m(x+h)^m}.
 \end{aligned}$$

Hemos visto que  $[(x+h)^m - x^m]/h \rightarrow mx^{m-1}$  cuando  $h \rightarrow 0$ ; como  $(x+h)^m \rightarrow x^m$  cuando  $h \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -mx^{m-1} \frac{1}{x^m \cdot x^m} \\
 &= -mx^{-m-1}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Por tanto, la regla para potencias también es válida para exponentes enteros negativos.

Para demostrar que la regla de potencias es válida para exponentes fraccionarios, sea  $r = p/q$ , siendo  $p$  y  $q$  enteros distintos de cero. Entonces,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{p/q} - x^{p/q}}{h}. \tag{18}$$

El siguiente paso es transformar este cociente de diferencias en uno que ya hemos visto, haciendo la sustitución  $u = x^{1/q}$ , o bien  $x = u^q$ . Además, sea  $u+k = (x+h)^{1/q}$ , de modo que  $(u+k)^q = x+h$  y  $h = (u+k)^q - u^q$ . Podemos entonces reformular la ecuación 18 del siguiente modo:

$$\frac{(x+h)^{p/q} - x^{p/q}}{h} = \frac{(u+k)^p - u^p}{(u+k)^q - u^q} = \frac{[(u+k)^p - u^p]/k}{[(u+k)^q - u^q]/k}. \tag{19}$$

A continuación observemos que si  $h \rightarrow 0$ , entonces  $k \rightarrow 0$  también, y por tanto se puede sustituir un límite como  $h \rightarrow 0$  por otro como  $k \rightarrow 0$ . Por tanto, combinando las ecuaciones 18 y 19 se obtiene

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[(u+k)^p - u^p]/k}{[(u+k)^q - u^q]/k} \\
 &= \frac{\lim_{k \rightarrow 0} [(u+k)^p - u^p]/k}{\lim_{k \rightarrow 0} [(u+k)^q - u^q]/k}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

El último paso que condujo a la ecuación 20 implica el empleo del teorema 2.3.1(d) para calcular el límite de un cociente, y requiere que el límite del denominador sea diferente de cero. Sin importar que  $p$  y  $q$  sean enteros positivos o negativos, los límites

del numerador y el denominador de la ecuación 20 se han determinado antes en la demostración (véanse ecuaciones 16 y 17). En consecuencia, empleando estos resultados en la ecuación 20 tenemos que

$$f'(x) = \frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}} = \frac{p}{q} u^{p-q}. \quad (21)$$

Finalmente, reemplazamos a  $u$  por  $x^{1/q}$  y obtenemos

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{(p-q)/q} = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}, \quad (22)$$

con lo cual se completa la demostración de la regla para potencias para exponentes racionales.  $\square$

## PROBLEMAS

En los problemas del 1 al 12 emplear la definición de derivada como el límite de un cociente de diferencias para determinar la derivada de la función dada.

1.  $f(x) = x^2$
2.  $f(s) = s^{-1/2}$ ,  $s > 0$
3.  $g(x) = x^{-2}$ ,  $x \neq 0$
4.  $f(x) = 3x^2 - 2x$
5.  $g(s) = s^4 + s^2$
6.  $h(t) = t^2 - t - 2$

$$7. f(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$8. f(t) = \frac{t}{t+1}, \quad t \neq -1$$

$$9. h(u) = \frac{1}{1 + \sqrt{u}}, \quad u > 0$$

$$10. f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$11. f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$$

$$12. f(x) = 2x^2 - \frac{3}{x}, \quad x \neq 0$$

En los problemas 13 a 22 emplear la regla de potencias para calcular  $f'(x)$  para la función dada. También, definir el dominio de  $f'$  en cada caso.

$$13. f(x) = x^6$$

$$14. f(x) = x^{7/3}$$

$$15. f(x) = x^{3/7}$$

$$16. f(x) = \sqrt{x^3}, \quad x \geq 0$$

$$17. f(x) = x^{-4}, \quad x \neq 0$$

$$18. f(x) = x^{-3/7}, \quad x \neq 0$$

$$19. f(x) = x^{3/5}$$

$$20. f(x) = \sqrt[3]{x^4}$$

$$21. f(x) = x^2 \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

$$22. f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^{1/4}}{x^2}}, \quad x > 0$$

En los problemas 23 a 26, hallar una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto dado.

$$23. y = x^3, \quad (2, 8)$$

$$24. y = x^{1/3}, \quad (-8, -2)$$

$$25. y = x^{-3}, \quad (-2, -\frac{1}{8})$$

$$26. y^2 = x^3, \quad (1, 1)$$

27. Las gráficas de  $y = x^2$  y  $y = 1/x$  se intersecan en el punto  $(1, 1)$ . Determinar las ecuaciones de las tangentes a cada una de esas curvas en este punto. ¿Se intersecan estas curvas en ángulo recto?

28. Seguir las instrucciones del problema 27 para  $y = \sqrt{x}$  y  $y = 1/x^2$ , cuyas gráficas también se intersecan en  $(1, 1)$ .

29. Hallar una ecuación de la tangente a la gráfica de  $y = 1/x$  en el punto  $(\frac{1}{2}, 2)$ . A continuación determinar en dónde interseca esta tangente al eje  $x$  y al eje  $y$ .

30. Seguir las instrucciones del problema 29 para la gráfica  $y = x^{3/2}$  en el punto  $(4, 8)$ .

31. Suponer que  $f$  es una función par y que  $f'(1) = 2$ . Calcular  $f'(-1)$ . Si  $a > 0$  y  $f'(a) = b$ , determinar  $f'(-a)$ .

32. Suponer que  $f$  es función impar y que  $f'(1) = 2$ . Calcular  $f'(-1)$ . Si  $a > 0$  y  $f'(a) = b$ , determinar  $f'(-a)$ .
33. La recta  $x - 6y + 9 = 0$  es tangente a la gráfica de  $y = \sqrt{x}$ . Localizar el punto de tangencia.
34. La recta  $8x - 3y = 16$  es tangente a la gráfica de  $y = x^{4/3}$ . Localizar el punto de tangencia.
35. Demostrar que no hay rectas que sean tangentes a la parábola  $y = x^2$  que sean paralelas entre sí.
36. La recta  $4x + y = -4$  es tangente a la parábola  $y = x^2$  en el punto  $(-2, 4)$ . Hallar una ecuación de otra recta tangente a esta curva que sea perpendicular a la recta dada, y localizar su punto de tangencia a la parábola.

En los problemas 37 a 40,

- (a) Determinar  $f'(x)$  para toda  $x \neq 0$ ;
- (b) Formar el cociente de diferencias para  $x = 0$  y emplearlo para determinar si existe  $f'(0)$ ;
- (c) Hacer un esquema de las gráficas de  $y = f(x)$  y  $y = f'(x)$ .
37.  $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$
38.  $f(x) = \begin{cases} x^{2/3}, & x < 0 \\ x^{4/3}, & x \geq 0 \end{cases}$
39.  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$
40.  $f(x) = |x|^3$

## 3.2 EL ÁLGEBRA DE LAS DERIVADAS

El objeto principal de esta sección es desarrollar reglas para derivar sumas, restas, múltiplos, productos y cocientes de funciones. En determinados aspectos, los resultados son semejantes a los del teorema 2.3.1 acerca de los límites de estas combinaciones de funciones.

### Teorema 3.2.1

Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  son derivables en el punto  $x$  y que  $\alpha$  es una constante. Entonces las funciones  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $\alpha f$ ,  $fg$  y (siempre que  $g(x) \neq 0$ )  $f/g$  también son derivables en  $x$ . Además

$$(a) [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x). \quad (1)$$

$$(b) [\alpha f(x)]' = \alpha f'(x), \quad \text{para toda } \alpha \text{ constante.} \quad (2)$$

$$(c) [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{regla para el producto}) \quad (3)$$

$$(d) [f(x)/g(x)]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ si } g(x) \neq 0 \text{ (regla para el cociente)} \quad (4)$$

Combinando las partes (a) y (b) del teorema 3.2.1 se obtiene el útil corolario

$$\begin{aligned} [\alpha f(x) + \beta g(x)]' &= [\alpha f(x)]' + [\beta g(x)]' \\ &= \alpha f'(x) + \beta g'(x), \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes arbitrarias. Si se aplica repetidamente la ecuación 5



podemos ampliar este resultado a cualquier número finito de términos. De igual modo, la aplicación repetida de la ecuación 3 produce una fórmula para la derivada del producto de cualquier número finito de factores (véanse problemas 41 y 42).

Las ecuaciones 1, 2 y 5 tienen la misma forma que las ecuaciones correspondientes para los límites y, por tanto, son lo que normalmente se debiera esperar. Sin embargo, las ecuaciones 3 y 4 no siguen comportamiento alguno establecido hasta ahora, y en especial no se asemejan a los resultados correspondientes para los límites de productos y cocientes. Precisamente por lo inesperado, vale la pena describir con cuidado las demostraciones de estos resultados. Demostraremos después en esta sección todas las partes del teorema 3.2.1, pero mientras tanto, en los siguientes ejemplos indicaremos cómo nos ayuda en el cálculo de las derivadas.

### EJEMPLO 1

Si  $f(x) = 3x^2 + 2x^{1/3}$ , determinar  $f'(x)$ .

Mostrando todos los pasos, tenemos que

$$\begin{aligned}(3x^2 + 2x^{1/3})' &= (3x^2)' + (2x^{1/3})' \\ &= 3(x^2)' + 2(x^{1/3})' \\ &= 3(2x) + 2(\tfrac{1}{3}x^{-2/3}) \\ &= 6x + \tfrac{2}{3}x^{-2/3}, \quad x \neq 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Nótese que para alcanzar este resultado hemos empleado sucesivamente la ecuación 1, la ecuación 2 y la regla para potencias. Con un poco de práctica podremos saltarnos después la mayor parte de los pasos intermedios, para simplemente escribir el resultado casi de inmediato. ■

### EJEMPLO 2

Si  $y = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 5$ , determinar  $y'$ .

Procediendo como en el ejemplo 1 tenemos que

$$\begin{aligned}y' &= (2x^3 - 4x^2 + 3x + 5)' \\ &= (2x^3 - 4x^2)' + (3x + 5)' \\ &= 2(x^3)' - 4(x^2)' + 3(x)' + (5)' \\ &= 2(3x^2) - 4(2x) + 3(1) + 0 \\ &= 6x^2 - 8x + 3.\end{aligned}\tag{7}$$

Nótese que mediante el empleo repetido de las ecuaciones 1 y 2 podemos derivar la función dada si derivamos por separado cada término y, a continuación, combinamos los resultados. Se puede emplear el mismo método para derivar cualquier polinomio. ■



**EJEMPLO 3**

Si  $f(x) = (2x^3 - x)(x^4 + 3x)$ , determinar  $f'(x)$ .

Hay dos modos en los que podemos proceder en este caso. En primer lugar, podemos emplear la regla para el producto para derivar a  $f$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3 - x)'(x^4 + 3x) + (2x^3 - x)(x^4 + 3x)' \\ &= (6x^2 - 1)(x^4 + 3x) + (2x^3 - x)(4x^3 + 3) \\ &= (6x^6 - x^4 + 18x^3 - 3x) + (8x^6 - 4x^4 + 6x^3 - 3x) \\ &= 14x^6 - 5x^4 + 24x^3 - 6x. \end{aligned} \quad (8)$$

O bien, podemos llevar a cabo primero la multiplicación indicada para a continuación, derivar como en el ejemplo 2:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^7 - x^5 + 6x^4 - 3x^2)' \\ &= 14x^6 - 5x^4 + 24x^3 - 6x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**EJEMPLO 4**

Determinar  $f'(x)$  si

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 1}{x^2 - 1}, \quad x \neq -1, 1. \quad (9)$$

De acuerdo con la ecuación 4, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 1)(x^3 - 4x + 1)' - (x^3 - 4x + 1)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 1)(3x^2 - 4) - (x^3 - 4x + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{(3x^4 - 7x^2 + 4) - (2x^4 - 8x^2 + 2x)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 + x^2 - 2x + 4}{(x^2 - 1)^2}, \quad x \neq -1, 1. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (10)$$

**EJEMPLO 5**

Determinar  $y'$  si

$$y = \frac{3x^2 + 7x - 6}{x}, \quad x \neq 0. \quad (11)$$

Esto se puede llevar a cabo empleando la regla para el cociente directamente para la ecuación 11. Sin embargo, es más sencillo reformular a  $y$  del siguiente modo:

$$y = 3x + 7 - 6x^{-1} \quad (12)$$

antes de derivar. De acuerdo con la ecuación 12, se obtiene inmediatamente

$$y' = 3 + 6x^{-2}, \quad x \neq 0. \blacksquare \quad (13)$$

### EJEMPLO 6

Determinar  $y'$  si

$$y = x \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{3x^{1/3}}{2 - 7x}, \quad x \neq 0, \frac{2}{7}. \quad (14)$$

De acuerdo con la ecuación 1, obtenemos primero

$$y' = [x(1 + x^{-2})]' + \left[ \frac{3x^{1/3}}{2 - 7x} \right]'. \quad (15)$$

Cada término del lado derecho de la ecuación 15 se puede calcular ahora por separado. Empleando la regla para el producto obtenemos

$$\begin{aligned} [x(1 + x^{-2})]' &= (x + x^{-1})' \\ &= 1 - x^{-2}. \end{aligned} \quad (16)$$

A continuación, de acuerdo con la regla para el cociente, encontramos que

$$\begin{aligned} \left[ \frac{3x^{1/3}}{2 - 7x} \right]' &= \frac{(2 - 7x)(3x^{1/3})' - (3x^{1/3})(2 - 7x)'}{(2 - 7x)^2} \\ &= \frac{(2 - 7x)x^{-2/3} - (3x^{1/3})(-7)}{(2 - 7x)^2} \\ &= \frac{2x^{-2/3} - 7x^{1/3} + 21x^{1/3}}{(2 - 7x)^2} \\ &= \frac{2x^{-2/3} + 14x^{1/3}}{(2 - 7x)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Combinando los resultados de las ecuaciones 15, 16 y 17 tenemos finalmente que

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2x^{-2/3} + 14x^{1/3}}{(2 - 7x)^2}, \quad x \neq 0, \frac{2}{7}. \blacksquare \quad (18)$$

Antes de proceder a la demostración del teorema 3.2.1, necesitamos un resultado preliminar, importante por sí mismo, que relaciona los conceptos de continuidad y de derivabilidad.

## EJEMPLO 7

Se tiene la función valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} \quad (19)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 3.2.1a. Esta función es continua en todo punto, en especial en  $x = 0$ .

Para todo valor de  $x$  distinto de cero es fácil demostrar que  $f$  también es derivable, y que

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad (20)$$

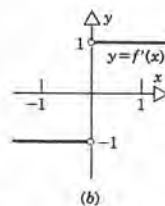
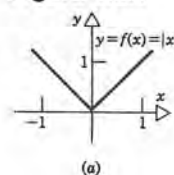
Por ejemplo, se puede obtener la ecuación 20 examinando la gráfica de  $y = f(x)$  en la figura 3.2.1a e interpretando a  $f'(x)$  como la pendiente de la tangente en el punto  $x$ . En la figura 3.2.1b se muestra la gráfica de  $f'$ . Para determinar si  $f$  es derivable en  $x = 0$ , formamos el cociente de diferencias

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} -1, & h < 0; \\ 1, & h > 0. \end{cases} \quad (21)$$

A medida que  $h \rightarrow 0$ , los límites por la derecha y por la izquierda de este cociente de diferencias son  $-1$  y  $1$ , respectivamente; como son diferentes entre sí, se concluye que la función valor absoluto *no es* derivable en  $x = 0$ . Esto refleja el hecho geométrico de que la gráfica de  $y = |x|$  tiene una “esquina” en el origen, en donde la pendiente cambia en forma abrupta de  $-1$  a  $1$ . ■

El ejemplo anterior muestra que una función que es continua en un punto *no necesariamente* tiene una derivada allí. Sin embargo, lo inverso es así, como lo demostraremos. En consecuencia, el conjunto de funciones continuas en un punto o en un intervalo contiene al conjunto de funciones derivables en ese punto o en ese intervalo.

Figura 3.2.1



### Teorema 3.2.2

Si  $f$  es derivable en el punto  $x$ , entonces  $f$  también es continua en  $x$ .



**Demostración.** Para demostrar el teorema 3.2.2 debemos mostrar que  $\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x)$ , o bien, en forma equivalente, que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ . Para usar la hipótesis de que existe  $f'(x)$  escribimos

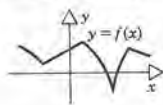
$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + [f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x) + h \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right], \quad h \neq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Ahora tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$  y empleando las partes (a), (b) y (c) del teorema 2.3.1 para hallar el límite de una suma y después de un producto, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x) + \lim_{h \rightarrow 0} h \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) + 0 \cdot f'(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por tanto,  $f$  es continua en  $x$  y la demostración queda completa.  $\square$

**Figura 3.2.2**  
Fusión continua  
que no es  
derivable de  
ningún punto



Si bien no es difícil imaginar a una función continua que no tiene derivada en un solo punto, o aun en un número finito de puntos (véase figura 3.2.2), es un hecho notable que existen funciones que son continuas en *todos* los puntos de un intervalo abierto, pero que *no tienen* derivada en punto alguno del intervalo. El primer ejemplo de una función continua que no es derivable en ninguna parte, y que fue ampliamente conocido se debió a Weierstrass\* en 1872, aunque Bolzano ya había construido otro con anterioridad. Es difícil dar aquí ejemplos de esas funciones, pero se pueden encontrar en libros de cálculo avanzado. Un poco de reflexión muestra que el trazar una gráfica de una función continua no derivable es un problema formidable, verdaderamente. La gráfica es una “curva” conexa, pero que en ningún lugar tiene pendiente ni dirección (esto es, una recta tangente). La gráfica de  $y = |x|$  tiene una “esquina” en el origen, pero la gráfica de la función de Weierstrass tiene una esquina en todos sus puntos. El descubrimiento de esta función fue una evidencia convincente de que el conjunto de las funciones continuas contiene algunos miembros muy peculiares, y que no debe uno confiar demasiado en la intuición geométrica al estudiar la continuidad y sus consecuencias.

**Demostración del teorema 3.2.1.** Presentaremos ahora una demostración de las propiedades algebraicas de las derivadas.

**Demostración de la parte (a):** Primero, consideraremos el caso de la suma en la ecuación 1. De acuerdo con la definición 3.1.1, tenemos que

\*Karl Weierstrass (1815-1897) influyó para aclarar los conceptos subyacentes del cálculo. Por ejemplo, fue él quien formuló las definiciones de límite y continuidad en términos de desigualdades y cantidades pequeñas como  $\epsilon$  y  $\delta$ . Durante varios años fue profesor de secundaria antes de ser profesor de la Universidad de Berlín a la edad de 39 años. Publicó poco, y gran parte de su trabajo se conserva sólo a través de las notas que tomaron sus estudiantes. Su construcción de una función continua, pero no derivable en punto alguno conmocionó al mundo matemático, y en 1905 comentó el conocido matemático E. Picard que “Si Newton y Leibniz hubieran sabido que una función continua no tiene necesariamente una derivada, nunca se hubiera creado el cálculo diferencial.”



$$\begin{aligned}
 [f(x) + g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right], \quad (23)
 \end{aligned}$$

siempre que exista este límite. De acuerdo con la hipótesis de que  $f$  y  $g$  son derivables en  $x$ , sabemos que cada uno de los cocientes de diferencias anteriores tiene un límite. Por tanto, de acuerdo con el teorema 2.3.1(a) podemos escribir el límite de la suma como la suma de los límites tomados por separado, y obtenemos

$$\begin{aligned}
 [f(x) + g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(x) + g'(x).
 \end{aligned}$$

La demostración para la resta en la parte (a) es semejante y se omite.

*Demostración de la parte (b):* Partiendo de la definición 3.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
 [\alpha f(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} \\
 &= \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \alpha f'(x),
 \end{aligned}$$

habiendo empleado el teorema 2.3.1(b) y la hipótesis de que  $f$  es derivable en  $x$ .

*Demostración de la parte (c):* De acuerdo con la definición 3.1.1 tenemos

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}, \quad (24)$$

siempre que exista este límite. La única información que tenemos para evaluar el límite de la ecuación 24 es que  $f$  y  $g$  son funciones derivables. Para emplear esta hipótesis debemos reformular el lado derecho de la ecuación 24 para que aparezcan los cocientes de diferencias para  $f$  y  $g$ . Esto se puede hacer empleando el recurso, común en matemáticas, de sumar primero y después restar la misma cantidad en una ecuación.\* Una vez que comenzamos a pensar en estos términos, observamos que si sumamos y restamos la cantidad  $f(x)g(x+h)$  y a continuación reagrupamos los términos de la ecuación 24, obtenemos

$$\begin{aligned}
 [f(x)g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right].
 \end{aligned}$$

A medida que  $h \rightarrow 0$ , los cocientes de las diferencias en la última expresión tienden a

\* Nótese que hemos empleado este recurso antes en la demostración del teorema 3.2.2.

$f'(x)$  y  $g'(x)$  respectivamente. Además, como  $g$  es derivable en  $x$ , también es continua allí de acuerdo al teorema 3.2.2, y por tanto  $g(x+h) \rightarrow g(x)$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Entonces, como existen todos los límites por separado, obtenemos

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\end{aligned}$$

que es el resultado que deseábamos.

Al establecer la ecuación 3 pudimos también haber sumado y restado tan sólo la cantidad  $f(x+h)g(x)$ . Como hemos mencionado, el artificio de sumar primero y después restar la misma cantidad con frecuencia es útil para simplificar un problema. De hecho, una de las razones para el estudio de las demostraciones matemáticas es adquirir destreza en las técnicas como ésta. Puede ayudar el conocimiento de varios recursos de este tipo cuando se encuentra uno con un caso poco conocido.

*Demostración de la parte (d):* Demostraremos la regla para el cociente en dos etapas. Primero demostraremos que si  $g$  es derivable en  $x$ , entonces

$$\left[ \frac{1}{g(x)} \right]' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0. \quad (25)$$

De acuerdo con la definición 3.1.1, tenemos que

$$\begin{aligned}\left[ \frac{1}{g(x)} \right]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \right],\end{aligned}$$

siempre que exista este límite. Nótese que hemos manipulado el cociente de diferencias para  $1/g$  de manera que aparezca este cociente para  $g$  de manera explícita. La hipótesis de que  $g$  es derivable en  $x$  nos asegura que el último cociente de diferencias tiene el límite  $g'(x)$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Además,  $g(x+h) \rightarrow g(x)$  cuando  $h \rightarrow 0$ , porque  $g$  es derivable y por tanto continua en  $x$ . Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned}\left[ \frac{1}{g(x)} \right]' &= -\frac{1}{g(x)} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)} \right] \\ &= -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.\end{aligned}$$

Finalmente, hacemos notar que en el argumento anterior teníamos que saber que  $g(x+h) \neq 0$  para escribir el cociente de diferencias para  $1/g$ . Sin embargo conocemos

lo anterior porque  $g(x) \neq 0$  y  $g$  es continua en  $x$ . De acuerdo con el teorema 2.6.1, entonces, al menos para  $h$  suficientemente pequeña, también  $g(x+h) \neq 0$ . Recuerdese que tuvimos el mismo caso en el ejemplo 4 de la sección. 3.1.

Para completar la demostración de la ecuación 4, escribimos  $f(x)/g(x)$  en forma de producto y a continuación empleamos la ecuación 3 y la ecuación 25. Se obtiene

$$\begin{aligned}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right]' \\&= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left[\frac{1}{g(x)}\right]' \\&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\&= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Con esto se completa la demostración del teorema 3.2.1.  $\square$

## PROBLEMAS

Determinar  $f'(x)$  en los problemas 1 a 20.

1.  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

2.  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 7$

3.  $f(x) = 4x^3 + 7x^3 - 6x$

4.  $f(x) = x^8 - 4x^4 + 1$

5.  $f(x) = (2x^2 + 1)^2$

6.  $f(x) = (x^3 + 6x + 1)(x^2 - 1)$

7.  $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x + 3)$

8.  $f(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1)^2$

9.  $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$

10.  $f(x) = (x - 2)(2x^2 + 3)$

11.  $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x - 5}{x^2}, \quad x \neq 0$

12.  $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x + 3}, \quad x \neq -3$

13.  $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6}, \quad x \neq 2, 3$

14.  $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

15.  $f(x) = 3x^2 + x^{4/3} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}, \quad x \neq 0$

16.  $f(x) = x^{7/2} + 3x^{1/3} + x^{-2/3}, \quad x > 0$

17.  $f(x) = \frac{x^{3/2}}{x + 1}, \quad x \geq 0$

18.  $f(x) = \frac{x^{2/5} - x^{5/2}}{x^2 + 1}, \quad x \geq 0$

19.  $f(x) = 3x + (x^{1/3} + 1)(x^{2/3} - 1) + \frac{7x}{1 + x^2}$

20.  $f(x) = 2x^3 + \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} + x^2(1 + x^{4/3})$

21. Sea  $y = f(x) = x^2 - 6x + 2$ .

(a) Determinar  $y'$

(b) Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto  $(1, -3)$ .

(c) Localizar el punto de la gráfica de  $y = f(x)$  en el que la tangente tiene la pendiente cero. ¿Qué relación tiene este punto con otros en la gráfica? Su-



## 140 LA DERIVADA

*gerencia:* hacer un esquema de la curva y la tangente en cuestión.

22. Sea  $y = f(x) = -x^2 + 4x + 7$ .

- (a) Determinar  $y'$ .
- (b) Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto  $(1, 10)$ .
- (c) Localizar el punto de la gráfica de  $y = f(x)$  en el que la tangente tiene la pendiente cero. ¿Qué relación tiene este punto con los demás de la gráfica? *Sugerencia:* hacer un esquema de la curva y la tangente en cuestión.

23. Sea  $y = f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ .

- (a) Determinar  $y'$ .
- (b) Localizar los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  es horizontal.
- (c) Localizar los puntos de la gráfica de  $y = f(x)$  en los que alcanza sus valores máximo y mínimo, respectivamente. *Sugerencia:* hacer un esquema de la gráfica de  $y = f(x)$ .

24. Sea  $y = f(x) = x^2 - 4x - 7$ .

- (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto  $(-2, 5)$ .
- (b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular (normal) a la línea tangente en  $(-2, 5)$ .

25. Las gráficas de  $y = x^2 - 3x - 1$  y  $y = \sqrt{x} + 1$  se intersecan en el punto  $(4, 3)$ .

- (a) Hallar la ecuación de las rectas tangentes a las curvas en su punto de intersección.
- (b) Calcular la tangente del ángulo agudo formado en  $(4, 3)$  por las dos rectas determinadas en la parte (a).

26. Sea  $y = 1 + x^2$ . Determinar todos los puntos de esta curva para los cuales la tangente pasa por el origen.

27. Sea  $y = 5 + x - 2x^2$ . Determinar todos los puntos de esta curva para los cuales la tangente pasa por el punto  $(-1, 10)$ .

28. Determinar los puntos de la curva  $y = x^2 - 3x + 7$  para los cuales la recta tangente es paralela a la recta  $y - 5x = 4$ .

29. Determinar todos los puntos de la curva  $y = x^3 + 2x^2 - 6x + 4$  para los cuales la recta tangente es paralela a la recta  $2x + y = 3$ .

30. Determinar los puntos de la curva  $y = x^3 + 2x^2 - 6x - 6$  para los cuales la recta tangente es perpendicular a la recta  $x + 2y = 4$ .

31. Por el punto  $(4, 7)$  pasan dos rectas que son tangentes a la parábola  $y = x^2$ . Hallar una ecuación de cada una de las rectas y determinar los puntos de tangencia.

32. El punto  $P(a, b)$  queda bajo la parábola  $y = x^2$ ; por tanto  $b < a^2$ . Demostrar que hay dos rectas que pasan por  $P$  que son tangentes a la parábola, y calcular sus pendientes.

33. La posición de una partícula que se mueve en línea recta está dada por

$$s = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 15t + 4,$$

estando  $s$  en pies y  $t$  en segundos.

(a) Determinar todos los valores de  $t$  para los cuales la velocidad  $v$  tiene el valor de 9 ft/seg.

(b) Calcular el valor del tiempo en el que la partícula tiene la menor velocidad.

34. Un objeto que se deja caer partiendo del reposo, en el vacío, recorre una distancia  $s = gt^2/2$  en un tiempo  $t$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad. Suponer que  $g = 32$  ft/seg<sup>2</sup>.

(a) Calcular el tiempo en el que el objeto alcanza una velocidad de 128 ft/seg.

(b) Si el objeto se deja caer de una altura de 128 pies, calcular la velocidad con la cual choca con el piso.

35. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2; \\ ax + b, & x > 2. \end{cases}$$

Determinar  $a$  y  $b$  de modo que  $a$  sea derivable en  $x = 2$ .

36. Sea

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x}, & x \leq 1; \\ x + b, & x > 1. \end{cases}$$

Determinar  $a$  y  $b$  de modo que  $f$  sea derivable en  $x = 1$ .

37. Determinar la razón de cambio del área  $A$  de un círculo con respecto a su radio  $r$ .

38. Determinar la razón de cambio del volumen  $V$  de una esfera con respecto a su radio  $r$ .

39. Expresar el volumen  $V$  de un cubo en términos del área de su superficie  $S$  y determinar la razón de cambio de  $V$  con respecto a  $S$ .



40. Expresar el volumen  $V$  de una esfera en términos del área de su superficie  $S$  y determinar la razón de cambio de  $V$  con respecto a  $S$ .

41. (a) Hallar una fórmula para la derivada de tres funciones. Esto es, si  $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ , siendo  $u$ ,  $v$  y  $w$  funciones derivables, expresar  $f'(x)$  en términos de  $u(x)$ ,  $v(x)$  y  $w(x)$ , y de sus respectivas derivadas  $u'(x)$ ,  $v'(x)$  y  $w'(x)$ .

(b) Demostrar que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{w'(x)}{w(x)}.$$

\*42. Generalizar el resultado del problema 41 a  $n$  funciones. En particular, demostrar que si

$$f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x),$$

siendo  $u_1, u_2, \dots, u_n$  funciones derivables, entonces

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{u_1'(x)}{u_1(x)} + \frac{u_2'(x)}{u_2(x)} + \cdots + \frac{u_n'(x)}{u_n(x)}.$$

*Sugerencia:* una demostración formal emplea el principio de inducción matemática (ver sección. 6.1). Si el lector no está familiarizado con demostraciones por inducción, dar un argumento más informal.

43. Emplear el resultado del problema 42 para determinar  $f'(x)$  si  $f(x) = [u(x)]^n$ .

44. Deducir la regla para el producto, ecuación 3, sumando y restando la cantidad  $f(x+h)g(x)$  en el cociente de diferencias en la ecuación 24.

### 3.3 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR Y ANTIDERIVADAS

Desde luego, es posible aplicar el proceso de derivación a una función que en sí misma es derivada de otra función. La derivada de  $f'$  es  $(f')'$  y en general se escribe  $f''$ ; su valor en el punto  $x$  es

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}. \quad (1)$$

A la función  $f'$  se le llama la primera derivada de  $f$ , y a la función  $f''$  la *segunda* derivada, porque se obtuvo derivando por segunda vez. También se pueden determinar derivadas de orden mayor. Por ejemplo, la derivada de  $f''$  es  $f'''$ , la *tercera* derivada de  $f$ . En general, la  $n$ -ésima derivada de  $f$ , obtenida al derivar  $n$  veces sucesivas a  $f$ , se denota mediante  $f^{(n)}$ . Es importante recordar que la  $n$  entre paréntesis no es exponente, sino un indicador del número de derivaciones que se han de llevar a cabo.

#### EJEMPLO 1

Determinar las primeras tres derivadas de  $f$  si

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{x} - x^{2/3}, \quad x \neq 0.$$

Mediante la regla para potencias y las propiedades algebraicas de las derivadas se ve que

$$f'(x) = 4x^3 - 4x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}x^{-1/3}, \quad x \neq 0$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{9}x^{-4/3}, \quad x \neq 0$$

y finalmente

$$f'''(x) = 24x - \frac{6}{x^4} - \frac{8}{27}x^{-7/3}, \quad x \neq 0. \blacksquare$$

## EJEMPLO 2

Si

$$y = \frac{x}{x+1}, \quad x \neq -1,$$

determinar  $y'$  y  $y''$ .

Con la regla para el cociente, teorema 3.2.1(d) obtenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x+1)(x)' - x(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1. \end{aligned}$$

Para determinar a  $y''$  podemos emplear ya sea la regla para el cociente de nuevo, o bien la ecuación 25 de la sección 3.2 con  $g(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ . Entonces

$$y'' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\frac{2x+2}{(x+1)^4} = -\frac{2}{(x+1)^3}, \quad x \neq -1. \blacksquare$$

Las derivadas de orden mayor que el primero también tienen interpretaciones físicas o geométricas. Después las describiremos con más detalle, pero en esta ocasión mencionaremos un ejemplo. Si

$$s = f(t) \tag{2}$$

proporciona la posición de un objeto en movimiento como función del tiempo, entonces su velocidad está dada por

$$v = f'(t). \tag{3}$$

La derivada  $v'$  de la velocidad con respecto al tiempo es la **aceleración** y se indica con una  $a$ . Así,

$$a = v' = s'' = f''(t), \quad (4)$$

y por tanto la segunda derivada con respecto al tiempo, de la posición de un objeto en movimiento, da la aceleración de éste.

### Notación de operador para las derivadas

Normalmente se emplean al menos tres notaciones diferentes para representar las derivadas. Cada una tiene sus ventajas en casos diferentes; para emplear con mayor eficacia el cálculo, el estudiante debe familiarizarse con las tres. Ya hemos empleado la notación de “primas”, que introdujo Lagrange, según la cual  $f'$  es la derivada de  $f$ ,  $g'$  es la derivada de  $g$ , etcétera.

Una segunda notación es la que emplea la letra  $D$  para indicar derivación. Según esta notación,  $Df$  es la derivada de la función  $f$ , y  $Df(x)$  es el valor de  $Df$  en el punto  $x$ . Así,  $Df$  y  $Df(x)$  son lo mismo que  $f'$  y  $f'(x)$ , respectivamente. Si se habla de varias variables, a veces se usa un subíndice para indicar la variable implicada en determinada derivación, por ejemplo  $D_x f$  o  $D_x f(x)$ . La tercera notación, debida a Leibniz, se describe en la sección 3.4.

En términos de la notación con  $D$ , la regla para potencias toma la forma

$$D(x^r) = rx^{r-1}, \quad (5)$$

y las propiedades algebraicas de las derivadas se pueden expresar como sigue:

$$D(f \pm g) = Df \pm Dg, \quad (6)$$

$$D(\alpha f) = \alpha Df, \quad (7)$$

$$D(fg) = fDg + gDf, \quad (8)$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}, \quad g \neq 0. \quad (9)$$

La segunda derivada de  $f$  es  $D(Df)$  o  $D^2f$ . De igual modo, las derivadas de tercer orden y órdenes superiores se indican con  $D^3f$ ,  $D^4f$ ,  $\dots$ ,  $D^n f$ , etcétera.

La notación  $D$  destaca que la derivación es un proceso u operación que se lleva a cabo en una función. Así, a veces se habla de  $D$  como el **operador de derivación**: se toma una función  $f$  y opera sobre ella, o la transforma, en una nueva función  $Df$ . En especial, si  $f$  y  $g$  son funciones derivables y si  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes cualesquiera, entonces, como hemos visto por la ecuación 5 de la sección 3.2,

$$D[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha Df(x) + \beta Dg(x). \quad (10)$$

Cualquier operador o transformación que tenga la propiedad expresada por la ecuación 10 se llama *lineal*; así, el operador  $D$  de derivación es *operador lineal*. Los operadores o transformaciones lineales desempeñan un papel muy importante en la matemática.



**EJEMPLO 3**

Determinar  $Df(x)$  y  $D^2f(x)$  si

$$f(x) = 2x^3 + x^{-1/2}, \quad x > 0.$$

Empleando las ecuaciones 6 y 7 junto con la regla para potencias, se obtiene

$$Df(x) = 6x^2 - \frac{1}{2}x^{-3/2}, \quad x > 0,$$

y

$$D^2f(x) = 12x + \frac{3}{4}x^{-5/2}, \quad x > 0. \blacksquare$$

**EJEMPLO 4**

Determinar  $D^n(x^n)$ , en donde  $n$  es entero positivo.

Empleando la regla para potencias, tenemos que

$$D(x^n) = nx^{n-1},$$

$$D^2(x^n) = n(n-1)x^{n-2},$$

$$D^3(x^n) = n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

y en general

$$\begin{aligned} D^n(x^n) &= n(n-1)(n-2) \cdots [n-(n-1)]x^{n-n} \\ &= n!. \end{aligned} \tag{11}$$

Como  $n!$  es una constante, por tanto

$$D^{n+1}(x^n) = 0 \tag{12}$$

para toda  $x$ . Además, de acuerdo con la ecuación 12, si  $P$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces sus derivadas  $(n+1)$ -ésima y las de orden mayor son cero dondequiera.  $\blacksquare$

**Antiderivadas**

Hasta ahora nos hemos ocupado del problema de determinar la derivada  $f'$  de una función dada  $f$ . Sin embargo, en la práctica, con frecuencia nos encontramos con el problema precisamente contrario: dada la derivada  $f'$ , determinar la función  $f$ . En una terminología ligeramente distinta, dada una función  $g$  definida en un intervalo abierto, determinar una función  $f$  tal que  $f' = g$ , ó  $Df = g$  en este intervalo. Se dice que esta función  $f$ , cuya derivada es  $g$ , es una **antiderivada** de  $g$ . Se emplea la notación  $D^{-1}$ , y se lee “ $D$ -inversa”, para denotar a las antiderivadas. Así,



$$\text{si } Df = g, \quad \text{entonces} \quad f = D^{-1}g. \quad (13)$$

Por ejemplo,

$$D^{-1}(x^2) = \frac{x^3}{3}, \quad (14)$$

ya que  $D(x^3/3) = x^2$ . Sin embargo, nótese que  $x^3/2$  no es la única antiderivada de  $x^2$ . Por ejemplo, las funciones  $(x^3/3) + 5$ ,  $(x^3/3) - 3$  y, en general

$$\frac{x^3}{3} + c,$$

en la que  $c$  es una constante arbitraria, también son antiderivadas de  $x^2$ . Esto es, cada una de esas funciones tiene a  $x^2$  como su derivada. En general, si  $f$  es una antiderivada de  $g$ , entonces  $f + c$  también es una antiderivada para toda constante  $c$ . Así, mientras que una función derivable tiene exactamente una derivada, una función dada tiene más de una antiderivada, suponiendo que tiene alguna.

Es posible demostrar que *todas* las antiderivadas de  $g$  tienen la forma  $f + c$ , siendo  $Df = g$ . Sin embargo, este resultado necesita de más apoyo teórico y se establece en el teorema 4.1.5 más adelante. Por el momento, aceptando este hecho, vemos que para determinar una antiderivada de una función  $g$  sólo necesitamos determinar una función  $f$  tal que  $Df = g$ ; a continuación, se obtienen todas las antiderivadas posibles de  $g$  sumando constantes a  $f$ .

Otros ejemplos de antiderivadas son

$$D^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x} + c, \quad (15)$$

$$D^{-1}(x - x^{1/3}) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{4/3} + c, \quad (16)$$

y en forma más general,

$$D^{-1}(x^r) = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1. \quad (17)$$

La restricción de que  $r \neq -1$  en la ecuación 17 quiere decir que esta ecuación no da una antiderivada para la función  $1/x$ . Esta función sí tiene una antiderivada, pero no es la que se obtiene por alguna función que hayamos considerado hasta ahora. Las fórmulas de antiderivación que corresponden a las ecuaciones 6 y 7, que son

$$D^{-1}(f \pm g) = D^{-1}f \pm D^{-1}g, \quad (18)$$

$$D^{-1}(\alpha f) = \alpha D^{-1}f, \quad (19)$$

respectivamente, son especialmente útiles. Por ejemplo, la ecuación 18 dice que la antiderivada de  $f \pm g$  se puede determinar encontrando por separado las antiderivadas de  $f$  y  $g$ , y formando a continuación su suma o su resta, según el caso. La deducción de las ecuaciones 18 y 19 se indica en el problema 36.

Para una función  $g$  dada, las gráficas de sus antiderivadas

$$y = f(x) + c$$

constituyen una familia de curvas “paralelas” en el plano  $xy$  (véase figura 3.3.1). Para identificar a una determinada antiderivada, con frecuencia se especifica un punto  $(x_0, y_0)$  por el cual pasa.

### EJEMPLO 5

Si  $g(x) = x^2$ , determinar la antiderivada de  $g$  cuya gráfica contiene el punto  $(1, 2)$ .

Anteriormente hemos llamado la atención hacia el hecho de que las antiderivadas de  $x^2$  son de la forma  $(x^3/3) + c$ . Por tanto, entre todas las curvas de la familia

$$y = \frac{x^3}{3} + c, \quad (20)$$

debemos encontrar una que pase por el punto  $(1, 2)$  (véase figura 3.3.2). Sustituyendo  $x = 1$  y  $y = 2$  en la ecuación 20, se deduce que

$$2 + \frac{1}{3} = c, \quad \text{y por tanto } c = \frac{5}{3}.$$

Entonces

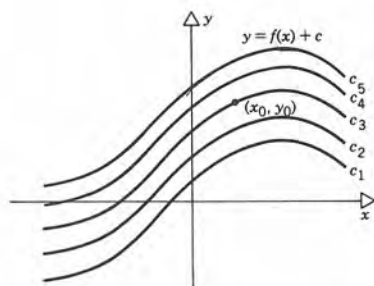
$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{x^3 + 5}{3} \quad (21)$$

es la antiderivada que se buscaba; es la única que pasa por  $(1, 2)$ . ■

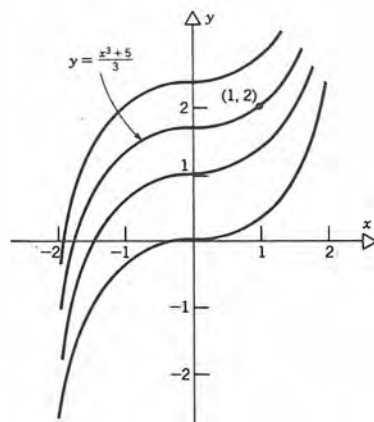
### EJEMPLO 6

Supongamos que una partícula de masa  $m$  se arroja en dirección vertical hacia arriba desde la superficie de la tierra, con una velocidad inicial  $v_0$ . Suponer que la atracción gravitacional de la tierra es constante, y no tomar en cuenta la resistencia del aire y las demás fuerzas que actúan sobre la partícula. Determinar la posición  $s$  de la partícula en el tiempo  $t$ , y determinar también la altura máxima que alcanza la partícula.

La posición  $s$  es positiva cuando se mide hacia arriba teniendo el origen del eje  $s$  en la posición inicial de la partícula, como se ve en la figura 3.3.3. Entonces la velocidad



**Figura 3.3.1** Una familia de antiderivadas.



**Figura 3.3.2** Gráficas de  $y = (x^3/3) + c$ .

$v = s'$  es positiva cuando la partícula se mueve hacia arriba, y negativa cuando cae. De acuerdo con la ley de movimiento, de Newton, la fuerza externa que obra sobre la partícula es igual al producto de la masa  $m$  por la aceleración  $a$  de la partícula, esto es,

$$F = ma. \quad (22)$$

Como hemos hecho notar en la ecuación 4,  $a = v'$ . Además, en este caso, la única fuerza externa es la atracción gravitacional de la tierra, o sea el peso de la partícula. Así,  $F = -mg$ , en donde  $g$  es la aceleración\* debida a la gravedad, y se escoge el signo menos porque esta fuerza actúa en la dirección hacia abajo (negativa). Sustituyendo  $F$  y  $a$  en la ecuación 22, vemos que la velocidad  $v$  debe satisfacer

$$v' = -g. \quad (23)$$

Y por tanto,

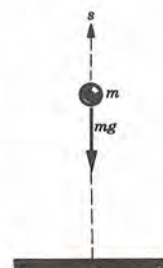
$$v = -gt + c_1, \quad (24)$$

en la cual  $c_1$  es constante. Como  $v = v_0$  cuando  $t = 0$ , tenemos que  $c_1 = v_0$  y por tanto

$$v = -gt + v_0. \quad (25)$$

Poniendo  $s'$  en lugar de  $v$ , y despejando a  $s$  en la ecuación 25, se tiene

\* Para los fines de este texto, es suficiente suponer que  $g = 32 \text{ ft/s}^2$  ó  $9.8 \text{ m/s}^2$ .



**Figura 3.3.3** Acción de la gravedad sobre una masa puntual.



$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + c_2, \quad (26)$$

en la cual  $c_2$  es otra constante. Sin embargo,  $s = 0$  cuando  $t = 0$  y por tanto  $c_2 = 0$ . Con ello obtenemos el resultado

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t. \quad (27)$$

Si no se perturba a la partícula en su trayectoria, regresará a su punto de partida en la superficie terrestre cuando  $s = 0$ , esto es, cuando  $t = 2v_0/g$ . Así, la ecuación 27 es válida sólo cuando  $t$  está en  $[0, 2v_0/g]$ . Vemos, de acuerdo con la ecuación 25, que  $v > 0$  cuando  $t < v_0/g$  y que  $v < 0$  cuando  $t > v_0/g$ . Por tanto, la partícula detiene su ascenso cuando  $t = v_0/g$ , alcanzando así su altura máxima en este tiempo. Sustituyendo  $t = v_0/g$  en la ecuación 27, encontramos que

$$s_{\text{máx}} = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (28)$$

que es la altura máxima que alcanza la partícula. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 determinar la derivada que se pide de la función indicada.

1.  $f''(x)$  si  $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 4)$

2.  $D^3y$  si  $y = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 2x + 8$

3.  $D^2f(x)$  si  $f(x) = x^{1/3} - \frac{1}{x^2}$ ,  $x \neq 0$

4.  $f'''(x)$  si  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ ,  $x \neq 0$

5.  $y'''$  si  $y = \frac{1 + x^{-2/3}}{x}$ ,  $x \neq 0$

6.  $D^8y$  si  $y = \frac{(x^3 + 2x^2 - 6x + 1) \cdot (2x^3 + 5x - 7)}{(2x^3 + 5x - 7)}$

7.  $y''$  si  $y = x^4 - 3x^2 + 6$

8.  $f''(x)$  si  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ,  $x \neq -2$

9.  $y'''$  si  $y = x^2 + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$

10.  $D^2f(x)$  si  $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ ,  $x \neq 3$

En los problemas 11 a 20, determinar la antiderivada que se pide.

11.  $D^{-1}(x - 4)$

12.  $D^{-1}(3x^2 - x + 6)$

13.  $D^{-1}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

14.  $D^{-1}(x^6 - 3x^3 + 6)$

15.  $D^{-1}(3x^{2/3} - 4x^{1/3})$

16.  $D^{-1}[(x+1)(x-2)]$

17.  $D^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

18.  $D^{-1}\left[\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]$

19.  $D^{-1}\left[\left(\frac{1}{2+x}\right)^2\right]$

20.  $D^{-1}\left[-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x}+x)}\right]$

En los problemas 21 a 26, determinar la función  $f$  que satisface las condiciones indicadas.

21.  $f'(x) = 2x - 3$ ;  $f(0) = 4$

22.  $f'(x) = 3x^2 + x - 7$ ;  $f(1) = -2$

23.  $f'(x) = 4x^3 - 2x$ ;  $f(2) = 4$

24.  $f'(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ,  $x < 0$ ;  $f(-1) = 1$

25.  $f'(x) = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ ;  $f(1) = 1$

26.  $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $x > 0$ ;  $f(2) = 0$

27. Hallar un polinomio  $P$  de segundo grado tal que  $P(2) = 1$ ,  $P'(0) = -3$  y  $P''(4) = 6$ .

28. Hallar un polinomio  $P$  de tercer grado tal que  $P(0) = 4$ ,  $P'(-1) = 2$ ,  $P'(2) = 5$  y  $P''(1) = -5$ .

En los problemas 29 a 32 suponer que prevalecen las condiciones del ejemplo 6, esto es, que la atracción gravitacional es constante y que no se consideran otras fuerzas, en especial la resistencia del aire.

29. Se deja caer una piedra desde la orilla de una barranca y llega al suelo 3 segundos después. ¿Qué altura tiene la barranca?

30. ¿Desde qué altura debe caer un objeto para llegar al piso con una velocidad de 60 mi/hr?

31. Se arroja hacia arriba una pelota cuya masa es de 0.25 kg, con una velocidad inicial de 20 m/seg, desde el techo de un edificio, a 30 m de altura.

(a) Calcular la altura máxima sobre el piso, a la que llega la pelota.

(b) Suponiendo que la pelota no cae en el edificio cuando va hacia abajo, calcular el tiempo que pasa hasta que llega al suelo.

32. Se lanza una partícula verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un elevador. Su velocidad inicial es 50 ft/seg. En el mismo instante el elevador inicia un descenso a velocidad uniforme de 10 ft/seg hacia abajo. Calcular el tiempo en el que la partícula pega al techo del elevador.

33. Demostrar que  $(f'g - fg')' = f''g - fg''$ .

34. Suponiendo que  $f$  y  $g$  son derivables el número necesario de veces, demostrar que

(a)  $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$ .

(b)  $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$ .

\*35. Los resultados del problema 34 sugieren que

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + n f^{(n-1)}g' + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}, \quad (i)$$

en donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (ii)$$

es el coeficiente de  $a^{n-k}b^k$  en  $(a+b)^n$ . A la ecuación (i) se le conoce como regla de Leibniz. Llevar a cabo la demostración mediante inducción matemática. *Sugerencia:* si el lector no está familiarizado con las demostraciones por inducción, consulte la sección 6.1.

\*36. (a) Para deducir la ecuación 18 a partir de la ecuación 6, obsérvese que esta última ecuación es equivalente a

$$f + g = D^{-1}(Df + Dg).$$

A continuación hagamos  $Df = u$ , y  $Dg = v$ . Demostrar entonces que

$$D^{-1}u + D^{-1}v = D^{-1}(u + v),$$

que es la misma ecuación que la 18, a excepción de los símbolos de las funciones.

(b) Emplear un argumento semejante al de la parte (a) para deducir la ecuación 19 a partir de la ecuación 7.

(c) Demostrar que

$$D^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha D^{-1}u + \beta D^{-1}v$$

para cualquier constante  $\alpha$  y  $\beta$ . Por tanto,  $D^{-1}$  también es un operador lineal.

## 3.4 APROXIMACIONES LINEALES

El propósito principal de esta sección es el de mostrar cómo es que el concepto de derivación conduce naturalmente a la idea de aproximar una función dada  $y = f(x)$  mediante una función  $y = ax + b$  en la vecindad de algún punto dado. En otras palabras,

cerca del punto dado, aproximamos la gráfica de la función  $f$  mediante una recta. A este tipo de aproximación se le llama aproximación lineal y tiene muchos usos importantes, tanto en la teoría como en la aplicación de las matemáticas.

Recuérdese que para una función dada  $y = f(x)$  derivable en  $x = x_0$ , podemos trazar la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  como se ve en la figura 3.4.1. Esta tangente tiene la ecuación

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

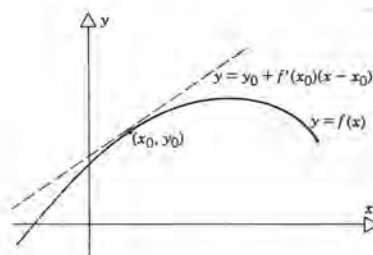


Figura 3.4.1

De este modo, hemos definido una nueva función, la función recta tangente, definida por

$$\begin{aligned} T(x; x_0) &= y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned} \quad (2)$$

La notación  $T(x; x_0)$  indica que  $T$  depende tanto de la variable independiente  $x$  como del punto de tangencia.

Para investigar qué tan bien se aproxima  $T$  a  $f$ , investigaremos la diferencia  $f(x) - T(x; x_0)$ . A esta diferencia se le llama **residuo** y es conveniente escribirlo en la forma  $r(x; x_0)(x - x_0)$ . Así, tenemos que

$$f(x) - T(x; x_0) = r(x; x_0)(x - x_0). \quad (3)$$

La ecuación 3 sirve para definir la función  $r$ , a la que llamaremos la **función residuo**.

## EJEMPLO 1

Se tiene la función

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 2) \quad (4)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 3.4.2. Para  $x_0 = 1$ , determinar la función recta tangente  $T$  y la función residuo  $r$ ; investigar el comportamiento de  $r(x; 1)$  cuando  $x \rightarrow 1$ .



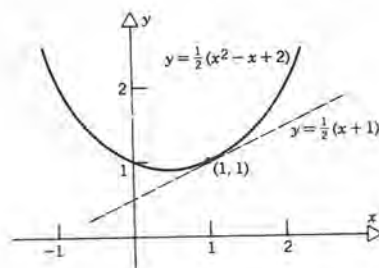


Figura 3.4.2

Como  $f'(x) = x - \frac{1}{2}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} T(x; 1) &= f(1) + f'(1)(x - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}(x + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Esta función se puede emplear para aproximar a  $f(x)$  en la vecindad de  $x = 1$ ; por ejemplo,

$$T\left(\frac{9}{8}; 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{8} + 1\right) = \frac{17}{16}$$

es una aproximación al valor real

$$f\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2 - \frac{9}{8} + 2\right] = \frac{137}{128}.$$

El residuo es en este caso

$$f\left(\frac{9}{8}\right) - T\left(\frac{9}{8}; 1\right) = \frac{137}{128} - \frac{17}{16} = \frac{1}{128}.$$

Para un valor arbitrario de  $x$  el residuo es

$$\begin{aligned} f(x) - T(x; 1) &= \frac{1}{2}(x^2 - x + 2) - \frac{1}{2}(x + 1) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) \\ &= \frac{1}{2}(x - 1)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación 3, la función residuo  $r(x; 1)$  es

$$r(x; 1) = \frac{1}{2}(x - 1). \quad (7)$$

Claramente,  $r(x; 1) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 1$ ; como resultado de ello, el residuo  $r(x; 1)(x - 1)$  tiende a cero más rápidamente que el propio  $x - 1$  cuando  $x \rightarrow 1$ . ■

Los resultados presentados en el ejemplo 1 para la función  $f(x) = (x^2 - x + 2)/2$  son típicos del caso de cualquier función derivable.

**Teorema 3.4.1**

Si  $f$  es derivable en  $x_0$ , entonces

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x; x_0)(x - x_0), \quad (8)$$

en la cual

$$r(x; x_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad x \rightarrow x_0. \quad (9)$$

**Demostración.** Obsérvese que se obtiene la ecuación 8 sustituyendo la ecuación 2 en la ecuación 3. A continuación, para  $x \neq x_0$  podemos reformular la ecuación 8 para que quede en la forma siguiente.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + r(x; x_0). \quad (10)$$

Como  $f$  es derivable en  $x_0$ , el lado izquierdo de la ecuación 10 tiende a  $f'(x_0)$  cuando  $x \rightarrow x_0$ , y por consiguiente  $r(x; x_0) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow x_0$ , que es lo que se tenía que demostrar.  $\square$

A veces es útil enunciar el teorema 3.4.1 en una forma ligeramente distinta. Si hacemos que  $x - x_0 = h$ , entonces la ecuación 8 se transforma en

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = [f'(x_0) + \bar{r}(h; x_0)]h, \quad (11)$$

en la cual  $\bar{r}(h; x_0) = r(x_0 + h; x_0)$  y  $\bar{r}(h; x_0) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

**EJEMPLO 2**

Para la función  $f(x) = (x^2 - x + 2)/2$  del ejemplo 1, determinar la función recta tangente  $T(x; x_0)$  y la función residuo  $r(x; x_0)$  para algún valor arbitrario de  $x_0$ .

Tenemos que

$$f(x_0) = \frac{x_0^2 - x_0 + 2}{2}, \quad f'(x_0) = x_0 - \frac{1}{2}.$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación 2,

$$\begin{aligned} T(x; x_0) &= \frac{1}{2}(x_0^2 - x_0 + 2) + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)(x - x_0) \\ &= 1 - \frac{x_0^2}{2} + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)x. \end{aligned} \quad (12)$$

Entonces, el residuo es

$$\begin{aligned} f(x) - T(x; x_0) &= \frac{x^2 - x + 2}{2} - \left(1 - \frac{x_0^2}{2}\right) - \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)x \\ &= \frac{x^2}{2} - x_0x + \frac{x_0^2}{2} \\ &= \frac{(x - x_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

y de acuerdo con la ecuación 3,

$$r(x; x_0) = \frac{x - x_0}{2}. \quad (13)$$

De nuevo, como pide el teorema 3.4.1,  $r(x; x_0) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow x_0$ . ■

Emplearemos la relación de las ecuaciones 8 y 9 para definir lo que se llama una **aproximación lineal**. Se tiene una función continua dada  $f$  y un punto dado  $x_0$ . Entonces, la función

$$A(x_0) + B(x_0)(x - x_0) \quad (14)$$

se dice que se aproxima a  $f(x)$  cerca de  $x_0$  si

$$f(x) - A(x_0) = B(x_0)(x - x_0) + r(x; x_0)(x - x_0), \quad (15)$$

en la cual

$$r(x; x_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0. \quad (16)$$

El teorema 3.4.1 afirma que si  $f$  es derivable en  $x_0$ , entonces  $f$  tiene esa aproximación (la aproximación recta tangente) siendo  $A(x_0) = f(x_0)$  y  $B(x_0) = f'(x_0)$ . La inversa del teorema 3.4.1 también es verdad, esto es, si  $f$  es continua y son válidas las ecuaciones 15 y 16, entonces en consecuencia  $f$  también es derivable en  $x_0$  y, desde luego,  $A(x_0) = f(x_0)$  y  $B(x_0) = f'(x_0)$ . En el problema 29 se indica la demostración de esta afirmación. Así,  $f$  es derivable en  $x_0$  si y sólo si existe una función recta tangente que se aproxima a  $f$  en las cercanías de  $x_0$  tal como se ha descrito aquí. Para expresar este hecho, a veces decimos que una función derivable es **localmente lineal**, y viceversa.

El siguiente ejemplo muestra cómo se puede emplear una aproximación lineal para evaluar (aproximadamente) una función más complicada. Se emplea la terminología “la aproximación es correcta hasta  $n$  cifras decimales”, lo que quiere decir que la diferencia entre los valores exacto y aproximado es menor, en valor absoluto, que  $5/10^{n+1}$ ; esto es, que el error es menor que 5 en el lugar  $(n + 1)$ -ésimo.



**EJEMPLO 3**

Calcular un valor aproximado de  $\sqrt{81.34}$ .

Si hacemos que  $f(x) = x^{1/2}$ , a continuación podremos calcular un valor aproximado de  $f(81.34)$ . Como 81.34 es cercano a 81, y como  $\sqrt{81} = 9$ , definimos la función recta tangente a  $y = f(x) = x^{1/2}$  en  $x = 81$ . tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f'(81) = \frac{1}{18},$$

por tanto, la función recta tangente en el punto (81, 9) es

$$T(x; 81) = 9 + \frac{1}{18}(x - 81). \quad (17)$$

Entonces

$$\begin{aligned} T(81.34; 81) &= 9 + \frac{1}{18}(81.34 - 81) \\ &= 9 + \frac{0.34}{18} \cong 9.018889 \end{aligned}$$

es el valor aproximado que se desea de  $\sqrt{81.34}$ . El valor correcto de  $\sqrt{81.34}$ , con seis decimales, es 9.018869, y por tanto la aproximación lineal es exacta hasta cuatro cifras decimales. Nótese también que se puede emplear la función recta tangente para obtener un valor aproximado de  $\sqrt{x}$  para *cualquier*  $x$  cerca de 81, y no sólo para 81.34. ■

**Notación de Leibniz**

La idea de aproximación lineal a una función  $f$  dada ayuda a comprender la notación que introdujo Leibniz para la derivada; es la última de las tres notaciones importantes que mencionamos en la sección anterior. La notación de Leibniz resulta muy intuitiva, al igual que útil; por ejemplo, como veremos en secciones posteriores, algunas fórmulas de derivación se recuerdan con mayor facilidad cuando se expresan en esta notación. Por tanto, resumiremos las ideas de Leibniz.

Tenemos la función

$$y = f(x). \quad (18)$$

Supongamos que la variable  $x$  se varía una cantidad  $\Delta x$ , y sea  $\Delta y$  (que depende tanto de  $x$  como de  $\Delta x$ ) el cambio o incremento correspondiente en la variable dependiente  $y$  (véase figura 3.4.3). Entonces

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (19)$$

y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (20)$$

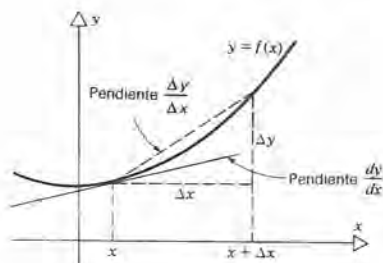


Figura 3.4.3

Leibniz denotó al límite de este cociente de diferencias mediante  $dy/dx$  (que se lee “ $dy$  entre  $dx$ ” o “ $dy$  en  $dx$ ”):

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (21)$$

Obsérvese que  $dy/dx$  no es un cociente de dos cantidades separadas  $dy$  y  $dx$ ; más bien se refiere al *límite* del cociente de diferencias de la ecuación 21. Así,  $dy/dx$  es exactamente la misma cantidad que habíamos representado antes mediante  $y'$  ó  $Dy$ .

En los primeros desarrollos del cálculo, Leibniz y otros pensaban que  $dx$  y  $dy$  eran “infinitesimales” y que su cociente era el cociente diferencial, o derivada. Si bien este concepto se ha sustituido por el de la derivada como límite de un cociente de diferencias, la notación de Leibniz\* se usa normalmente todavía. Ahora, la notación  $dy/dx$  sugiere la formación del cociente de diferencias  $\Delta y/\Delta x$ , el cambio en  $y$  dividido entre el cambio en  $x$ , así como el paso al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Para destacar que  $dy/dx$  no es un cociente se puede escribir

$$\frac{d}{dx} \text{ y en lugar de } \frac{dy}{dx}.$$

Así,  $d/dx$  es el operador  $D$  que presentamos en la sección 3.3. La notación de Leibniz para la segunda derivada y las derivadas de orden superior es

$$\frac{d^2}{dx^2} y, \quad \frac{d^3}{dx^3} y, \quad \dots, \quad \frac{d^n}{dx^n} y, \quad \dots$$

Una vez habiendo aclarado que  $dy/dx$  no es un cociente verdadero, se acostumbra escribir

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad \dots, \quad \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \dots$$

\* Leibniz tenía una aguda apreciación de la importancia de una buena notación, y adoptó el empleo de  $dy/dx$  para representar a la derivada de  $y$  con respecto a  $x$  tan sólo después de muchas reflexiones. Como tributo a su visión ésta es probablemente la notación más útil que existe y la que más se usa, al cabo de trescientos años.

Por ejemplo, si  $y = x^r$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = r(r-1)(r-2)x^{r-3},$$

y así sucesivamente.

Podemos resumir ahora las diferentes notaciones para la derivada. Si  $y = f(x)$  es una función derivable, entonces su derivada se puede indicar por cualquiera de las siguientes notaciones:

$y', f'(x)$  (Notación de primas o de Lagrange)

$Dy, Df(x)$  (Notación de operador)

$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}(x)$  (Notación de Leibniz)

Cada una se ajusta de manera adecuada para determinados fines, y por tanto se aconseja adquirir destreza en el empleo de las tres.

## Diferenciales

Reexaminemos ahora la idea de una aproximación de recta tangente a una función determinada a la luz de la notación de Leibniz. Este punto de vista se usa con frecuencia en las aplicaciones. Algunas veces representaremos un cambio en  $x$  por  $dx$ , en lugar de  $\Delta x$ . Correspondiendo a  $dx$  (o a  $\Delta x$ ) el cambio en  $y$  es  $\Delta y$  y está dado por la ecuación 19.

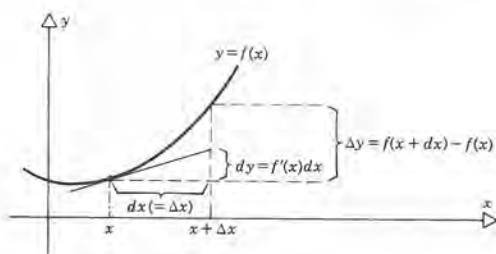
$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= f(x + dx) - f(x). \end{aligned} \tag{22}$$

Hablando geométricamente,  $\Delta y$  es el cambio en  $y$  a lo largo de la curva  $y = f(x)$ , desde  $x$  hasta  $x + \Delta x$ . Por otro lado, el cambio en  $y$ , *medido a lo largo de la recta tangente en el punto  $x$*  se llamará la **diferencial** de  $y$  y se representará mediante  $dy$ . Véase la figura 3.4.4 y nótese con cuidado la diferencia entre  $\Delta y$  y  $dy$ . Si bien  $dx$  y  $\Delta x$  sólo son dos símbolos diferentes para representar lo mismo,  $dy$  y  $\Delta y$  son dos cosas bastante distintas:  $\Delta y$  es el cambio real de  $y$  a lo largo de la curva  $y = f(x)$ , pero  $dy$  es el cambio aproximado en  $y$  medido a lo largo de la tangente. Para subrayar que la diferencial  $dy$  depende tanto del punto  $x$  como del incremento  $dx$ , a veces escribiremos  $dy(x, dx)$ . Así,  $dy(x, dx)$  es el cambio en  $y$  a lo largo de la tangente en  $x$ , cuya pendiente es  $f'(x)$ , correspondiente al incremento  $dx$ . En consecuencia,

$$dy(x, dx) = f'(x) dx,$$

o, más sencillamente,





**Figura 3.4.4** El incremento  $\Delta y$  y la diferencial  $dy$ .

$$dy = f'(x) dx. \quad (23)$$

Así hemos definido dos cantidades  $dx$  y  $dy$  cuyo cociente  $dy/dx$  es igual a  $f'(x)$ . Sin embargo, subrayamos que la  $dx$  y  $dy$  de la ecuación 23 *no son* los símbolos que aparecen en la ecuación 21. En realidad, como dijimos antes, el lado izquierdo de la ecuación 21 *no es* el cociente de dos cantidades distintas  $dy$  y  $dx$ ; en lugar de ello,  $dy/dx$  se debe considerar, en la ecuación 21, como la entidad única  $f'(x)$ .

Por último, interpretaremos el teorema 3.4.1 en términos de diferenciales. Sean  $y = f(x)$ ,  $y_0 = f(x_0)$  y  $dx = x - x_0$ . Entonces, sustituyendo en la ecuación 8, resulta

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0) dx + r(x; x_0) dx \\ &= dy(x_0, dx) + r(x; x_0) dx. \end{aligned}$$

Así, la diferencial  $dy$  es la aproximación lineal a  $y - y_0$  que describimos antes en esta sección. Para una  $dx$  pequeña, la cantidad  $y_0 + dy(x_0, dx)$  da una buena aproximación al valor de  $y$  cuando  $x = x_0 + dx$ .

### EJEMPLO 3

Sea

$$y = f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 2).$$

Determinar la diferencial  $dy$  como función de  $x$  y de  $dx$ . También determinar  $dy$  si  $x = 1$  y  $dx = \frac{1}{8}$ .

Como

$$f'(x) = x - \frac{1}{2},$$

de acuerdo con la ecuación 23 tenemos que

$$dy(x, dx) = (x - \frac{1}{2}) dx.$$

Así, para  $x = 1$  y  $dx = \frac{1}{8}$ ,

$$dy(1, \frac{1}{8}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}. \quad (24)$$

Observando que  $y_0 = f(1) = 1$ , podemos calcular un valor aproximado para  $y$  cuando  $x = \frac{9}{8}$ , que es

$$y = 1 + dy(1, \frac{1}{8}) = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}.$$

Desde luego que éste es el mismo resultado que obtuvimos para el ejemplo 1. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6, deducir una ecuación para la tangente a la curva dada en el punto dado.

1.  $y = 4 - x^2$ ;  $(1, 3)$       2.  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ;  $(-2, 3)$

3.  $y = \frac{6x}{2x^2 + 3x + 4}$ ;  $(-1, -2)$

4.  $y = \frac{2}{x} - \sqrt{x}$ ;  $(1, 1)$

5.  $y = x^2 - 3x + 4$ ;  $(x_0, y_0)$

6.  $y = \sqrt{x} + x$ ;  $(x_0, y_0)$  siendo  $x_0 > 0$

En los problemas 7 a 12 determinar la función recta tangente  $T(x; x_0)$  y la función residuo  $r(x; x_0)$  para el valor de  $x_0$  dado. Consultar las ecuaciones 2 y 3 del texto.

7.  $f(x) = 4x - 3$ ;  $x_0 = 2$

8.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ;  $x_0 = 1$

9.  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$ ;  $x_0 = 0$

10.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $x_0 = 1$

11.  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ;  $x_0 = 2$

12.  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $x_0 = 4$

En los problemas 13 a 16, evaluar (en forma aproximada) con una aproximación lineal adecuada el número dado. También, determinar el número de decimales correctos.

13.  $(27.16)^{1/3}$

14.  $(3.75)^{-1/2}$

15.  $(15.82)^{1/4} + (16.12)^{-1/2}$

16.  $(4.02)^3 - (3.97)^{3/2}$

17. Emplear una aproximación lineal para calcular el volumen de una esfera cuyo radio es de 0.96 ft.

18. Con una aproximación lineal calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado es de 2.06 in.

19. Con una aproximación lineal calcular el valor de la función  $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 7x - 8$  cuando  $x = 1.01$ .

20. Calcular, con una aproximación lineal, el valor de la función  $f(x) = \sqrt{x} + (1/\sqrt{x})$  cuando  $x = 3.97$ .

En los problemas 21 a 28 determinar  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$ .

21.  $y = x^4 + 2x^2 - 5$

22.  $y = x^3 - 7x^2 + 3x - 8$       23.  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

24.  $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$

25.  $y = 3x^2 - x^{4/3} + \frac{1}{x+1}$ ,  $x \neq -1$

26.  $y = x(x-1)(x+2)$

27.  $y = \frac{x+1}{x+2}$ ,  $x \neq -2$       28.  $y = (x-1)^2$

\*29. Sea  $f$  continua en  $x_0$  y sea su aproximación lineal cerca de  $x_0$  la siguiente:

$$f(x) = A(x_0) + B(x_0)(x - x_0) + r(x; x_0)(x - x_0), \quad (i)$$

en la cual  $A$  y  $B$  son constantes que se deben calcular, y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} r(x; x_0) = 0. \quad (ii)$$

(a) En la ecuación (i) hacer que  $x \rightarrow x_0$  y demostrar que  $A = f(x_0)$ .

(b) Con el resultado de la parte (a), demostrar que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B + r(x; x_0). \quad (iii)$$

(c) Hacer que  $x \rightarrow x_0$  en la ecuación (iii) y demostrar que  $f$  es derivable en  $x_0$ , y además que  $B = f'(x_0)$ .

### Errores y errores relativos

Con frecuencia deseamos evaluar una función  $f$  en un punto  $x_0$ . Sin embargo, a veces, y debido posiblemente a un error de medición, empleamos un valor incorrecto de  $x$  en lugar de  $x_0$ ; esto es, evaluamos a  $f(x)$  en lugar de  $f(x_0)$ . En este caso, la diferencia o incremento

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= \Delta f(x_0; \Delta x) \end{aligned} \quad (i)$$

es el **error** en  $f$  debido al error  $\Delta x$ . A la razón  $\Delta f(x_0; \Delta x)/f(x_0)$  se le llama el **error relativo**.

Para simplificar cálculos se acostumbra remplazar a  $\Delta f(x_0; \Delta x)$  por  $df(x_0, \Delta x)$ , al menos si  $\Delta x$  es pequeño. Así se obtiene un error relativo aproximado

$$\text{Error relativo} \equiv \frac{df(x_0, \Delta x)}{f(x_0)} = \frac{f'(x_0) \Delta x}{f(x_0)}. \quad (ii)$$

Los problemas 30 a 32 tienen que ver con errores y errores relativos.

30. Un carpintero construye una caja cúbica de 3 pies de lado con error máximo de 0.02 pies en cada lado.

(a) Calcular el error máximo del área de la superficie de la caja.

(b) Calcular el error relativo máximo del área de la superficie.

(c) Con una diferencial calcular el error relativo máximo aproximado del área de la superficie.

31. Siga las instrucciones del problema 30 para el volumen de la caja.

32. Suponer que se desea construir una caja cúbica de 8 ft<sup>3</sup> de capacidad. Se puede tolerar en el volumen de la caja un error de 0.25 ft<sup>3</sup>.

(a) Calcular el error máximo de la dimensión de los lados en el que se puede incurrir sin rebasar el error permisible del volumen. Suponer que todos los lados tienen la misma longitud.

(b) Con una aproximación lineal hacer una estimación del error permisible que se puede tolerar en la medida de un lado. Suponer que todos los lados tienen la misma longitud.

## 3.5 FUNCIONES COMPUESTAS Y LA REGLA DE LA CADENA

Para dos funciones  $f$  y  $g$  dadas, vimos en la sección 3.2 cómo expresar la derivada de su suma, resta, producto o cociente en términos de  $f$ ,  $g$  y sus derivadas. En esta ocasión veremos un modo diferente de combinar dos funciones  $f$  y  $g$ : *sustituiremos* una en la otra, y con ello formaremos lo que se llama una **función compuesta**. Emplearemos la notación  $f \circ g$  para indicar el resultado de sustituir  $g$  en  $f$ , esto es

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]. \quad (1)$$

Para poder evaluar  $f[g(x)]$  es necesario que el valor  $g(x)$  esté en el dominio de  $f$ . Así, para formar  $f \circ g$  es necesario que la imagen de  $g$  esté, al menos en parte, en el dominio de  $f$ . El dominio de  $f \circ g$  consta de todos los puntos del dominio de  $g$  para los que  $g(x)$  está en el dominio de  $f$ . Nuestra meta principal en esta sección es mostrar cómo se expresa la derivada de  $f \circ g$  en términos de las derivadas de  $f$  y  $g$ .



**EJEMPLO 1**

Si  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , y  $g(x) = x^2$ , entonces

$$y = \operatorname{sen} x \quad (f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(x^2) \quad (2)$$

y el dominio es  $(-\infty, \infty)$ . También

$$(g \circ f)(x) = (\operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen}^2 x \quad (3)$$

cuyo dominio es  $(-\infty, \infty)$ . Obsérvese que las funciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$  no son las mismas.

■

**EJEMPLO 2**

Si  $f(x) = \sqrt{3x + 5}$ , y  $g(x) = 1 - 4x$ , calcular  $f \circ g$ .

Notemos primero que el dominio de  $g$  es  $(-\infty, \infty)$ , y que el dominio de  $f$  es  $[-\frac{5}{3}, \infty)$ . La función compuesta  $f \circ g$  está dada por

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \sqrt{3(1 - 4x) + 5} \\ &= \sqrt{8 - 12x}. \end{aligned} \quad (4)$$

El dominio de  $f \circ g$  se determina de acuerdo con la ecuación 4 por el requisito de que  $8 - 12x \geq 0$ , lo cual significa que el dominio es  $(-\infty, \frac{2}{3}]$ . El lector puede comprobar que éste es exactamente el conjunto de valores de  $x$  para los cuales  $g(x)$  está en el dominio de  $f$ , esto es,  $1 - 4x \geq -\frac{5}{3}$ . ■

En general,  $f \circ g$  y  $g \circ f$  son distintas entre sí, como muestra el ejemplo 1. En realidad, el hecho de que sea posible formar  $f \circ g$  no implica nada acerca de la posibilidad de formar  $g \circ f$ . Por ejemplo, supongamos que

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 + \operatorname{sen} x, & -\infty < x < \infty, \\ g(x) &= \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$(f \circ g)(x) = 4 + \operatorname{sen} \sqrt{1 - x^2} \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1.$$

Por otro lado, la imagen de  $f$  es  $[3, 5]$ , y por tanto no tiene puntos en común con el dominio de  $g$ . En consecuencia,  $g \circ f$  no existe.

En algunos casos sencillos podemos relacionar las funciones compuestas con un cambio de escala de medición. Por ejemplo, supongamos que la posición  $s$  de una partícula que se mueve en línea recta está dada por

$$s = f(t), \quad (5)$$

en la cual  $t$  se mide en minutos. Si se introduce una nueva coordenada  $\tau$  de tiempo, medido en segundos, entonces  $t$  y  $\tau$  se relacionan mediante

$$t = \frac{\tau}{60} = g(\tau). \quad (6)$$

Si deseamos expresar a  $s$  en términos de  $\tau$ , debemos escribir

$$s = f[g(\tau)] = f(\tau/60), \quad (7)$$

que es una función compuesta.

En casos como éste es razonable creer que el cambio de escala no afecta determinadas propiedades de la función original, como la continuidad. Así, si la partícula que acabamos de describir se mueve en forma continua, no esperaremos que importe si la variable del tiempo se mide en minutos o en segundos. De hecho, esta preservación de la continuidad es propiedad general de las funciones compuestas, como lo afirma el siguiente teorema:

### Teorema 3.5.1

Sea la función  $g$  continua en  $x_0$  y la función  $f$  continua en  $z_0$ , en donde  $x_0 = g(x_0)$ . Entonces la función compuesta  $f \circ g$  es continua en  $x_0$ . Esto es, si  $F(x) = f[g(x)]$ , entonces  $F$  es continua en  $x_0$ .

En otras palabras, una *función continua de una función continua es a su vez una función continua*. La demostración del teorema 3.5.1 se deduce inmediatamente a partir de la definición de función continua, y no es muy difícil. Sin embargo, la omitiremos.

A continuación abordaremos el problema de derivar una función compuesta, lo cual es el tema principal de esta sección. Si  $y = f(z)$  y  $z = g(x)$ , entonces un cambio  $\Delta x$  en  $x$  producirá un cambio  $\Delta z$  en  $z$ , y este último a su vez producirá un cambio  $\Delta y$  en  $y$ . El asunto es cómo relacionar el cambio en  $y$  directamente con el cambio en  $x$ .

Por ejemplo, se tiene de nuevo la partícula que se describe en la ecuación 5. Si  $s$  se mide en pies, entonces la velocidad

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) \quad (8)$$

se mide en pies por minuto. Para calcular la velocidad en pies por segundo debemos multiplicar por un factor de conversión que corresponde al cambio en la escala de tiempo; en términos de dimensiones,

$$\frac{\text{pies}}{\text{segundo}} = \frac{\text{pies}}{\text{minuto}} \cdot \frac{\text{minutos}}{\text{segundo}} \quad (9)$$

Desde luego, el factor de conversión es  $\frac{1}{60}$ , el número de minutos por segundo. Por tanto, si  $ds/d\tau$  es la velocidad en pies/segundo, entonces

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{60}, \quad (10)$$

o bien, como  $dt/d\tau = 1/60$ , de acuerdo a la ecuación 6,

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}. \quad (11)$$

Así, la derivada de la función compuesta de la ecuación 7 es el producto de las derivadas de sus dos componentes. La relación que expresa la ecuación 11 es un ejemplo de lo que se conoce como la **regla de la cadena** para la derivación de las funciones compuestas.

La regla de la cadena es una de las más importantes reglas de derivación. Es una herramienta poderosa y versátil que nos permite derivar una gran variedad de funciones obtenidas como composiciones de funciones más simples. Como expresa a la derivada de una función compuesta en términos de las derivadas de sus componentes, la regla de la cadena nos permite derivar una función compuesta sin siquiera tener que determinar la expresión misma de la función compuesta. Esto es muy útil cuando es imposible o incómodo el determinar tal expresión. Enunciaremos la regla de la cadena en el teorema siguiente:

### Teorema 3.5.2

#### (Regla de la cadena)

Si la función  $z = g(x)$  tiene la derivada  $g'(x_0)$  y la función  $y = f(z)$  tiene la derivada  $f'(z_0)$  cuando  $z_0 = g(x_0)$ , entonces la función compuesta

$$y = F(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

es derivable en  $x = x_0$ , y

$$F'(x_0) = f'(z_0)g'(x_0) = f'[g(x_0)]g'(x_0). \quad (12)$$

En la  $D$ -notación, la ecuación 12 toma la forma

$$D_x y = D_z y D_x z, \quad (13)$$

en la cual se emplean los subíndices para hacer resaltar la variable con respecto a la cual se lleva a cabo cada derivación. En la notación de Leibniz,



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}, \quad (14)$$

que es probablemente más fácil de recordar que la ecuación 12 o la 13. En palabras, la regla de la cadena dice que si  $y$  es una función de  $z$  y a su vez  $z$  es función de  $x$ , entonces la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  es la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $z$  multiplicada por la razón de cambio de  $z$  con respecto a  $x$ . Se entiende en la ecuación 14 que  $dy/dx$  y  $dz/dx$  están evaluadas en  $x_0$ , y que  $dy/dz$  se evalúa a la  $z_0$  correspondiente a  $x_0$ . A la ecuación 13 se le aplica un enunciado semejante. El enunciado (14) de la regla de la cadena con la notación de Leibniz es muy sugerente debido a la analogía evidente con las fracciones. Sin embargo, recuérdese que en realidad no se trata de una simplificación; las  $dz$  son parte de las expresiones para las derivadas  $dy/dz$  y  $dz/dx$ , y no tienen existencia propia por separado.

Antes de demostrar la regla de la cadena, veamos algunos ejemplos adicionales para demostrar su utilidad para hallar derivadas.

### EJEMPLO 3

Si  $F(x) = (3x^2 + 5x - 7)^6$ , determinar  $F'(x)$ .

Sea  $f(z) = z^6$ , y  $z = g(x) = 3x^2 + 5x - 7$ . Entonces  $F(x) = f[g(x)]$ . De acuerdo con la ecuación 12,

$$F'(x) = f'(z)g'(x)$$

en la cual  $z = 3x^2 + 5x - 7$ . Entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= 6z^5(6x + 5) \\ &= 6(3x^2 + 5x - 7)^5(6x + 5). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### EJEMPLO 4

Si  $y = [(2x + 1)/(1 - x)]^{1/3}$ , determinar  $dy/dx$ .

Sea  $z = (2x + 1)/(1 - x)$ ; entonces  $y = z^{1/3}$ , y según la ecuación 14,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d}{dz} z^{1/3} \frac{d}{dx} \left( \frac{2x + 1}{1 - x} \right) \\ &= \frac{1}{3} z^{-2/3} \frac{(1 - x)2 - (2x + 1)(-1)}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{2x + 1}{1 - x} \right)^{-2/3} \frac{3}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(2x + 1)^{2/3}(1 - x)^{4/3}} \end{aligned}$$

siempre que  $x \neq -\frac{1}{2}$  y que  $x \neq 1$ . ■

El resultado siguiente es una combinación de la regla de la cadena y de la regla para potencias. Los ejemplos 3 y 4 son casos particulares de dicho resultado.

### Corolario

#### (Regla de la cadena generalizada)

Si  $y = [u(x)]^r$ , siendo  $u$  una función derivable y  $r$  un número real, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [u(x)]^r = r[u(x)]^{r-1} u'(x). \quad (15)$$

La ecuación 15 es consecuencia inmediata de la regla de la cadena. Si hacemos que  $z = u(x)$ , entonces  $y = z^r$  y

$$\frac{dy}{dx} = rz^{r-1} \frac{dz}{dx},$$

que es lo mismo que la ecuación 15.

El corolario anterior muestra una de las maneras más importantes en las que se emplea la regla de la cadena; de aquí en adelante, cuando deduzcamos una nueva regla de derivación, la ampliaremos inmediatamente combinándola con la regla de la cadena.

Al mismo tiempo, se obtiene la regla generalizada de antiderivación que corresponde a la ecuación 15, que es

$$D^{-1}\{[u(x)]^{r-1}u'(x)\} = \frac{[u(x)]^r}{r} + c, \quad r \neq 0$$

o bien, como usualmente se escribe

$$D^{-1}\{[u(x)]^r u'(x)\} = \frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1. \quad (16)$$

El siguiente ejemplo muestra el empleo de la ecuación 16.

### EJEMPLO 5

Determinar la antiderivada de

$$f(x) = 5x(x^2 + 3)^4.$$

Si hacemos  $u(x) = x^2 + 3$ , entonces  $u'(x) = 2x$  y

$$f(x) = \frac{5}{2}[u(x)]^4 u'(x).$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación 16,

$$D^{-1}f(x) = \frac{5}{2} \frac{[u(x)]^5}{5} + c = \frac{1}{2}(x^2 + 3)^5 + c. \blacksquare$$

La regla de la cadena se puede emplear más de una vez en el cálculo de derivadas de orden superior.

### EJEMPLO 6

Sea  $y = z - (1/z)$ , siendo  $z = 2x/(x + 1)$ . Determinar  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$ .

Tenemos que  $dy/dz = 1 + z^{-2}$  y, de acuerdo con la regla para el cociente,  $dz/dx = 2(x + 1)^{-2}$ ; entonces, empleando la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = 2(1 + z^{-2})(x + 1)^{-2}. \quad (17)$$

Para determinar  $d^2y/dx^2$ , comenzamos empleando la regla para el producto; así,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \left[ \frac{d}{dx} (1 + z^{-2}) \right] (x + 1)^{-2} + 2(1 + z^{-2}) \frac{d}{dx} (x + 1)^{-2}. \quad (18)$$

La derivada del primer término del lado derecho de la ecuación 18 se puede determinar aplicando otra vez la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (1 + z^{-2}) &= \frac{d}{dz} (1 + z^{-2}) \frac{dz}{dx} \\ &= -2z^{-3} \cdot 2(x + 1)^{-2} = -4z^{-3}(x + 1)^{-2}, \end{aligned}$$

en ella hemos empleado la ecuación que se encontró antes para  $dz/dx$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación 18, y empleando la regla generalizada para potencias para evaluar la derivada en el último término de la ecuación 18, obtenemos finalmente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -8z^{-3}(x + 1)^{-4} - 4(1 + z^{-2})(x + 1)^{-3}. \quad (19)$$

Desde luego que puede uno sustituir a  $z$  para tener términos en  $x$  en las ecuaciones 17 y 19, para expresar a  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$  enteramente como funciones de  $x$ , en caso necesario. ■

### EJEMPLO 7

Supongamos que  $y = (x^2 + 3x + 4)^{4/3}$ . Determinar  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$ .



De acuerdo con la regla generalizada para potencias, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} (x^2 + 3x + 4)^{1/3} (2x + 3). \quad (20)$$

Para calcular la segunda derivada emplearemos primero la regla para el producto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3} (2x + 3) \frac{d}{dx} (x^2 + 3x + 4)^{1/3} + \frac{4}{3} (x^2 + 3x + 4)^{1/3} \frac{d}{dx} (2x + 3). \quad (21)$$

Para definir la derivada del primer término del lado derecho de la ecuación 21 emplearemos por segunda vez la regla generalizada para potencias. Así,

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3x + 4)^{1/3} = \frac{1}{3} (x^2 + 3x + 4)^{-2/3} (2x + 3)$$

y, al sustituir en la ecuación 21, se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{9} (x^2 + 3x + 4)^{-2/3} (2x + 3)^2 + \frac{8}{3} (x^2 + 3x + 4)^{1/3}. \quad (22)$$

Podemos necesitar el empleo repetido de la regla de la cadena, aun en el cálculo de una primera derivada, como en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 8

Si  $y = \sqrt{3x^2 + 4} + \sqrt{x}$  para  $x \geq 0$ , determinar  $dy/dx$ .

Primero haremos  $z = \sqrt{3x^2 + 4} + \sqrt{x}$ , y por tanto  $y = \sqrt{z}$ . Empleando la regla de la cadena o la regla generalizada para potencias tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} z^{-1/2} \frac{d}{dx} [\sqrt{3x^2 + 4} + \sqrt{x}] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3x^2 + 4} + \sqrt{x}}} \left[ \frac{d}{dx} \sqrt{3x^2 + 4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]. \end{aligned}$$

Empleamos de nuevo la regla de la cadena o la regla generalizada para potencias para determinar  $d\sqrt{3x^2 + 4}/dx$  y obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{3x^2 + 4} + \sqrt{x}}} \left[ \frac{1}{2} \frac{6x}{\sqrt{3x^2 + 4}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]. \quad (23)$$

Con un poco de práctica y experiencia el lector encontrará que puede omitir el paso intermedio "sea  $z = \dots$ " y escribir simplemente el resultado. ■

Ahora demostraremos la regla de la cadena, empleando un argumento basado directamente en el teorema 3.4.1.

**Demostración del teorema 3.5.2.** En cuanto a la ecuación 11 de la sección 3.4, recuérdese que si  $f$  es derivable en  $x$ , entonces

$$f(x + h) - f(x) = [f'(x) + r(h; x)]h, \quad (24)$$

en la cual  $r(h; x) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

A continuación, supongamos que  $y = f(z)$  y que  $z = g(x)$ . Entonces

$$y = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = F(x).$$

Para demostrar que  $F$  es derivable en  $x$  necesitamos considerar el cociente de diferencias

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{f[g(x + h)] - f[g(x)]}{h}. \quad (25)$$

Nuestra estrategia será aplicar el teorema 3.4.1 en la forma (24) a  $f$  y a  $g$ . Para hacerlo, necesitamos efectuar los cambios necesarios en los nombres de las variables. Así,

$$g(x + h) - g(x) = [g'(x) + r_1(h; x)]h \quad (26)$$

y

$$f(z + k) - f(z) = [f'(z) + r_2(k; z)]k, \quad (27)$$

en la cual  $r_1(h; x) \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$ , y  $r_2(k; z) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Además, necesitamos que

$$k = g(x + h) - g(x). \quad (28)$$

para que entonces

$$g(x + h) = g(x) + k = z + k. \quad (29)$$

Obsérvese que  $k \rightarrow 0$  cuando  $h \rightarrow 0$  porque  $g$  es derivable y, por tanto, es continua en  $x$ . Sustituyendo a  $k$  de la ecuación 28 en el lado derecho de la ecuación 27 y empleando a continuación la ecuación 26, obtenemos que

$$f(z + k) - f(z) = [f'(z) + r_2(k; z)][g'(x) + r_1(h; x)]h. \quad (30)$$

En cuanto al lado izquierdo de la ecuación 30 vemos que

$$f(z + k) - f(z) = f[g(x + h)] - f[g(x)] = F(x + h) - F(x). \quad (31)$$

En consecuencia, si combinamos las ecuaciones 30 y 31 obtendremos

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = [f'(z) + r_2(k; z)][g'(x) + r_1(h; x)]. \quad (32)$$

Cuando  $h \rightarrow 0$ , sabemos que  $r_1(h; x) \rightarrow 0$  y también que  $k \rightarrow 0$ . Así,  $r_2(k; z) \rightarrow 0$  también, y el lado derecho de la ecuación 32 tiene como límite  $f'(z)g'(x)$ . Por tanto, el lado izquierdo de la ecuación 32 tiene este mismo límite. Entonces,  $F$  es derivable en el punto  $x$  y su derivada  $F'(x)$  es

$$F'(x) = f'(z)g'(x), \quad (33)$$

en la cual  $z = g(x)$ . Con esto se completa la demostración de la regla de la cadena.  $\square$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 determinar  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , en caso de que existan, y caracterizar sus dominios.

1.  $f(x) = 3x - 2$ ,  $g(x) = 2x + 7$

2.  $f(x) = 2x - 4$ ,  $g(x) = 5x + 3$

3.  $f(x) = 1 - x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x+1}$

4.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $g(x) = x+1$

5.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2 - 3x + 2$

6.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2 - 3x + 6$

7.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = -(x^2 - 3x + 6)$

8.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

9.  $f(x) = \cos 2x$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

10.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ,  
 $g(x) = \sqrt{-(x+3)(x+1)}$

En los problemas 11 a 16, emplear la regla de la cadena para determinar  $dy/dx$ . Comprobar que la respuesta sea la correcta llevando a cabo primero la sustitución que se indica y derivando a continuación.

11.  $y = z^2 + 2z - 5$ ,  $z = x^2 - 7$

12.  $y = 3z^2 - 2z + 4$ ,  $z = 2x^2 + 5x - 3$

13.  $y = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ ,  $z = 3x - 2$

14.  $y = \frac{3z - 5}{z^2 + 4}$ ,  $z = x^2 - 3$

15.  $y = z^2 - 3z + 4$ ,  $z = \frac{x}{x+1}$

16.  $y = \frac{1}{z-2}$ ,  $z = \frac{x+1}{x-1}$

En los problemas 17 a 22, emplear la regla de la cadena para determinar  $dy/dx$ , y decir para qué valores de  $x$  es válida la respuesta.

17.  $y = u^3 - 6$ ,  $u = \sqrt{x+1}$

18.  $y = s^{3/2}$ ,  $s = 1 - x$

19.  $y = z^{7/3}$ ,  $z = x^2 + 5$

20.  $y = \sqrt{1-u^2}$ ,  $u = x+1$

21.  $y = 1 - z^2$ ,  $z = \sqrt{x+4}$

22.  $y = \sqrt{w}$ ,  $w = \frac{x+1}{x-1}$

En los problemas 23 a 26, calcular el valor de  $D(f \circ g)(x)$  en el valor dado de  $x$ .

23.  $f(z) = z^2 + 2z - 5$ ,  $g(x) = x^2 - 7$ ;  
 $x = 2$

24.  $f(z) = \sqrt{z}$ ,  $g(x) = x^2 - 4$ ;  $x = 3$

25.  $f(z) = \sqrt{z^2 - 16}$ ,  $g(x) = x^2 + 2x + 2$ ;  
 $x = 1$



$$26. f(z) = z^2 - 3z + 6, \quad g(x) = \sqrt{9 - x^2};$$

$$x = -2$$

En los problemas 27 a 34, determinar la derivada que se pide.

$$27. \frac{d}{dx} (2x - 1)^3 \quad 28. \frac{d}{dx} \sqrt{x^3 + 1}$$

$$29. \frac{d}{dx} \left( \frac{x+1}{2} \right)^{100} \quad 30. \frac{d}{dx} (x^2 + 1)^3 (2x - 3)^4$$

$$31. \frac{d}{dx} (x - 1)^4 \sqrt{2x - 3} \quad 32. \frac{d}{dx} \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^4$$

$$33. \frac{d}{dx} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^{3/2} \quad 34. \frac{d}{dx} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

En los problemas 35 a 40, determinar  $d^2y/dx^2$ .

$$35. y = z^2 + 2z - 5, \quad z = x^2 - 7$$

$$36. y = z^3 - 5z, \quad z = x^2 - 3$$

$$37. y = \sqrt{x^3 + 1} \quad 38. y = \left( \frac{x+2}{x-3} \right)^4$$

$$39. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad 40. y = \frac{1}{z - 2}, \quad z = \frac{x + 1}{x - 1}$$

En los problemas 41 a 46, determinar la derivada que se pide. Suponer que la función  $f$  tiene todas las derivadas que se necesiten.

$$41. \frac{d}{dx} f(-x) \quad 42. \frac{d}{dx} f(x^2)$$

$$43. \frac{d}{dx} f(ax), \quad a = \text{constante}$$

$$44. \frac{d}{dx} f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$$

$$45. \frac{d^n}{dx^n} f(ax), \quad a = \text{constante} \quad 46. \frac{d^2}{dx^2} f(x^2)$$

En los problemas 47 a 50, determinar la derivada que se pide. Suponer que  $u$  tiene tantas derivadas como sea necesario.

$$47. \frac{d}{dx} [u'(x)]^2 \quad 48. \frac{d^2}{dx^2} [u'(x)]^2$$

$$49. \frac{d}{dx} ([u'(x)]^2 u''(x)) \quad 50. \frac{d}{dx} [u(x)]^2 (1 + [u'(x)]^2)$$

En los problemas 51 a 58 emplear la ecuación 16 para obtener la antiderivada que se pide. Comprobar la respuesta derivándola.

$$51. D^{-1} (x - 2)^4 \quad 52. D^{-1} (x + 3)^{-6}$$

$$53. D^{-1} 2(2x - 1)^5 \quad 54. D^{-1} (3x + 6)^4$$

$$55. D^{-1} (2x + 1)^{4/3} \quad 56. D^{-1} x(x^2 + 1)^{4/5}$$

$$57. D^{-1} 3x\sqrt{x^2 + 4} \quad 58. D^{-1} x^2(x^3 + 1)^{3/2}$$

59. Suponer que  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones derivables y que  $F(x) = f\{g[h(x)]\}$  existe en algún dominio  $D$ . Determinar  $F'(x)$  en términos de las derivadas de  $f$ ,  $g$  y  $h$ .
60. Suponer que  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones derivables tales que la imagen de  $g$  y la de  $h$  están en el dominio de  $f$ , y que por tanto, existe la función  $f \circ g + f \circ h$ . Proponer un ejemplo que demuestre que  $f \circ (g + h)$  puede no existir.
61. Si  $y = f(x)/g(x)$ , donde  $g(x) \neq 0$ , determinar  $y''$ . Suponer que las funciones  $f$  y  $g$  son doblemente derivables.
62. Demostrar que la derivada de una función par es impar y que la derivada de una función impar es par.
63. El radio de una bola de nieve esférica es  $r = 7 - 2t$ , donde  $0 \leq t \leq \frac{7}{2}$ . Determinar una expresión para la razón de cambio del volumen de esta bola de nieve con respecto a  $t$ .
64. Si la longitud del lado de un triángulo equilátero es  $s = t^2/3$ , hallar una expresión para la razón de cambio del área del triángulo con respecto al tiempo.
65. El lado de un cubo aumenta con una velocidad de 2 in/seg. Calcular la velocidad a la cual aumenta el volumen cuando el lado tiene 6 in de longitud.
66. Dos ciclistas parten al mediodía del mismo punto. Uno va hacia el oriente a 10 mi/h y el otro hacia el norte a 15 mi/h. Calcular la rapidez a la cual la distancia entre ellos aumenta cuando es la 1 P. M.
67. En la teoría especial de la relatividad de Einstein, se sustituye la ecuación  $F = ma = m(dv/dt)$  de la ley del movimiento de Newton por

$$F = m_0 \frac{dv}{dt \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad (i)$$

en la cual  $m_0$  es la masa en reposo de la partícula que se mueve,  $v$  es su velocidad, y  $c = 3 \times 10^{10}$  cm/seg es la velocidad de la luz. Llevando a cabo la derivación indicada en la ecuación (i), demostrar que

$$F = \frac{m_0 a}{[1 - (v^2/c^2)]^{3/2}}.$$

Así, mientras mayor sea la velocidad  $v$ , mayor será la

fuerza  $F$  necesaria para producir una aceleración dada  $a$ . Se ha comprobado en forma experimental que la ecuación (i) describe con exactitud el movimiento de las partículas que se desplazan a velocidades comparables a la de la luz, mientras que la ley de Newton no lo describe. Sin embargo, la ley de Newton es mucho más sencilla y es casi igual de exacta siempre que  $v/c$  sea pequeño en comparación con uno.

68. Considere una partícula que se mueve en línea recta, de acuerdo con la ley del movimiento de Einstein (véase problema 67)

$$F = m_0 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (i)$$

- (a) Si  $F = F_0$ , siendo  $F_0$  constante, y si  $v(0) = 0$ , demostrar que

$$v = \frac{cF_0 t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F_0^2 t^2}}. \quad (ii)$$

- (b) Si  $v$  está definida por la ecuación (ii), determinar la velocidad límite a la que tiende la partícula cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- (c) Suponer ahora que, en lugar de la ecuación (i), la partícula obedece a la ley del movimiento de Newton

$$F = m_0 \frac{dv}{dt}.$$

Con las mismas condiciones que en el punto (a), determinar a  $v$  como función de  $t$ . Comparar  $\lim_{t \rightarrow \infty} v$  con el resultado de la parte (b).

### 3.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A continuación deduciremos fórmulas de las derivadas de las seis funciones trigonométricas, mediante algunas de las propiedades de las derivadas que se establecieron en las secciones 3.2 y 3.5, así como la definición de la derivada. Recuérdesse que en todas las descripciones que involucren funciones trigonométricas se emplea la medida radian (a menos que se indique otra cosa en forma específica).

Primero, calcularemos la derivada de la función seno. Si  $f(x) = \sin x$ , entonces el cociente de diferencias correspondiente es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}. \quad (1)$$

Emplearemos la identidad

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h \quad (2)$$

para poder reformular la ecuación 1 del siguiente modo:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1 - \cos h}{h}.$$

Así,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h}, \quad (3)$$

y entonces, para determinar a  $f'(x)$  debemos evaluar los límites de  $(\sin h)/h$  y de  $(1 - \cos h)/h$ , respectivamente, cuando  $h \rightarrow 0$ . De acuerdo con el ejemplo 9 de la sección 2.3, sabemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1. \quad (4)$$

Además, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos h}{h} &= \frac{1 - \cos h}{h} \cdot \frac{1 + \cos h}{1 + \cos h} \\ &= \frac{1 - \cos^2 h}{h(1 + \cos h)} \\ &= \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} \\ &= \frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{1 + \cos h}. \end{aligned}$$

Así, empleando las propiedades algebraicas de los límites (teorema 2.3.1), llegamos a la conclusión de que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{1 + \cos h} \\ &= 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Sustituyendo los resultados (4) y (5) en la ecuación 3, obtendremos

$$f'(x) = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x. \quad (6)$$

En notación diferente, hemos demostrado que

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \text{o} \quad D \sin x = \cos x. \quad (7)$$

Se pueden generalizar las fórmulas (7) de derivación mediante la regla de la cadena. Supongamos que  $y = \sin u$ , siendo  $u$  una función derivable de  $x$ . Entonces, de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\sin u) &= \frac{d}{du} (\sin u) \frac{du}{dx} \\ &= (\cos u) \frac{du}{dx}. \end{aligned} \quad (8)$$



**EJEMPLO 1**

Determinar  $dy/dx$  si  $y = \sin(\omega x + \delta)$ , donde  $\omega$  y  $\delta$  son constantes.

Escribimos  $y = \sin u$ , donde  $u = \omega x + \delta$ . Entonces, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} (\sin u) \frac{d}{dx} (\omega x + \delta) = (\cos u)(\omega) \\ &= \omega \cos(\omega x + \delta).\end{aligned}\tag{9a}$$

En notación diferente

$$D \sin(\omega x + \delta) = \omega \cos(\omega x + \delta). \blacksquare \tag{9b}$$

**EJEMPLO 2**

Determinar la razón de cambio de  $y = \sin(x^2 - \pi)$  en el punto  $x = \sqrt{\pi}$ . Además, hallar una ecuación de la tangente a la gráfica de la función en ese punto.

La razón de cambio que se necesita está dada por la derivada  $dy/dx$ . De acuerdo con la regla de la cadena, haciendo  $u = x^2 - \pi$  tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du} (\sin u) \frac{d}{dx} (x^2 - \pi) = (\cos u)(2x) \\ &= 2x \cos(x^2 - \pi).\end{aligned}$$

Evaluando  $dy/dx$  en  $x = \sqrt{\pi}$  se obtiene  $2\sqrt{\pi} \cos(0) = 2\sqrt{\pi}$ .

Entonces, la recta tangente que se busca tiene la pendiente  $2\sqrt{\pi}$  y pasa por el punto cuyas coordenadas son  $x = \sqrt{\pi}$ ,  $y = 0$ . Por tanto, su ecuación es

$$y = 2\sqrt{\pi}(x - \sqrt{\pi}). \blacksquare \tag{10}$$

A continuación deseamos hallar una fórmula para la derivada de la función coseno. Esta fórmula se puede encontrar de un modo muy semejante a como se dedujo la ecuación 6, pero presentaremos aquí una deducción alternativa. Partimos de

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cos x &= \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1)\end{aligned}$$

$$= -\operatorname{sen} x,$$

ya que  $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$ . En otra notación,

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \quad \text{o} \quad D \cos x = -\operatorname{sen} x. \quad (11)$$

También se puede generalizar inmediatamente la ecuación 11 mediante la regla de la cadena. Si  $y = \cos u$ , siendo  $u$  una función derivable de  $x$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\cos u) &= \frac{d}{du} (\cos u) \frac{du}{dx} \\ &= -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}. \end{aligned} \quad (12)$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se pueden deducir rápidamente combinando las ecuaciones 7 y 11 con la regla para el cociente. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x (d/dx)(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x (d/dx)(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x. \end{aligned} \quad (13)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sec x &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{\cos x (d/dx)(1) - 1(d/dx)(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(0) - (1)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \\ &= \sec x \tan x. \end{aligned} \quad (14)$$

Del mismo modo se obtienen las siguientes fórmulas de derivación para la cotangente y la cosecante:

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x. \quad (16)$$

Se puede emplear la regla de la cadena para extender las fórmulas de derivación (13) a (16) del mismo modo que se usó antes para generalizar las ecuaciones 7 y 11. Si  $u$  es una función derivable de  $x$ , entonces las fórmulas básicas de derivación para las funciones trigonométricas se pueden resumir como sigue:

$$\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx} \quad (17a)$$

$$\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx} \quad (17b)$$

$$\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx} \quad (17c)$$

$$\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx} \quad (17d)$$

$$\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx} \quad (17e)$$

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \quad (17f)$$

Desde luego, se sobreentiende que las ecuaciones 17(c) a 17(f) sólo son válidas en los puntos en los que todas las funciones que intervienen están definidas. Por ejemplo, no podremos emplear la ecuación 17(c) para derivar  $\tan(x^2)$  cuando  $x = \sqrt{\pi}/2$ , porque en  $\pi/2$  no está definida la función tangente.

Los ejemplos siguientes muestran el empleo de algunas de las fórmulas anteriores de derivación.

### EJEMPLO 3

Si  $y = x^2 + 3 \tan x$ , determinar  $d^2y/dx^2$ .

De acuerdo con la ecuación 13, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3 \sec^2 x.$$

A continuación, derivando por segunda vez, obtenemos



$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 + 3 \frac{d}{dx} (\sec^2 x).$$

Ahora emplearemos la regla generalizada para potencias de la sección 3.5 para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= 2 + 3(2 \sec x) \frac{d}{dx} \sec x \\ &= 2 + 6 \sec^2 x \tan x. \blacksquare \end{aligned} \quad (18)$$

#### EJEMPLO 4

Sea  $y = x^2 \sec 2x$ ; determinar  $dy/dx$ .

Con la regla para el producto, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2x \sec 2x + x^2 \frac{d}{dx} \sec 2x.$$

Si hacemos que  $u = 2x$ , entonces  $\sec 2x = \sec u$  y la ecuación 17(d) da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sec 2x &= \frac{d}{du} (\sec u) \frac{du}{dx} \\ &= (\sec u \tan u)(2) \\ &= 2 \sec 2x \tan 2x. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{dy}{dx} = 2x \sec 2x + 2x^2 \sec 2x \tan 2x. \quad (19)$$

Obviamente, la ecuación 19 no es válida cuando  $2x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$  ■

#### EJEMPLO 5

Sea  $y = \cos^2 \sqrt{1+x^2}$ . Determinar  $dy/dx$ .

En este caso se necesitan varias aplicaciones de la regla de la cadena. Primero, escribimos  $y = u^2$ , siendo  $u = \cos \sqrt{1+x^2}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du} (u^2) \frac{du}{dx} = 2u \frac{d}{dx} \cos \sqrt{1+x^2} \\ &= 2 \cos \sqrt{1+x^2} \frac{d}{dx} \cos \sqrt{1+x^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Para calcular  $d(\cos \sqrt{1+x^2})/dx$ , definimos a  $v = \sqrt{1+x^2}$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \cos \sqrt{1+x^2} &= \frac{d}{dv} (\cos v) \frac{dv}{dx} \\
 &= (-\operatorname{sen} v) \frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2} \\
 &= -\operatorname{sen} \sqrt{1+x^2} \frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

A continuación, para determinar a  $d\sqrt{1+x^2}/dx$ , definimos  $w = 1+x^2$ . Entonces, la regla generalizada para potencias nos da

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sqrt{1+x^2} &= \frac{d}{dw} \sqrt{w} \frac{dw}{dx} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{w}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Finalmente, al sustituir las ecuaciones 21 y 22 en la ecuación 20, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{sen} \sqrt{1+x^2} \cos \sqrt{1+x^2}. \blacksquare \tag{23}$$

En los ejemplos anteriores debe haber quedado claro que se pueden definir las derivadas de combinaciones muy complicadas de funciones algebraicas y trigonométricas empleando las fórmulas que se dedujeron en esta sección junto con la regla de la cadena (sección 3.5) y las propiedades algebraicas de las derivadas (sección 3.2). Hemos mostrado esos cálculos con mucho detalle, en especial al escribir explícitamente las sustituciones involucradas en el empleo de la regla de la cadena. Con la práctica, en general es posible llevar a cabo esas sustituciones mentalmente, con lo cual se obtienen los resultados con más rapidez. Sin embargo, siempre que haya peligro de confusión, se aconseja desarrollar las operaciones con detalle, como lo hicimos aquí.

En el siguiente ejemplo, se muestran los cálculos en forma más compacta.

## EJEMPLO 6

Para  $y = (\operatorname{sen} x^2) \cot[3x - (\pi/4)]$ , determinar  $dy/dx$ .

Empleamos primero la regla para el producto y a continuación la regla de la cadena, para obtener

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \left[ \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x^2) \right] \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + (\operatorname{sen} x^2) \frac{d}{dx} \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= (\cos x^2)(2x) \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + (\operatorname{sen} x^2) \left[ -\operatorname{csc}^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (3) \\
 &= 2x(\cos x^2) \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 3(\operatorname{sen} x^2) \operatorname{csc}^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right). \blacksquare
 \end{aligned}$$

Debido a la forma particularmente sencilla de las fórmulas de derivación para  $\sin x$  y  $\cos x$ , se concluye que es fácil determinar derivadas de orden superior de esas funciones. Por ejemplo, las primeras cuatro derivadas de  $\sin x$  son

$$\begin{aligned} D \sin x &= \cos x, & D^2 \sin x &= -\sin x, \\ D^3 \sin x &= -\cos x, & D^4 \sin x &= \sin x. \end{aligned} \quad (24)$$

Como  $D^4 \sin x = \sin x$ , las siguientes cuatro derivadas siguen el mismo patrón, y así sucesivamente. Las derivadas de la función coseno presentan esencialmente el mismo comportamiento:

$$\begin{aligned} D \cos x &= -\sin x, & D^2 \cos x &= -\cos x, \\ D^3 \cos x &= \sin x, & D^4 \cos x &= \cos x, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Así, las funciones seno y coseno tienen la interesante propiedad de que son *cerradas* bajo la derivación: la derivación repetida de  $\sin x$  y  $\cos x$  sólo da como resultado senos y cosenos.

### Antiderivadas de funciones trigonométricas

Como señalamos en la sección 3.3, cada fórmula de derivación se puede emplear también en forma inversa: al mismo tiempo da la derivada de una función y la antiderivada de otra. Al reformular las fórmulas de derivación para las seis funciones trigonométricas como fórmulas de antiderivación, obtenemos que

$$D^{-1}(\cos x) = \sin x + c, \quad (26a)$$

$$D^{-1}(\sin x) = -\cos x + c, \quad (26b)$$

$$D^{-1}(\sec^2 x) = \tan x + c, \quad (26c)$$

$$D^{-1}(\sec x \tan x) = \sec x + c, \quad (26d)$$

$$D^{-1}(\csc^2 x) = -\cot x + c, \quad (26e)$$

$$D^{-1}(\csc x \cot x) = -\csc x + c. \quad (26f)$$

Las ecuaciones 26 se pueden generalizar combinándolas con la regla de la cadena. Por ejemplo, de acuerdo con la ecuación 17(a) tenemos

$$D^{-1}[\cos u(x)]u'(x) = \sin u(x) + c, \quad (27)$$

de la ecuación 17(b) tenemos

$$D^{-1}[\sin u(x)]u'(x) = -\cos u(x) + c, \quad (28)$$

e igualmente para las demás partes de las ecuaciones 17. Un caso especial importante



se presenta si  $u(x) = ax$ , en la cual  $a$  es una constante distinta de cero; entonces la ecuación 27 se reduce a

$$D^{-1}a \cos ax = \sin ax + c$$

o bien

$$D^{-1} \cos ax = \frac{\sin ax}{a} + c. \quad (29)$$

Del mismo modo,

$$D^{-1} \sin ax = -\frac{\cos ax}{a} + c. \quad (30)$$

### EJEMPLO 7

Determinar la función cuya derivada es  $\cos 2x$  y cuya gráfica contiene al punto  $(\pi/4, 1)$ .

De acuerdo con la ecuación 29,

$$y = D^{-1} \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x + c, \quad (31)$$

en la cual  $c$  es una constante que se debe calcular. Para hacerlo, sustituimos  $x = \pi/4$  y  $y = 1$  en la ecuación 31:

$$1 = \frac{1}{2} + c.$$

Y por tanto,  $c = \frac{1}{2}$ , y

$$y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \quad (32)$$

es la función que deseábamos. ■

### EJEMPLO 8

Determinar la antiderivada de  $x \sin(3x^2)$ .

Si hacemos que  $u(x) = 3x^2$ , entonces  $u'(x) = 6x$  y

$$x \sin(3x^2) = \frac{1}{6} u'(x) \sin u(x).$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación 28, tenemos que

$$D^{-1} x \sin(3x^2) = \frac{1}{6} \cos u(x) + c = \frac{1}{6} \cos(3x^2) + c.$$

Nótese que lo importante de este ejemplo es que la cantidad que multiplica a  $\sin(3x^2)$  es (excepto por un factor constante) la derivada de  $3x^2$ . En consecuencia, una vez que se identifica a  $u(x)$ , el problema se reduce en forma inmediata a la ecuación 28. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 18, determinar la derivada de la función dada.

1.  $\cos 4x$
2.  $\sin \frac{x}{3}$
3.  $\sin 4x - 3 \cos 2x$
4.  $\sin x \cos 2x$
5.  $x^2 \sin 2x$
6.  $\cot x \csc x$
7.  $\sin^2 2x$
8.  $\frac{x}{1 + \cos 2x}$
9.  $x(\sec x - \tan x)$
10.  $(1 + \cos^2 2x)^{1/2}$
11.  $\frac{1 + \sin x}{x - \cos x}$
12.  $\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$
13.  $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
14.  $\sin \sqrt{1 - x^2}$
15.  $\sin(\cos x)$
16.  $\cos^2(\sin^2 x^2)$
17.  $\tan(\sec^2 x)$
18.  $\cot(\sin 2x)$

En los problemas 19 a 34, hallar una antiderivada de la función dada. En algunos casos se puede simplificar el problema empleando identidades trigonométricas adecuadas.

19.  $\sin 2x$
20.  $2 \sin x$
21.  $2 \cos 3x$
22.  $3 \cos 2x$
23.  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
24.  $\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right), \omega \neq 0$
25.  $\sec \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}$
26.  $\csc^2 \pi x$
27.  $\sin 2x \cos 2x$
28.  $\cos^2 x - \sin^2 x$
29.  $\cos^2 x$
30.  $\sin^2 x$
31.  $x \sin x^2$
32.  $\frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
33.  $(x - \pi) \cos(x - \pi)^2$
34.  $x^2 \sin x^3$

En los problemas 35 a 44, determinar la derivada que se pide.

35.  $D^9 \sin x$
36.  $D^{17} \cos 2x$
37.  $D^{11} \sin \frac{x}{2}$
38.  $D^{326} \cos x$
39.  $\frac{d^2}{dx^2} \tan ax, a \neq 0$
40.  $\frac{d^3}{dx^3} \tan ax, a \neq 0$
41.  $D^2 \sec x$
42.  $D^3 \sec x$
43.  $D^2 \cot 2x$
44.  $D^2 \csc 3x$
45. Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de  $y = 3 + 4 \cos 2x$  en el punto  $(\pi/6, 5)$ .
46. Hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de  $y = \tan 2x$  en el punto  $(\pi/8, 1)$ .
47. La posición de una partícula en movimiento está dada por

$$s = 2 \sin 3t - 3 \cos 2t.$$

Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo  $t$ .

48. La posición de una partícula en movimiento está dada por

$$s = t \sin 2t.$$

Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo  $t$ .

49. Deducir la función cuya derivada es  $\sin 2x - 3 \cos x$  y cuya gráfica contiene al punto  $(\pi/4, -1)$ .
50. Determinar la función cuya gráfica contiene al punto  $(\pi/4, 4)$  y cuya pendiente está dada siempre por  $\cos 2x + \sec^2 x$ .
51. Sea  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \cos x, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Determinar  $a$  y  $b$  de tal modo que  $f$  sea derivable en  $x = \pi/4$ , y determinar  $f'(\pi/4)$ .

52. Sea  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos x, & x \leq \frac{\pi}{3}; \\ b + \sin\left(\frac{x}{2}\right), & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Determinar  $a$  y  $b$  de tal modo que  $f$  sea derivable en  $x = \pi/3$ , y determinar  $f'(\pi/3)$ .

53. Teniendo en consideración al cociente de diferencias adecuado, determinar  $D \cos x$ .

54. Deducir las fórmulas para  $D \cot x$  y  $D \csc x$ .

En los problemas 55 a 58, emplear una aproximación lineal como en la sección 3.4 para estimar la cantidad que se pide. También, determinar el número de decimales correctos en la aproximación.

55.  $\sin(1.6)$

56.  $\cos(0.8)$

57.  $\tan(1.0)$

58.  $\sin(-0.5)$

59. Un excursionista parte de un punto  $P$  y camina alrededor de un lago de 2 mi de radio con una velocidad constante de 3 mi/h (véase figura 3.6.1). Si la posición actual del excursionista es  $R$ , ¿qué tan rápido cambia la longitud de la cuerda  $PR$  cuando  $\theta = \pi/3$ ?

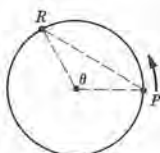


Figura 3.6.1

60. Un extremo de una varilla recta de longitud  $l$  se mueve en un círculo de radio  $r$ , mientras que el otro está forzado a moverse en una línea recta que pasa por el centro del círculo (véase figura 3.6.2). Deducir una relación entre la velocidad angular ( $d\theta/dt$ ) del punto  $P$  y la velocidad rectilínea ( $dx/dt$ ) del punto  $Q$ .

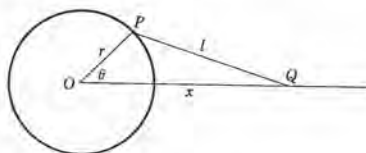


Figura 3.6.2

\*61. Partiendo directamente del cociente de diferencias, demostrar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no es derivable cuando  $x = 0$ .

\*62. Empleando el cociente de diferencias, demostrar que la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es derivable cuando  $x = 0$ , y evaluar  $g'(0)$ .

### 3.7 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

En este capítulo hemos desarrollado algunos resultados que nos permiten determinar derivadas de muchas funciones importantes. En cada caso, la función  $f$  cuya derivada se buscaba se definió mediante una fórmula explícita, como  $f(x) = x^2 + 4$ ,  $f(x) = x \sin x$ , y así sucesivamente. En esta sección describiremos un método que se conoce como derivación implícita, mediante el cual a veces podremos determinar la derivada de una función sin que dicha función esté en forma explícita.

Supongamos que conocemos, o que queremos suponer, que hay una función derivable  $f$  tal que si  $y = f(x)$ , entonces  $x$  y  $y$  satisfacen una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$



Sin embargo, supongamos también que es impráctico, o imposible, determinar una fórmula para  $f(x)$ . ¿Podemos, a pesar de todo, obtener una ecuación para  $f'(x)$ ? Un medio para manejar problemas de este tipo es la derivación implícita. La presentaremos primero con dos ejemplos.

### EJEMPLO 1

Supongamos que hay una función derivable  $y = f(x)$  tal que  $x$  y  $y$  satisfacen la ecuación

$$y^3 + 2y - \sin \pi x - 3 = 0, \quad (2)$$

y también tal que  $f(2) = 1$ . Calcular el valor de  $f'(2)$ .

Primero comprobaremos que el punto  $(2, 1)$  satisface en realidad la ecuación 2:

$$(1)^3 + 2(1) - \sin 2\pi - 3 = 1 + 2 - 0 - 3 = 0.$$

Sin determinar primero una fórmula para  $f(x)$  podemos definir la derivada  $f'(2)$  derivando ambos lados de la ecuación 2. Como se supone que  $y$  es una función derivable de  $x$ , la derivada de  $y^3$  con respecto a  $x$ , de acuerdo con la regla de la cadena, es  $3y^2y'$ . Así, al derivar cada término en la ecuación 2, obtenemos

$$3y^2y' + 2y' - \pi \cos \pi x = 0, \quad (3)$$

de modo que

$$y' = \frac{\pi \cos \pi x}{2 + 3y^2}. \quad (4)$$

De otra manera, se puede escribir

$$f'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{2 + 3[f(x)]^2}. \quad (5)$$

Sustituyendo  $x = 2$  en la ecuación 5, y notando que  $f(2) = 1$ , encontramos que

$$f'(2) = \frac{\pi \cos 2\pi}{2 + 3(1)^2} = \frac{\pi}{5}. \blacksquare$$

### EJEMPLO 2

Calcular la pendiente de la tangente a la gráfica de

$$2x^2y^2 + y^3 \cos \pi x - 1 = 0 \quad (6)$$

en el punto (1, 1).

Observaremos primero que el punto (1, 1) pertenezca a la gráfica. A continuación *supondremos* que hay una función  $f$  derivable tal que  $y = f(x)$  satisface a la ecuación 6 y tal que  $f(1) = 1$ . Luego entonces  $f'(1)$  es la pendiente que se requiere. Para determinar a  $y' = f'(x)$ , podemos proceder como en el ejemplo anterior, y derivar cada término de la ecuación 6 con respecto a  $x$ . En este caso, se necesitan la regla para el producto y la regla de la cadena, porque cada término del lado izquierdo de la ecuación 6 es un producto de dos funciones de  $x$ . Al derivar la ecuación 6 obtenemos

$$y^2 \frac{d}{dx} (2x^2) + 2x^2 \frac{d}{dx} (y^2) + \cos \pi x \frac{d}{dx} (y^3) + y^3 \frac{d}{dx} (\cos \pi x) - \frac{d}{dx} (1) = 0,$$

o sea

$$4xy^2 + 2x^2 2y \frac{dy}{dx} + \cos \pi x 3y^2 \frac{dy}{dx} + y^3 (-\operatorname{sen} \pi x) \pi = 0,$$

o también

$$(4x^2y + 3y^2 \cos \pi x) \frac{dy}{dx} + 4xy^2 - \pi y^3 \operatorname{sen} \pi x = 0. \quad (7)$$

Si  $y \neq 0$ , podemos simplificar el factor  $y$  de cada término de la ecuación 7. Entonces, si  $4x^2 + 3y \cos \pi x \neq 0$ , se infiere que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi y^2 \operatorname{sen} \pi x - 4xy}{4x^2 + 3y \cos \pi x}. \quad (8)$$

En el punto (1, 1), se obtiene

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = \frac{\pi(1)^2 \operatorname{sen} \pi - 4(1)(1)}{4(1)^2 + 3(1) \cos \pi} = \frac{0 - 4}{4 - 3} = -4, \quad (9)$$

que es la pendiente requerida de la recta tangente. ■

Los ejemplos anteriores muestran el poder de la derivación implícita como medio de calcular derivadas difíciles o imposibles de obtener con otros métodos. Por otro lado, también hay determinados inconvenientes asociados con la derivación implícita que no debemos pasar por alto. Supongamos que hay una función derivable  $y = f(x)$  que satisface una relación implícita de la forma (1)

$$F(x, y) = 0.$$

Por ejemplo, las ecuaciones 2 y 6 son de esta forma. Al calcular  $y'$  por derivación implícita, se da el caso normal, como en los ejemplos 1 y 2, de que la ecuación resultante para  $y'$  involucra tanto a  $x$  como a  $y$ . Esto es,  $y'$  es de la forma

$$y' = g(x, y). \quad (10)$$

Para obtener a  $y'$  como función sólo de la variable independiente  $x$ , debemos despejar a  $y$  de la ecuación 1 en términos de  $x$ ; esto es, debemos determinar a  $f(x)$ . A continuación debemos sustituir el resultado en el lado derecho de la ecuación 10. Esto es imposible en general, como en los ejemplos anteriores. Sin embargo, para determinado valor de  $x$ , digamos  $x = x_0$ , podemos, si es necesario, calcular el valor  $y_0$  correspondiente en forma numérica con la ecuación 1, para sustituir después los valores de  $x_0$  y  $y_0$  en la ecuación 19. Este proceso se puede repetir para cada valor de  $x_0$  que nos interese. Entonces, aunque en general no podemos obtener una fórmula analítica explícita para  $y'$  sólo en términos de  $x$ , sí podemos obtener a  $y'$  para cada valor particular de  $x$  que necesitemos. Los ejemplos 1 y 2 ilustran esta afirmación. Así, en el ejemplo 1 calculamos  $f'(2)$ , pero no obtuvimos una fórmula general para  $f'(x)$ . Igualmente, en el ejemplo 2 calculamos a  $dy/dx$  sólo para  $x = 1$ .

### EJEMPLO 3

Supongamos que hay una función derivable  $y = f(x)$  tal que

$$y^3 + y = x^2 + 1, \quad (11)$$

y tal que  $f(3) = 2$ . Calcular  $y'$  y  $y''$  en el punto  $x = 3$ ,  $y = 2$ .

De nuevo, primero comprobaremos que el punto  $(3, 2)$  satisface la ecuación 11. A continuación, derivando en forma implícita a esa ecuación, obtenemos

$$3y^2y' + y' = 2x,$$

o sea

$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}. \quad (12)$$

Por tanto

$$y' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=2}} = \frac{2(3)}{3(2^2) + 1} = \frac{6}{13}. \quad (13)$$

Para calcular  $y''$  debemos derivar la ecuación 12 con respecto a  $x$ . Al derivar el lado derecho de esta ecuación debemos recordar que hemos supuesto que  $y$  es una función derivable de  $x$ . Empleando la regla para el cociente y la regla de la cadena para derivar la ecuación 12, encontramos que

$$y'' = \left( \frac{2x}{3y^2 + 1} \right)'$$



$$= \frac{(3y^2 + 1)(2) - (2x)(6yy')}{(3y^2 + 1)^2}. \quad (14)$$

Sustituimos  $x = 3$ ,  $y = 2$ , y  $y' = \frac{6}{13}$  en la ecuación 14 para obtener

$$y'' \Big|_{\substack{x=3 \\ y=2}} = -\frac{94}{2197}.$$

Nótese que este proceso se pudo haber continuado para obtener derivadas de orden superior,  $y'''$ ,  $y''''$ , etcétera, aunque los cálculos se hacen más y más complicados. ■

Un problema que a veces es serio al emplear la derivación implícita, es que no necesita ser derivable la función  $y = f(x)$  que satisface la ecuación dada de la forma (1). Por ejemplo, se tiene la ecuación

$$x^2 + y^2 + 9 = 0. \quad (15)$$

Procediendo a derivar formalmente esta ecuación, obtenemos

$$2x + 2yy' = 0$$

y por tanto, aparentemente

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (16)$$

Sin embargo, como el lado izquierdo de la ecuación 15 es positivo para todo valor real de  $x$  y  $y$ , es claro que no hay función real  $y = f(x)$  que satisfaga a la ecuación 15. Así, la derivación implícita, empleada indiscriminadamente, nos ha conducido a una conclusión absurda: tenemos una fórmula que parece ser una derivada, pero no existe la función que se supone estamos derivando. En realidad, el resultado (16) es válido si consideramos a  $x$  y  $y$  como variables complejas. Sin embargo, queda el peligro de aplicar la derivación implícita a una ecuación a la cual en realidad no la satisfaga función alguna de variable real, y no se debe pasar por alto este peligro. El problema es que cuando la ecuación 1 es complicada, puede no ser fácil decir si existe o no una función real, derivable  $y = f(x)$  que la satisfaga. Este es el motivo por el que en cada ejemplo hemos confirmado que existen valores reales de las variables que satisfagan las ecuaciones que se dieron.

Otro hecho que se debe tener en cuenta es que pueden existir muchas funciones derivables que satisfagan una ecuación de la forma (1). Por ejemplo, a la ecuación

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (17)$$

no sólo la satisfacen

$$y = f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \leq x \leq 3 \quad (18)$$

sino también

$$y = f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \leq x \leq 3 \quad (19)$$

En realidad, a la ecuación 17 la satisface un número infinito de otras funciones como las siguientes:

$$y = f_3(x) = \begin{cases} -\sqrt{9 - x^2}, & -3 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{9 - x^2}, & 0 < x \leq 3. \end{cases} \quad (20)$$

En las figuras 3.7.1, 3.7.2 y 3.7.3 se muestran las gráficas de  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , respectivamente. Nótese que  $f_3$  no es continua en el origen y por tanto no es derivable allí. Sin embargo, la expresión  $y' = -x/y$  obtenida al derivar la ecuación 17 da en forma correcta la derivada de cada una de esas funciones en cada punto en el que la función es derivable. Esto es, si  $y = f(x)$  satisface la ecuación 17 y es derivable en el punto  $x$ , entonces

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}. \quad (21)$$

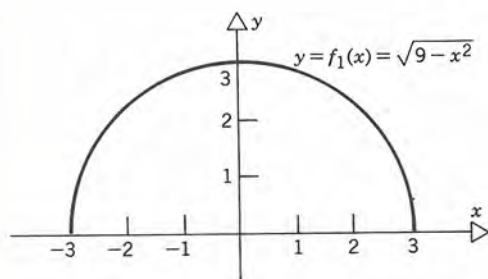


Figura 3.7.1

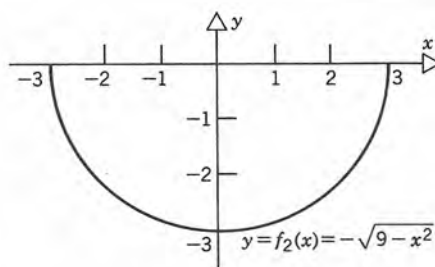


Figura 3.7.2

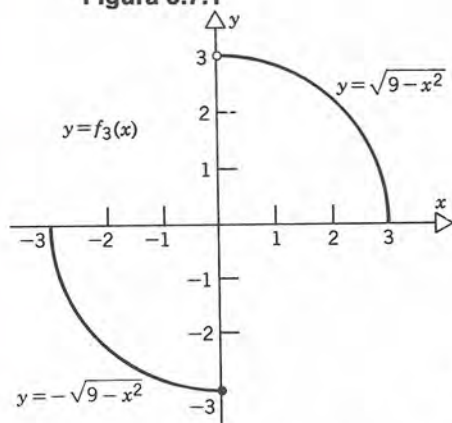


Figura 3.7.3

Resumiendo, la derivación implícita es un procedimiento extremadamente útil. En muchos casos nos permite evaluar derivadas que no serían accesibles si primero tuviéramos que obtener una fórmula explícita para la función que deseamos derivar.

Sin embargo, se debe emplear sabiendo que hay algunas cuestiones delicadas involucradas, como las que acabamos de tocar. Textos más avanzados presentan teoremas que contestan algunas de estas cuestiones. Para el estudiante que aprende por primera vez la derivación implícita, aconsejamos que se asegure que haya un punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada, calcular la derivada sólo en ese punto, y emplear los resultados sólo cuando parezcan tener sentido; por ejemplo, cuando el denominador sea distinto de cero.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10, hay una función derivable  $y = f(x)$  que satisface la ecuación dada y cuya gráfica contiene al punto dado.

(a) Comprobar que el punto dado satisface la ecuación dada.

(b) Emplear la derivación implícita para determinar una expresión para  $dy/dx$ ; esta expresión puede depender tanto de  $x$  como de  $y$ .

(c) Determinar el valor de  $dy/dx$  en el punto dado.

1.  $x^2 - xy + y^2 = 1$ ;  $(-1, -1)$

2.  $x^2 + 4xy - y^2 = 19$ ;  $(2, 3)$

3.  $x^2 + xy + y^2 = 12 - x^2 - y^2$ ;  $(1, 2)$

4.  $\frac{1 - xy}{1 + x^2y^2} = 1$ ;  $(-1, 1)$

5.  $y^3 + y - x = 1$ ;  $(1, 1)$

6.  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ ;  $\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

7.  $(x^2 + y^2)^{3/2} = 2xy$ ;  $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

8.  $y \sin 2x - x \sin y = \frac{\pi}{4}$ ;  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

9.  $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ ;  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

10.  $3x \sin \pi y + y \sin \pi x = -2$ ;  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

En los problemas 11 a 14, hay una función derivable  $y = f(x)$  que satisface la ecuación dada, y cuya gráfica contiene al punto dado. Emplear la derivación implícita para calcular el valor de  $d^2y/dx^2$  en el punto dado.

11.  $x^2 - xy + y^2 = 1$ ;  $(-1, -1)$

12.  $x^2 + 4xy - y^2 = 19$ ;  $(2, 3)$

13.  $y^3 + y - x = 1$ ;  $(1, 1)$

14.  $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ ;  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

En los problemas 15 a 18, deducir la ecuación de la tangente a la curva dada en el punto dado.

15.  $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 1$ ;  $(2, 1)$

16.  $x^3 - 2xy + y^3 = 11$ ;  $(-1, 2)$

17.  $x \sin y + y \cos x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ;  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

18.  $x^3 - y^3 - 3xy = 1$ ;  $(2, 1)$

En los problemas 19 a 22, deducir la ecuación de la normal (perpendicular) a la curva dada en el punto dado.

19.  $3x^2 - 4xy + 2y^2 = 9$ ;  $(1, -1)$

20.  $x^2y - xy + xy^2 - 2x + 3y + 4 = 0$ ;  $(1, -2)$

21.  $2\pi \sin x \sin y = \sqrt{3}(x + y)$ ;  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

22.  $x^3 + y^3 + 6xy = -5$ ;  $(-1, 2)$

23. En un sistema vibratorio de resorte - masa, la frecuencia  $\omega$  y la amplitud  $A$  se relacionan mediante la ecuación

$$\omega^2 = 1 + \frac{1}{8}A^2 - \frac{1}{A}.$$

Determinar la razón de cambio de  $A$  con respecto a  $\omega$ .



24. En determinado sistema mecánico, la frecuencia  $\lambda$  de vibración se relaciona con un parámetro  $k$  del soporte mediante la ecuación

$$\lambda \cos \lambda + k \sin \lambda = 0.$$

Determinar una ecuación para  $d\lambda/dk$ .

25. Supongamos que la ecuación  $x = f(y)$  define implícitamente a  $y$  como función de  $x$ . Esto es, hay una función  $y = g(x)$  tal que  $x = f(y) = f[g(x)]$ . A la función  $g$  se le conoce como la *función inversa* de  $f$ ; las funciones inversas se describen más en la sección 8.1. Derivar en forma implícita a  $x = f(y)$  con respecto a  $x$  y demostrar que  $dy/dx = 1/f'(y)$ ; y por tanto,  $g'(x) = 1/f'(y)$ .

En los problemas 26 a 29, hacer lo indicado en el problema 25 para determinar  $dy/dx$ ; expresar la respuesta sólo en términos de  $x$ .

26.  $x = y^2$ ;  $y \leq 0$ ,  $0 \leq x < \infty$

27.  $x = \sqrt{y+2}$ ;  $y \geq -2$ ,  $0 \leq x < \infty$

28.  $x = \sin y$ ;  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

29.  $x = \tan y$ ;  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\infty < x < \infty$

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 6, emplear la definición 3.1.1 para calcular la derivada de la función dada.

1.  $f(x) = x + \sqrt{x}$

2.  $g(x) = x^{3/2} + \frac{1}{x}$

3.  $h(x) = \frac{1}{x+1}$

4.  $g(s) = \frac{s}{s^2+1}$

5.  $f(t) = \sqrt{t} + \frac{1}{t}$

6.  $f(x) = x^3 + \sqrt{x} + 2$

En los problemas 7 a 14, (a) determinar  $f'(x)$ ; (b) deducir la ecuación de la tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(4, f(4))$ .

7.  $f(x) = 3x^2 - x^{5/2}$

8.  $f(x) = -x^{3/2} + x^2$

9.  $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$

10.  $f(x) = x(x^3 - 1)$

11.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

12.  $f(x) = \frac{x^{1/2}}{1+x}$

13.  $f(x) = \frac{x^{3/2}}{x^2+1}$

14.  $f(x) = -\frac{x^2}{\sqrt{x}-1}$

En los problemas 15 a 18, determinar  $f'(x)$  y todos los puntos para los que  $f'(x) = 0$ .

15.  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

16.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

17.  $f(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{x^2-4}$

18.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+9}$

En los problemas 19 a 22, (a) determinar la antiderivada de la función dada que pasa por  $(1, -2)$ ; (b) calcular la pendiente de la tangente a  $y = f(x)$  en el punto  $(4, f(4))$ .

19.  $f(x) = x^3 + 3$

20.  $f(x) = \sqrt{x} - 2$

21.  $f(x) = x^{2/3} - \frac{1}{x^2}$

22.  $f(x) = x^{3/4} + \frac{1}{x^3}$

En los problemas 23 y 24, (a) determinar el polinomio cúbico  $f(x)$  que satisface las condiciones dadas; (b) determinar un polinomio cuadrático  $g(x) = x^2 + px + q$  tal que la función

$$H(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq -2 \\ g(x), & x < -2 \end{cases}$$

sea derivable.

23.  $f(0) = 2$ ;  $f'(0) = -4$ ;  $f''(1) = 2$ ;  $f'''(1) = 12$ .

24.  $f(6) = 8$ ;  $f'(2) = 0$ ;  $f''(3) = -1$ ;  $f'''(-1) = 1$ .

En los problemas 25 a 38, determinar la derivada que se indica.

$$25. f'(x) \text{ si } f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^{1/2} + 3}, \quad x > 0$$

$$26. Dy \text{ si } y = \frac{(x^3 + 1)^2 + 1}{(x - 1)^2}, \quad x \neq 1$$

$$27. \frac{dg}{dx} \text{ si } g(y) = \cos(3y^2 - 1); \\ y(x) = x^{1/2} - 1, \quad x > 0$$

$$28. \frac{dy}{dt} \text{ si } y(x) = \sin(2x^{1/2}); x(t) = 3t^4 + 2$$

$$29. f''(x) \text{ si } f(x) = \cos(x^{3/2} + 1), \quad x > 0$$

$$30. \frac{d^2g}{dz^2} \text{ si } g(z) = \sin\left(1 - \frac{1}{z}\right), \quad z \neq 0$$

$$31. \frac{dh}{dt} \text{ si } h(x) = \frac{x^2 - 1}{x}; x(t) = t^2 + 1$$

$$32. \frac{dy}{dt} \text{ si } y(x) = \frac{x^{3/2}}{1 + x}; \\ x(t) = t^3 - 2, \quad t > 1$$

$$33. f'(x) \text{ si } f(x) = \frac{\cos(ax^2 + b)}{x^2 - 1}, \quad x > 1$$

$$34. Dw(x) \text{ si } w(x) = \frac{\tan(a\sqrt{x})}{x^2}, \\ 0 < |x| < \frac{1}{a^2}, \quad a \neq 0$$

$$35. \frac{dh}{ds} \text{ si } h(y) = \cos(y^3 - 1); \\ y(s) = 4 + \sin^2(s)$$

$$36. \frac{dg}{dt} \text{ si } g(x) = \sin^2(x^2 + 1); \\ x(t) = 2 - \tan(t^{1/2}), \quad 0 < t < 1$$

$$37. Dg(x) \text{ si } g(x) = \cos(3x^{3/2})\sec[(x - \pi)^2]$$

$$38. f'(x) \text{ si } f(x) = \sin^2[(x^{1/2} - 4)^2 + \cos(2x^2)]$$

En los problemas 39 a 46, determinar la antiderivada de la función dada.

$$39. 2 \sin 3x \qquad 40. 4 \cos(-x)$$

$$41. 2 \sin 2x \cos 2x \qquad 42. 5 \cos 5x \sin 5x$$

$$43. 3x^2 \sin(x^3 + 1) \qquad 44. (x^3 + 1)\cos\left[\left(\frac{x^4}{4}\right) + x\right]$$

$$45. -(\sin x)^{-2} \cos x \qquad 46. x(\sin x^2)^{-2} (\cos x^2)$$

En los problemas 47 a 50, (a) determinar la función recta tangente y la función residuo para cualquier valor de  $x_0$ ; (b) hacer una estimación de  $f(x)$  en el valor dado de  $x$  empleando una aproximación lineal adecuada; (c) calcular el error implícito en esta estimación y calcular

$$\left| \frac{f(x) - T(x; x_0)}{f(x_0)} \right| = \text{error relativo.}$$

$$\textcircled{47}. f(x) = x^3 + \sqrt{x}; \quad x = \frac{15}{16}$$

$$\textcircled{48}. f(x) = 2x^{1/3} - x^{-1}; \quad x = -\frac{17}{2}$$

$$\textcircled{49}. f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}; \quad x = \frac{80}{9}$$

$$\textcircled{50}. f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^{1/4}}; \quad x = \frac{257}{16}$$

En los problemas 51 a 54, suponer que hay una función derivable  $y = f(x)$  que satisface la relación dada. Entonces, (a) comprobar los pares dados de coordenadas y decir cuáles satisfacen la ecuación dada; (b) determinar las derivadas especificadas en todos los puntos de la parte (a) que satisfacen la ecuación.

$$51. x^2 + xy^2 = 3$$

$$(a) (1, \sqrt{2}); (3, -\sqrt{2}); \left(4, \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$(b) y'; y''$$

$$52. x^3 + 2xy^3 - 4y^2 = 1$$

$$(a) (1, -2); (1, 2); (1, 3)$$

$$(b) y'$$

$$53. x^2y + xy^2 = 2$$

$$(a) (1, -1); (1, 1); (-1, -1)$$

$$(b) y'; y''$$

$$54. 1 - x^2y = x^2 + y^2$$

$$(a) (2, -1); (2, 1); (-1, -1)$$

$$(b) y'$$

# CÁLCULO

## Capítulo 4

### Aplicaciones de la derivada

En muchas aplicaciones es necesario calcular los valores máximos o mínimos de alguna función en especial; esto es, para una función  $f$  dada cuyo dominio es  $D$ , localizar aquellos puntos en  $D$  para los cuales  $f$  asume sus valores máximos o mínimos para, entonces, evaluar  $f$  en esos puntos. Por ejemplo, se puede necesitar la determinación de cómo escoger una ruta entre dos puntos que se pueda recorrer en un tiempo mínimo, o cómo escoger el precio de un producto manufacturado para hacer máximas las ganancias, o cómo diseñar un recipiente de forma y volumen dados, pero con área mínima. Unos pocos de los problemas de este tipo general fueron resueltos en la antigüedad, pero la mayor parte no se podían manejar con eficiencia con los métodos de que se disponía entonces. Sin embargo, el descubrimiento del cálculo en el siglo diecisiete, dio un medio sencillo de resolver esos problemas, como lo indicaremos en este capítulo.

---

#### 4.1 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y ALGUNAS DE SUS CONSECUENCIAS

Antes de comenzar con un tratamiento detallado de problemas de optimización en la sección siguiente, necesitamos desarrollar algunas propiedades adicionales de las funciones derivables cuyo empleo será indispensable. Comenzaremos con un estudio de los máxi-



mos y mínimos locales. Una función  $f$  cuyo dominio es un intervalo  $I$  tiene un **máximo local, o relativo**, en el punto  $c$  interior si

$$f(x) \leq f(c) \quad (1)$$

para toda  $x$  en el intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  para alguna  $\delta > 0$ . Naturalmente,  $\delta$  también debe ser lo suficientemente pequeña para que todos los puntos en  $(c - \delta, c + \delta)$  estén en  $I$ . En este caso,  $c$  es conocido como un *punto máximo local o relativo*, y  $f(c)$  es el *valor máximo local, o relativo*. La figura 4.1.1a muestra la gráfica de una función con un máximo local en  $c$ . Igualmente,  $f$  tiene un **mínimo local, o relativo**, en  $c$  si

$$f(x) \geq f(c) \quad (2)$$

para toda  $x$  en algún intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$ . En este caso,  $c$  es un *punto mínimo local o relativo*, y  $f(c)$  es el *valor mínimo local, o relativo* (véase figura 4.1.1b). Un punto  $c$  que es punto máximo o mínimo local se llama **punto extremo local**. Lo más importante que se debe recordar respecto a los puntos extremos locales es que se hacen comparaciones entre  $f(c)$  y  $f(x)$  sólo en puntos cercanos.

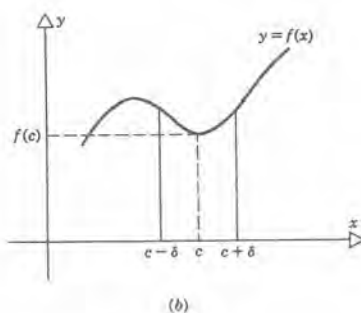
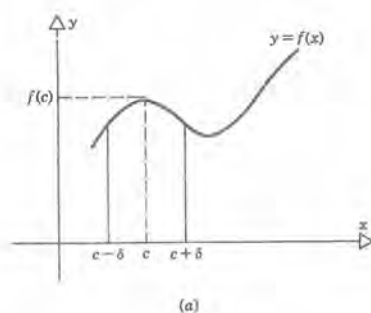


Figura 4.1.1 (a) Punto máximo relativo

(b) Punto mínimo relativo.

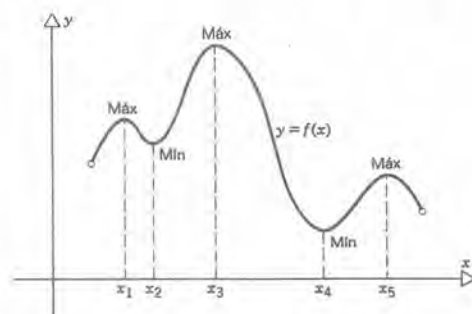


Figura 4.1.2

Para ejemplificar más estas definiciones, veamos la gráfica de la función  $f$  en la figura 4.1.2. Los puntos  $x_1$ ,  $x_3$  y  $x_5$  son todos puntos máximos locales, y los puntos  $x_2$  y  $x_4$  son puntos mínimos locales. Por ejemplo, nótese que  $x_5$  es un punto máximo local aun cuando haya muchos otros puntos en el dominio de  $f$  para los cuales  $f(x)$  es mayor que  $f(x_5)$ . Hasta hay un punto mínimo local,  $x_2$ , para el cual  $f(x)$  es mayor que en el punto máximo local  $x_5$ . Sin embargo, la cumbre de una montaña es máximo local aun cuando haya montañas más altas, o hasta valles más altos, en otros lugares.

Hay una relación estrecha entre los puntos extremos locales de una función y su primera derivada. En realidad, para una función como la de la figura 4.1.3, es geomé-

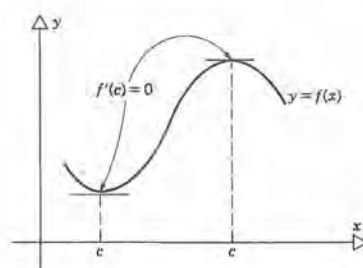


Figura 4.1.3

tricamente plausible que en un punto  $[c, f(c)]$  para el que  $f$  tiene un máximo o mínimo local, la recta tangente sea horizontal y que, por tanto, la derivada  $f'(c)$  sea cero. Se sugiere la misma conclusión por intuición física en el caso de una partícula que se proyecta en dirección vertical hacia arriba desde la superficie de la tierra. Es plausible que la partícula alcance su altura máxima cuando su velocidad cambia de positiva a negativa; esto es, cuando su velocidad es cero. Recuerdese que empleamos este argumento en el ejemplo 6 de la sección 3.3. La relación entre la primera derivada y el máximo o mínimo local se enuncia con precisión en el siguiente teorema:

### Teorema 4.1.1

Supongamos que la función  $f$  tiene un máximo o un mínimo local en el punto  $c$ . Si  $c$  es un punto interior del dominio de  $f$  y  $f$  es derivable en  $c$ , entonces  $f'(c) = 0$ .

**Demostración.** Como  $f$  es derivable en  $c$ , el cociente de diferencias

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (3)$$

debe tener el límite  $f'(c)$  cuando  $x \rightarrow c$ . Esto significa que los límites por la izquierda y por la derecha del cociente de diferencias deben ser iguales a  $f'(c)$ . Veamos primero el caso en el que  $c$  es un punto máximo local de  $f$ . Entonces  $f(x) \leq f(c)$  para  $x$  cerca

de  $c$ , y el numerador de la ecuación 3 no es positivo. Si  $x > c$ , entonces el denominador de la ecuación 3 es positivo, y el cociente de diferencias no es positivo. Por tanto, si se deja que  $x \rightarrow c$  desde la derecha, llegamos a la conclusión (por el teorema 2.3.5) de que  $f'(c) \leq 0$ . Por otro lado, si  $x < c$ , entonces el cociente de diferencias no es negativo y, al tomar el límite cuando  $x \rightarrow c$  desde la izquierda llegamos a la conclusión de que  $f'(c) \geq 0$ . Como  $f$  es derivable, los dos límites deben ser iguales, y esto sólo es posible si  $f'(c) = 0$ . La demostración es semejante si  $c$  es un punto de mínimo local.  $\square$

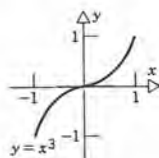


Figura 4.1.4

Nótese que es importante que  $c$  sea un punto interior, porque en la demostración fue necesario tomar el límite del cociente de diferencias (3) desde ambos lados de  $c$ . Nótese también que no es cierto el recíproco del teorema 4.1.1. Esto es, si  $f'(c) = 0$ , el punto  $c$  no necesariamente es un punto extremo de  $f$ . Por ejemplo, considere la función  $f(x) = x^3$  en el intervalo  $(-1, 1)$  (véase figura 4.1.4). Está claro que  $f'(x) = 3x^2$  es cero cuando  $x = 0$ , pero este punto no es punto máximo ni mínimo de  $f$  en  $(-1, 1)$ .

El resultado siguiente se conoce como el teorema de Rolle; da algunas condiciones sencillas que aseguran que existe un punto para el cual la pendiente de la tangente es cero.

### Teorema 4.1.2

#### (Teorema de Rolle)

Sea  $f$  una función que satisface las siguientes condiciones:

1.  $f$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ ;
2.  $f$  es derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ ;
3.  $f(a) = f(b)$ .

Entonces, existe al menos un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f'(c) = 0. \quad (4)$$

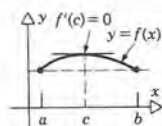


Figura 4.1.5  
Interpretación  
geométrica del  
teorema de Rolle.

La figura 4.1.5 sugiere que el teorema de Rolle es geoméricamente plausible. La gráfica de una función  $f$  como la que se ve en esa figura, tiene un valor dado en  $a$ , y después asume ese mismo valor en  $b$ , y cambia de dirección en algún punto intermedio  $c$ . En este punto la tangente debe ser horizontal y, por tanto,  $f'(c) = 0$ . Sin embargo,

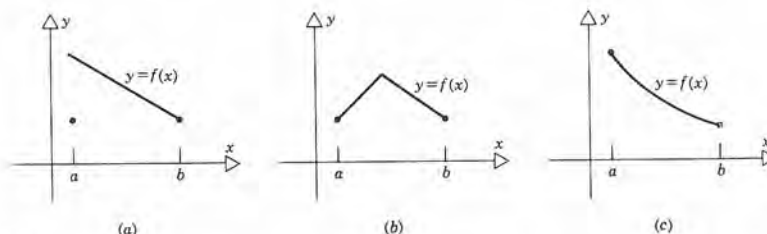


Figura 4.1.6 (a)  $f$  no es continua en  $[a, b]$ . (b)  $f$  no es derivable en  $(a, b)$ . (c)  $f(a) \neq f(b)$ .



es necesaria cada una de las tres condiciones del teorema 4.1.2 para que la conclusión sea segura. En la figura 4.1.6 vemos gráficas de tres funciones, y cada una de ellas viola una de las hipótesis del teorema de Rolle. Nótese que en ninguno de esos casos hay un punto  $c$  en el que  $f'(c) = 0$ . También nótese que puede haber más de un punto para los cuales es válida la conclusión del teorema de Rolle (véase figura 4.1.7).

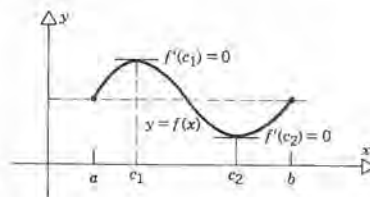


Figura 4.1.7

**Demostración del teorema de Rolle.** Como  $f$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  tiene, de acuerdo con el teorema 2.6.2, un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo. Si el máximo y el mínimo se presentan en los extremos, entonces los valores máximo y mínimo de  $f$  son iguales, y  $f$  es una función constante. Entonces  $f'(x) = 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , y podemos seleccionar a  $c$  como cualquier punto que deseemos en  $(a, b)$ .

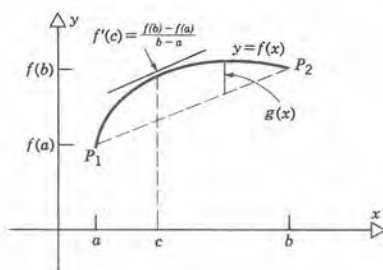
Por otro lado, si  $f$  no es constante, entonces debe tener un punto máximo o un punto mínimo, o ambos, en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Sea  $c$  el punto máximo o mínimo. Entonces, en el punto  $c$  se satisfacen las condiciones del teorema 4.1.1 y, por tanto,  $f'(c) = 0$ , con lo cual se completa la demostración.  $\square$

Si vemos de nuevo a las figuras 4.1.5 y 4.1.7, observaremos la siguiente interpretación geométrica del teorema de Rolle: bajo las condiciones dadas hay al menos un punto en el que la tangente a la gráfica es paralela al segmento de recta que une a los puntos extremos de la gráfica. Esta observación conduce a una generalización del teorema de Rolle, como se ve en la figura 4.1.8. Aunque  $f(b) \neq f(a)$ , todavía hay un punto  $c$  en  $(a, b)$  y un punto correspondiente  $[c, f(c)]$  en la gráfica para el cual la tangente es paralela al segmento de recta que une los extremos  $[a, f(a)]$  y  $[b, f(b)]$ . Como la pendiente de este segmento de recta es  $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ , llegamos al siguiente resultado, al cual se le conoce como el teorema del valor medio.\*

\* El teorema de Rolle y el teorema del valor medio, junto con la propiedad del valor intermedio de las funciones continuas (teorema 2.6.3), son ejemplos de los *teoremas de existencia*, en matemáticas. Éstas aseguran la existencia de un número que tiene determinada propiedad pero, como regla, no proporcionan los medios para calcular el número.

Michel Rolle demostró el teorema que lleva su nombre, sólo para polinomios. Rolle (1652-1719) fue un matemático francés, conocido en su tiempo principalmente por sus trabajos en álgebra, pero hoy se le recuerda casi únicamente por el resultado del teorema 4.1.2.

El teorema del valor medio fue publicado en 1797 por Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Lagrange fue, entre los matemáticos del siglo dieciocho, superado sólo por Euler. Nació en Turín, de ascendencia franco-italiana, y fue reconocido antes de sus veinte años por su método original del cálculo de variaciones. Llegó a ser profesor en la Escuela Real de Artillería en Turín en 1755, fue seleccionado para suceder a Euler en la Academia de Ciencias de Berlín en 1766, y fue llamado por la Academia de Ciencias de París en 1787.



**Figura 4.1.8**  
Interpretación geométrica  
del teorema de valor medio.

### Teorema 4.1.3

#### (Teorema del valor medio)

Sea  $f$  una función que satisface las condiciones siguientes:

1.  $f$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ ;
2.  $f$  es derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

Entonces, existe al menos un punto  $c$  en  $(a, b)$  para el cual

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (5)$$

De nuevo, ejemplos como los de la figura 4.1.6a y 4.1.6b demuestran que las hipótesis dadas son necesarias para asegurar la conclusión. También, como en el teorema de Rolle, puede haber más de un punto  $c$  en  $(a, b)$  para los cuales es válida la ecuación 5.

**Demostración del teorema del valor medio.** Podemos reducir el problema a uno que ya resolvimos, construyendo una función relacionada con  $f$  que satisfaga las hipótesis del teorema de Rolle. Debemos poner atención especial a la tercera hipótesis de éste. Esto es, debemos buscar una función adecuadamente suave que tome los mismos valores en  $a$  y en  $b$ . Una posibilidad es la función  $g$  que describe la diferencia vertical entre la gráfica de  $y = f(x)$  y la del segmento de recta  $P_1P_2$  de la figura 4.1.8. La ecuación de la recta que pasa por  $P_1$  y  $P_2$  es

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a). \quad (6)$$

Por tanto, la función  $g$  está definida por la ecuación

---

Su trabajo en mecánica, ecuaciones diferenciales y en el cálculo de variaciones fue de amplios alcances y de importancia fundamental. Su libro más célebre, publicado en 1788, es el *Traité de Mécanique Analytique*, una elegante presentación matemática de los avances de un siglo en mecánica newtoniana.

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a). \quad (7)$$

Como  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio, se infiere que  $g$  satisface las dos primeras hipótesis del teorema de Rolle. Además, un cálculo sencillo demuestra que  $g(a) = g(b) = 0$ . Por tanto, el teorema de Rolle se aplica a  $g$  y se tiene que hay un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . Derivando la ecuación 7 vemos que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (8)$$

Haciendo que  $x = c$  y que  $g'(c) = 0$ , obtenemos

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de donde la consecuencia inmediata es la ecuación 5, con lo que queda demostrado el teorema del valor medio.  $\square$

Nótese que el teorema del valor medio no ubica explícitamente al punto  $c$ . De hecho, casi nunca es importante determinar este punto en casos específicos. Lo que es importante en casi todas las aplicaciones del teorema del valor medio, o del teorema de Rolle, es la existencia de ese punto, y no su localización exacta. Los ejemplos siguientes hacen resaltar dos formas en las que se usan a veces esos teoremas.

## EJEMPLO 1

Demostrar que la función

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + k \quad (9)$$

tiene cuando mucho un cero real, independientemente del valor de la constante  $k$ .

Podemos llegar a este resultado por reducción al absurdo. Supongamos que hay dos valores distintos  $x_1$  y  $x_2$  para los cuales  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ . Para definir, supongamos que  $x_1 < x_2$ . Entonces, de acuerdo con el teorema de Rolle, debe existir un punto  $c$  en el intervalo  $(x_1, x_2)$ , para el cual  $f'(c) = 0$ . Sin embargo, calculando  $f'(x)$  tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x + 6 \\ &= 3(x^2 + 2x + 2) \\ &= 3[(x + 1)^2 + 1]. \end{aligned} \quad (10)$$

De la ecuación 10 es claro que  $f'(x)$  nunca es cero. Por tanto, no existe tal punto  $c$  y la hipótesis de que  $f$  tiene dos ceros distintos no se puede sostener. Por tanto,  $f$  puede tener cuando mucho un cero en  $(-\infty, \infty)$ .

De hecho,  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , y  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Como  $f$  es continua en  $(-\infty, \infty)$ , de acuerdo con la propiedad del valor intermedio (teorema 2.6.3)



$f$  debe asumir el valor cero al menos una vez. Por tanto, llegamos a la conclusión de que  $f$  tiene exactamente un cero real en  $(-\infty, \infty)$ . ■

## EJEMPLO 2

Demostrar que

$$|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad (11)$$

para cualesquiera números reales  $x_1$  y  $x_2$ .

Supongamos que  $x_2 > x_1$ . Entonces,  $f(x) = \sin x$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[x_1, x_2]$ . En consecuencia,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

o sea

$$\sin x_2 - \sin x_1 = (\cos c)(x_2 - x_1), \quad (12)$$

para alguna  $c$  en  $(x_1, x_2)$ . Tomando valores absolutos en los dos lados de la ecuación 12 obtenemos

$$|\sin x_2 - \sin x_1| = |\cos c| |x_2 - x_1|.$$

Se infiere la ecuación 11, porque  $|\cos c| \leq 1$  independientemente del valor de  $c$ . Un argumento semejante conduce a la misma conclusión en el caso de  $x_2 < x_1$ . Finalmente, la igualdad es válida en la ecuación 11 si  $x_2 = x_1$ . Nótese que si  $x_1 = 0$  y  $x_2 = x$ , entonces la ecuación 11 se reduce a

$$|\sin x| \leq |x|. \quad \blacksquare \quad (13)$$

## Antiderivadas

Recuérdese que en la sección 3.3 afirmamos que la función  $f$  es una antiderivada de la función  $g$  en el intervalo abierto  $I$  si

$$f'(x) = g(x) \quad (14)$$

para toda  $x$  en  $I$ . Además, si la función  $y = f(x)$  es antiderivada de alguna función  $g$  dada, entonces también lo es la función  $y = f(x) + c$ , siendo  $c$  cualquier constante. En realidad, como indicamos en la sección 3.3, todas las antiderivadas de  $g$  tienen esta forma. Con ello podemos demostrar este hecho importante haciendo uso del teorema del valor medio. Sin embargo, primero debemos establecer un resultado relacionado que tiene utilidad por mérito propio.

**Teorema 4.1.4**

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y supóngase que  $f'(x) = 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Entonces,  $f$  es una función constante en  $[a, b]$ .

Nótese que demostramos en la sección 3.1 que la derivada de toda función constante es idéntica a cero. De acuerdo con el teorema 4.1.4, las funciones constantes son *las únicas* cuyas derivadas son idénticas a cero. La demostración es una consecuencia sencilla del teorema del valor medio.

**Demostración del teorema 4.1.4.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  cualquier par de puntos en  $[a, b]$  y supóngase que  $x_2 > x_1$ . Entonces,  $f$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio (teorema 4.1.3) en  $[x_1, x_2]$ . Por tanto,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad (15)$$

en donde  $c$  es algún punto de  $(x_1, x_2)$ . Sin embargo, independientemente de dónde está ubicado  $c$ ,  $f'(c) = 0$  y por tanto  $f(x_2) = f(x_1)$ . Como  $x_1$  y  $x_2$  son arbitrarios, esto significa que  $f$  tiene el mismo valor en cada punto, es decir,  $f$  es una función constante en  $[a, b]$ .  $\square$

**Teorema 4.1.5**

Sean las funciones  $F$  y  $G$  antiderivadas de la misma función  $g$  en el intervalo  $(a, b)$ . Esto es,

$$F'(x) = g(x), \quad G'(x) = g(x) \quad (16)$$

para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Entonces, existe una constante  $c$  tal que

$$F(x) = G(x) + c \quad (17)$$

para toda  $x$  en  $(a, b)$ .

**Demostración.** Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos arbitrarios en  $(a, b)$  y  $x_1 < x_2$ ; y sea  $H(x) = F(x) - G(x)$ . Entonces, de acuerdo con la ecuación 16,  $H'(x) = 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$  y por tanto para toda  $x$  en  $(x_1, x_2)$ . Además,  $F$  y  $G$  son derivables y por tanto continuas para toda  $x$  en  $(a, b)$ . En consecuencia,  $H$  es continua en  $(a, b)$  y entonces también en  $[x_1, x_2]$ . Se aplica a continuación el teorema 4.1.4 a la función  $H$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$  y llegamos a la conclusión de que  $H$  es una función constante en  $[x_1, x_2]$ ; esto es, existe una constante  $c$  tal que  $H(x) = c$  para toda  $x$  en  $[x_1, x_2]$ . Como  $x_1$  y  $x_2$  son puntos arbitrarios en  $(a, b)$  esta conclusión en realidad es válida para toda  $x$  en  $(a, b)$ ; esto es,

$$F(x) - G(x) = c$$

para toda  $x$  en  $(a, b)$ , lo que se tenía que demostrar.  $\square$

**EJEMPLO 3**

Observemos que

$$\frac{d}{dx} \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$$

y que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [-\cos^2 x] &= -2 \cos x (-\sin x) \\ &= 2 \cos x \sin x. \end{aligned}$$

Por tanto, las funciones

$$F(x) = \sin^2 x, \quad G(x) = -\cos^2 x$$

son antiderivadas de la función  $g(x) = 2 \sin x \cos x$ . De acuerdo con el teorema 4.1.5, existe una constante  $c$  tal que

$$\sin^2 x = -\cos^2 x + c.$$

Desde luego, en este caso,  $c = 1$ . ■

**PROBLEMAS**

En los problemas 1 a 6, determinar si la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio. En cada caso, determinar si existe un punto  $c$  tal que se satisfice la ecuación 5. Determinar todos esos puntos en los casos en que existan. Puede ayudar el bosquejar la gráfica de la función.

1.  $f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 2$

2.  $f(x) = |x - 1|, \quad -2 \leq x \leq 2$

3.  $f(x) = |x^2 - 1|, \quad -2 \leq x \leq 2$

4.  $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & -2 \leq x < 0 \\ 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

5.  $f(x) = \begin{cases} x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

6.  $f(x) = \sin \pi x, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

7. Sea  $f(x) = x^3 - 3x + b$ , donde  $b$  es constante.

(a) Demostrar que  $f(x)$  es cero a lo más una vez cuando  $x$  está en  $[-1, 1]$ .

(b) Determinar los valores de  $b$  para los cuales  $f(x) = 0$  para alguna  $x$  en  $[-1, 1]$ .

8. Sea  $f(x) = x^3 + 3a^2x + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $a > 0$ . Demostrar que  $f(x)$  es cero a lo más una vez para  $x$  en  $[-a, a]$ .

9. Sea  $f(x) = x^3 + ax + b$ , en donde  $a$  y  $b$  son constantes y  $a > 0$ . Demostrar que  $f(x)$  es cero a lo más una vez para  $x$  en  $(-\infty, \infty)$ .

10. Suponer que la función  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , demostrar que  $f(b) > f(a)$ .

11. (a) Sea la función  $f$  continua en  $[a, b]$  y  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Demostrar que  $f(x)$  es cero a lo más una vez para  $x$  en  $(a, b)$ .

(b) Sean  $f$  y  $f'$  continuas en  $[a, b]$  y  $f''(x) > 0$  para



toda  $x$  en  $(a, b)$ . Demostrar que  $f(x)$  es cero a lo más dos veces en  $(a, b)$ .

(c) Enunciar una generalización de las partes (a) y (b).

En los problemas 12 a 15, emplear el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad dada.

$$12. |\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

$$13. |1 - \cos x| \leq |x|$$

$$14. 2 + \frac{x}{2\sqrt{4+x}} \leq \sqrt{4+x} \leq 2 + \frac{x}{4}, \quad x \geq 0$$

$$15. |\tan x| \geq |x|, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

16. Supóngase que  $f$  es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$  y que

$$m < f'(x) < M$$

para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Demostrar que

$$m(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < M(x_2 - x_1)$$

en la cual  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $[a, b]$  y  $x_2 > x_1$ .

17. Suponer que la función  $f$  es tal que  $f'(x) = 1/x$  para toda  $x$  en  $(0, \infty)$ , y que  $f(1) = 0$ . Esta función se estudia con detalle en la sección 8.2.

(a) Demostrar que  $\frac{2}{3} < f(3) < 2$ .

(b) Si  $a < 1$ , demostrar que

$$(a-1)/a < f(a) < a-1.$$

(c) Si  $0 < a < 1$ , demostrar de nuevo que

$$(a-1)/a < f(a) < a-1.$$

18. Suponer que la función  $f$  es tal que  $f'(x) = (1+x^2)^{-1}$  para toda  $x$ , y que  $f(0) = 0$ . Esta función se estudia más adelante en la sección 8.6.

(a) Si  $x > 0$ , demostrar que  $x/(1+x^2) < f(x) < x$ .

(b) Si  $x < 0$ , demostrar que  $x < f(x) < x/(1+x^2)$ .

19. Suponer que la función  $f$  es tal que  $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  para  $-1 < x < 1$ , y que  $f(0) = 0$ . Esta función se estudia en la sección 8.6.

(a) Si  $x > 0$ , demostrar que  $f(x) > x$ .

(b) Si  $x < 0$ , demostrar que  $f(x) < x$ .

\*20. Este problema trata sobre una extensión del teorema del valor medio. Sean  $f$  y  $f'$  continuas en  $[a, b]$  y tales que  $f''$  existe en todo punto de  $(a, b)$ ; entonces, existe un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(c)(b-a)^2. \quad (i)$$

Este resultado se puede demostrar del siguiente modo.

(a) Se define la función  $g$  tal que

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - A(x-a)^2$$

donde  $A$  es una constante. Demostrar que  $g(a) = 0$ . También, pedir que  $g(b) = 0$ , esto es, pedir que  $A$  satisfaga

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - A(b-a)^2 = 0. \quad (ii)$$

(b) Emplear el teorema de Rolle para demostrar que existe un punto  $\gamma$  en  $(a, b)$  tal que  $g'(\gamma) = 0$ . Demostrar además que  $g'(a) = 0$ .

(c) Aplicando el teorema de Rolle a la función  $g'$ , demostrar que existe un punto  $c$  en  $(a, \gamma)$  tal que

$$g''(c) = 0. \quad (iii)$$

(d) Eliminar  $A$  de las ecuaciones (ii) y (iii) y así obtener la ecuación (i).

\*21. Este problema trata de otra generalización del teorema del valor medio. Sean las funciones  $f$  y  $g$  tales que satisfacen las condiciones del teorema 4.1.3. También, suponer que  $g'$  nunca es cero en  $(a, b)$ . Demostrar entonces que existe un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Nótese que este resultado se reduce al teorema 4.1.3 si  $g(x) = x$ .

*Sugerencia:* considere la función

$$F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

## 4.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES

En la sección 4.1 vimos una función  $f$  definida en un intervalo  $I$  y dimos la definición de máximo o mínimo local de  $f$  en un punto  $c$  en el interior de  $I$ . Estas definiciones se pueden extender a los puntos extremos de  $I$  reemplazando a la vecindad  $(c - \delta, c + \delta)$  por una vecindad lateral adecuada. Por ejemplo, si se define  $f$  en  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene un máximo local en  $a$  si

$$f(x) \leq f(a) \quad (1)$$

para toda  $x$  en determinada vecindad  $[a, a + \delta)$ . Los demás casos posibles se manejan de la misma manera. En la figura 4.2.1 mostramos la gráfica de la misma función que en la figura 4.1.2, excepto que ahora se incluyen los puntos extremos en el dominio de la función. Ambos extremos son puntos mínimos locales para esta función en particular. Parece ser plausible que un punto extremo siempre sea un punto extremo local; sin embargo, éste no es el caso, como en la función del problema 38.

El estudio de los puntos extremos locales, si bien es importante, con frecuencia no tiene trascendencia. En realidad, con frecuencia es importante tener una función  $f$  definida en un intervalo  $I$ , y comparar su valor en un punto extremo local  $c$ , con sus valores en *todos los demás puntos* en  $I$ . Decimos que  $f$  tiene un **máximo global**, o **absoluto**, en  $c$  si

$$f(c) \geq f(x) \quad (2)$$

para toda  $x$  en  $I$ . Análogamente,  $f$  tiene un **mínimo global**, o **absoluto**, en  $c$  si

$$f(c) \leq f(x) \quad (3)$$

para toda  $x$  en  $I$ . Así, el máximo global es el mayor de los máximos locales, y el mínimo global es el menor de los mínimos locales. De acuerdo con la figura 4.2.1, de nuevo, el máximo global está en  $x_3$  y el mínimo global está en  $x_4$ .

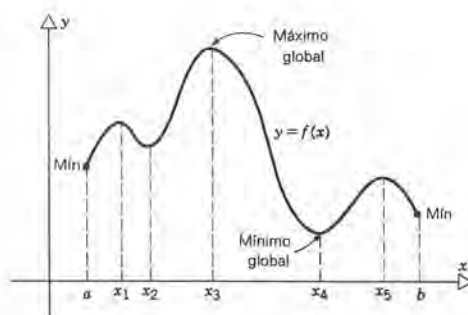


Figura 4.2.1

Se debe tener algo de cuidado al describir los máximos y los mínimos, porque una función no necesariamente tiene máximo o mínimo global, y ni siquiera máximo o mínimo local, en un intervalo dado. Por ejemplo, la función que aparece en la figura 4.2.2 no tiene puntos extremos, ni local ni global, en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Cuando nos acercamos al punto  $b$  del extremo derecho, la función toma valores más y más pequeños, pero no tiene valor mínimo. Del mismo modo, tampoco tiene máximo en este intervalo. Sin embargo, para una función  $f$  que sea *continua en un intervalo cerrado y acotado*  $[a, b]$ , sabemos, por el teorema 2.6.2(b), que  $f$  tiene tanto un máximo global como un mínimo global en  $[a, b]$ .

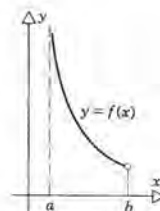


Figura 4.2.2

## Puntos críticos

A continuación veremos algunos teoremas que nos ayudarán a ubicar los puntos máximo o mínimo locales para una función dada  $f$  definida en un intervalo  $I$ . En primer lugar, recuérdese el teorema 4.1.1, que establece que si  $c$  es punto extremo en el interior de  $I$ , y si existe  $f'(c)$ , entonces  $f'(c) = 0$ . Por tanto, para localizar los puntos extremos locales de  $f$  debemos tener en cuenta los siguientes, como candidatos:

1. Cualquier punto interior de  $I$  para el cual  $f'(x)$  es cero; así como aquellos puntos a los cuales no se aplique el teorema 4.1.1, que son:
2. Cualquier punto interior de  $I$  para el cual no existe  $f'(x)$ ;
3. Cualquier extremo que esté en  $I$ .

A un punto que satisface cualquiera de las tres condiciones anteriores se le llama **punto crítico**. Para una función  $f$  dada en un intervalo  $I$  dado, el conjunto de los puntos críticos comprende a todos los puntos extremos locales, pero puede contener también otros puntos. Si se sabe (digamos por el teorema 2.6.2), que  $f$  tiene un máximo global y un mínimo global en  $I$ , entonces se pueden encontrar simplemente comparando los valores de  $f$  en los puntos críticos. Los puntos del conjunto de puntos críticos donde  $f$  tiene los valores máximo y mínimo son, respectivamente, el punto máximo global y el punto mínimo global. Nótese que  $f$  puede tomar su valor máximo global en más de un punto, e igualmente para su mínimo global.

Los tres ejemplos siguientes se presentan para ilustrar los modos en los que se pueden presentar los puntos críticos. Regresaremos a cada ejemplo, después, para demostrar cómo se pueden emplear los resultados de esta sección para investigar la naturaleza de un punto crítico.

### EJEMPLO 1

Determinar todos los puntos críticos en  $(-\infty, \infty)$  de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 19. \quad (4)$$

La función  $f$  es un polinomio y, por tanto, no hay puntos en los cuales no exista



$f$ . En este ejemplo, tampoco existen puntos extremos. Así, los únicos puntos críticos son aquellos para los cuales  $f'(x) = 0$ . Como

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x^2 - x - 2) \\ &= 6(x - 2)(x + 1), \end{aligned} \quad (5)$$

se infiere que  $x = 2$  y  $x = -1$  son los únicos puntos críticos.

Si evaluamos  $f$  en los puntos críticos, encontraremos que  $f(2) = -1$  y que  $f(-1) = 26$ . Sin embargo, el teorema 2.6.2 no se aplica porque el intervalo es no acotado, y entonces se necesita investigar para determinar si hay puntos extremos globales. La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 4.2.3 como referencia; la mayor parte de la información sobre la que se basa el esquema se deduce después en esta sección. ■

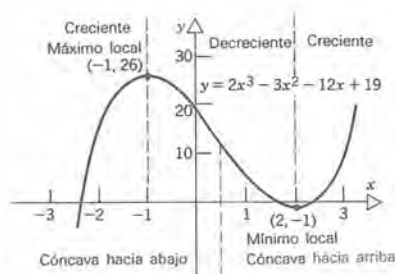


Figura 4.2.3

## EJEMPLO 2

Se tiene la función  $f$  definida por

$$f(x) = x - 2 \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (6)$$

Determinar todos los puntos críticos de esta función y, si es posible, determinar los puntos extremos globales.

Si derivamos a  $f$ , obtenemos

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x. \quad (7)$$

Así,  $f'(x) = 0$  cuando  $\cos x = \frac{1}{2}$  y  $0 \leq x \leq 2\pi$ ; esto es, cuando  $x = \pi/3$  y  $x = 5\pi/3$ . No hay puntos interiores en los cuales no exista  $f'(x)$ , y por tanto los únicos puntos críticos adicionales son los extremos  $x = 0$  y  $x = 2\pi$ . Así, el conjunto de puntos críticos es

$$S = \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi \right\}.$$

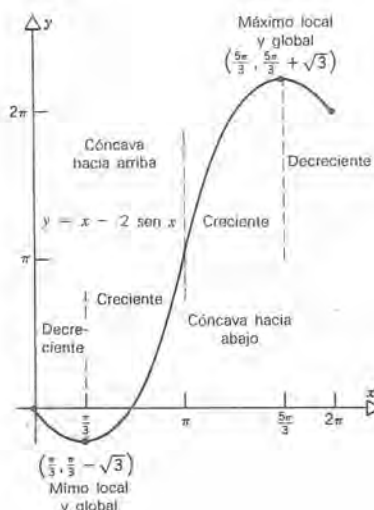


Figura 4.2.4

La función  $f$  es continua en  $[0, 2\pi]$ , y por tanto se aplica el teorema 2.6.2(b), garantizando que exista máximo global y mínimo global en ese intervalo. Si evaluamos  $f$  en cada punto crítico, llegamos a

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.68485, \\ f\left(\frac{5\pi}{3}\right) &= \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.9680, & f(2\pi) &= 2\pi \approx 6.2832. \end{aligned}$$

Por tanto,  $x = 5\pi/3$  es el punto máximo global y  $x = \pi/3$  es el punto mínimo global de  $f$  en  $[0, 2\pi]$ . Los puntos  $x = 0$  y  $x = 2\pi$  no son puntos extremos globales. En la figura 4.2.4 se muestra la gráfica de  $f$ . Nuevamente, algo de la información de la gráfica se deducirá después en esta sección. ■

### EJEMPLO 3

Encontrar todos los puntos críticos de la función

$$f(x) = |x^2 - 1| \quad (8)$$

en el intervalo  $[-2, 2]$ . Si es posible, determinar también los puntos extremos globales. En la figura 4.2.5 se muestra la gráfica de  $f$ ; se puede bosquejar trazando la parábola  $y = x^2 - 1$  y a continuación reflejando la parte para la cual  $y < 0$  con respecto al eje  $x$ .

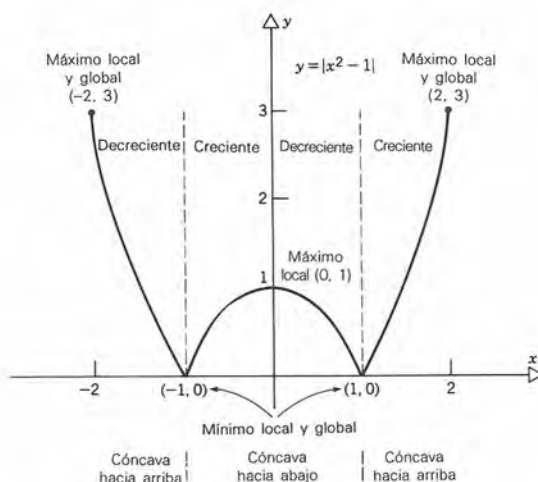


Figura 4.2.5

Si escribimos  $f(x)$  sin las barras de valor absoluto, tendremos que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1 \text{ o } x > 1; \\ 1 - x^2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Entonces

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \text{ o } x > 1; \\ -2x, & -1 < x < 1. \end{cases} \quad (10)$$

La derivada de  $f$  no existe en los puntos  $x = \pm 1$ . Esto se puede demostrar casi del mismo modo que en el ejemplo 7 de la sección 3.2 examinando los límites por la izquierda y por la derecha del cociente de diferencias adecuado. La gráfica de  $f$  tiene un pico en cada uno de esos puntos, como se ve en la figura 4.2.5.

Por tanto, los puntos críticos de la función  $f$  en el intervalo  $[-2, 2]$ , son los siguientes:

$x = 0$ , porque en él  $f'(x) = 0$ .

$x = -1$  y  $x = 1$  porque  $f'(x)$  no existe allí.

$x = -2$  y  $x = 2$ , porque son los puntos extremos del intervalo dado.

Como en el ejemplo 2, la función (8) es continua en el intervalo  $[-2, 2]$ , y entonces, de acuerdo con el teorema 2.6.2(b) hay certeza de que se encuentran puntos máximo y mínimo global. Si evaluamos  $f$  en cada uno de los puntos críticos, obtendremos

$$f(-2) = f(2) = 3, \quad f(-1) = f(1) = 0, \quad f(0) = 1.$$



Por consiguiente,  $x = \pm 2$  son los puntos máximos globales, y  $x = \pm 1$  son puntos mínimo global. El punto  $x = 0$  no es punto extremo global. ■

Si bien el procedimiento que se sugirió antes y se ilustró en los ejemplos 2 y 3 es con frecuencia el más económico de seguir para buscar puntos extremos globales, es insuficiente a menos que sepamos antes que la función en cuestión tiene en realidad un máximo y un mínimo globales. En caso de que no se tenga esta información, como en el ejemplo 1, es útil contar con otros modos de clasificar los puntos críticos. A continuación desarrollaremos algunos resultados que nos ayudarán a hacerlo. Estos resultados también se necesitarán en un estudio más detallado de las funciones y sus gráficas, que presentaremos en la sección 5.1.

### Funciones crecientes y decrecientes

Se dice que una función es **creciente** en un intervalo  $I$  si

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (11)$$

para todo par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$  tales que  $x_2 > x_1$ . Análogamente, se dice que  $f$  es **decreciente** en  $I$  si

$$f(x_2) < f(x_1) \quad (12)$$

para todo par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$  tales que  $x_2 > x_1$ . Si se usan igualdades en las ecuaciones 11 y 12, entonces se dice que  $f$  es **no decreciente**, y **no creciente**, respectivamente. Existe una estrecha relación entre funciones crecientes y decrecientes con el signo de sus primeras derivadas, como lo afirma el siguiente teorema.

#### Teorema 4.2.1

Sea la función  $f$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$  y si  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $[a, b]$ .

**Demostración.** La demostración se basa en la aplicación directa del teorema del valor medio (teorema 4.1.3). Seleccionemos *cualquier* par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  en  $[a, b]$  siendo  $x_2 > x_1$ . El teorema del valor medio se aplica a la función  $f$  en el intervalo  $[x_1, x_2]$ . Entonces

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad (13)$$

en la cual  $c$  es algún punto del intervalo abierto  $(x_1, x_2)$ . Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f'(c) > 0$  y por tanto  $f(x_2) > f(x_1)$ ; esto es,  $f$  es creciente. Análogamente, si  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f(x_2) < f(x_1)$  y  $f$  es decreciente. □

El inverso del teorema 4.2.1 no es cierto. Por ejemplo, aun si  $f$  es creciente, su derivada no necesita ser positiva en todos los puntos. Para ver esto, consideremos  $f(x) = x^3$ , que aumenta en todo intervalo. Sin embargo,  $f'(x) = 3x^2$  no es positiva en  $x = 0$ . Véase también el problema 37.

El siguiente teorema proporciona un medio de clasificación para los puntos críticos, basándose en la información acerca de la primera derivada cerca de un punto crítico.

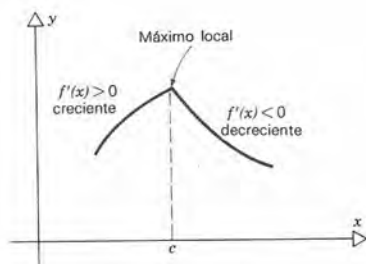
### Teorema 4.2.2

#### (Criterio de la primera derivada)

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  que contiene al punto crítico  $c$ .

- (a) Si  $f'(x) > 0$  para  $x$  en  $(c - \delta, c)$  y  $f'(x) < 0$  para  $x$  en  $(c, c + \delta)$  entonces  $f$  tiene un máximo local en  $c$ .
- (b) Si  $f'(x) < 0$  para  $x$  en  $(c - \delta, c)$ , y  $f'(x) > 0$  para  $x$  en  $(c, c + \delta)$ , entonces  $f$  tiene un mínimo local en  $c$ .

**Demostración.** Sólo demostraremos la parte (a); la demostración de la parte (b) es semejante. Las condiciones dadas implican que  $f$  es creciente a la izquierda de  $c$  y decreciente a la derecha, y entonces, geoméricamente es claro que  $f$  tiene un máximo local en  $c$  (véase figura 4.2.6). Más exactamente, si  $f'(x) > 0$  en  $(c - \delta, c)$  y si  $f$  es continua en  $(c - \delta, c]$ , entonces, de acuerdo con el teorema 4.2.1,  $f$  es creciente en  $(c - \delta, c]$ . Por lo tanto,  $f(c) \geq f(x)$  para toda  $x$  en  $[c, c + \delta]$ , y entonces  $f(c) \geq f(x)$  para toda  $x$  en  $(c - \delta, c + \delta)$ . En consecuencia  $f(c) \geq f(x)$  para toda  $x$  en  $(c - \delta, c + \delta)$ , y por consiguiente  $f$  tiene un máximo local en  $c$ .  $\square$



**Figura 4.2.6**

Criterio de la primera derivada.

**EJEMPLO 1** (Continuación)

Determinar intervalos en los cuales la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 19, \quad -\infty < x < \infty$$

es creciente o decreciente. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de esta función.

Habíamos demostrado (ecuación 5) que

$$f'(x) = 6(x - 2)(x + 1),$$

y que los únicos puntos críticos son  $x = 2$  y  $x = -1$ . Es fácil ver que  $f'(x) > 0$  para  $x < -1$ , y para  $x > 2$ , y que  $f'(x) < 0$  para  $-1 < x < 2$ . Por tanto, de acuerdo con el teorema 4.2.1,  $f$  es creciente en  $(-\infty, -1]$  y en  $[2, \infty)$  y decreciente en  $[-1, 2]$ . En consecuencia, de acuerdo con el teorema 4.2.2,  $x = -1$  es un punto máximo local y  $x = 2$  es punto mínimo local. Como  $f$  toma valores más y más grandes al crecer  $x$  sin cota, esta función no tiene máximo global; por motivos semejantes tampoco tiene mínimo global. La información que hemos encontrado se muestra en la gráfica de  $f$ , figura 4.2.3. ■

**EJEMPLO 2** (Continuación)

Encontrar los intervalos en los cuales la función

$$f(x) = x - 2 \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

es creciente o decreciente. Emplear el teorema 4.2.2 para clasificar los puntos críticos de  $f$ .

En la ecuación 7 teníamos que

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x.$$

Así,  $f'(x) > 0$  es equivalente a que  $\cos x < \frac{1}{2}$ . Esta desigualdad se satisface para  $\pi/3 < x < 5\pi/3$ , y entonces, de acuerdo con el teorema 4.2.1,  $f$  crece en el intervalo  $(\pi/3, 5\pi/3)$ . Análogamente,  $f'(x) < 0$  cuando  $\cos x > \frac{1}{2}$ , esto es, para  $0 \leq x < \pi/3$  o para  $5\pi/3 < x \leq 2\pi$ . Por tanto,  $f$  es decreciente en  $[0, \pi/3]$  y en  $[5\pi/3, 2\pi]$ . Aplicando el teorema 4.2.2 a los dos puntos críticos interiores, llegamos a la conclusión de que  $x = \pi/3$  es punto mínimo local y que  $x = 5\pi/3$  es punto máximo local. Podemos emplear el teorema 4.2.1 para determinar la naturaleza de los puntos extremos. Como  $f'(x) < 0$  a la derecha del punto extremo izquierdo  $x = 0$ , por consiguiente  $f$  decrece allí, y por tanto  $x = 0$  es un punto máximo local. Un argumento semejante indica que el punto extremo derecho  $x = 2\pi$  es punto mínimo local. La información que hemos encontrado se muestra en la figura 4.2.4. Nótese también que  $f'(x)$  es una función periódica de período  $2\pi$ . Así, el comportamiento de los intervalos en los cuales  $f$  aumenta o disminuye, se repite si el dominio de  $f$  se amplía más allá de  $[0, 2\pi]$ . ■



**EJEMPLO 3** (Continuación)

Para la función

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad -2 \leq x \leq 2$$

determinar intervalos en los cuales  $f$  aumenta o disminuye. También, clasificar los puntos críticos de  $f$ .

De acuerdo con la ecuación 10,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \text{ o } x > 1; \\ -2x, & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Así, según el teorema 4.2.1,  $f$  es creciente en  $[-1, 0]$  y  $[1, 2]$ , mientras que es decreciente en  $[-2, -1]$  y en  $[0, 1]$ . En consecuencia, de acuerdo con el teorema 4.2.2, los puntos  $x = \pm 1$  son puntos mínimo local y  $x = 0$  es un punto máximo local. Los extremos  $x = \pm 2$  son máximos locales, porque según el teorema 4.2.1,  $f$  decrece a la derecha de  $x = -2$  y crece a la izquierda de  $x = 2$ . Véanse las gráficas de  $f$  en la figura 4.2.5. Entre otras cosas, este ejemplo muestra que la prueba de la primera derivada se puede emplear para clasificar los puntos críticos ( $x = \pm 1$  en este caso) cuando  $f$  no sea derivable, siempre que sea continua en esos puntos. ■

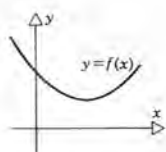
**Concavidad**

Una revisión de la figura 4.2.7 sugiere que los arcos de curvas se pueden dividir en dos clases. Las curvas de la figura 4.2.7a y 4.2.7b se dice que son cóncavas hacia arriba, mientras que las de la figura 4.2.7c y 4.2.7d son cóncavas hacia abajo. Más exactamente, supóngase que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si, además,  $f'$  es creciente en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es **cóncava hacia arriba** en  $[a, b]$ , mientras que si  $f'$  es decreciente en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es **cóncava hacia abajo** en  $[a, b]$ .

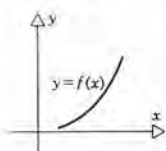
Ahora apliquemos el teorema 4.2.1 a  $f'$ . Se deduce que si  $f$  es doblemente derivable, y si  $f''(x) > 0$  en  $(a, b)$ , entonces  $f'$  es creciente y  $f$  es cóncava hacia arriba. Por otro lado, si  $f''(x) < 0$  en  $(a, b)$ , entonces  $f'$  es decreciente y  $f$  es cóncava hacia abajo. Enunciaremos estos resultados en el siguiente teorema:

**Teorema 4.2.3**

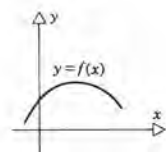
Sea  $f$  continua en  $[a, b]$  y al menos doblemente derivable en  $(a, b)$ . Si  $f''(x) > 0$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es cóncava hacia arriba en  $[a, b]$ , mientras que si  $f''(x) < 0$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es cóncava hacia abajo en  $[a, b]$ .



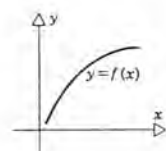
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figura 4.2.7** (a)  $f$  es cóncava hacia arriba. (b)  $f$  es cóncava hacia arriba. (c)  $f$  es cóncava hacia abajo. (d)  $f$  es cóncava hacia abajo.

Viendo las figuras 4.2.3 y 4.2.4 podemos observar que si  $c$  es un punto crítico cuando  $f'(c) = 0$ , entonces  $c$  es un punto mínimo local si  $f$  es cóncava hacia arriba en una vecindad de  $c$ , y es un punto mínimo local si  $f$  es cóncava hacia abajo en esa vecindad. Esto es la esencia del siguiente teorema.

### Teorema 4.2.4

#### (Criterio de la segunda derivada)

Sea la función  $f$  definida en un intervalo abierto que contiene al punto crítico  $c$ , en el cual  $f'(c) = 0$ , y sea  $f''$  continua en ese intervalo.

- (a) Si  $f''(c) < 0$ , entonces  $c$  es un punto máximo local.
- (b) Si  $f''(c) > 0$ , entonces  $c$  es un punto mínimo local.
- (c) Si  $f''(c) = 0$ , entonces no se puede llegar a conclusión alguna y se deberá investigar más.

**Demostración.** Veamos la parte (a). Si  $f''(c) < 0$  y  $f''$  es continua en un intervalo que contiene a  $c$ , entonces de acuerdo con el teorema 2.6.1 existe un intervalo  $(c - \delta, c + \delta)$  en el cual  $f''(x)$  siempre es negativa. Por tanto, según el teorema 4.2.1 aplicado a  $f'$ , ésta es decreciente en ese intervalo. La combinación de que  $f'$  es decreciente y que  $f'(c) = 0$  implica que  $f'(x) > 0$  en  $(c - \delta, c)$ , y que  $f'(x) < 0$  en  $(c, c + \delta)$ . Estos dos últimos resultados garantizan, por la parte (a) del teorema 4.2.2, que  $c$  es un punto máximo local. La demostración de la parte (b) es semejante.

Podemos demostrar la parte (c) mediante ejemplos. Sea  $f_1(x) = x^4$ ,  $f_2(x) = -x^4$ , y  $f_3(x) = x^3$ , y ver el intervalo  $(-\infty, \infty)$  (véase figura 4.2.8). En cada caso, tanto la primera como la segunda derivadas son cero cuando  $x = 0$ . Sin embargo,  $f_1$  tiene un mínimo local y  $f_2$  un máximo local en  $x = 0$ ; además,  $f_3$  no tiene máximo ni mínimo en ese punto. Por tanto, si  $f''(x)$  es cero en un punto crítico, no se puede sacar conclusión alguna sin investigar más.  $\square$

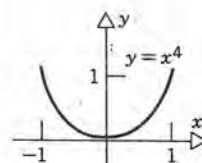
Nótese que el teorema 4.2.4 sólo se aplica a puntos críticos donde  $f'(x)$  es cero, mientras que el teorema 4.2.2 también se aplica a puntos críticos donde no existe  $f'$ . Así, la prueba de la primera derivada es algo más general.

### EJEMPLO 1 (Continuación)

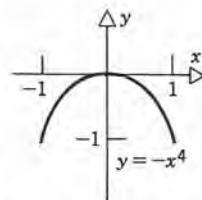
Determinar en dónde la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 19, \quad -\infty < x < \infty$$

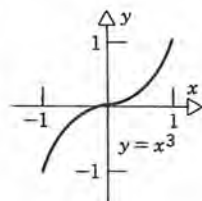
es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Aplicar el criterio de la segunda derivada a los puntos críticos de  $f$ .



(a)



(b)



(c)

**Figura 4.2.8**

En todos los casos

$f''(0) = 0$ . (a)

Mínimo relativo en

$(0, 0)$ . (b) Máximo

relativo en  $(0, 0)$ . (c)

Sin punto extremo en  $(0, 0)$ .

Refiriéndonos a la ecuación 5 y derivándola por segunda vez, obtenemos

$$f''(x) = 6(2x - 1). \quad (14)$$

Así,  $f''(x) < 0$  para  $x < \frac{1}{2}$ , y entonces, de acuerdo con el teorema 4.2.3,  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(-\infty, \frac{1}{2}]$ . Análogamente,  $f$  es cóncava hacia arriba en  $[\frac{1}{2}, \infty)$ . La concavidad de  $f$  se indica en la figura 4.2.3. Si evaluamos a  $f''(x)$  en los puntos críticos  $x = -1$  y  $x = 2$ , encontramos que

$$f''(-1) = -12, \quad f''(2) = 18.$$

Por tanto, según el teorema 4.2.4,  $x = -1$  es un punto máximo local, y  $x = 2$  es un punto mínimo local. ■

### **EJEMPLO 2** (Continuación)

Determinar en dónde la función

$$f(x) = x - 2 \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo, y clasificar sus puntos críticos mediante el teorema 4.2.4.

Partiendo de la ecuación 7, obtenemos

$$f''(x) = 2 \sin x. \quad (15)$$

Por tanto, por el teorema 4.2.3,  $f$  es cóncava hacia arriba en  $[0, \pi]$  y cóncava hacia abajo en  $[\pi, 2\pi]$ , como se ve en la figura 4.2.4. En los puntos críticos  $x = \pi/3$  y  $x = 5\pi/3$ , tenemos que

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \quad f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 4.2.4, el primero es un punto mínimo local y el último es un punto máximo local. Nuevamente, la periodicidad de  $f''$  significa que el patrón de concavidad se repite si se aumenta el dominio de  $f$ . ■

### **EJEMPLO 3** (Continuación)

De nuevo, consideremos la función

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Determinar en dónde  $f$  es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo, respectivamente, y caracterizar sus puntos críticos mediante el teorema 4.2.4.



De la ecuación 10 obtenemos

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \text{ o } x > 1; \\ -2, & -1 < x < 1. \end{cases} \quad (16)$$

Así,  $f$  es cóncava hacia arriba en  $[-2, -1]$  y  $[1, 2]$ , mientras que es cóncava hacia abajo en  $[-1, 1]$  (véase figura 4.2.5). El criterio de la segunda derivada sólo se puede aplicar al punto crítico en  $x = 0$ . Como  $f''(0) = -2$ , el punto es un máximo local. ■

Terminaremos esta sección con algunas palabras, a manera de resumen y de consejos.

1. Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado y acotado, entonces sus extremos globales se pueden determinar localizando todos los puntos críticos, evaluando a  $f$  en cada uno, e identificando al mayor y al menor número del conjunto resultante.
2. Si  $f$  es continua, pero el intervalo no es cerrado ni acotado, entonces puede no existir un máximo global, un mínimo global, o ambos. Para investigar esas posibilidades, se examina el comportamiento de  $f$  cuando la variable independiente tiende a los extremos, o a  $\pm \infty$ , según el caso, así como a los puntos críticos.
3. Se pueden emplear el teorema 4.2.2 (criterio de la primera derivada) y el teorema 4.2.4 (criterio de la segunda derivada) para investigar el comportamiento local de  $f$  cerca de un punto crítico. El criterio de la primera derivada es más general, pero con frecuencia ambos criterios se pueden aplicar. En ese caso, usar el que sea más conveniente.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 14

- (a) Determinar todos los puntos críticos de la función dada.
- (b) Determinar intervalos en los que la función sea creciente o decreciente.
- (c) Determinar intervalos en los que la función sea cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
- (d) Determinar si cada punto crítico es punto máximo local, mínimo local, o ninguno de ellos.

1.  $f(x) = x^2 + 4x + 2$
2.  $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$
3.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$
4.  $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 36$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

$$6. f(x) = x + \frac{4}{x}, \quad x \neq 0$$

$$7. f(x) = 1 - x^{2/3}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$9. f(x) = x - 2 \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$10. f(x) = 2 \cos^2 x - \sin^2 x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$11. f(x) = |x^3 - 12x|, \quad -4 \leq x \leq 4$$

$$12. f(x) = \left| \frac{x}{x+1} \right|, \quad x \neq -1$$

## 212 APLICACIONES DE LA DERIVADA

13.  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ,  $-2 \leq x \leq 2$

14.  $f(x) = \sin x + \cos x$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$

En los problemas 15 a 28, encontrar los puntos, si es que los hay, en el intervalo dado en los que la función tome sus valores máximo y mínimo global, respectivamente. Estas funciones son las mismas que las de los problemas 1 a 14.

15.  $f(x) = x^2 + 4x + 2$  (a) en  $[-4, 0]$   
(b) en  $(-\infty, \infty)$

16.  $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$  (a) en  $(-\infty, 2]$   
(b) en  $[-2, 2]$

17.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$  (a) en  $[-1, 5]$   
(b) en  $(-\infty, \infty)$

18.  $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 36$  (a) en  $[-1, 2]$   
(b) en  $[0, 3]$

19.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$  (a) en  $[-1, 1]$   
(b) en  $[0, 2]$

20.  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  (a) en  $(0, 4)$  (b) en  $[1, 3]$

21.  $f(x) = 1 - x^{2/3}$  (a) en  $(-\infty, \infty)$   
(b) en  $[-1, 1]$

22.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$  (a) en  $[2, \infty)$   
(b) en  $[0, 1]$

23.  $f(x) = x - 2 \cos x$  (a) en  $[-\pi, \pi]$   
(b) en  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

24.  $f(x) = 2 \cos^2 x - \sin^2 x$  (a) en  $[0, 2\pi]$   
(b) en  $(0, 2\pi)$

25.  $f(x) = |x^3 - 12x|$  (a) en  $[-4, 4]$   
(b) en  $(-3, 3)$

26.  $f(x) = \left| \frac{x}{x+1} \right|$  (a) en  $(-1, \infty)$   
(b) en  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

27.  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  (a) en  $[-2, 2]$   
(b) en  $(0, 1)$

28.  $f(x) = \sin x + \cos x$  (a) en  $[0, 2\pi]$   
(b) en  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

En los problemas 29 a 34, trazar la gráfica de una función  $f$  (para cada problema) derivable que tenga las propiedades que se piden.

29. El dominio es  $(-\infty, \infty)$ ; máximo local en  $-2$ ; máximo global en  $3$ ; mínimo local en  $0$ ; sin mínimo global.30. El dominio es  $(0, \infty)$ ; mínimo global en  $4$ ; máximo local en  $6$ ; sin máximo global;  $f(x) \rightarrow 3$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .31. El dominio es  $[-2, 2]$ ; mínimo global en  $-1$ ; máximo global en  $-2$ ; máximo local en  $1$ ; cóncava hacia arriba en  $[-2, 0]$ ; cóncava hacia abajo en  $[0, 2]$ .32. El dominio es  $(-\infty, \infty)$ ; máximo global en  $0$ ; mínimos globales en  $-2$  y  $2$ .33. El dominio es  $(0, 2]$ ; máximo global en  $1$ ; mínimo local en  $2$ ; sin mínimo global.34. El dominio es  $(-2, \infty)$ ; cóncava hacia abajo en  $(-2, 1]$ ; cóncava hacia arriba en  $[1, \infty)$ ; máximo local en  $0$ ; mínimo local en  $3$ ; sin máximo ni mínimo global.35. Calcular  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la gráfica de

$$y = ax^2 + bx + c$$

pase por los puntos  $(0, 1)$  y  $(3, 0)$ , y que tenga un máximo en  $x = 1$ .

36. Calcular  $a$  y  $b$  de modo que  $f(x) = ax/(x^2 + b^2)$  tenga un máximo local en  $x = 3$  y de modo que  $f'(0) = \frac{1}{3}$ .37. Demostrar el siguiente inverso parcial del teorema 4.2.1: si la función  $f$  es derivable y creciente en el intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f'(x) \geq 0$  en cada punto  $x$  de  $(a, b)$ .

*Sugerencia:* suponer lo contrario, es decir, que existe un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f'(c) < 0$ . A continuación emplear la definición de  $f'(c)$  para obtener una contradicción.

38. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que el extremo  $x = 0$  no es punto mínimo local ni máximo local.

*Sugerencia:* demostrar que, en todo intervalo  $[0, \delta)$ , hay puntos en los que  $f(x) > 0$  y otros en los que  $f(x) < 0$ .



---

## 4.3 APLICACIONES DE LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La observación de que en un punto máximo o mínimo de la función, su derivada, si existe, debe ser cero (teorema 4.1.1) es la clave para resolver una clase muy grande de problemas de optimización. En realidad, proporciona el punto de partida de métodos en los que intervienen problemas bastante más complicados que los que se mencionan aquí. En esta sección presentaremos algunos ejemplos de problemas sencillos de optimización. Si bien los problemas de ejemplo que siguen son bastante variados, todos son semejantes en los siguientes aspectos.

En primer lugar, cada uno se plantea con palabras, y se incluye un enunciado de la cantidad que se debe optimizar. El primer paso es formular el problema en forma matemática; para ello se deben identificar las variables y los parámetros del problema, asignarles una letra a cada uno, y escribir una o más ecuaciones que los relacione. Con frecuencia sirve de gran ayuda trazar un esquema o diagrama para facilitar darse una idea de la situación. La meta es obtener una función de una sola variable que se pueda maximizar o minimizar en determinado dominio especificado. En algunos casos, toda la información necesaria está contenida en el enunciado del problema, mientras que en otros puede ser necesario emplear otra información; por ejemplo, hechos tomados de la geometría o de la física. La formulación del problema se complica a veces por la necesidad de llevar a cabo el manejo algebraico adecuado para expresar la cantidad por optimizar como función de una sola variable. El primer paso para estructurar el problema en términos matemáticos es con frecuencia el más difícil, precisamente porque no hay reglas formales para hacerlo; el procedimiento depende del problema, y en algunos casos se necesitará una gran cantidad de imaginación y de conocimiento. El término *modelación matemática* se emplea con frecuencia para describir este proceso, mediante el cual de hecho se traduce un problema de palabras a símbolos y ecuaciones matemáticas.

Habiendo formulado el problema como se acaba de indicar, debemos resolverlo matemáticamente. En este caso se trae a discusión los teoremas sobre máximos y mínimos que se presentaron en la sección 4.2. El grado de dificultad implícito en este paso depende enteramente de qué tan complicada es la función que se debe optimizar. Sin embargo, en cualquier caso se tiene un procedimiento definido a seguir.

Finalmente, habiendo resuelto el problema en un sentido matemático, es necesario interpretar la solución en el contexto del problema que se planteaba originalmente. Se debe tener especial cuidado para notar si la solución parece “razonable”. Esto sirve como prueba muy valiosa del trabajo matemático. Si la respuesta obtenida es definitivamente irrazonable en términos del planteamiento original del problema, indica que se ha cometido alguna falta, ya sea en la formulación o en la solución matemática. Naturalmente, aun si la respuesta es razonable, no hay garantía de que sea correcta, pero sí proporciona cierto grado de confirmación.



**EJEMPLO 1****(Problema de suma constante y producto máximo)**

Determinar dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea tan grande como sea posible.

Comenzaremos la formulación de este problema diciendo que  $x$  y  $y$  son números reales sin determinar todavía. Entonces  $P = xy$  es la cantidad que se debe maximizar, mientras que  $x + y = 10$ . Expresando a  $y$  en términos de  $x$  podemos escribir

$$\begin{aligned} P(x) &= x(10 - x) \\ &= 10x - x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Como tanto  $x$  como  $y = 10 - x$  deben ser no negativos, debemos restringir a  $x$  al intervalo  $0 \leq x \leq 10$ . Con ello se completa la formulación del problema en términos matemáticos: queremos maximizar la función  $P$  dada por la ecuación 1 en el dominio  $[0, 10]$ .

Para resolver el problema buscamos primero los puntos críticos. La derivada de  $P$  es

$$P'(x) = 10 - 2x; \quad (2)$$

y, por tanto,  $P'(x) = 0$  cuando  $x = 5$ . Este punto, junto con los puntos extremos  $x = 0$  y  $x = 10$ , constituyen el conjunto de puntos críticos para este problema.

Como  $P$  es continua en el intervalo cerrado y acotado  $[0, 10]$ , podemos calcular el máximo de  $P$  evaluando a  $P(x)$  en cada uno de los puntos críticos. De acuerdo con la ecuación 1 tenemos que

$$P(0) = 0, \quad P(5) = 25, \quad P(10) = 0.$$

Así, el máximo de  $P$  es 25 cuando  $x = 5$ , y los dos números que resuelven el problema son  $x = 5$ ,  $y = 5$ . ■

**EJEMPLO 2****(Problema de volumen constante y área mínima)**

Un fabricante desea construir un envase cilíndrico circular recto para que contenga determinado volumen  $V$ . ¿Cuáles deben ser el radio y la altura para minimizar el área  $S$  de la superficie de la lata, incluyendo la tapa y el fondo?

Sean  $r$  el radio de la base y  $h$  la altura de la lata (véase figura 4.3.1). Entonces, el área  $S$  de la superficie es

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2, \quad (3)$$

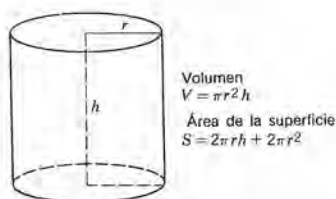


Figura 4.3.1

en la cual el primer término es el área de la superficie lateral, mientras que el segundo es el área de la tapa y el fondo de la lata. Obsérvese que  $S$  depende de las dos variables  $r$  y  $h$ . Para expresar a  $S$  en términos de una sola variable, necesitamos una relación entre  $r$  y  $h$ . Ésta la tenemos con la ecuación

$$V = \pi r^2 h \quad (4)$$

del volumen de la lata. Si despejamos a  $h$  de la ecuación 4 y la sustituimos en la ecuación 3, encontraremos que

$$S = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \quad (5)$$

Como  $V$  es constante, la ecuación 5 da a  $S$  como función de la única variable  $r$ . Además,  $r$  debe ser positiva, y por tanto supondremos que el dominio de  $S$  es  $(0, \infty)$ . Con ello queda completa la formulación: minimizar  $S$ , dada por la ecuación 5, en el dominio  $0 < r < \infty$ .

Pensemos cuantitativamente en el problema, durante un momento, antes de proseguir con la solución matemática. Es claro que si  $r$  es muy pequeño, la lata será alta y delgada; de acuerdo con la ecuación 5, el área  $S$  será muy grande, porque en este caso la superficie lateral es grande. Análogamente, si  $r$  es grande, la lata es corta y gruesa; de nuevo, según la ecuación 5,  $S$  es grande, porque en este caso la tapa y el fondo son grandes. Se intuye, por tanto, que la superficie  $S$  será mínima para determinado valor intermedio de  $r$ .

Para resolver el problema derivamos la ecuación 5, obteniendo

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r. \quad (6)$$

Por tanto,  $dS/dr = 0$  cuando  $4\pi r^3 = 2V$ , o sea cuando

$$r = r_c = (V/2\pi)^{1/3}. \quad (7)$$

Es el único punto crítico para este problema, porque no hay puntos extremos y existe la derivada en cada punto en  $(0, \infty)$ . Al calcular la segunda derivada obtenemos

$$\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{4V}{r^3} + 4\pi > 0, \quad (8)$$

y el punto  $r_c = (V/2\pi)^{1/3}$  es por tanto un punto mínimo local. En realidad, podemos llegar a la conclusión de que  $r_c$  es un punto mínimo global. Para demostrarlo, reformulamos la ecuación 6 como sigue:

$$\frac{dS}{dr} = \frac{4\pi}{r^2} \left( r^3 - \frac{V}{2\pi} \right) = \frac{4\pi}{r^2} (r^3 - r_c^3); \quad (9)$$

en consecuencia,  $dS/dr < 0$  cuando  $0 < r < r_c$  y  $dS/dr > 0$  cuando  $r > r_c$ . Entonces se deduce del teorema 4.2.1 que  $S(r)$  es decreciente para  $0 < r \leq r_c$  y creciente para  $r \geq r_c$ . Por tanto,  $r_c = (V/2\pi)^{1/3}$  es un punto mínimo global.

De acuerdo con la ecuación 4, el valor correspondiente de  $h$  es

$$h = 2(V/2\pi)^{1/3}. \quad (10)$$

Así, para cualquier volumen  $V$  la lata de área de superficie mínima se logra haciendo que la altura sea igual al diámetro. El valor mínimo del área de la superficie es  $3(2\pi V^2)^{1/3}$ . Por ejemplo, para una lata cuyo volumen es un cuarto de galón ( $57.75 \text{ in}^3$ ) tenemos que  $r_c \approx 2.095 \text{ in}$ . Los valores correspondientes de  $h$  y  $S$  son  $h \approx 4.189 \text{ in}$  y  $S \approx 82.71 \text{ in}^2$ .

La experiencia demuestra que la mayor parte de las latas no se fabrican con la razón de la altura al diámetro igual al valor teórico óptimo de 1.00. Por ejemplo, se midieron latas de un cuarto de galón de pintura, de aceite y de refresco y las razones fueron aproximada y respectivamente 1.12, 1.38 y 1.81.

Supongamos ahora que se decide que una lata de un cuarto de galón debe tener un radio máximo de 1.75 pulg. para permitir a la mayoría de la gente asirla con seguridad con una mano. Determinar las dimensiones de la lata para hacer mínima el área de la superficie en estas condiciones.

Procediendo como antes encontramos que  $dS/dr = 0$  cuando  $r = (V/2\pi)^{1/3} \approx 2.095 \text{ in}$ . Sin embargo,  $r$  está limitado al intervalo  $[0, 1.75]$ , y por tanto ese valor de  $r$  ya no se acepta como solución. Como  $dS/dr < 0$  en  $(0, 1.75]$ , el valor mínimo de  $S$  cuando  $r$  está en este intervalo se alcanza en el extremo  $r = 1.75$ . Los valores correspondientes de  $h$  y  $s$  son  $h \approx 6.002 \text{ in}$  y  $S \approx 85.24 \text{ in}^2$ . Este último valor un poco más que 3 por ciento mayor que el mínimo teórico de  $S = 82.71 \text{ in}^2$  que se obtuvo antes. ■

### EJEMPLO 3

#### (Problema de semáforos)

Supongamos que un semáforo pesa  $W \text{ lb}$  y se debe colgar del centro de un cable tenso que cruza la calle. El ancho de la calle es  $2a \text{ ft}$  (véase figura 4.3.2). Supóngase, además, que el costo del cable es igual a  $kT$ , siendo  $T$  la tensión (en libras) en el cable, y  $k$  es una constante dada. Calcular el ángulo de inclinación  $\theta$  del cable para que su costo sea mínimo.

Si vemos primero el problema cuantitativo, observaremos que si hacemos el cable tan corto como sea posible, debemos tensarlo fuertemente, y el costo por unidad de



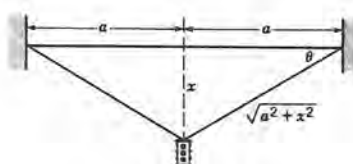


Figura 4.3.2

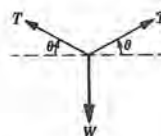


Figura 4.3.3

longitud será grande; por consiguiente, el costo total será alto. Por otro lado, si permitimos que se cuelgue mucho, entonces la tensión y, por consiguiente, el costo por pie será relativamente pequeño, pero se necesitará un cable muy largo, y de nuevo el costo total será alto. Podemos sospechar que se puede lograr el costo mínimo equilibrando adecuadamente estos dos efectos.

Sea  $x$  la flecha en el centro del cable. Entonces, de acuerdo con la figura 4.3.2, la longitud del cable es  $2\sqrt{a^2 + x^2}$  y el costo total es

$$C = 2kT\sqrt{a^2 + x^2}. \quad (11)$$

Sin embargo,  $T$  depende de  $x$ . Para determinar esta relación se necesita un principio de la física elemental. Las fuerzas que actúan en el punto de soporte del semáforo se muestran en la figura 4.3.3. Si el semáforo debe colgar sin moverse (o sea, que está en equilibrio), entonces las fuerzas verticales deben estar en equilibrio; esto es, el peso del semáforo debe ser igual a la componente vertical de la tensión en el cable. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} W &= 2T \sin \theta \\ &= 2T \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \end{aligned} \quad (12)$$

Despejando a  $T$  en la ecuación 12, y sustituyendo en la ecuación 11 se obtiene

$$C = kW \frac{a^2 + x^2}{x} = kW \left( \frac{a^2}{x} + x \right), \quad (13)$$

en donde  $x$  está en el intervalo  $(0, \infty)$ . Con ello se completa la formulación del problema: hacer mínima la función  $C$  de la ecuación 13 en el dominio  $(0, \infty)$ . La situación aparece como nuestro análisis lo indicó; de acuerdo con la ecuación 13,  $C$  será muy grande si  $x$  es o muy grande (debido al término en  $x$ ), o muy pequeña (debido al término  $a^2/x$ ).

Derivamos la ecuación 13 para obtener

$$\frac{dC}{dx} = kW \left( -\frac{a^2}{x^2} + 1 \right); \quad (14)$$

y así  $dC/dx = 0$  cuando  $x = a$ . Como

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{2kW a^2}{x^3} > 0, \quad (15)$$

este punto crítico es verdaderamente un punto mínimo local. Un argumento semejante al del ejemplo 2 muestra que  $x = a$  es en realidad un punto mínimo global. Llegamos a la conclusión de que la configuración más económica se tiene cuando la flecha es igual a la mitad del claro, esto es, cuando  $\theta = \pi/4$ .

Desde luego, se necesita tener en cuenta otros factores; por ejemplo, se requieren postes de soporte a cada lado de la calle. Si se necesita que el semáforo quede, digamos, a 15 ft sobre el piso, y si la calle tiene 40 ft de ancho, entonces el análisis anterior conduciría a soportes de 35 ft de alto. Podría ser mejor tensar más el cable para poder emplear postes de soporte más cortos a cada lado. En el problema 10 se indaga este asunto. ■

## EJEMPLO 4

### (Problema del conductor varado)

Supongamos que se le termina la gasolina al vehículo del lector en un punto  $P$  en una carretera solitaria (ver figura 4.3.4). Hay una estación de gasolina en el punto  $Q$ . Además, la distancia de  $P$  a  $O$  es de 3 mi, la distancia de  $O$  a  $Q$  es de 6 mi, y la estación de gasolina cierra dentro de 2.5 h. Debe el lector decidir si caminar por la carretera, o caminar directamente a campo traviesa, o bien caminar hasta un punto intermedio  $R$  entre  $O$  y  $Q$ , y a continuación, proseguir por la carretera hasta la gasolinera. Si se puede caminar a 4 mi/h en carretera y a 2 mi/h a campo traviesa, ¿qué ruta se debe escoger para alcanzar la estación de gasolina tan pronto como sea posible. Y, muy importante, ¿podrá el lector llegar a la estación de gasolina antes de que cierre?

Si  $x$  es la distancia de  $O$  a  $R$ , entonces el tiempo necesario para caminar directamente de  $P$  a  $R$  es  $\sqrt{9+x^2}/2$ ; el tiempo necesario para caminar de  $R$  a  $Q$  es  $(6-x)/4$ . Por tanto, el tiempo total  $T$  está dado por

$$T(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{2} + \frac{6-x}{4}. \quad (16)$$

Derivando la ecuación 16 obtenemos

$$T'(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{4}, \quad (17)$$

y, por consiguiente,  $T'(x) = 0$  cuando  $x = \sqrt{3}$ . Además

$$T''(x) = \frac{9}{2(9+x^2)^{3/2}} > 0, \quad (18)$$

de modo que el punto crítico  $x = \sqrt{3}$  es un punto mínimo local. Dando valores a la

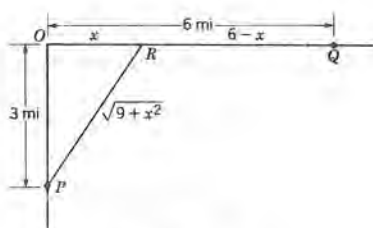


Figura 4.3.4



Figura 4.3.5

ecuación 16, cuando  $x = \sqrt{3}$  obtenemos

$$T(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(3\sqrt{3} + 6) \cong 2 \text{ hr } 48 \text{ min.} \quad (19)$$

No hay otros puntos en los cuales  $T'(x)$  sea cero, y por tanto estar tentados a razonar como en los ejemplos anteriores de que  $x = \sqrt{3}$  es en realidad un punto mínimo global. Sin embargo, este argumento sería erróneo en el ejemplo que nos ocupa.

Para ver que así es, consideremos los puntos extremos. Si  $x = 6$ , entonces, según la ecuación 16, el tiempo de viaje es

$$T(6) = \frac{\sqrt{45}}{2} \cong 3 \text{ hr } 21 \text{ min.} \quad (20)$$

Por otro lado, si  $x = 0$ , entonces  $T$  no se puede calcular con la ecuación 16; sustituir  $x = 0$  en esa ecuación equivale a caminar por la carretera de  $P$  a  $O$  a sólo 2 mi/h en lugar de a 4 mi/h. Para  $x = 0$ , se encuentra el valor correcto de  $T$  dividiendo la distancia total a lo largo de la carretera (9 mi) entre 4 mi/h; así, la definición correcta de la función  $T$  es

$$T(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{9 + x^2}}{2} + \frac{6 - x}{4}, & 0 < x \leq 6 \\ \frac{9}{4}, & x = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Así, si se queda uno en la carretera, *se puede* llegar a la estación de servicio con tiempo de sobra. En la figura 4.3.5 se muestra la gráfica de la ecuación 21. Es la discontinuidad de  $T$  en el punto extremo izquierdo la que hace que  $x = \sqrt{3}$  no sea punto mínimo global.

En este ejemplo deliberadamente no hemos definido la función  $T$  por completo desde el principio. Nuestro objeto fue destacar tanto como sea posible que siempre se debe tener cuidado en identificar el dominio de la función de que se trata, y ver que la



función esté definida en forma correcta en el dominio completo. En especial, los puntos extremos a veces deben recibir tratamiento particular. ■

## EJEMPLO 5

### (Problema de ganancia máxima)

Un comerciante en pinturas incurre en los siguientes gastos al comprar y distribuir  $x$  cajas de pintura por semana:

- (a) Costos fijos (renta, etc.) \$1,200 por semana.
- (b) \$  $60x$  por semana, que representa el costo mismo de la pintura.
- (c) \$  $x^2/24$  por semana por almacenamiento de inventario, manejo, etcétera.

Se pueden mantener las ventas a una tasa de  $x$  cajas por semana a un precio de  $p$  dólares por caja, donde

$$x = 2160 - 24p. \quad (22)$$

Finalmente, debido a limitaciones de espacio y a otros factores, el nivel máximo de operación del comerciante es la distribución de 1000 cajas por semana. Calcular el precio  $p$  al cual debe vender cada caja para hacer máxima la ganancia semanal.

El costo total semanal del comerciante,  $C(x)$ , está dado por la suma de los costos individuales enunciados arriba, o sea

$$C(x) = 1200 + 60x + \frac{x^2}{24}. \quad (23)$$

La ganancia bruta semanal  $R(x)$  por vender  $x$  cajas a  $p$  dólares por caja es  $px$ . Para expresar a  $R$  en términos de  $x$  debemos despejar primero a  $p$  de la ecuación 22,

$$p = \frac{2160 - x}{24} = 90 - \frac{x}{24}. \quad (24)$$

Entonces

$$R(x) = x \left( 90 - \frac{x}{24} \right) = 90x - \frac{x^2}{24}. \quad (25)$$

El beneficio semanal  $P(x)$  del distribuidor está dado por

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 90x - \frac{x^2}{24} - \left( 1200 + 60x + \frac{x^2}{24} \right) \\ &= -\frac{x^2}{12} + 30x - 1200. \end{aligned} \quad (26)$$

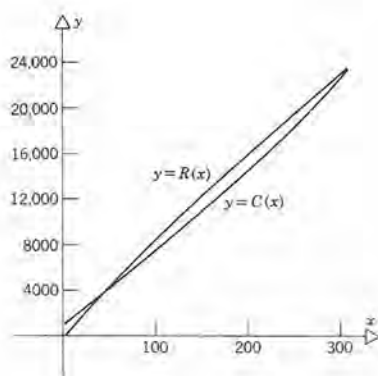


Figura 4.3.6

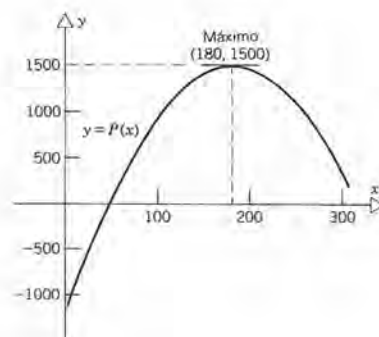


Figura 4.3.7

El dominio de la función  $P$  está determinado debido a que  $x$  es intrínsecamente no negativa y que también  $x \leq 1000$ . Así, buscamos el máximo de  $P$  en el intervalo  $[0, 1000]$ . En la figura 4.3.6 se muestran, respectivamente, las gráficas de las funciones costo e ingreso, y en la figura 4.3.7 se muestra la función ganancia  $P$ .

Derivando la ecuación 26 obtenemos

$$P'(x) = -\frac{x}{6} + 30; \quad (27)$$

por tanto  $P'(x) = 0$  cuando  $x = 180$ . Como  $P'(x)$  existe en todos los puntos en  $(0, 1000)$ , los únicos puntos críticos son  $x = 180$  y los extremos  $x = 0$  y  $x = 1000$ . Según la ecuación 27, es claro que  $P'(x) > 0$  para  $0 < x < 180$  y que  $P'(x) < 0$  para  $180 < x < 1000$ . Así,  $x = 180$  es el punto máximo global de  $P$  en el intervalo  $[0, 1000]$ . El valor correspondiente de  $P$  es  $P(180) = \$1500$ . El precio óptimo por caja  $p$  se obtiene haciendo que  $x = 180$  en la ecuación 24, con lo cual

$$P = 90 - \frac{180}{24} = \$82.50 \text{ por caja} \quad (28)$$

es el precio que debe cobrar el comerciante para elevar las ganancias al máximo bajo las condiciones dadas.

En general, el mundo de los negocios es bastante más complejo que lo que puede sugerir este ejemplo. Por un lado, en el mundo real, la relación entre el precio unitario  $p$  y el nivel de ventas  $x$  es poco probable que sea una función lineal sencilla. Sin embargo, el ejemplo presenta un principio económico importante, que es que las ganancias son máximas cuando

$$C'(x) = R'(x).$$

En palabras, el nivel óptimo de operación se presenta cuando el **costo marginal**  $C'(x)$

es exactamente igual al **ingreso marginal**  $R'(x)$ . Si no es así, se debe pagar ya sea para aumentar o para contraer el nivel de actividad del negocio, dependiendo del signo de  $R'(x) - C'(x)$ . ■

## PROBLEMAS

- Determinar dos números positivos  $x$  y  $y$  cuyo producto sea  $k$  y cuya suma sea la mínima posible.
- De todos los rectángulos de una diagonal dada, demostrar que el cuadrado es el que tiene el área mayor.
- De todos los rectángulos que tienen perímetro dado, demostrar que el cuadrado es el que tiene el área mayor.
- De todos los triángulos isósceles que se pueden inscribir en determinado círculo, demostrar que el triángulo equilátero es el que tiene el área mayor.
- De todos los rectángulos que se pueden inscribir en un círculo dado, demostrar que el cuadrado tiene el área mayor.
- Determinar el radio  $r$  y la altura  $h$  de un cilindro circular recto cuya área de la superficie  $S$ , incluyendo la tapa y el fondo, sea fija, y cuyo volumen  $V$  sea tan grande como sea posible.
- Se tiene una lata circular cilíndrica recta de radio  $r$  y altura  $h$ . Suponer que la superficie lateral se forma de una sola pieza rectangular de metal, y que la tapa y el fondo se cortan de piezas cuadradas de lado  $2r$ . Determinar las dimensiones de la lata de volumen dado  $V$  fabricadas con cantidad mínima de material, tomando en cuenta el desecho de las esquinas de las piezas cuadradas. Determinar la razón altura/diámetro,  $h/d$  para los que se minimiza el material empleado en la lata.
- Suponer que se fabrica una lata circular cilíndrica recta, incluyendo tapa y fondo, con material que cuesta  $\alpha$  dólares por pulgada cuadrada. Suponer además que hay un costo adicional de fabricación de  $\beta$  dólares por pulgada de la circunferencia de la tapa y del fondo de la lata. Deducir una ecuación algebraica cuya solución sea el radio  $r$  de la lata de un determinado volumen  $V$  cuyo costo sea mínimo.
- Una caja con base cuadrada de lado  $x$  y altura  $h$  se fabrica de tal modo que tenga el volumen  $V$ . Determinar las dimensiones de la caja cuya área de la super-

ficie sea mínima si la caja es (a) cerrada, y (b) abierta, sin tapa, pero con fondo.

- Volviendo al ejemplo 3, supongamos que el semáforo se va a colgar a una altura de  $h$  pies sobre el pavimento y que los soportes a cada lado de la calle cuestan  $m$  dólares por pie de altura. Demostrar que en este caso la configuración más económica es para la cual el cable tiene una flecha  $x$  dada por

$$x = a \left( \frac{kW}{2m + kW} \right)^{1/2}.$$

Nótese que  $x < a$  y que  $x$  disminuye cuando  $m$  aumenta.

- Un pasillo de  $a$  pies de ancho interseca a un corredor de  $b$  pies de ancho en ángulo recto (véase figura 4.3.8). Determinar la longitud  $l$  del tramo recto de tubo más largo que se puede pasar horizontalmente del pasillo al corredor.

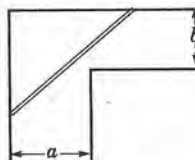


Figura 4.3.8

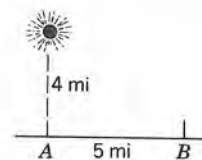


Figura 4.3.9

- Un faro está a 4 mi de distancia del punto más cercano de una costa recta. El guardafaros obtiene sus artículos de consumo de un punto  $B$  ubicado a 5 millas costa abajo de  $A$  (véase figura 4.3.9). El guardafaros puede remar en el bote del faro a una velocidad de 2 mi/h, y puede caminar por la playa a una velocidad de 3 mi/h. Suponiendo que el bote puede encallar en cualquier punto de la playa entre  $A$  y  $B$ , ¿dónde debe desembarcar el guardafaro para llegar a la tienda en el tiempo más corto posible?
- A una pieza cuadrada de hojalata de lado  $a$  se le da la forma de una caja cortando piezas cuadradas de lado



$x$  de cada esquina, y doblando los lados hacia arriba (véase figura 4.3.10). Determinar el volumen máximo de la caja que se puede formar de este modo.

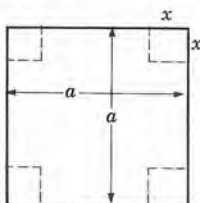


Figura 4.3.10

14. Suponer que se va a conformar una caja a partir de una hoja rectangular de hojalata de longitud  $a$  y ancho  $b$ , cortando cuadrados de lado  $x$  de cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Determinar el valor de  $x$  que produzca la caja de máximo volumen.
15. Un trozo de alambre de longitud  $l$  se corta en dos. Uno de los trozos resultantes se dobla formando un cuadrado y el otro un triángulo equilátero. Decir cómo cortar el alambre para que el área total encerrada en el cuadrado y el triángulo sea (a) mínima, y (b) máxima.
16. Se va a hacer una canal a partir de una lámina larga de metal cuyo ancho es  $3l$ . La sección transversal de la canal es trapezoidal y se forma doblando una parte de longitud  $l$  en cada lado a un ángulo  $\theta$  (véase figura 4.3.11). Determinar  $\theta$  de modo que el área de la sección transversal sea tan grande como sea posible.

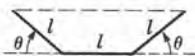


Figura 4.3.11

17. El barco  $A$  está a 30 mi del punto  $O$  a media noche y se dirige hacia el Oeste a 15 mi/h. El barco  $B$  está a 20 mi al norte de  $O$  a media noche y se dirige hacia el sur a 15 mi/h. Calcular cuándo están más cercanos los dos barcos entre sí, y calcular esa distancia mínima.
18. Un contratista desea construir una casa en determinado punto  $x$  en una carretera recta entre las fábricas que están separadas una distancia  $l$  (véase figura 4.3.12). Las fábricas emiten humo a intensidades  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. En cada caso, la concentración de humo es inversamente proporcional a la distancia a la fábrica. Calcular el punto  $x$  en el que se debe construir la casa para reducir al mínimo la concentración de humo en la casa.

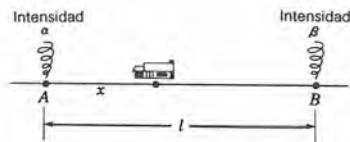


Figura 4.3.12

19. Dos excursionistas han levantado sus tiendas en los puntos  $A$  y  $B$  de la orilla de un lago circular de 1 milla de radio (véase figura 4.3.13). ¿Dónde debe levantar su tienda un tercer excursionista para que la suma de las distancias en línea recta desde su tienda a las de los primeros dos sea máxima?

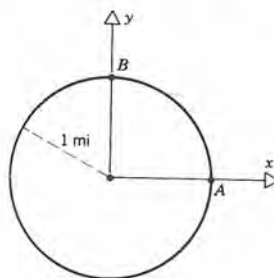


Figura 4.3.13

20. (a) Determinar el punto, o puntos, de la gráfica de  $x = y^2$  que sean más cercanos al punto  $(1, 0)$ .  
(b) Determinar el punto, o puntos, de la gráfica de  $x = y^2$  que estén más próximos al punto  $(a, 0)$ , siendo  $a$  cualquier número real.
21. Sea  $y = f(x)$  derivable para  $-\infty < x < \infty$ , y sea  $(a, b)$  cualquier punto que no pertenezca a la gráfica de  $f$ .  
(a) Si  $(x_0, y_0)$  es el punto de la curva más cercano a  $(a, b)$ , demostrar que  $x_0$  satisface la ecuación

$$x_0 - a + f'(x_0)[f(x_0) - b] = 0. \quad (i)$$

(Sin embargo, puede haber otras soluciones de la ecuación (i) que no corresponden a tales puntos mínimos).

- (b) Demostrar que  $(a, b)$  pertenece a la recta que es perpendicular a la curva en el punto  $(x_0, y_0)$ .

## 224 APLICACIONES DE LA DERIVADA

- 22 (a) Determinar los puntos de la curva  $x^2 - xy + y^2 = 1$  que quedan más cerca del origen, y los que quedan más lejos del origen. *Sugerencia:* sea  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . ¿Qué imagen de  $\theta$  se debe tener en cuenta?

(b) Demostrar que la recta del origen a cada uno de los puntos que se determinaron en (a) es normal a la curva dada.

23. Un ingeniero contratista construye  $x$  casas por año, y las vende a un precio de 80 kilodólares cada una. El contratista tiene costos fijos de 25 kilodólares por año por gastos de oficina, y un costo anual de 65 kilodólares por casa por materiales y sueldos. También hay costos adicionales que aumentan con el número de casas construidas, que son  $x^2/3$  kilodólares por año.

(a) Calcular el número de casas que debe construir el contratista cada año para obtener la ganancia máxima. Nótese que se deben construir un número entero de casas.

(b) Suponer que los costos fijos del contratista son  $\alpha$  kilodólares por año, y los demás costos son los que se dieron antes. Demostrar que el nivel óptimo de construcción es independiente de  $\alpha$ . Si el contratista desea tener una ganancia anual de al menos 125 kilodólares, calcular el valor máximo aceptable de  $\alpha$ .

(c) Suponer ahora que el contratista puede vender  $x$  casas por año a un precio de  $p$  dólares, siendo

$$p = 4(100 - x).$$

Los costos son los que se dieron antes. Calcular el número de casas que debe construir el contratista cada año para obtener la ganancia óptima.

24. (a) Una compañía de transportes desea cubrir una distancia de 500 mi a una velocidad media  $x$  mi/h. Los reglamentos de velocidad establecen que  $40 \leq x \leq 55$ . Existe un costo fijo de \$3 por hora de funcionamiento del camión, debido a seguros, mantenimiento, depreciación, etcétera; además,

está el sueldo del conductor, \$10 por hora. El combustible cuesta \$1 por galón y se consume a una tasa de  $x^2/200$  gal/hr. Calcular la velocidad promedio a la cual se debe conducir el camión para hacer mínimo el costo del viaje.

(b) Suponer que no cambian las condiciones de la parte (a), a excepción de que el sueldo del conductor es  $w$  dólares por hora. Determinar el valor de  $w$  arriba para el cual es más económico conducir el camión a la velocidad máxima legal.

(c) Suponer que no cambian las condiciones de la parte (a), excepto que el costo del combustible es  $\alpha$  centavos/galón. Determinar el valor de  $\alpha$  arriba para el cual es más económico conducir el camión a la velocidad mínima legal.

25. El gerente de una oficina de investigación de ingeniería ha determinado, por experimentación, que si a  $x$  ingenieros se les asigna lugar de escritorio en una oficina grande, entonces el número promedio de horas  $w$  de trabajo útil de cada ingeniero por día está dado por

$$w = 8 \left[ 1 - \frac{x^2}{x^2 + 130} \right],$$

siendo  $x \geq 1$ . ¿Cuántos ingenieros se deben contratar en la oficina si el número total de horas de trabajo útil de todos los ingenieros debe ser el mayor posible?

26. Se hace un experimento en el que la probabilidad de éxito es  $p$ , y la de fracaso es  $1 - p$ . Por ejemplo, si se tiran los dados, la probabilidad de sacar 1 (éxito) es  $\frac{1}{6}$  y la probabilidad de no sacar 1 (fracaso) es de  $\frac{5}{6}$ .

Se puede demostrar que, en  $n$  repeticiones de este experimento, la probabilidad  $P_{nk}$  de tener exactamente  $n$  éxitos es

$$P_{nk} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Calcular  $p$  de tal modo que  $P_{nk}$  sea la mayor posible.

## 4.4 PROBLEMAS DE RAZONES RELACIONADAS

Un tipo muy común de problema es aquel en que intervienen dos o más variables dependientes que son funciones de una sola variable independiente que, en general, es el tiempo. Se da la razón de cambio de una variable con respecto al tiempo y se pide



determinar la razón de cambio de la otra con respecto al tiempo. A esos problemas se les llama con frecuencia problemas de razones relacionadas. A continuación presentaremos algunos ejemplos típicos.

### EJEMPLO 1

Se vierte arena formando una pila cónica, a una tasa de  $10 \text{ ft}^3/\text{min}$ . El diámetro de la base de la pila siempre es 50 por ciento mayor que su altura. Determinar qué tan rápido aumenta la altura de la pila cuando ésta tiene 5 ft de alto.

De acuerdo con la figura 4.4.1, sea  $r$  el radio de la base y  $h$  la altura de la pila. Tanto  $r$  como  $h$  dependen del tiempo  $t$ . Sabemos que la velocidad a la cual cambia el volumen  $V$  de la pila es  $dV/dt = 10 \text{ ft}^3/\text{min}$ , y deseamos calcular  $dh/dt$ . Para obtener una relación de  $dV/dt$  y  $dh/dt$ , necesitamos primero una relación entre  $V$  y  $h$ . El volumen  $V$  de la pila cónica de arena está dado por

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \quad (1)$$

y depende tanto de  $r$  como de  $h$ . Sin embargo, sabemos que  $2r = (\frac{3}{2})h$  y por tanto  $r = \frac{3}{4}h$ . En consecuencia, sustituyendo a  $r$  en la ecuación 1, se obtiene que

$$V = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{9}{16} h^2 \right) h = \frac{3\pi}{16} h^3, \quad (2)$$

que es la relación deseada entre  $V$  y  $h$ . Podemos considerar que la ecuación 2 define a  $V$  como función compuesta de  $t$ , esto es,  $V$  es función de  $h$ , siendo  $h$  función de  $t$ . Por tanto, según la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{3\pi}{16} 3h^2 \frac{dh}{dt} \\ &= \frac{9\pi}{16} h^2 \frac{dh}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Finalmente, sustituimos los valores dados en el enunciado del problema para  $h$  y para  $dV/dt$ , y encontramos que

$$10 = \frac{9\pi}{16} \cdot 25 \cdot \frac{dh}{dt} \Big|_{h=5},$$

o, despejando a  $dh/dt$ ,

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{h=5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{16}{9\pi} = \frac{32}{45\pi} \cong 0.2264 \frac{\text{ft}}{\text{min}} \cong 2.7 \frac{\text{in}}{\text{min}}. \quad \blacksquare \quad (4)$$

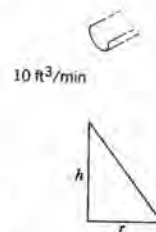


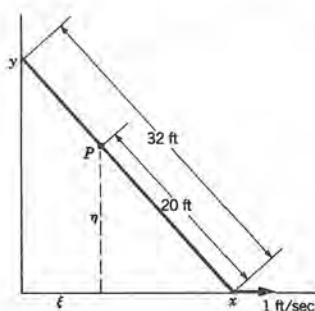
Figura 4.4.1



**EJEMPLO 2**

Una escalera de mano de 32 ft de longitud está recargada contra el muro de una construcción. El extremo inferior de la escalera comienza a resbalar con una velocidad uniforme de 1 ft/seg. Calcular la velocidad (en dirección vertical hacia abajo) del extremo superior de la escalera cuando el inferior está a 24 ft del muro de la construcción.

Además, suponer que un pintor está a 20 ft del extremo inferior de la escalera (punto  $P$ , figura 4.4.2). Determinar la componente vertical de la velocidad del pintor bajo las condiciones descritas en el párrafo anterior.

**Figura 4.4.2**

Viendo la figura 4.4.2, sean  $x$  y  $y$  las distancias desde la base del muro a los extremos inferior y superior de la escalera, respectivamente. Entonces

$$x^2 + y^2 = 1024. \quad (5)$$

Considérese a  $x$  y a  $y$  como funciones de  $t$ , y empleando la regla de la cadena para derivar la ecuación 5 con respecto a  $t$ , obtenemos que

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0,$$

o sea

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}. \quad (6)$$

Sabemos que  $dx/dt = 1$  (ft/seg). Además, de acuerdo con la ecuación 5,  $y = \sqrt{448}$  cuando  $x = 24$ . Sustituyendo esos valores en la ecuación 6, obtenemos

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=24} = -\frac{24}{\sqrt{448}} = -1.134 \text{ ft/sec}. \quad (7)$$

A continuación sean  $\xi$  y  $\eta$  las coordenadas horizontal y vertical del pintor respectivamente; deseamos determinar a  $d\eta/dt$ . Teniendo en cuenta que los triángulos mayor y menor de la figura 4.4.2 son semejantes, obtenemos

$$\frac{\eta}{y} = \frac{20}{32}, \quad \text{o} \quad \eta = \frac{5}{8}y. \quad (8)$$

Así,  $d\eta/dy = \frac{5}{8}$ , aplicando la regla de la cadena,

$$\left. \frac{d\eta}{dt} \right|_{x=24} = \frac{d\eta}{dy} \frac{dy}{dt} \Big|_{x=24} = \frac{5}{8}(-1.134) = -0.709 \text{ ft/sec.} \quad (9)$$

Es la velocidad del pintor hacia abajo en el instante especificado en el enunciado del problema. ■

En los problemas de razones relacionadas, como los que acabamos de presentar, la mayor dificultad, si es que la hay, quizá en mayor grado que en los problemas de la sección 4.3, reside en la formulación matemática, o modelación del problema, más que en su solución. Esta última significa en forma típica no más que una aplicación directa de la regla de la cadena, y es una rutina normal una vez que el problema está formulado correctamente. Sin embargo, la formulación, o proceso de modelado, puede necesitar de ingenio, mezclado con frecuencia con algo del proceso de acierto y error. Puede ser frustrante, en especial si, por alguna razón inexplicable, cuando no se observa una relación importante entre las variables. Recuérdese, sin embargo, que la práctica ayuda; si el lector no ha tenido mucha experiencia con la modelación matemática o formulación del problema (cosa que muchos estudiantes no la han tenido), entonces se puede esperar razonablemente que la destreza de uno se mejore rápidamente. A continuación se presentan algunos problemas más de razones relacionadas.

### EJEMPLO 3

Un peso  $w$  se cuelga de una cuerda que pasa por una polea, como se muestra en la figura 4.4.3. El extremo libre de la cuerda se jala en sentido horizontal con una velocidad de 3 ft/s y a una altura de 4 ft sobre el piso. Si la polea está a una altura de 12 ft y la cuerda tiene una longitud de 24 ft, calcular la velocidad a la que sube el peso cuando está a 6 ft sobre el piso.

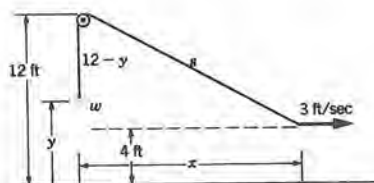


Figura 4.4.3

Sea  $y$  la altura del peso sobre el piso, y sea  $x$  la distancia horizontal desde el peso hasta el extremo libre de la cuerda (ver figura 4.4.3). El dato es que  $dx/dt = 3$  ft/s y se pide calcular  $dy/dt$ . Necesitamos obtener primero una relación entre  $y$  y  $x$ . Lo podemos hacer en dos etapas. Nótese que la longitud total de la cuerda consta de un tramo de longitud  $12 - y$  entre el peso y la polea, y un tramo de longitud  $s$  entre la polea y el extremo libre. Así,

$$24 = 12 - y + s,$$

o sea que

$$y = s - 12. \quad (10)$$

Además,  $s$  se relaciona con  $x$  como se ve en el diagrama de la figura 4.4.4:

$$s^2 = x^2 + 64. \quad (11)$$

A continuación pensemos que  $y$  es una función de  $s$ , como en la ecuación 10, y que  $s$  es una función de  $x$ , como en la ecuación 11. Entonces, se puede calcular  $dy/dt$  empleando la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{s} \frac{dx}{dt}, \quad (12)$$

ya que  $dy/ds = 1$ , de acuerdo con la ecuación 10, y  $ds/dx = x/s$ , de acuerdo con la ecuación 11. La ecuación 12 es la relación buscada entre  $dx/dt$  y  $dy/dt$ . Se sabe que  $dx/dt = 3$  ft/s; además, cuando  $y = 6$  ft,  $s = 18$  ft según la ecuación 10, y entonces  $x = \sqrt{260}$  ft de acuerdo con la ecuación 11. Sustituyendo esos valores en la ecuación 12, se obtiene

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=6} = \frac{\sqrt{260}}{18} \approx 2.6874 \text{ ft/sec.} \quad (13)$$

#### EJEMPLO 4

Un faro está a 800 ft de una costa recta, y gira a una velocidad angular constante igual a cuatro revoluciones por minuto. Calcular la velocidad con que se mueve el círculo de luz a lo largo de la costa cuando alcanza un punto a 1000 ft de distancia del faro.

Se escoge un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 4.4.5. El origen queda en el faro y el eje  $x$  está dirigido hacia la costa y es perpendicular a ella. A continuación represéntese con  $y$  a la posición del punto de luz en la costa, y sea  $\theta$  el ángulo entre el eje  $x$  positivo y la dirección del haz de luz. Sabemos que  $d\theta/dt = 8\pi$  radianes/min, y deseamos calcular  $dy/dt$ . De acuerdo con la figura 4.4.5,

$$y = 800 \tan \theta, \quad (14)$$

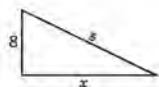


Figura 4.4.4



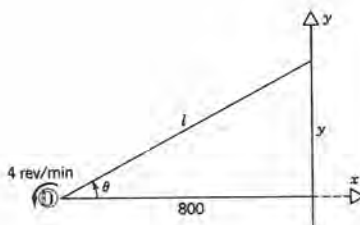


Figura 4.4.5

de manera que

$$\frac{dy}{d\theta} = 800 \sec^2 \theta. \quad (15)$$

Así, de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 6400\pi \sec^2 \theta. \quad (16)$$

Cuando  $l = 1000$ ,  $\cos = \frac{4}{5}$ , y por tanto  $\sec \theta = \frac{5}{4}$ . Sustituyendo este valor en la ecuación 16, obtenemos

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{l=1000} = 6400\pi \left( \frac{5}{4} \right)^2 \cong 31416 \text{ ft/min}, \quad (17)$$

o

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{l=1000} \cong 523.6 \text{ ft/sec.} \quad \blacksquare \quad (18)$$

## PROBLEMAS

- Un globo esférico se expande a una tasa de  $2 \text{ ft}^3/\text{min}$ , y siempre mantiene su forma. ¿A qué velocidad crece el radio  $r$  del globo cuando  $r = 3 \text{ ft}$ ?
- ¿A qué velocidad crece el área de la superficie del globo del problema 1, en esas mismas condiciones?
- Si la longitud de un lado de un triángulo equilátero aumenta a una velocidad de  $2 \text{ in}/\text{min}$ , ¿qué tan rápido aumenta el área del triángulo cuando el lado tiene  $7 \text{ in.}$  de longitud?
- Un círculo se expande de tal modo que su área aumenta a una velocidad de  $2 \text{ m}^2/\text{min}$ . ¿Qué tan rápido cambia la circunferencia cuando el radio es de  $5 \text{ m}$ ?
- Una partícula se desplaza por la curva  $x^2 + y^2 = 8$ . Cuando la partícula pasa por el punto  $(-2, 1)$ , se sabe que  $dx/dt = 3$ . Calcular el valor de  $dy/dt$  en este momento.
- Una partícula se mueve en la curva  $x^2 + xy + y^2 = 3$ . Cuando la partícula pasa por el punto  $(-1, -1)$ , se

## 230 APLICACIONES DE LA DERIVADA

sabe que  $dy/dt = \sqrt{3}$ . Determinar el valor de  $dx/dt$  en ese momento.

7. La presión  $p$  y el volumen  $V$  de un gas ideal diatómico sometido a un proceso adiabático satisfacen la ecuación  $pV^{7/5} = c$ , donde  $c$  es constante. Suponer que  $V = 32 \text{ in.}^3$ ,  $p = 20 \text{ lb/in.}^2$  y que el gas se comprime a una tasa de  $0.1 \text{ in.}^3/\text{s}$ . Calcular la tasa a la cual varía la presión.
8. Una partícula se mueve en órbita circular  $x^2 + y^2 = 4$ , con una velocidad angular constante igual a una revolución por minuto. Calcular  $dx/dt$  y  $dy/dt$  cuando la partícula pasa por el punto  $(\sqrt{3}, 1)$ .
9. Un rectángulo se expande de tal modo que su longitud siempre es el doble de su ancho. El perímetro del rectángulo aumenta a una velocidad de  $3 \text{ in./min.}$  Calcular la razón de cambio del área del rectángulo cuando el área es de  $24 \text{ in.}^2$ .
10. Un triángulo isósceles tiene una base de  $6 \text{ in.}$  Su altura aumenta a una velocidad de  $1 \text{ in./min.}$  Calcular la razón de cambio del ángulo del vértice cuando la altura es de  $6 \text{ in.}$
11. Un hombre cuya estatura es de  $6 \text{ ft}$  camina alejándose de un farol de la calle, que está a  $20 \text{ ft}$  del piso. La velocidad del hombre es  $4 \text{ ft/s}$ . Calcular la velocidad a la que aumenta la longitud de su sombra cuando se encuentra a  $30 \text{ ft}$  de la base del poste del farol.
12. La sombra de una muchacha cuya estatura es  $5 \text{ ft}$  tiene  $6 \text{ ft}$  de longitud cuando se encuentra a  $12 \text{ ft}$  de un poste de alumbrado. A continuación camina alejándose en línea recta del poste a una velocidad de  $3 \text{ ft/s}$ . ¿A qué velocidad cambia su sombra cuando se encuentra a  $24 \text{ ft}$  del poste?
13. El radio  $r$  de una esfera, en centímetros, varía a una velocidad de  $(1 + r^2)^{-1} \text{ cm/min.}$  Calcular la rapidez a la cual está variando el volumen cuando  $r = 3 \text{ cm.}$
14. El lado  $s$  de un cuadrado, en pulgadas, cambia con una rapidez de  $s^{-1/2} \text{ in./min.}$  Calcular la rapidez a la cual varía el área cuando  $s = 4 \text{ in.}$
15. Se inscribe un cuadrado en un círculo. Si el radio del círculo aumenta a una velocidad de  $3 \text{ cm/min.}$ , determinar con qué rapidez aumenta el área del cuadrado cuando el radio es de  $10 \text{ cm.}$
16. Se inscribe un cubo en una esfera cuyo radio aumenta a una velocidad de  $3 \text{ cm/min.}$  ¿Con qué rapidez cambia el área de la superficie del cubo cuando el radio de la esfera es de  $8 \text{ cm?}$
17. Un tanque cónico, con el vértice hacia abajo, se encuentra vacío al principio. El tanque tiene  $8 \text{ ft}$  de profundidad y el radio de la parte superior es de  $2 \text{ ft}$ . Se agrega agua al tanque a razón de  $0.5 \text{ ft}^3/\text{min.}$  Calcular la velocidad con la que aumenta el nivel del agua cuando la profundidad es de  $5 \text{ ft}$  en el centro del tanque.
18. Un tanque de agua tiene forma de pirámide cuadrangular con el vértice hacia abajo. La base de la pirámide, que es la parte superior del tanque, tiene  $3 \text{ ft}$  de lado, y la profundidad del tanque en su centro es de  $9 \text{ ft}$ . Cuando el agua tiene  $6 \text{ ft}$  de profundidad en el centro del tanque, se observa que el nivel del líquido baja a una velocidad de  $1 \text{ in./min.}$ , a causa de una fuga. ¿Con qué rapidez se escapa el agua del tanque?
19. Se jala un bote a un muelle con una cuerda y un montacargas, a  $6 \text{ ft}$  más arriba del punto de amarre de la cuerda en el bote. Si se enrolla la cuerda en el montacargas a una velocidad de  $4 \text{ ft/min.}$ , ¿cuál es la velocidad horizontal del bote cuando está a  $9 \text{ ft}$  de distancia del muelle?
20. Un aeroplano a una altura de  $3 \text{ mi}$  vuela directamente sobre un observador en el piso. El avión mantiene una velocidad constante de  $360 \text{ mi/h}$  en vuelo horizontal. Cuando ya pasó el punto que se encuentra directamente sobre el observador y ha recorrido  $2 \text{ mi}$ , ¿cuál es la razón de cambio del ángulo entre la visual del observador hacia el avión, y la horizontal?
21. Un canalón de agua tiene  $8 \text{ ft}$  de longitud y tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles cuya base (la parte superior) tiene  $2 \text{ ft}$  de ancho, y cuya profundidad también es de  $2 \text{ ft}$ , estando cerrado en sus extremos. Se bombea agua al canalón a un flujo de  $3 \text{ ft}^3/\text{min.}$  Calcular a qué velocidad aumenta el nivel del agua, cuando la profundidad es de  $1.5 \text{ ft}$  en el centro del canalón.
22. Un canalón de agua cerrado en sus extremos tiene  $12 \text{ ft}$  de longitud y tiene una sección transversal semicircular, con el lado plano hacia arriba; el radio del círculo es de  $3 \text{ ft}$ . Se extrae el agua a razón de  $10 \text{ ft}^3/\text{min.}$  ¿Cuál es la razón de cambio del nivel de agua, cuando la profundidad del agua es de  $1 \text{ ft}$  en el centro del canalón?

## 4.5 MÉTODO DE NEWTON

En las aplicaciones matemáticas, con frecuencia nos encontramos con el problema de determinar las raíces reales de una ecuación  $f(x) = 0$ . A excepción de casos especiales, como por ejemplo, cuando  $f$  es un polinomio cuadrático, es imposible resolver analíticamente esas ecuaciones. Un método de aproximación a una raíz real de una ecuación es el de bisección de un intervalo, que se presentó en la sección 2.6. Otro método, ideado por Newton, emplea aproximaciones lineales para generar aproximaciones sucesivas a una raíz; con frecuencia, este método es un medio eficiente y exacto de calcular una raíz con tanta exactitud como la que se necesite.

Supongamos que  $f$  es derivable y que  $r$  es raíz de  $f(x) = 0$  (véase figura 4.5.1).

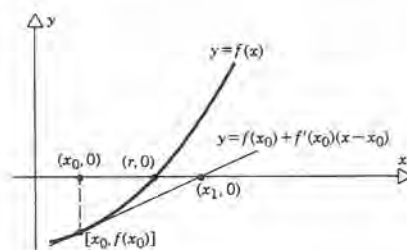


Figura 4.5.1

Además, supóngase que no conocemos  $r$ , pero que tenemos un valor aproximado  $x_0$  en su lugar; por ejemplo, el valor aproximado  $x_0$  se pudo haber determinado a partir de una gráfica burda de  $y = f(x)$ . El primer paso en el desarrollo del método de Newton es construir la recta tangente en  $[x_0, f(x_0)]$ :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

Esta recta se aproxima a la gráfica de  $y = f(x)$  en la vecindad de  $x = x_0$ . Por tanto, obtenemos una nueva aproximación  $x_1$  a  $r$  determinando el punto al cual la recta tangente cruza el eje  $x$ . Para hacerlo igualamos  $y = 0$  y despejamos a  $x$  de la ecuación 1. Si representamos el valor resultante de  $x$  mediante  $x_1$ , tenemos que

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

o sea

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2)$$

A continuación determinamos la recta tangente en  $[x_1, f(x_1)]$ ,

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$



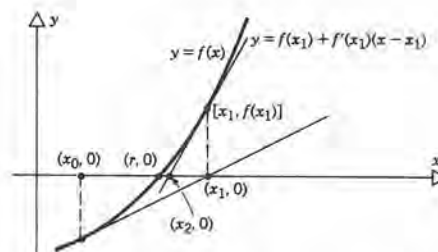


Figura 4.5.2

(véase figura 4.5.2). Se obtiene una nueva aproximación  $x_2$  a  $r$  en el punto en el que esta recta tangente cruza el eje  $x$ . Así,

$$-f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

y entonces

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (3)$$

Continuando este proceso, obtenemos la fórmula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

La técnica de emplear la ecuación 4 en forma repetida para calcular aproximaciones sucesivas a una raíz real de la ecuación  $f(x) = 0$  se conoce como el método de Newton.\* Los ejemplos siguientes muestran su empleo.

### EJEMPLO 1

Emplear el método de Newton para calcular una raíz real de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7 = 0. \quad (5)$$

Obsérvese que es la misma ecuación que estudiamos en el ejemplo 5 de la sección 2.6. Es fácil ver que  $f(1) = -2$ , y que  $f(2) = -5$ . Por tanto, debe haber a lo más una raíz en el intervalo  $1 < x < 2$ . Escojamos nuestra primera estimación de la raíz  $x_0 = 1.5$ . Los cálculos resultantes se resumen en la tabla 4.1. Por ejemplo, en el primer renglón de la tabla se ve que  $f(x_0) = 0.875$ , y que  $f'(x_0) = 6.75$ . Entonces, empleando la fórmula (4) de Newton para  $n = 0$ , obtenemos que  $x_1 = 1.3703704$ , la que aparece

\* Este método se encuentra en las obras *De analysi* y *De Methodis Serierum et Fluxionum*, de Isaac Newton. Estos libros fueron escritos aproximadamente en 1670, pero se publicaron en 1711 y 1736, respectivamente.

**Tabla 4.1** Método de Newton para  
 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7 = 0$ .

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	1.5	0.875	6.75
1	1.3703704	0.0398313	6.1522634
2	1.3638961	0.0000882	6.1250534
3	1.3638817	$7 \times 10^{-10}$	6.1249931
4	1.3638817		

en el segundo renglón de la tabla. Tres repeticiones más del cálculo dan los valores sucesivos  $x_2 = 1.3638961$ ,  $x_3 = 1.3638817$  y  $x_4 = 1.3638817$ . El proceso se termina en esta etapa porque  $x_4 = x_3$  y no se pueden tener más correcciones, a menos que se manejen más decimales. ■

Al efectuar un cálculo empleando el método de Newton, el lector debe tomar nota de las diferencias sucesivas  $|x_{n+1} - x_n|$ , y terminar el procedimiento cuando esta diferencia sea menor que el error que se admita. En la mayor parte de los casos, esto querrá decir que  $x_n$  es exacto hasta un número correspondiente de cifras decimales. En el ejemplo 1, la tercera  $x_3$  iterada aproxima en forma correcta a la raíz real de la ecuación 5 hasta siete lugares decimales.

Si se compara el método de Newton en este problema con el método de bisección del intervalo que se presentó en la sección 2.6, vemos que el método de Newton da una exactitud de siete cifras decimales, mientras que el método de bisección de intervalo da una exactitud de dos cifras decimales después de 5 pasos. Así, el método de Newton se acerca a la raíz con mucha mayor rapidez. Por otro lado, en cada paso, el método de Newton necesita algo más de cálculos, porque hay que evaluar  $f'(x_n)$  al igual que  $f(x_n)$ . En resumen, para este problema, el método de Newton es bastante más eficiente.

## EJEMPLO 2

Hallar una raíz positiva de

$$f(x) = x - 2 \sin x = 0. \quad (6)$$

Esta función se describió con algo de detalle en el ejemplo 2 de la sección 4.2. De acuerdo con esa descripción, o de la gráfica de la figura 4.2.4, es claro que sólo existe una raíz positiva, que queda entre el punto mínimo local en  $x = \pi/3$  y el punto máximo local en  $x = 5\pi/3$ . Además, como  $f(\pi/2) = \pi/2 - 2 < 0$ , y  $f(\pi) = \pi > 0$ , en realidad la raíz queda en el intervalo  $(\pi/2, \pi)$ . Escojamos a  $x_0 = 2.0$  como nuestra aproximación inicial. Entonces, la tabla 4.2 muestra los cálculos que siguen. Como en el ejemplo 1, sólo se necesitan tres iteraciones para obtener la raíz correcta con siete cifras decimales.

**Tabla 4.2** Método de Newton para  
 $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x = 0$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2.0	0.1814051	1.8322937
1	1.9009956	0.0090401	1.6484631
2	1.8955116	0.0000285	1.638078
3	1.8954943	$-1 \times 10^{-10}$	1.6380451
4	1.8954943		

**Tabla 4.3** Método de Newton para  
 $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x = 0$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	3.0	2.71776	2.979985
1	2.0879954	0.3495804	1.988895
2	1.9122293	0.0276776	1.6696753
3	1.8956526	0.0002594	1.6383452
4	1.8954943		

En este caso nuestro cálculo inicial  $x_0$  fue bastante bueno; resultó que queda a 6 por ciento de la raíz real. Para ver el efecto de emplear una aproximación inicial mucho más pobre, supongamos que comenzamos con  $x_0 = 3.0$ . En la tabla 4.3 se muestran los cálculos resultantes. No obstante el hecho de que  $x_0$  tiene un error de un 58%, la  $x_4$  de la cuarta iteración da la raíz correcta con siete cifras decimales. El efecto de emplear una mala aproximación inicial es aumentar sólo en uno el número de iteraciones que se necesitan. ■

Los ejemplos 1 y 2 muestran que el método de Newton funciona con frecuencia muy bien. Con ello queremos decir que las diferencias  $|x_{n+1} - x_n|$  entre las aproximaciones sucesivas se hacen rápidamente pequeñas, y que el procedimiento no depende mucho de la selección de la aproximación inicial  $x_0$ . Sin embargo, debemos tener en cuenta que el método de Newton no siempre es así de eficaz, y que se deben imponer determinadas condiciones a la función  $f$  para asegurar la validez del procedimiento. Es claro que  $f$  debe ser derivable. Además,  $f'(x)$  debe ser distinta de cero en cada uno de los puntos  $x_n$  generados durante el proceso. Si, de hecho,  $f'(x_n) = 0$  para alguna  $n$ , la tangente a  $[x_n, f(x_n)]$  es paralela al eje  $x$  y no se puede calcular la siguiente aproximación  $x_{n+1}$  (véase figura 4.5.3). Aun si  $f'(x)$  no es cero nunca, el método de Newton fallará en general si  $f'(x)$  es pequeña en el intervalo de interés. Una dificultad más sutil es la que se revela en el siguiente ejemplo.



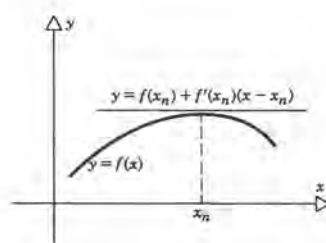


Figura 4.5.3

### EJEMPLO 3

Aplicar el método de Newton a la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & x \geq 2, \\ -\sqrt{2-x}, & x < 2, \end{cases} \quad (7)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 4.5.4a.

De acuerdo con la ecuación 7 o la figura 4.5.4a, vemos que  $r = 2$  es la única raíz de  $f(x) = 0$ . La función  $f$  es derivable excepto en  $x = 2$ , y

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x-2}}, & x > 2, \\ \frac{1}{2\sqrt{2-x}}, & x < 2. \end{cases} \quad (8)$$

El hecho de que no exista  $f'(2)$  arroja dudas acerca de la aplicabilidad del método de Newton. Sin embargo, procederemos de cualquier modo y veremos lo que sucede. Si la aproximación inicial es  $x_0 = 3$ , entonces la siguiente aproximación  $x_1$  está dada por

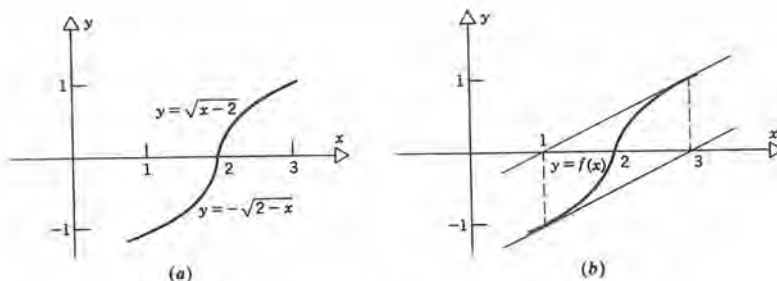


Figura 4.5.4

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
 &= 3 - \frac{\sqrt{3-2}}{1/2\sqrt{3-2}} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Aplicando el método de Newton por segunda vez para obtener  $x_2$ , vemos que

$$\begin{aligned}
 x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
 &= 1 - \frac{-\sqrt{2-1}}{1/2\sqrt{2-1}} \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$

Así, las aproximaciones sucesivas variarán entre los dos valores 1 y 3 sin siquiera acercarse a la raíz  $r = 2$  (véase figura 4.5.4b). El lector puede comprobar que se presenta el mismo caso si se hace una selección distinta de  $x_0$  (véase Prob. 22). ■

Hay teoremas que dan las condiciones para la validez del método de Newton, así como estimaciones de la rapidez con la cual se acercan las aproximaciones sucesivas  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  a la raíz  $r$ . Sin embargo no presentaremos esos teoremas porque en muchas aplicaciones no se usan. En lugar de ello, verificaremos que  $f$  es derivable y que  $f'(x) \neq 0$ , para entonces proseguir en forma algo tentativa usando el método de Newton. Mantendremos una vigilancia estrecha de las diferencias sucesivas  $|x_{n+1} - x_n|$ , y si la magnitud de esos números decrece rápidamente, llegaremos entonces a la conclusión de que el procedimiento funciona en forma satisfactoria. Así, de modo considerable, confiaremos en nuestro sentido común en lugar de hacerlo en un teorema formal.

## PROBLEMAS

En la mayor parte de los problemas que siguen se emplea el método de Newton. Si bien los cálculos se pueden hacer con calculadora de bolsillo, serán menos laboriosos si se emplea una calculadora programable o una computadora personal.

En los problemas 1 a 12, la ecuación  $f(x) = 0$  tiene una raíz en el intervalo dado. Seleccionar una aproximación inicial  $x_0$ , y aplicar el método de Newton para calcular un valor aproximado de esta raíz. Continuar el procedimiento al menos hasta que  $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$ .

1.  $f(x) = x^2 + 2x - 4$ ,  $0 \leq x \leq 3$
2.  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ,  $-5 \leq x \leq -1$
3.  $f(x) = x^4 - 2$ ,  $1 \leq x \leq 2$
4.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ ,  $0 \leq x \leq 2$
5.  $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4$ ,  $0 \leq x \leq 2$
6.  $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 3x^2 + 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$
7.  $f(x) = x \sin x - \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\textcircled{8}. f(x) = x \cos x - \sin x, \quad \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\textcircled{9}. f(x) = x \cos x + 2 \sin x, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

$$\textcircled{10}. f(x) = 3 \cos x - x \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{11}. f(x) = \sqrt{2x} - \frac{1}{x} - 1, \quad 0 < x \leq 2$$

$$\textcircled{12}. f(x) = \frac{4x}{1+x^2} - \sin x, \quad 2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$$

13. Empleando el método de Newton, podemos deducir un procedimiento eficiente para calcular  $\sqrt{a}$ , siendo  $a$  un número positivo arbitrario. Se tiene la función  $f(x) = x^2 - a$ , cuyos ceros son  $x = \pm\sqrt{a}$ . Si  $x_0 > 0$  es cualquier aproximación inicial de  $\sqrt{a}$ , demostrar que el método de Newton produce la fórmula de iteración para calcular más aproximaciones

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \geq 0$$

Este procedimiento para calcular valores aproximados de  $\sqrt{a}$  es equivalente al antiguo algoritmo babilónico para calcular raíces cuadradas (véase C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968, pp. 31, 449).

14. Emplear el método de Newton para deducir la fórmula de iteración

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} \left[ (p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}} \right]$$

para calcular  $a^{1/p}$ , donde  $a$  es un número arbitrario positivo y  $p \geq 2$  es un entero. Obsérvese que esta fórmula se reduce a la del problema 13 cuando  $p = 2$ .

En los problemas 15 a 20, emplear el resultado de los problemas 13 ó 14 para calcular una aproximación del número que se presenta. Continuar el proceso hasta llegar al menos a  $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-5}$ .

$$\textcircled{15}. \sqrt[3]{53}$$

$$\textcircled{16}. \sqrt{172}$$

$$\textcircled{17}. \sqrt[3]{5}$$

$$\textcircled{18}. \sqrt[3]{7}$$

$$\textcircled{19}. \sqrt[3]{50}$$

$$\textcircled{20}. \sqrt[3]{100}$$

21. Supongamos que deseamos calcular  $1/a$ , el recíproco del número  $a$ . En una computadora, el proceso de la división tarda mucho más que los de multiplicación y de suma. Por tanto, es importante tratar de reformular una división en una expresión que sólo tenga multiplicación y adición. Empleando el método de Newton con la función  $f(x) = a - 1/x$ , deducir una fórmula de iteración para calcular  $1/a$  en la que sólo intervengan multiplicaciones y sumas.

22. Se tiene la ecuación  $f(x) = 0$ , estando  $f$  dada por la ecuación 7. Empleando el método de Newton para demostrar que si  $x_0 = 2 + \alpha$ , entonces  $x_1 = 2 - \alpha$  y  $x_2 = 2 + \alpha$ . Así, las aproximaciones sucesivas varían cíclicamente independientemente de la pequeñez de  $\alpha$ ; esto es, sin importar cuán cercana es la aproximación inicial  $x_0$  a la raíz real  $r = 2$ .

- ©23. Emplear el método de Newton para resolver la ecuación

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 4 = 0$$

para cada una de las siguientes selecciones del punto inicial  $x_0$ .

- (a) 0.5 (b) 0.1 (c) -0.1 (d) -0.5

Trazar una gráfica de  $y = f(x)$  y usarla para explicar por qué los resultados son como son.

- ©24. Emplear el método de Newton para resolver la ecuación

$$f(x) = x \cos x - \sin x = 0$$

para cada una de las siguientes selecciones del punto inicial  $x_0$ .

- (a) 3.6 (c) 3.5 (e) 3.2

- (b) 3.51 (d) 3.25 (f) 3.0

Trazar una gráfica de  $y = f(x)$  y emplearla para explicar por qué los resultados son como son.

## PROBLEMAS DE REPASO

1. Determinar las condiciones de  $a$  y  $b$  para que

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + x + k$$

tenga a lo más un cero real

2. Determinar las condiciones de  $b$  y  $c$  para que



## 238 APLICACIONES DE LA DERIVADA

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + k$$

tenga a lo más un cero real.

En los problemas 3 a 6, confirmar o refutar la desigualdad respectiva.

$$3. |\sin^2 x_2 - \sin^2 x_1| \leq |x_2 - x_1|$$

$$4. |\cos^2 x - \cos^2 y| \leq |x - y|$$

$$5. |\tan x_2 - \tan x_1| \leq |x_2 - x_1| \quad \text{en} \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$6. \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \frac{y - x}{(3/2)\sqrt{y}}, \quad 0 < x < y$$

En los problemas 7 a 10, determinar si los pares de funciones dadas son antiderivadas de la misma función.

$$7. f(x) = 2 \cos^2 x - 1, \quad g(x) = \sec^2 x$$

$$8. f(x) = \tan^2 x, \quad g(x) = \sec^2 x$$

$$9. f(x) = \cos^2 x, \quad g(x) = \tan^2 x - 1$$

$$10. f(x) = (x + 1)(x - 1), \quad g(x) = x^2 + 3x + 1$$

En los problemas 11 a 16, determinar si las funciones satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio. Determinar si existe un punto  $c$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En los casos en que existan, calcular todos los  $c$ .

$$11. f(x) = \sqrt{x + 1}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$12. f(x) = \sin x - \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$13. f(x) = \tan x + x, \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$14. f(x) = |\sin x|, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$15. f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

17. Para cualesquiera  $a, b, d$  y  $k$  reales, demostrar que existe un  $c \in (u, v)$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u},$$

donde  $f(x) = ax^3 + bx^2 + dx + k, u \leq x \leq v$ , y

$$(a) [u, v] = [0, 1].$$

$$(b) [u, v] = [0, \epsilon], \quad \epsilon > 0.$$

$$(c) u, v \text{ arbitrarias.}$$

En los problemas 18 y 19, demostrar que se satisface la hipótesis del problema 20 de la sección 4.1, y determinar todos los puntos  $c$  tales que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2.$$

$$18. f(x) = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$19. f(x) = \sin x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

En los problemas 20 y 21, demostrar que el par de funciones dadas satisfacen la hipótesis del problema 21 en la sección 4.1, y determinar todos los  $c$  tales que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$$20. f(x) = \sin x, \quad g(x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$21. f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \\ g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \quad -1 \leq x \leq 1$$

En los problemas 22 a 27 determinar lo siguiente, para la función dada:

(a) Todos los puntos críticos.

(b) Los intervalos en los que la función crece, y en los que decrece.

(c) Los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

(d) Todos los puntos máximos y mínimos globales.

$$22. f(x) = \sin x + x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$23. f(x) = |\sin x|, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$24. f(x) = ax^3 + 3ax^2 + 3ax + d, \quad a > 0$$

$$25. f(x) = \begin{cases} x^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$26. f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0, \quad -a \leq x \leq a$$

$$27. f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x+1}, & x < -1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1 \\ \frac{x-2}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

28. En los siguientes casos, determinar el área del rectángulo mayor que tenga vértices en el eje  $x$  y en la curva dada.

- (a) El semicírculo  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .  
 (b) La parábola  $y = 9 - x^2$ .  
 (c) El triángulo con vértices en  $(\pm a, 0)$ ,  $(0, b)$ .

29. En cada uno de los casos siguientes, determinar el punto de la curva que sea más cercano al punto dado.

- (a)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $(0, 0)$ ,  $x > 0$   
 (b)  $2y = 2x^2 + 1$ ,  $(1, 1)$   
 (c)  $y = \sin x$ ,  $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$   
 (d)  $y = |x|$ ,  $(0, b)$

30. Dividir a 10 en 2 partes de tal modo que el resultado del producto de las dos partes menos su diferencia sea máximo.

31. Entre todos los triángulos isósceles con un área  $A$  determinada, encontrar el que tenga el perímetro mínimo.

32. Si la altura  $x$  de una partícula en movimiento es

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0,$$

donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad,  $v_0$  la velocidad inicial de la partícula, y  $x_0$  su posición inicial, calcular la altura máxima que alcanza la partícula.

33. Si la partícula del problema 32 se encuentra inicialmente en el piso y se impulsa hacia arriba con una velocidad de 20 m/seg, ¿cuánto tiempo tardará en regresar al suelo?, ¿cuál será la distancia recorrida total? (Suponer que  $g = 10$  m/s.)

34. La ecuación

$$T = m\left(\frac{v^2}{r} + g \cos \theta\right)$$

describe la tensión  $T$  en una cuerda de longitud  $r$  fija a una masa pequeña, que gira en un círculo colocado en forma vertical con velocidad  $v$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\theta$  es el ángulo de la cuerda con respecto a la vertical hacia abajo.

- (a) Si  $v$  es constante, determinar el ángulo de tensión mínima.  
 (b) Si  $v$  cambia con respecto a  $\theta$  de tal modo que  $T$  permanece constante, calcular  $dv/d\theta$ .

35. Un satélite gira alrededor de la Tierra con un periodo

$$P = \left(\frac{2\pi}{R\sqrt{g}}\right) r^{3/2},$$

con velocidad  $v = R\sqrt{g/r}$ , y con aceleración radial  $a_r = (R/r)^2 g$ , en las cuales  $R$  es el radio terrestre,  $g$  la aceleración de la gravedad y  $r$  la distancia del satélite al centro de la Tierra.

- (a) ¿Cómo cambia el periodo con respecto a  $r$ ?  
 (b) ¿Cómo cambia el periodo con respecto a la velocidad?  
 (c) ¿Cómo cambia la aceleración radial con respecto a la velocidad?

36. La ley de Coulomb establece que la fuerza entre dos partículas cargadas  $x$  y  $y$  es directamente proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Escribir la ecuación de la ley de Coulomb. ¿Cómo varía la fuerza con respecto a la distancia? Si la distancia varía con respecto al tiempo de acuerdo con

$$\frac{dr}{dt} = 1 + 2r,$$

¿cómo varía la fuerza con respecto al tiempo?

37. Se va a construir una puerta rectangular de altura determinada  $h$  y perímetro  $p$  de tal manera que tenga una ventana circular centrada en la dirección vertical cuyo centro esté a  $h/4$  abajo de la orilla superior de la puerta. Si el radio de la ventana es  $h/8$ , determinar la base de la puerta tal que sea máxima el área de la puerta menos el área de la ventana.

38. Una ventana rectangular remata en un semicírculo en la parte superior, y el perímetro total es  $p$ . Determinar

## 240 APLICACIONES DE LA DERIVADA

la base de la ventana tal que el área de la misma sea máxima.

39. Un satélite viaja en una órbita circular de radio  $R$ . Su coordenada  $x$  decrece con una rapidez de 2 unidades/seg en el punto  $(a, b)$ . ¿Con qué rapidez cambia la coordenada  $y$ ? ¿Con qué rapidez cambia la coordenada  $y$  con respecto a  $x$ ?
40. Determinar la razón de cambio del área con respecto al perímetro para el caso de
  - (a) un triángulo equilátero
  - (b) un cuadrado
  - (c) un círculo
41. Determinar la razón de cambio del volumen con respecto al área de la superficie en el caso de
  - (a) una esfera
  - (b) un cubo
42. Determinar la caja rectangular con base cuadrada cuyo volumen sea máximo y que tiene un área dada.
43. Determinar la altura de la caja de volumen máximo que se puede fabricar con  $108 \text{ ft}^2$  de madera, siendo el ancho el doble del largo en la base.
44. La Cía. Maderera El Roble ha calculado que puede talar selectivamente una superficie de terreno a un costo de

$$h = 500x + 15,000 \text{ dólares}$$

donde  $x$  es el número (en cientos) de acres talados por año. Si puede vender su madera a

$$R = 3000 - 10x \text{ dólares por acre,}$$

¿cuál es el nivel de explotación que hace máximas las ganancias?

45. La Maderera El Roble determina que le cuesta

$$h = 500x + 15,000 + 25x^2 \text{ dólares}$$

talar y reforestar el terreno, y las demás condiciones son iguales a las del problema 44, determinar el nivel de explotación que hace máximas las ganancias.

46. La Empacadora California ha determinado que le cuesta

$$c = a + bx + dx^2 \text{ dólares}$$

pescar determinada especie de robalo, donde  $a$  es el costo de la mano de obra,  $b$  es el costo de localizar un cardumen,  $d$  es la variación del costo por pescado a medida que se agota la población, y  $x$  es el número de peces cobrados. Si se pueden vender los pescados a

$$R = q - rx \text{ dólares por pieza,}$$

¿cuántos pescados se deben atrapar para hacer máxima la ganancia?

47. Un biólogo ha determinado que la interacción de dos especies está regida por el sistema

$$\frac{dx}{dt} = ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx,$$

en donde  $x$  y  $y$  son las poblaciones de las dos especies y  $a$  y  $b$  son constantes.

- (a) Determinar  $dy/dx$ .
- (b) Encontrar todos los puntos críticos de la ecuación que se dedujo en la parte (a) teniendo en cuenta que  $dy/dx$  es función de  $x$  y derivándola con respecto a  $x$ .
- (c) Demostrar que la solución de la parte (b) también es solución de las ecuaciones originales.



# CÁLCULO

## Capítulo 5

### Algunos temas geométricos

En las aplicaciones matemáticas con frecuencia es deseable trazar una gráfica que represente geométricamente a una función o a una ecuación. Un modo de hacerlo es calculando las coordenadas de un gran número de puntos que pertenezcan a la gráfica, graficar esos puntos y, a continuación, trazar una curva que pase por ellos. Si se dispone de un equipo adecuado de cómputo, esto se puede hacer en forma automática hasta con funciones o con ecuaciones muy complicadas. Sin embargo, en muchos casos lo que se necesita no es una gráfica de extrema exactitud, sino más bien una que sea cualitativamente correcta, y que muestre en forma adecuada, a primera vista, las propiedades principales de la función o de la ecuación de que se trata. A continuación, puede ayudar mucho un método analítico para bosquejar curvas, en especial si la función o la ecuación es relativamente sencilla. Aun para gráficas complicadas, una breve investigación analítica podrá hacer posible llevar a cabo los cálculos necesarios con más eficiencia y en forma económica.

---

### 5.1 DIBUJO DE CURVAS

Para dibujar rápidamente una gráfica es importante conocer y buscar las características importantes de la gráfica que se puedan identificar con facilidad. Resulta que el cálculo es una herramienta útil para este objeto. A continuación describiremos algunas de esas características, de las cuales no todas corresponden a cada una de las gráficas.

### Intervalos excluidos e intersecciones con los ejes

A veces, es posible decir al primer vistazo que la gráfica de una ecuación sólo queda en determinada región del plano  $xy$ . O bien, podría ser imposible que una o ambas variables tuvieran valores en determinados intervalos, llamados **intervalos excluidos**. Si la gráfica es la de una función  $y = f(x)$ , entonces lo anterior es lo mismo que determinar el dominio y la imagen de  $f$ .

A veces es posible proseguir un poco más cuando se identifican con facilidad algunos puntos específicos de una gráfica. Con frecuencia, los puntos más fáciles de localizar son aquellos en los que la gráfica interseca a uno o a ambos ejes coordenados; esos puntos se llaman **intersecciones con los ejes**. Las intersecciones con el eje  $x$  se calculan haciendo que  $y = 0$  y despejando a  $x$  de la ecuación resultante, mientras que las intersecciones con el eje  $y$  se calculan haciendo que  $x = 0$  y despejando a  $y$ .

#### EJEMPLO 1

Determinar los intervalos excluidos y las intersecciones con los ejes para la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}. \quad (1)$$

Como  $x$  puede tener cualquier valor real, no hay intervalos excluidos para  $x$ . Sin embargo, como  $x^2 \geq 0$  y  $x^2 < x^2 + 1$ , se concluye que  $y$  sólo toma valores en  $0 \leq y < 1$ , y por tanto  $(-\infty, 0)$  y  $[1, \infty)$  son intervalos excluidos para  $y$ . Esto se muestra en la figura 5.1.1; la gráfica debe quedar en la región no sombreada. Si  $x = 0$ , entonces  $y = 0$  también, y viceversa. Por tanto, el origen es la única intersección con los ejes de la gráfica de la ecuación 1. Este punto también se indica en la figura 5.1.1. ■

#### EJEMPLO 2

Determinar los intervalos excluidos y las intersecciones con los ejes de la gráfica de

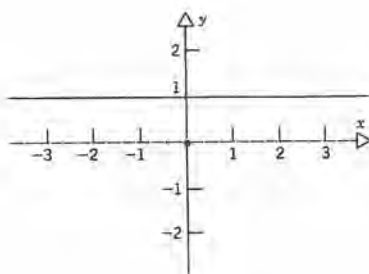


Figura 5.1.1

$$y = -\sqrt{x^2 - 1}. \quad (2)$$

Como  $x^2 - 1$  no debe ser negativo, se infiere que  $(-1, 1)$  es un intervalo excluido para  $x$ . Además,  $y$  no puede ser positivo, y entonces  $(0, \infty)$  es un intervalo excluido para  $y$ . En la figura 5.1.2 se excluye la región sombreada para la gráfica de la ecuación 2. No hay intersección con el eje  $y$  porque  $x = 0$  queda en el intervalo excluido para  $x$ . Sin embargo, si  $y = 0$ , entonces  $x = \pm 1$  y por tanto hay intersecciones con el eje  $x$  en  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ . Esos puntos se grafican también en la figura 5.1.2. ■

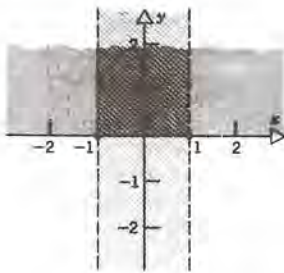


Figura 5.1.2

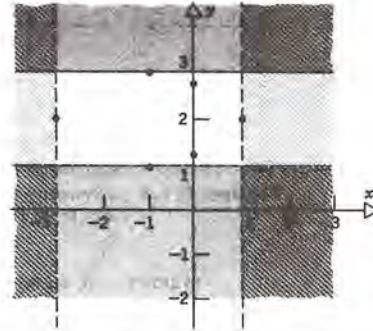


Figura 5.1.3

### EJEMPLO 3

Determinar los intervalos excluidos y las intersecciones con los ejes de la gráfica de

$$(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 4. \quad (3)$$

Cada término del lado izquierdo de la ecuación 3 es no negativo, y, por tanto, no puede tener un valor mayor que 4. Así,  $(x + 1)^2 \leq 4$  y  $4(y - 2)^2 \leq 4$ . En consecuencia,  $|x + 1| \leq 2$  y  $|y - 2| \leq 1$ . Entonces  $-2 \leq x + 1 \leq 2$ , y  $x$  debe estar en el intervalo  $[-3, 1]$ . Igualmente,  $y$  debe estar en el intervalo  $[1, 3]$ . Por tanto, la gráfica debe quedar en la región no sombreada de la figura 5.1.3. No hay intersección con el eje  $x$ , porque  $y = 0$  queda en un intervalo excluido. Sin embargo, si  $x = 0$ , entonces la ecuación 3 se convierte en

$$1 + 4(y - 2)^2 = 4$$

de donde obtenemos que

$$y = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

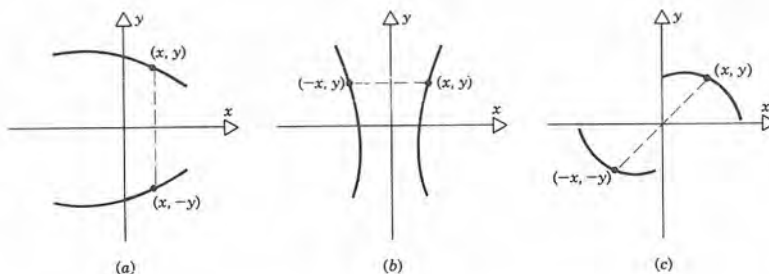
Así, hay intersecciones con el eje  $y$  en los puntos  $(0, 2 - \sqrt{3}/2)$  y  $(0, 2 + \sqrt{3}/2)$ . También



es fácil ver que cuando  $y = 2$ , entonces  $x = 1$  o  $x = -3$ , y por tanto la gráfica pasa por  $(1, 2)$  y  $(-3, 2)$ . Análogamente, cuando  $x = -1$ , obtenemos los puntos  $(-1, 1)$  y  $(-1, 3)$ . ■

### Simetría

Con frecuencia se simplifica mucho el dibujo de una gráfica si se sabe que tiene alguna forma de simetría. Se dice que una gráfica es **simétrica con respecto al eje  $x$**  si contiene al punto  $(x, -y)$  siempre que contiene al punto  $(x, y)$ . Similarmente, una gráfica es **simétrica con respecto al eje  $y$**  si contiene al punto  $(-x, y)$  siempre que contiene al punto  $(x, y)$ . (Véase la figura 5.1.4a y 5.1.4b). Es fácil probar la simetría de una gráfica



**Figura 5.1.4** (a) Simetría con respecto al eje  $x$ . (b) Simetría con respecto al eje  $y$ . (c) Simetría con respecto al origen.

con respecto a los ejes coordenados. Si la ecuación de la gráfica no cambia cuando  $x$  se reemplaza por  $-x$ , o cuando  $y$  se reemplaza por  $-y$ , entonces la gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$  o al eje  $x$ , respectivamente.

Por ejemplo, considérese las siguientes ecuaciones:

$$x^2 - 3y^2 + y^3 = 4, \quad (4)$$

$$2x^2 + y^2 = 6, \quad (5)$$

$$x - 3x^3 + 2y - y^3 = 4. \quad (6)$$

Si en la ecuación 4 sustituimos  $x$  por  $-x$ , obtendremos entonces

$$(-x)^2 - 3y^2 + y^3 = 4$$

o sea

$$x^2 - 3y^2 + y^3 = 4,$$

que es la misma que la ecuación original. Por tanto, la gráfica de la ecuación 4 es simétrica con respecto al eje  $y$ . Sin embargo, si se reemplaza  $y$  por  $-y$  en la ecuación 4, nos encontramos con que

$$x^2 - 3(-y)^2 + (-y)^3 = 4$$

o sea

$$x^2 - 3y^2 - y^3 = 4,$$

que no es la misma que la ecuación 4. Por tanto, la gráfica de la ecuación 4 no es simétrica con respecto al eje  $x$ . De manera semejante podemos demostrar que la gráfica de la ecuación 5 es simétrica con respecto a ambos ejes, y que la gráfica de la ecuación 6 no es simétrica con respecto a alguno de ellos.

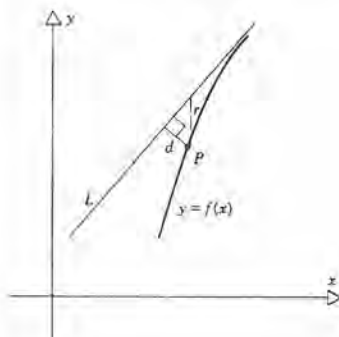
Otro tipo de simetría que es fácil de reconocer es aquella con respecto al origen. Se dice que una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si contiene al punto  $(-x, -y)$  cuando contiene al punto  $(x, y)$  (véase figura 5.1.4c). Este tipo de simetría también se puede reconocer con facilidad en la ecuación de la gráfica; está presente siempre que  $x$  y  $y$  se puedan remplazar por  $-x$  y  $-y$ , sin que la ecuación cambie. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación 5 es simétrica con respecto al origen, pero las de las ecuaciones 4 y 6 no lo son.

Además, las gráficas pueden ser simétricas con respecto a otras líneas o puntos, pero esas propiedades de simetría son más difíciles de identificar a partir de una ecuación.

Desde el punto del dibujo de gráficas, la importancia de la simetría es que reduce mucho el trabajo que se requiere. Por ejemplo, si se sabe que una gráfica es simétrica con respecto a ambos ejes, entonces sólo es necesario dibujar la parte del primer cuadrante para determinar la gráfica por completo.

## Asíntotas

Sea  $P(x, y)$  un punto de la gráfica de una ecuación dada, y sea  $L$  una recta dada no vertical. La distancia  $d$  desde  $P$  hasta  $L$  se mide a lo largo de la perpendicular a  $L$  que pasa por  $P$  (véase figura 5.1.5). Se dice que la recta  $L$  es **asíntota** de la gráfica si  $d \rightarrow 0$



**Figura 5.1.5** La recta  $L$  es una asíntota de la gráfica de  $f$ .

cuando  $x \rightarrow \infty$ , o cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Una recta vertical  $x = a$  es asíntota de una gráfica si la coordenada  $y$  de un punto de la gráfica se aproxima a  $+\infty$  o  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por al menos uno de los lados.

Las asíntotas vertical y horizontal en general son fáciles de identificar. Las asíntotas verticales de la gráfica de una función  $f$  se calculan al localizar puntos en los que  $f$  se vuelve no acotada. Por otro lado, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ , o si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ , entonces  $y = L$  es una asíntota horizontal.

Las asíntotas que no son verticales ni horizontales pueden ser más difíciles de identificar. Según la figura 5.1.5, obsérvese que la distancia  $d$  desde el punto  $P$  a la recta  $L$  decididamente no es mayor que la distancia  $r$  de  $P$  a  $L$  medida a lo largo de la vertical que pasa por  $P$ . Así, si  $r \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , o cuando  $x \rightarrow -\infty$ , entonces  $d$  también lo hará; basta demostrar que  $L$  es una asíntota de la gráfica de  $f$ . Si la ecuación de la recta  $L$  se escribe en la forma  $y = mx + b$ , entonces  $r$  está dada por

$$r = \pm[mx + b - f(x)], \quad (7)$$

en la cual se escoge el signo según si la asíntota está arriba o abajo de la gráfica. Nótese que al determinar asíntotas que no son verticales ni horizontales, se deben descubrir de alguna manera y a continuación verificar que sean correctas tomando el límite cuando  $x \rightarrow \infty$  o cuando  $x \rightarrow -\infty$  de la cantidad dada en la ecuación 7. En contraste, se encuentran las asíntotas verticales y horizontales examinando límites que sólo involucran a la propia  $f(x)$ .

#### EJEMPLO 4

Determinar las asíntotas vertical y horizontal de la gráfica de

$$y = \frac{1}{x^2}. \quad (8)$$

La recta  $x = 0$  es asíntota vertical porque  $y$  es no acotada cuando  $x \rightarrow 0$ . La recta  $y = 0$  es asíntota horizontal porque  $y \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$ . En la figura 5.1.6 se muestra la gráfica de la ecuación 8. Nótese que es simétrica con respecto al eje  $y$ , que siempre  $y > 0$ , y que no hay intersecciones con ninguno de los ejes.

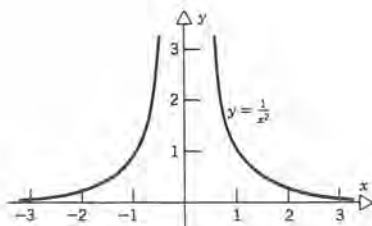


Figura 5.1.6



**EJEMPLO 5**

Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}. \quad (9)$$

Las rectas  $x = 1$  y  $x = -1$  son asíntotas verticales, porque  $y$  es no acotada cuando  $x = \pm 1$ . La recta  $y = 1$  es asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

En la figura 5.1.7 se muestra la gráfica de la ecuación 9. Nótese que esta gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ , y que el origen es la única intersección con los ejes de coordenadas. Se pueden determinar otras características de la gráfica mediante métodos que se desarrollarán después en esta sección. ■

**EJEMPLO 6**

Determinar las asíntotas de

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}. \quad (10)$$

Observemos, primeramente, que la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical. Para tratar de encontrar otras asíntotas es útil escribir la ecuación 10 en la forma

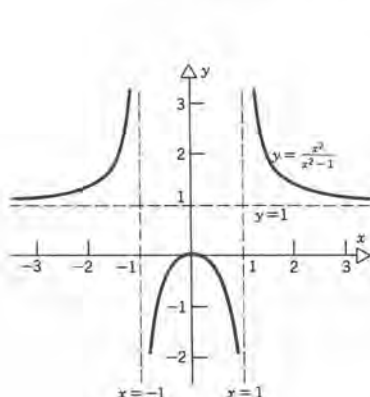


Figura 5.1.7

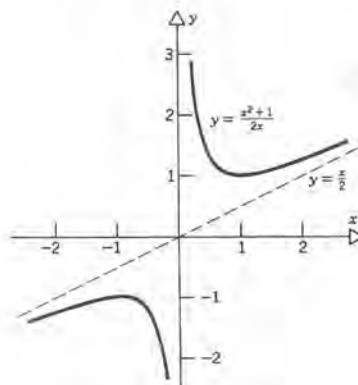


Figura 5.1.8

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}. \quad (11)$$

Así vemos que no hay asíntotas horizontales, porque  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y que  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Sin embargo, también podemos ver en la ecuación 11 que  $f(x)$  tiende a  $x/2$  para valores grandes de  $x$ . Por tanto, podemos suponer que  $y = x/2$  es una asíntota. Para comprobarlo, notaremos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x}{2} - f(x) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x}{2} - \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Según lo anterior  $y = x/2$  es en realidad una asíntota cuando  $x \rightarrow \infty$ . Un cálculo semejante muestra que también  $y = x/2$  es una asíntota cuando  $x \rightarrow -\infty$ . En la figura 5.1.8 se muestra la gráfica de  $y = f(x)$ . En la ecuación 10 se puede ver que la gráfica es simétrica con respecto al origen. Se pueden investigar otras características mediante los métodos que se desarrollarán después en esta sección. ■

### Intervalos de incremento o decremento

Sea una función  $f$  cuyo dominio contiene a determinado intervalo  $I$ . Recuerdese que en la sección 4.2 establecimos que si  $f'(x) > 0$  en  $I$ , entonces  $f$  es creciente en  $I$ , y análogamente, si  $f'(x) < 0$  en  $I$ , entonces  $f$  es decreciente en  $I$ . Al dibujar la gráfica de una función  $f$  con frecuencia ayuda el identificar los intervalos en los que  $f'$  es creciente o decreciente. Para una función derivable esto determina la localización de todos los puntos extremos locales, y con ello se puede trazar la forma general de la gráfica, como en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 7

Dibujar la gráfica de  $y = f(x)$  donde

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5. \quad (13)$$

Al revisar cada una de las propiedades que hemos visto hasta ahora, encontramos lo siguiente:

- (a) No hay intervalos excluidos para  $x$ .
- (b) Como  $y \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y  $y \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , y como  $y$  es función continua de  $x$ , entonces tampoco hay intervalos excluidos para  $y$ .
- (c) Si  $x = 0$ , entonces  $y = -5$ , y el punto  $(0, -5)$  es la única intersección con el eje  $y$ .
- (d) Si  $y = 0$ , entonces  $x$  satisface a  $2x^3 + 3x^2 - 12x - 5 = 0$ . Las raíces de esta ecuación no son obvias, y por tanto no determinaremos las intersecciones con el eje  $x$ .

- (e) La gráfica no es simétrica con respecto a ninguno de los ejes ni con respecto al origen.  
 (f) La gráfica no tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Para obtener mayor información acerca de esta gráfica, derivamos la ecuación 13 con respecto a  $x$  y vemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \\ &= 6(x^2 + x - 2) \\ &= 6(x + 2)(x - 1).\end{aligned}\tag{14}$$

Por tanto,  $f' > 0$  en los intervalos  $(-\infty, -2)$  y  $(1, \infty)$ , de tal modo que  $f$  es creciente en esos intervalos. Igualmente,  $f$  es decreciente en  $(-2, 1)$  porque allí  $f'(x) < 0$ . Como  $f$  es creciente hacia la izquierda de  $x = -2$  y es decreciente a la derecha de  $x = -2$ , se infiere por el criterio de la primera derivada (teorema 4.2.2), que  $x = -2$  es un punto máximo local. Similarmente,  $x = 1$  es punto mínimo local. Los puntos correspondientes de la gráfica de  $f$  son  $(-2, 15)$  y  $(1, -12)$ ; son los únicos extremos locales de  $f$ .

Con la información anterior, así como lo asentado en (a) a (f), obtenemos el dibujo que se ve en la figura 5.1.9. Más adelante en esta sección refinaremos un poco este dibujo. Pero si se necesita información más detallada acerca de alguna parte de la gráfica, entonces debe uno localizar varios puntos de esa parte. Por el momento, subrayaremos que un examen de  $f'(x)$  nos permitió localizar los dos puntos (los dos extremos locales) que son más importantes para la determinación de la forma general de la gráfica. Esto es mucho más eficiente que tan sólo graficar puntos escogidos al azar. ■

## Concavidad

En la sección 4.2 demostramos que si  $f''(x) > 0$  en un intervalo  $I$ , entonces  $f$  es cóncava

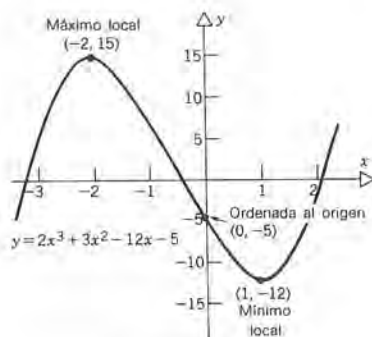


Figura 5.1.9



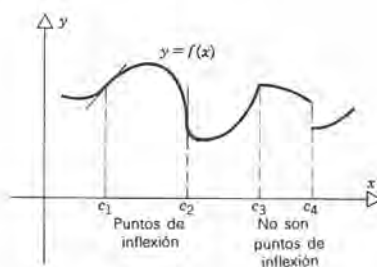


Figura 5.1.10

hacia arriba en  $I$ , mientras que si  $f''(x) < 0$  en  $I$ , entonces  $f$  es cóncava hacia abajo allí. Al dibujar la gráfica de una función es útil identificar puntos en los que cambia la dirección de la concavidad. Un punto  $c$  es **punto de inflexión** de  $f$  si

1.  $f$  es continua en  $c$ ;
2. la gráfica de  $f$  tiene una tangente (posiblemente vertical en  $[c, f(c)]$ );
3.  $f$  es cóncava hacia arriba a un lado de  $c$  y cóncava hacia abajo en el otro lado.

La figura 5.1.10 muestra varias posibilidades. Los puntos  $c_1$  y  $c_2$  son puntos de inflexión porque la función es continua, tiene una tangente (que en  $c_2$  es vertical), y cambia de concavidad en esos puntos. Por otro lado, los puntos  $c_3$  y  $c_4$  no son puntos de inflexión, aun cuando hay un cambio de concavidad; no hay tangente en  $c_3$  y  $f$  ni siquiera es continua en  $c_4$ .

Nos ocuparemos principalmente de funciones que tienen al menos dos derivadas continuas, quizá con excepción de determinados puntos aislados. Si la concavidad cambia en  $c$ , entonces  $f''(x) > 0$  de un lado de  $c$ , y  $f''(x) < 0$  al otro lado. Si existe  $f''(c)$ , entonces se puede emplear un argumento semejante al que se empleó para demostrar el teorema 4.1.1 para mostrar que  $f''(c) = 0$ . En consecuencia, se localizan los puntos de inflexión de una función  $f$  entre aquellos puntos en los que  $f''(x) = 0$  o cuando no existe  $f''(x)$ . Sin embargo, no todos esos puntos son puntos de inflexión.

Por ejemplo, si  $f(x) = x^4$ , entonces  $f''(x) = 12x^2$  y  $f''(x) = 0$  cuando  $x = 0$ . Sin embargo, el origen no es un punto de inflexión, porque la gráfica de  $x^4$  siempre es cóncava hacia arriba. La relación entre los puntos de inflexión y los ceros de  $f''$  es semejante a los extremos locales y los ceros de  $f'$ .

En el siguiente ejemplo refinaremos la gráfica de la figura 5.1.9 determinando sus puntos de inflexión.

### EJEMPLO 7 (Continuación)

Investigar la concavidad de la gráfica de la función  $f$  dada por la ecuación 13

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5,$$

y localizar sus puntos de inflexión.

Derivando dos veces a  $f$  obtenemos

$$f''(x) = 12x + 6. \quad (15)$$

Haciendo que  $f''(x)$  sea igual a cero y despejando a  $x$ , vemos que  $x = -\frac{1}{2}$  es el único punto de inflexión posible. El valor correspondiente de  $f$  es  $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ . De acuerdo con la ecuación 15,  $f''(x) < 0$  para  $x < -\frac{1}{2}$ , y  $f''(x) > 0$  para  $x > -\frac{1}{2}$ . Por tanto,  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -\frac{1}{2}]$  y cóncava hacia arriba en  $[-\frac{1}{2}, \infty)$ . Como la gráfica cambia su concavidad en  $x = -\frac{1}{2}$ , este punto es en realidad un punto de inflexión.

Hemos empleado esta información para trazar la figura 5.1.1, que es una versión más acabada de la figura 5.1.9. Si se necesita todavía más exactitud en determinada parte de la gráfica, se puede lograr graficando algunos puntos adicionales. ■

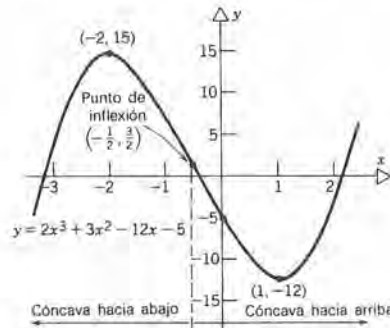


Figura 5.1.11

A continuación veremos algunos ejemplos adicionales de dibujo de curvas, en donde se hace uso del cálculo siempre que es necesario.

## EJEMPLO 8

Dibujar la gráfica de la función  $f$  dada por:

$$y = f(x) = x^4 - 2x^2. \quad (16)$$

Primero verificaremos cada una de las propiedades que se han mencionado en esta sección, anotando la información que obtengamos.

- (a) La ecuación 16 no implica restricciones a  $x$ , y por tanto no hay intervalos excluidos en el eje  $x$ . Sin embargo, no es obvio al primer vistazo cuál es la imagen de  $f$ .

- (b) Si  $x = 0$ , entonces  $y = 0$ , y por tanto el origen es la única intersección con el eje  $y$ . Si  $y = 0$ , entonces  $x = 0$  o bien  $x = \pm\sqrt{2}$ . Así,  $(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, 0)$  y  $(\sqrt{2}, 0)$  son las intersecciones con el eje  $x$ . Si escribimos la ecuación 16 en la forma

$$f(x) = x^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \quad (17)$$

queda entonces claro que  $f(x) > 0$  si  $x < -\sqrt{2}$ , o si  $x > \sqrt{2}$ , y que  $f(x) < 0$  si  $-\sqrt{2} < x < 0$  o si  $0 < x < \sqrt{2}$ .

- (c) La ecuación 16 no cambia si  $x$  se sustituye por  $-x$ , y por tanto la gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ . No es simétrica con respecto al eje  $x$  ni con respecto al origen.  
 (d) No hay asíntotas verticales, porque  $f(x)$  permanece acotada para todos los valores finitos de  $x$ . Tampoco hay asíntotas horizontales porque  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y cuando  $x \rightarrow \infty$ .  
 (e) Derivando la ecuación 16 obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 4x \\ &= 4x(x^2 - 1) \\ &= 4x(x + 1)(x - 1). \end{aligned} \quad (18)$$

Por tanto los puntos  $x = -1, 0, 1$  son puntos críticos. Los valores correspondientes de  $f(x)$  en ellos son  $f(-1) = -1$ ,  $f(0) = 0$ , y  $f(1) = -1$ . Según la ecuación 18 vemos que  $f'(x) < 0$  si  $x < -1$ , o si  $0 < x < 1$ ; así,  $f$  es decreciente en esos intervalos. En consecuencia, el punto  $(0, 0)$  es máximo local y los puntos  $(-1, -1)$  y  $(1, -1)$  son mínimos locales.

- (f) Si derivamos por segunda vez la ecuación 16 vemos que

$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2 - 4 \\ &= 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= 12\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Como  $f''(x) > 0$  si  $x < -1/\sqrt{3}$ , o si  $x > 1/\sqrt{3}$ , la gráfica es cóncava hacia arriba en esos intervalos. Igualmente,  $f''(x) < 0$  si  $-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ , y por tanto la gráfica es cóncava hacia abajo allí. Los puntos de inflexión se localizan haciendo  $f''(x) = 0$ ; con ello se obtiene  $x = \pm 1/\sqrt{3}$ , y los puntos correspondientes de la gráfica son  $(-1/\sqrt{3}, -5/9)$  y  $(1/\sqrt{3}, -5/9)$ . Hemos notado ya que la concavidad cambia en esos puntos, y por tanto son en realidad puntos de inflexión.

En la figura 5.1.12 se muestra la gráfica de la ecuación 16. El lector debe comprobar que cada uno de los puntos que hemos encontrado aparece en el dibujo de esta gráfica.

Si se necesita una gráfica más exacta, se pueden graficar algunos puntos, o se debe tener más atención a los valores de las pendientes de las tangentes en diversos puntos, y no sólo a sus signos.



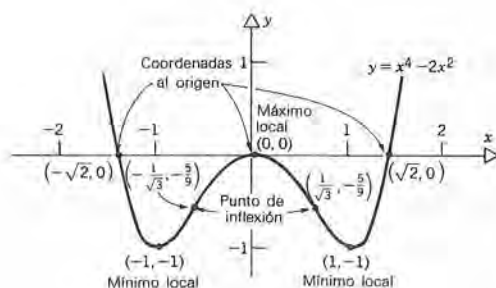


Figura 5.1.12

Se pueden aplicar los mismos métodos para dibujar la gráfica de cualquier polinomio, aunque en general no será tan fácil determinar los puntos extremos ni los de inflexión, en especial para polinomios de grados superiores. ■

## EJEMPLO 9

Dibujar la gráfica de

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}. \quad (20)$$

De nuevo, comprobaremos y anotaremos cada una de las informaciones correspondientes, omitiendo la información en algunos casos.

- (a) No hay intervalos excluidos en el eje  $x$ , aunque los del eje  $y$  no son obvios.
- (b) El origen es la única intersección de la gráfica con los ejes. Nótese que  $y < 0$  cuando  $x < 0$  y que  $y > 0$  cuando  $x > 0$ .
- (c) La gráfica es simétrica con respecto al origen, pero no con respecto a cualquiera de los ejes coordenados. Por tanto es suficiente revisar la parte de la gráfica para la cual  $x \geq 0$ .
- (d) No hay asíntotas verticales, porque el denominador de la ecuación 20 nunca es cero. Sin embargo,  $y \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y cuando  $x \rightarrow \infty$ , y por tanto el eje  $x$  es una asíntota horizontal en ambos lados de la gráfica.
- (e) Al derivar la ecuación 20 obtenemos

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 1) \cdot 1 - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Al considerar  $x \geq 0$ , vemos que  $y' = 0$  cuando  $x = 1$ , que  $y' > 0$  cuando  $0 \leq x < 1$ , y que  $y' < 0$  para  $x > 1$ . Por tanto,  $y$  crece en  $[0, 1]$  y decrece en  $[1, \infty)$ , y así el punto  $(1, \frac{1}{2})$  es un máximo local.

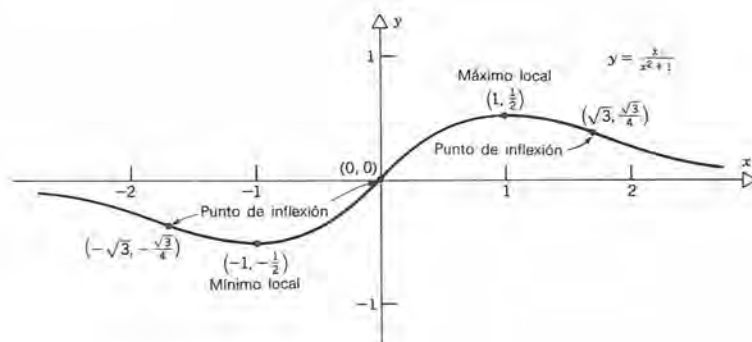


Figura 5.1.13

(f) Derivando por segunda vez obtenemos que

$$y'' = \frac{(x^2 + 1)^2(-2x) - (1 - x^2)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}. \quad (22)$$

De nuevo, considerando sólo  $x \geq 0$ , notamos que  $y'' < 0$  para  $0 < x < \sqrt{3}$ , y entonces la gráfica es cóncava hacia abajo en dicho intervalo. Igualmente,  $y'' > 0$  para  $x > \sqrt{3}$ , y por tanto la gráfica es cóncava hacia arriba en ese intervalo. El punto  $x = \sqrt{3}$  es un punto de inflexión. Como  $y'' > 0$  para  $-\sqrt{3} < x < 0$ , la gráfica también es cóncava hacia arriba allí, y el origen también es un punto de inflexión.

Se ha trazado la gráfica de la figura 5.1.13 sobre la base de la información que acabamos de enumerar. Obsérvese que la parte de la gráfica para  $x < 0$  se ha trazado empleando la propiedad de simetría con respecto al origen. ■

### EJEMPLO 10

Dibujar la gráfica de la ecuación

$$x^2(4 - y^2) = 4. \quad (23)$$

(a) Reformulamos la ecuación como sigue:

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \quad (24)$$

Como  $y^2 \geq 0$ , se infiere que debemos restringir a  $x$  para que  $x^2 \geq 1$ . Por tanto,  $-1 < x < 1$  es un intervalo excluido. Igualmente, si reformulamos la misma ecuación como sigue:

$$x^2 = \frac{4}{4 - y^2} \quad (25)$$

vemos que debemos tener  $4 - y^2 > 0$ , y entonces  $y \leq -2$  y  $y \geq 2$  también son intervalos excluidos.

- (b) No hay intersecciones con el eje  $y$ , pero sí hay intersecciones con el eje  $x$  en  $x = -1$  y en  $x = 1$ .
- (c) La gráfica es simétrica con respecto a los ejes y al origen. Por tanto, es suficiente examinar la parte que queda en el primer cuadrante.
- (d) De acuerdo con la ecuación  $25$   $y = 2$  y  $y = -2$  son asíntotas horizontales. No hay asíntotas verticales.
- (e) Derivando la ecuación  $24$  obtenemos

$$2yy' = \frac{8}{x^3}$$

o sea

$$y' = \frac{4}{x^3 y} \quad (26)$$

En consecuencia, en el primer cuadrante  $y' > 0$  y por consiguiente  $y$  es una función creciente de  $x$ . Además, cuando  $x \rightarrow 1$ , según la ecuación  $24$   $y \rightarrow 0^+$  y de acuerdo con la ecuación  $26$   $y' \rightarrow \infty$ ; por tanto la recta tangente es vertical en la intersección con el eje  $x$ ,  $(1, 0)$ .

- (f) Derivando la ecuación  $26$  con respecto a  $x$ , encontramos que

$$y'' = \frac{x^3 y(0) - 4(3x^2 y + x^3 y')}{x^6 y^2}$$

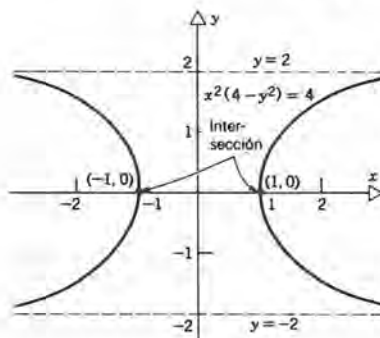


Figura 5.1.14



$$= \frac{-4(3x^2y^2 + 4)}{x^6y^3}. \quad (27)$$

Y por tanto, en el primer cuadrante,  $y'' < 0$ ; la gráfica es cóncava hacia abajo. Con la información anterior, podemos dibujar la gráfica que se muestra en la figura 5.1.14. Nótese que la parte de la gráfica que queda en el primer cuadrante se dibujó primero, y el resto se dibujó después empleando la simetría de la gráfica. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10, determinar si la gráfica de la ecuación dada es simétrica con respecto al eje  $x$ , con respecto al eje  $y$  y con respecto al origen.

1.  $xy = 4$

2.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

3.  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$

4.  $x^3 + y^3 - x - y = 0$

5.  $y = x \sin x$

6.  $\cos y - \sin x = 1$

7.  $\cos y \sin x = 1$

8.  $y = |x|$

9.  $|y| = |x|$

10.  $|y + 2| = x$

En los problemas 11 a 16, determinar todas las asíntotas verticales y horizontales para la función o para la ecuación dada.

11.  $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$

12.  $y = \frac{2x + 3}{3x - 2}$

13.  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x + 2}$

14.  $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$

15.  $y^2 = \frac{x - 1}{x + 1}$

16.  $1 + y^2 = \frac{3x - 2}{2x + 4}$

En los problemas 17 a 22, determinar todas las asíntotas, incluyendo aquéllas que no son verticales ni horizontales, de la función o de la ecuación dada.

17.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$

18.  $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

19.  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

20.  $y^2 - x^2 = 1$

21.  $x^2 - 2y^2 = 4$

22.  $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

En los problemas 23 a 32, determinar los intervalos en los cuales la función dada es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba. También, determinar todos los puntos de inflexión.

23.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

24.  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 8$

25.  $f(x) = (x - 2)^4$

26.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

27.  $f(x) = \frac{1}{x + 2}, \quad x \neq -2$

28.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1$

29.  $f(x) = \sqrt{x}(2 + x), \quad x \geq 0$

30.  $f(x) = x^{4/3} - 2x^{2/3}$

31.  $f(x) = \sin^2 x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

32.  $f(x) = \sec x + \tan x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \\ x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

En los problemas 33 a 50, hacer un esquema de la ecuación dada.

33.  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

34.  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

35.  $y = (x - 1)^2(x + 1)^2$

36.  $y^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$

37.  $x^2 + 4y^2 = 4$

38.  $xy = 4$

39.  $y = \frac{1}{x + 2}$

40.  $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

41.  $y = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)}$

42.  $x^3 + y^3 - x - y = 0$

43.  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0$  44.  $y^3 = x^2$

45.  $(y - 2)(x + 2) = 1$

46.  $y(y - 2)(x - 1) = 1$  47.  $y = \sin x + \cos x$

48.  $y = x - \sin x$  49.  $y = \sin^2 x$

50.  $y = \sec x + \tan x$

En los problemas 51 a 54, hacer un dibujo de la gráfica de una ecuación que tenga el conjunto dado de propiedades.

51. Simétrica con respecto al eje  $y$ ; asíntota vertical en  $x = 2$ ; sin asíntota horizontal; mínimos locales en  $(1, 0)$  y en  $(4, 2)$ ; máximo local en  $(0, 3)$ ; punto de inflexión en  $(\frac{1}{2}, 2)$ .

52. Simétrica con respecto al eje  $x$ ; asíntota vertical en  $x = -1$ ; asíntota horizontal en  $y = 2$ ; no hay puntos de la gráfica para  $x \leq -1$ .

53. Máximo local en  $(-2, 3)$ ; mínimo local en  $(4, -1)$ ; puntos de inflexión en  $(-4, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(6, 1)$ ; asíntota horizontal en  $y = 3$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ; sin asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ ; sin asíntotas verticales.

54. Simétrica con respecto al origen; máximo local en  $(3, 2)$ ; punto de inflexión en  $(5, 1)$ ; asíntota horizontal en  $y = 0$ ; sin asíntotas verticales.

55. Sea  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes reales y  $a \neq 0$ .

(a) Demostrar que  $f$  tiene exactamente un punto de inflexión.

\* (b) Demostrar que el punto de inflexión es la media aritmética de los tres ceros de  $f$ . Esto es válido, aun cuando los ceros no sean todos reales. *Sugerencia:* escribir

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

56. Determinar los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  de tal modo que

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un punto de inflexión en  $x = 2$  y tenga un mínimo local en  $x = -1$ .

## 5.2 ECUACIONES CUADRÁTICAS, PARÁBOLAS Y TRASLACIÓN DE EJES

Si bien los métodos de la sección anterior son útiles para dibujar la gráfica de casi cualquier ecuación, es deseable estar familiarizado con las gráficas de determinadas ecuaciones sencillas que con frecuencia se encuentran en la práctica. Ya hemos descrito las gráficas de las ecuaciones lineales, y en esta sección y en la siguiente consideraremos las gráficas de ecuaciones cuadráticas con dos variables. La ecuación más general de ellas tiene la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F, \quad (1)$$

siendo  $A, \dots, F$  constantes. En los problemas 25 a 28 se demuestra que siempre es posible seleccionar un sistema de coordenadas cartesianas en el cual no aparezca el término  $Bxy$ . Por tanto, supondremos que ya se ha llevado a cabo esto; esto es, supondremos que  $B = 0$ . Además, para que en realidad la ecuación 1 sea cuadrática, debemos suponer que al menos uno de los coeficientes,  $A$  ó  $C$ , es distinto de cero. Siendo este el caso, se tienen tres posibilidades:

- (a) Sólo uno de los coeficientes  $A$  ó  $C$  es distinto de cero.
- (b)  $A$  y  $C$  son del mismo signo.
- (c)  $A$  y  $C$  tienen signos opuestos.

Además de algunos pocos casos degenerados, cada posibilidad corresponde a una clase de curvas de tipo distinto, que son parábolas, elipses (con los círculos como casos especiales), e hipérbolas, respectivamente. Los círculos se estudiaron en la sección 1.3. En esta sección estudiaremos las parábolas, y en las secciones 5.3 y 5.4 las elipses y las hipérbolas, respectivamente. Sucede que esas curvas, a las cuales se les conoce genéricamente como **secciones cónicas**, porque también se generan si un cono se interseca con un plano, tienen muchas propiedades geométricas interesantes e importantes. En cada caso, describiremos en forma breve cómo se puede obtener la curva mediante una construcción geométrica sencilla. Se desarrollan otras propiedades geométricas en algunos de los problemas al final de ésta y de las próximas dos secciones.

### Parábolas

Primero estudiaremos el caso en el que sólo uno de los coeficientes  $A$  o  $C$  es distinto de cero. Específicamente, supongamos que  $A \neq 0$  y que  $C = 0$ , dejando la otra posibilidad para después. Entonces, la ecuación 1 toma la forma

$$Ax^2 + Dx + Ey = F. \quad (2)$$

También supondremos\* que  $E \neq 0$  de manera que las variables  $x$  y  $y$  se encuentran realmente en la ecuación 2. Para reducir la ecuación 2 a una forma más cómoda, completaremos el cuadrado en  $x$ :

$$\begin{aligned} A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + Ey &= F, \\ A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + Ey &= F + \frac{D^2}{4A}, \end{aligned}$$

o bien

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + E\left(y - \frac{F}{E} - \frac{D^2}{4AE}\right) = 0. \quad (3)$$

Por tanto, se puede poner la ecuación 3 en la forma

$$(x - h)^2 = \alpha(y - k), \quad (4)$$

en la cual

$$h = -\frac{D}{2A}, \quad k = \frac{F}{E} + \frac{D^2}{4AE}, \quad \alpha = -\frac{E}{A}. \quad (5)$$

---

\* Si  $E = 0$ , entonces la ecuación 2 es  $Ax^2 + Dx + F = 0$ , la que tiene una, dos o ninguna raíz real. Esas raíces corresponden a rectas paralelas al eje  $y$ . Es uno de los casos degenerados a que se hizo referencia antes.



Nótese que las cantidades  $h$  y  $k$  pueden ser de cualquier signo o pueden ser cero; por otro lado,  $\alpha$  puede ser positiva o negativa, pero no puede ser cero.

La ecuación 4 es una de las formas estándar de la ecuación de una **parábola**. Es muy fácil bosquejar su gráfica cuando  $h = k = 0$ , en cuyo caso la ecuación 4 se reduce a

$$x^2 = \alpha y. \quad (6)$$

La gráfica de la ecuación 6 es simétrica con respecto al eje  $y$ , y por tanto necesitamos considerar sólo el caso  $x \geq 0$ . Supongamos primero que  $\alpha > 0$ ; de manera que  $y$  es no negativa. Además,  $y' = 2x/\alpha$ , por lo que la pendiente de la gráfica es cero en el origen y aumenta a medida que aumenta  $x$ . Una segunda derivación da por resultado  $y'' = 2/\alpha$ , y por consiguiente la gráfica es cóncava hacia arriba. En la figura 5.2.1a se muestra la gráfica de la ecuación 6 cuando  $\alpha > 0$ ; se ha empleado la simetría para dibujar la parte correspondiente a  $x < 0$ . En este caso, el origen se conoce como el **vértice**. También, nótese que si  $\alpha$  es grande, entonces la parábola es ancha y plana, mientras que si  $\alpha$  es pequeña, la parábola es angosta y empinada. El caso es muy semejante si  $\alpha < 0$ , a excepción de que entonces la parábola se abre hacia abajo en lugar de hacia arriba. En la figura 5.1.2b se muestra la gráfica de la ecuación 6 cuando  $\alpha < 0$ .

Regresemos ahora a la ecuación 1, y veamos el caso en el cual  $A = 0$ , pero  $C \neq 0$ ; entonces la ecuación 1 es

$$Cy^2 + Dx + Ey = F. \quad (7)$$

Suponiendo en este caso que  $D \neq 0$ , completamos el cuadrado en  $y$  y obtenemos

$$(y - k)^2 = \alpha(x - h), \quad (8)$$

en donde ahora

$$h = \frac{F}{D} + \frac{E^2}{4CD}, \quad k = -\frac{E}{2C}, \quad \alpha = -\frac{D}{C}. \quad (9)$$

La ecuación 8 tiene una estructura semejante a la de la ecuación 4, y es la otra forma estándar de la ecuación de una parábola.

Nuevamente, si  $h = k = 0$ , la ecuación 8 se reduce a la forma más sencilla

$$y^2 = \alpha x. \quad (10)$$

La gráfica de la ecuación 10 se puede dibujar de modo muy semejante a la de la ecuación 6; esencialmente todo lo que se necesita es invertir los papeles de las dos variables y por tanto de los dos ejes. En la figura 5.2.2 se muestran las dos posibilidades, que corresponden a  $\alpha > 0$  y a  $\alpha < 0$ . Si  $\alpha > 0$ , la gráfica de la ecuación 10 se abre hacia la derecha, mientras que si  $\alpha < 0$ , la gráfica se abre hacia la izquierda. Nuevamente, se dice que el origen es el vértice de la parábola, y ésta será angosta o amplia dependiendo de que  $|\alpha|$  sea pequeña o grande.

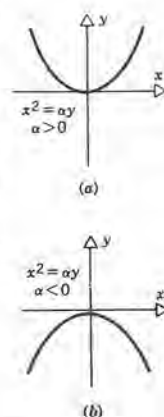


Figura 5.2.1

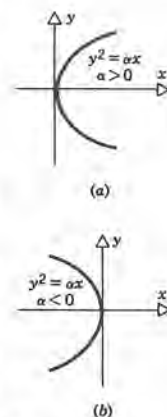


Figura 5.2.2

Para tratar con las ecuaciones algo más generales (4) y (8), respectivamente, es útil introducir la idea de un cambio de coordenadas, en particular un tipo de transformación de coordenadas que se llama traslación. A continuación estudiaremos este tema, aplicándolo a las ecuaciones 4 y 8.

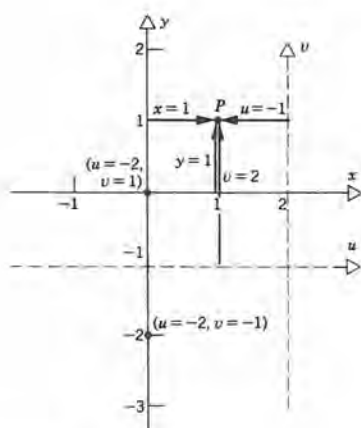
### Traslación de ejes

Sean  $u$  y  $v$  nuevas coordenadas definidas por las ecuaciones

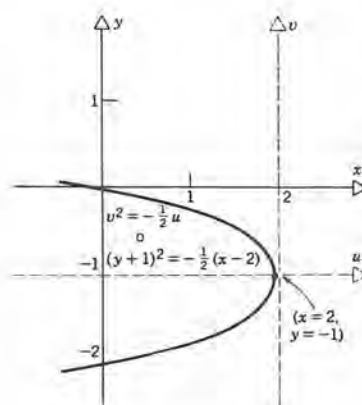
$$u = x - h, \quad v = y - k. \quad (11)$$

Entonces el eje  $v$  (para el cual  $u = 0$ ) es la recta  $x = h$ , y por tanto es paralela al eje  $y$  y se encuentra a una distancia  $|h|$  de él. Hacia la derecha si  $h > 0$ , y hacia la izquierda si  $h < 0$ . Análogamente, el eje  $u$  (para el cual  $v = 0$ ) es la recta  $y = k$ , paralela al eje  $x$  y a una distancia  $|k|$  de él; está arriba del eje  $x$  si  $k > 0$  y debajo si  $k < 0$ . El origen del sistema de coordenadas  $uv$  está en el punto  $x = h, y = k$  en el sistema coordenado  $xy$ . Se puede considerar que se obtienen los ejes  $uv$  moviendo a los ejes  $xy$  en direcciones paralelas a ellos mismos. A esta transformación de ejes coordenados se le conoce como **traslación**. La figura 5.2.3 muestra el caso particular en el que  $h = 2$  y  $k = -1$ , de tal modo que  $u = x - 2$  y  $v = y + 1$ . Se puede identificar cualquier punto dando sus coordenadas  $x, y$  o sus coordenadas  $u, v$ . Por ejemplo, el punto  $P$  que aparece en la figura 5.2.3 tiene las coordenadas  $(x = 1, y = 1)$ , también tiene las coordenadas  $(u = -1, v = 2)$ .

Regresemos ahora a la ecuación 4. Introduciendo las nuevas coordenadas  $uv$  definidas por la ecuación 11, tenemos que



**Figura 5.2.3**  
Un sistema de coordenadas trasladadas.



**Figura 5.2.4**

$$u^2 = \alpha v. \quad (12)$$

Así, la ecuación 12 tiene la misma forma con respecto al sistema de coordenadas  $uv$ , que la ecuación 6 con respecto al sistema coordenado  $xy$ . Por tanto, podemos dibujar la gráfica de la parábola como antes, mediante las coordenadas  $uv$ . Una vez que se traza la gráfica, podemos borrar, si queremos, los ejes  $uv$ , dejando sólo el sistema original de coordenadas  $xy$ . El siguiente ejemplo muestra el procedimiento.

### EJEMPLO 1

Hacer un dibujo de la gráfica de

$$2y^2 + x + 4y = 0. \quad (13)$$

Completamos el cuadrado y obtenemos

$$\begin{aligned} 2(y^2 + 2y) + x &= 0, \\ 2(y^2 + 2y + 1) + x &= 2, \end{aligned}$$

o bien

$$(y + 1)^2 = -\frac{1}{2}(x - 2). \quad (14)$$

La forma de la ecuación 14 nos sugiere el empleo de un sistema coordenado  $uv$  definido mediante

$$u = x - 2, \quad v = y + 1 \quad (15)$$

(véase figura 5.2.3). Entonces la ecuación 14 se transforma en

$$v^2 = -\frac{1}{2}u. \quad (16)$$

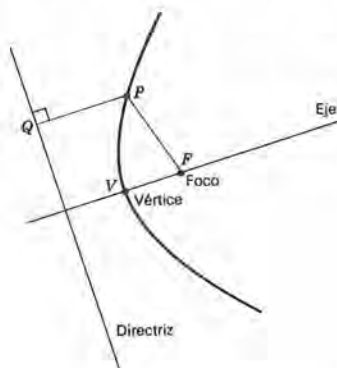
La gráfica de la ecuación 16 es simétrica con respecto al eje  $u$ , y se abre hacia la izquierda con el vértice en el origen del sistema de coordenadas  $uv$ . El ancho de la parábola se determina graficando dos puntos más además del vértice. Por ejemplo, si  $u = -2$ , entonces  $v = -1$  ó  $v = 1$ . En la figura 5.2.4 se muestra la gráfica de la ecuación 16, o de la ecuación 13. ■

### Construcción geométrica de una parábola

En esta sección hemos considerado parábolas comenzando con determinados tipos de ecuaciones cuadráticas y dibujando sus gráficas. Es interesante que las parábolas también se puedan obtener con construcciones geométricas sencillas. En efecto, se puede definir a la parábola como el conjunto de los puntos que equidistan de una recta dada y de un punto determinado, que no pertenece a la recta. A la recta dada se le llama

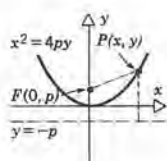


**directriz**, y al punto se le llama **foco** de la parábola. En la figura 5.2.5 las distancias  $FP$  y  $QP$  deben ser iguales para cada punto  $P$  de la parábola. La recta de simetría, o

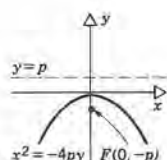


**Figura 5.2.5**

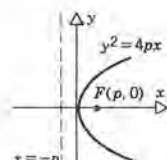
La construcción geométrica de una parábola:  
 $|PQ| = |PF|$ .



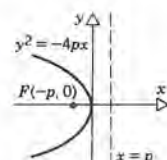
(a)



(b)



(c)



(d)

**eje**, de la parábola, debe ser perpendicular a la directriz y debe contener al foco. Además, el vértice debe estar en el eje, a la mitad de la distancia del foco a la directriz.

Para demostrar la equivalencia de las dos definiciones, necesitamos deducir la ecuación que satisfacen los puntos equidistantes del punto y de la recta dados. Conviene denominar  $2p$  a la distancia del foco a la directriz, e introducir un sistema coordenado como el que se muestra en la figura 5.2.6a. La directriz tiene la ecuación  $y = -p$  y el foco  $F$  tiene las coordenadas  $(0, p)$ . Igualando las distancias desde un punto arbitrario  $P(x, y)$  de la parábola hasta el foco y hasta la directriz, tenemos

$$y + p = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2}. \quad (17)$$

Elevando ambos lados al cuadrado, obtenemos

$$(y + p)^2 = x^2 + (y - p)^2,$$

o sea

$$y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2,$$

y finalmente

$$x^2 = 4py. \quad (18)$$

En las figuras 5.2.6b a 5.2.6d se muestran otras selecciones cómodas o convenientes de sistemas coordenados; en cada caso la distancia del foco a la directriz es  $2p$ . Las ecuaciones de las parábolas que resultan son

$$x^2 = -4py, \quad y^2 = 4px, \quad y^2 = -4px \quad (19)$$

**Figura 5.2.6**

respectivamente. Las ecuaciones 18 y 19 son iguales a las ecuaciones 6 y 10, si identificamos  $\alpha$  con  $4p$  o con  $-4p$  según el caso. En consecuencia, en todos los casos

$$\alpha = \pm 4p \quad \text{o} \quad p = \frac{|\alpha|}{4}.$$

Así, en términos de  $\alpha$ , la distancia del foco a la directriz es  $|\alpha|/2$ , y la distancia del foco al vértice es  $|\alpha|/4$ . Cuando la directriz queda cerca del foco,  $p$  es pequeño,  $|\alpha|$  es pequeña y la parábola que resulta es angosta. Por otro lado, si la directriz y el foco están alejados entre sí, la  $p$  es grande,  $|\alpha|$  es grande, y la parábola es ancha. Si se da la información adecuada acerca del vértice, del foco, de la directriz y del eje, es posible escribir la ecuación de la parábola correspondiente, como en los ejemplos siguientes.

## EJEMPLO 2

Deducir la ecuación de la parábola cuyo vértice está en  $(-1, 2)$  y cuyo foco está en  $(-1, 1)$ .

Como el foco queda abajo del vértice, la parábola se debe abrir hacia abajo. Por tanto, su ecuación tiene la forma

$$(x - h)^2 = \alpha(y - k),$$

en la cual  $\alpha < 0$  y  $(h, k)$  son las coordenadas del vértice. Sustituyendo  $h = -1$ ,  $k = 2$ , obtenemos

$$(x + 1)^2 = \alpha(y - 2).$$

Para determinar  $\alpha$  recordemos que la distancia del foco al vértice siempre es  $|\alpha|/4$ . En este caso, esta distancia es una unidad, de manera que  $|\alpha| = 4$ , y  $\alpha = -4$ . Así, la ecuación de la parábola resulta ser

$$(x + 1)^2 = -4(y - 2).$$

La gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 5.2.7. ■

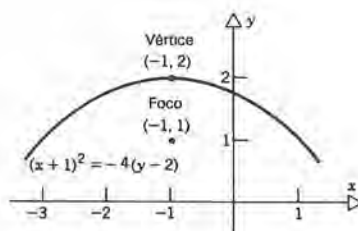


Figura 5.2.7

**EJEMPLO 3**

Deducir la ecuación de la parábola cuyo eje es horizontal, cuyo foco está en  $(2, 1)$  y que pase por  $(8, 9)$ .

Primero hallemos la directriz de la parábola. Como el eje es horizontal, la directriz debe ser vertical. Además, como la parábola contiene al punto  $(8, 9)$ , que queda a la derecha del foco, se infiere que la directriz debe quedar a la izquierda del foco. Finalmente, el punto  $(8, 9)$  debe ser equidistante del foco y de la directriz. La distancia de  $(2, 1)$  a  $(8, 9)$  es

$$\sqrt{(8 - 2)^2 + (9 - 1)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

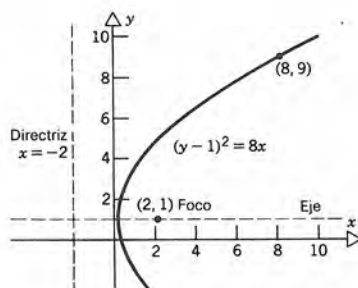
Por tanto, la directriz es la recta vertical que queda a 10 unidades hacia la izquierda del punto  $(8, 9)$ , esto es la recta  $x = -2$ . El punto  $(0, 1)$ , que se encuentra a la mitad de la distancia del foco a la directriz, es el vértice. Por consiguiente, la ecuación de la parábola es de la forma

$$(y - 1)^2 = \alpha x, \quad (20)$$

en la cual  $\alpha > 0$ . Determinaremos  $\alpha$  sustituyendo  $x = 8$  y  $y = 9$  en la ecuación 20. Así,  $\alpha = 8$  y la ecuación de la parábola es

$$(y - 1)^2 = 8x.$$

Esta parábola se muestra en la figura 5.2.8. ■



**Figura 5.2.8**

En los problemas se indican algunas propiedades importantes de las parábolas; quizá la más importante desde el punto de vista de las aplicaciones es la que se describe en el problema 21.



## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, hallar el vértice y el foco, y la ecuación de la directriz de la parábola dada; a continuación hacer un dibujo de su gráfica.

1.  $y = -4x^2$
2.  $x = \frac{1}{4}y^2$
3.  $y = 1 + 2x^2$
4.  $y^2 = x + 2$
5.  $2y^2 + 3x - 4y + 8 = 0$
6.  $3x^2 = 12x - y + 6$
7.  $3y = 4x^2 - 6x + 9$
8.  $y^2 = 4x + 4y - 8$

En los problemas 9 a 16, deducir la ecuación de la parábola que tenga las propiedades pedidas.

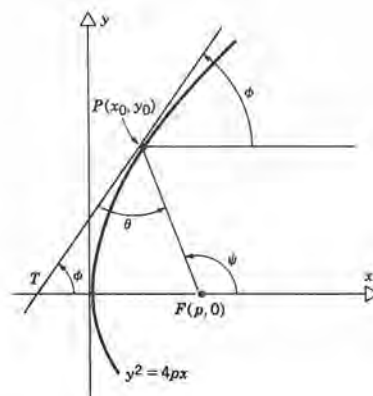
9. Eje paralelo al eje  $y$ ; vértice en  $(2, 1)$ ; pasa por  $(-1, -1)$ .
10. El vértice está en  $(-1, 2)$  y el foco en  $(1, 2)$ .
11. El vértice está en  $(1, 1)$  y la ecuación de la directriz es  $y = -2$ .
12. La directriz es  $x = 2$ ; y el foco en  $(3, 1)$ .
13. El vértice está en  $(2, -1)$ ; pasa por  $(0, 2)$  y por  $(4, 2)$ .
14. El vértice está en  $(2, -3)$ , y el foco en  $(2, 1)$ .
15. El eje es paralelo al eje  $x$ ; el vértice está en  $(-2, 3)$ ; la distancia del foco a la directriz es 4; se abre hacia la derecha.
16. El eje es  $x = 2$ ; es tangente a  $y = 8x - 20$  en  $(4, 3)$ .
17. Deducir la ecuación de la parábola cuyos puntos equidisten de la recta  $x = -3$  y del punto  $(2, 0)$ .
18. Deducir la ecuación de la parábola cuyos puntos equidisten de la recta  $y = 2$  y del punto  $(3, -1)$ .
19. Deducir la ecuación que satisfacen los puntos cuya distancia a la recta  $x = -3$  es dos unidades mayor que su distancia al punto  $(3, 2)$ .
20. Deducir la ecuación del lugar geométrico de los puntos situados al doble de la distancia a la recta  $y = 2$  en comparación con su distancia al punto  $(1, -2)$ .

### Propiedad de reflexión de la parábola

Los griegos descubrieron que todas las parábolas tienen la siguiente propiedad geométrica: un rayo, por ejemplo, de luz, que emane del foco, se refleja en la parábola a lo largo

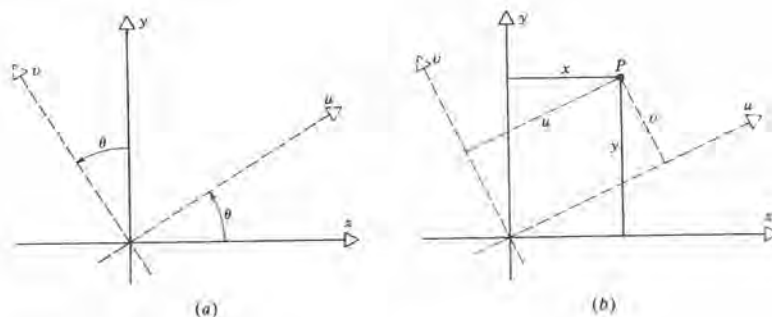
de una trayectoria paralela al eje de la parábola, sin importar cuál sea el punto de reflexión. O bien, un rayo paralelo al eje de la parábola y reflejado en ella pasa por el foco. Este hecho es útil en la construcción de linternas, faros automotrices y faros buscadores, en los cuales el reflector tiene una sección transversal parabólica y la fuente luminosa se pone en el foco. Igualmente, en los telescopios y receptores de radar, las señales de una fuente remota entran paralelas al eje y se reflejan pasando por el foco, mediante un reflector parabólico. La potente concentración que produce un reflector parabólico grande, como el de un radio-telescopio, hace posible detectar y analizar señales luminosas muy pequeñas.

21. Para deducir esta propiedad de la parábola supongamos que el vértice está en el origen, que el eje  $x$  es el eje de la parábola, y que ésta se abre hacia la derecha (véase figura 5.2.9). Entonces la ecuación de la parábola es  $y^2 = 4px$ , donde  $p > 0$  y el foco  $F$  tiene las coordenadas  $(p, 0)$ . Sea  $P(x_0, y_0)$  un punto arbitrario en la parábola, distinto del vértice, y sea  $T$  la tangente a la parábola en  $P$ . Sea  $\phi$  el ángulo entre  $T$  y el eje  $x$ , y sea  $\theta$  el ángulo entre  $T$  y la recta  $PF$ . La propiedad de reflexión que se enunció se puede demostrar, en-



**Figura 5.2.9**

Propiedad de reflexión de la parábola:  $\phi = \theta$ .

**Figura 5.2.10** Rotación de un sistema coordenado.

tonces al probar que  $\theta = \phi$ . Esto se logra demostrando que  $\tan \theta = \tan \phi$ .

(a) Sea  $\psi$  el ángulo entre  $FP$  y eje  $x$  positivo. Muestre que  $\theta = \psi - \phi$ .

(b) Derivar la ecuación de la parábola para demostrar que

$$\tan \phi = \frac{2p}{y_0}.$$

(c) Emplear la definición de pendiente para demostrar que

$$\tan \psi = \frac{y_0}{x_0 - p}.$$

(d) Determinar a  $\tan \theta$  a partir de la identidad

$$\tan \theta = \frac{\tan \psi - \tan \phi}{1 + \tan \psi \tan \phi},$$

y demuestre que  $\tan \theta = \tan \phi$ .

22. Demostrar que la ecuación

$$2x^2 + 3y^2 + 4x - 6y = 12$$

se puede transformar en

$$\alpha u^2 + \gamma v^2 = \kappa$$

mediante una traslación adecuada de ejes  $u = x - h$ ,  $v = y - k$ . Determinar  $h$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\kappa$ .

23. Demostrar que la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F,$$

donde  $A \neq 0$  y  $C \neq 0$ , se puede transformar en

$$\alpha u^2 + \gamma v^2 = \kappa$$

mediante una traslación adecuada de ejes  $u = x - h$ ,  $v = y - k$ . Determinar  $h$ ,  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $\kappa$  en términos de  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$ .

24. Determinar una traslación de ejes  $u = x - h$ ,  $v = y - k$  tal que la recta  $Ax + By = C$  pase por el origen en el plano  $uv$ .

### Rotación de ejes

Considérense dos sistemas coordenados cartesianos, el  $xy$  y el  $uv$ , que tienen el origen común  $O$ . Se obtienen los ejes positivos  $u$  y  $v$  al girar los ejes positivos  $x$  y  $y$ , respectivamente, el ángulo  $\theta$  (véase figura 2.5.2.10a). En este caso se dice que el sistema  $xy$  y el sistema  $uv$  se obtienen uno del otro mediante una rotación de ejes. Se puede identificar un punto  $P$  dando sus coordenadas con respecto al sistema  $xy$  o con respecto al sistema  $uv$ , como se ve en la figura 5.2.10b. Los problemas 25 a 28 se ocupan de la rotación de los ejes coordenados. En especial, en el problema 28 se demuestra que el término  $Bxy$  en la ecuación cuadrática general (1) se puede eliminar mediante una rotación adecuada de ejes.

25. (a) De acuerdo con la figura 5.2.11, demostrar que las coordenadas  $xy$  de un punto  $P$  se relacionan con las coordenadas  $uv$  del mismo punto mediante las ecuaciones

$$x = OQ = OR - QR$$

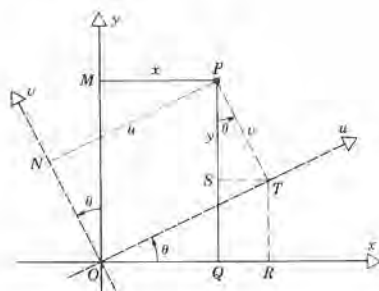


Figura 5.2.11

$$= u \cos \theta - v \sin \theta,$$

$$y = QP = QS + SP$$

$$= u \sin \theta + v \cos \theta.$$

- (b) Haciendo un dibujo semejante a la figura 5.2.11, o despejando las ecuaciones de la parte (a), demostrar que

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

$$v = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

26. Considérese la ecuación

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - \sqrt{3}x + y = 6. \quad (i)$$

El sistema coordenado  $uv$  se obtiene al girar el ángulo  $\theta = \pi/3$ . Entonces, al hacer referencia al problema 25(a),

$$x = \frac{1}{2}(u - \sqrt{3}v),$$

$$y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}u + v).$$

- (a) Expresar la ecuación (i) en términos de  $u$  y de  $v$ .

- (b) Hacer un esquema de la gráfica de la ecuación que se obtuvo en la parte (a) con respecto al sistema de coordenadas  $uv$ . Nótese que superponiendo los dos sistemas coordenados se obtiene también la gráfica de la ecuación (i) con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ .

27. Considérese la ecuación

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y + 8 = 0.$$

El sistema  $uv$  se obtiene del sistema  $xy$  al girarlo un ángulo  $\theta$  (véase problema 25).

- (a) Transformar la ecuación dada en una en la que intervengan  $u$  y  $v$ , en lugar de  $x$  y  $y$ .

- (b) Determinar a  $\theta$  de tal manera que la ecuación que se obtuvo en la parte (a) no tenga término de la forma  $\beta uv$ .

- (c) Para el valor mínimo posible de  $\theta$  que se determinó en (b), deducir la ecuación de la parábola en términos de  $u$  y  $v$ . A continuación hacer un dibujo de su gráfica, indicando tanto los ejes  $uv$ , como los ejes  $xy$ .

28. Considérese la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F, \quad (i)$$

en la cual  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son constantes. El sistema coordenado  $uv$  se obtiene girando el sistema  $xy$  un ángulo  $\theta$ .

- (a) Demostrar que en términos de  $u$  y  $v$  la ecuación (i) tiene la forma

$$\alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + \delta u + \epsilon v = \kappa, \quad (ii)$$

en la cual  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  y  $\kappa$  son constantes. Demostrar que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$  y  $\kappa$  se dan en términos de  $A, B, C, D$  y  $E$  mediante las ecuaciones

$$\alpha = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta,$$

$$\beta = -2A \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta,$$

$$\gamma = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta,$$

$$\delta = D \cos \theta + E \sin \theta,$$

$$\epsilon = -D \sin \theta + E \cos \theta,$$

$$\kappa = F.$$

- (b) Demostrar que siempre es posible determinar a  $\theta$  de tal modo que  $\beta = 0$ .

29. La cuerda perpendicular al eje de una parábola, que pasa por el foco de ésta, se llama **lado recto**. Demostrar que la longitud del lado recto es el doble de la distancia que hay del foco a la directriz. Esta propiedad es útil cuando se hace el dibujo de una parábola.

*Sugerencia:* examinar el caso  $x^2 = \alpha y$ , donde  $\alpha > 0$ . Mediante una selección adecuada de ejes, se puede transformar cualquier ecuación de la parábola a esa forma.

30. Demostrar que las rectas tangentes a la parábola en los extremos del lado recto (véase problema 29) se intersecan en la directriz y son perpendiculares entre sí.

*Sugerencia:* ver la sugerencia en el problema 29.



### 5.3 ELIPSES

En esta sección seguiremos examinando la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F, \quad (1)$$

pero ahora supondremos que tanto  $A$  como  $C$  son distintos de cero y que tienen el mismo signo. Supongamos, por simplicidad, que tanto  $A$  como  $C$  son positivos (si ambos son negativos, multiplicaremos la ecuación 1 por  $-1$ ). Para reducir la ecuación 1 a una forma más cómoda completaremos los cuadrados en  $x$  y en  $y$ . Con ello, obtenemos

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) = F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}, \quad (2)$$

o bien

$$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = M, \quad (3)$$

en la cual

$$h = -\frac{D}{2A}, \quad k = -\frac{E}{2C}, \quad M = F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}. \quad (4)$$

Si resulta que  $M < 0$ , entonces la ecuación 3 no tiene gráfica porque ciertamente el lado izquierdo es no negativo. Igualmente, si  $M = 0$ , la gráfica consta del punto único  $x = h, y = k$ . Estos casos degenerados tienen poca importancia. El caso interesante se tiene cuando  $M > 0$ ; si es así, podemos dividir ambos lados de la ecuación 3 entre  $M$  para obtener

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad (5)$$

en la cual  $a^2 = M/A, b^2 = M/C, a = \sqrt{M/A} > 0$  y  $b = \sqrt{M/C} > 0$ .

La ecuación 5 es la forma estándar de la ecuación de una **elipse**. Podemos simplificar más la ecuación 5 al introducir las coordenadas trasladadas  $u, v$  definidas por

$$u = x - h, \quad v = y - k. \quad (6)$$

Como demostramos en la sección 5.2, los ejes  $u$  y  $v$  son paralelos a los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente, y el origen del sistema coordenado  $uv$  es el punto cuyas coordenadas son  $x = h, y = k$  en el sistema  $xy$ . En términos de  $u$  y  $v$ , la ecuación 5 se transforma en

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

En el caso especial en el que  $b = a$ , las ecuaciones 5 y 7 se reducen a

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 \quad \text{o} \quad u^2 + v^2 = a^2,$$

que corresponden a un círculo con centro en el punto  $(x = h, y = k)$  y cuyo radio es  $a$ .

Se puede hacer un buen dibujo de la gráfica de la ecuación 7 tomando en cuenta los siguientes hechos. Primero, observemos que cada término del lado izquierdo de la ecuación 7 es no negativo; por tanto, ninguno de ellos puede tener un valor superior a uno. En consecuencia, todos los puntos de la gráfica de la ecuación 7 satisfacen a  $|u| \leq a$ , y  $|v| \leq b$ . En otras palabras, la gráfica de la ecuación 7 queda enteramente dentro del rectángulo auxiliar  $R$  acotado por las rectas  $u = \pm a$  y  $v = \pm b$ . Cuando  $v = 0$ , tenemos que  $u = \pm a$ , y por tanto hay intersecciones con el eje  $u$  en  $(-a, 0)$  y  $(a, 0)$ . Igualmente, hay intersecciones con el eje  $v$  en  $(-b, 0)$  y en  $(b, 0)$ .

La gráfica de la ecuación 7 es simétrica con respecto a los ejes  $u$  y  $v$ ; por tanto, es suficiente considerar con detalle sólo la parte de la gráfica que queda en el primer cuadrante del plano  $uv$ . Derivando implícitamente la ecuación 7 con respecto a  $u$ , vemos que

$$\frac{2u}{a^2} + \frac{2vv'}{b^2} = 0, \quad (8)$$

o sea

$$v' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{u}{v}, \quad (9)$$

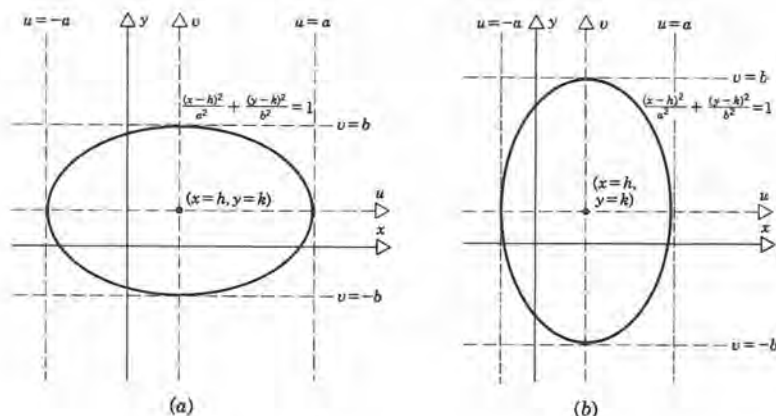
en la cual  $v' = dv/du$ . Según la ecuación 9, vemos que en el primer cuadrante  $v' < 0$ , de manera que  $v$  decrece cuando  $u$  crece. También, de acuerdo con la ecuación 9, la tangente a la gráfica es horizontal cuando  $u = 0$  y es vertical cuando  $v = 0$ . Así, la gráfica de la ecuación 7 es tangente al lado del rectángulo  $R$  que pasa por cada intersección con los ejes coordenados.

Una segunda derivación con respecto a  $u$  produce

$$v'' = -\frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{v} - \frac{uv'}{v^2} \right). \quad (10)$$

En el primer cuadrante,  $u > 0$ ,  $v > 0$  y  $v' < 0$ ; por tanto,  $v''$  es  $< 0$  allí, y esa parte de la gráfica es cóncava hacia abajo. Con toda esta información, no es difícil dibujar la gráfica de la ecuación 5 o de la ecuación 7. Las figuras 5.3.1a y 5.3.1b muestran los casos en los que  $a^2 > b^2$  y  $a^2 < b^2$ , respectivamente.

Si  $a^2 > b^2$ , la gráfica ovalada de la elipse está alargada a lo largo del eje  $u$ , como se ve en la figura 5.3.1a, mientras que si  $a^2 < b^2$ , la gráfica está alargada a lo largo del eje  $v$ , como se muestra en la figura 5.3.1b. El eje a lo largo del cual la figura se alarga se llama **eje mayor**, y el otro se llama **eje menor**. Así, si  $a^2 > b^2$ , el eje mayor está en el eje  $u$  y el eje menor en el eje  $v$ . Los números  $a$  y  $b$  son las longitudes de los semiejes mayor y menor, respectivamente, en este caso. Se invierte la situación si  $a^2 < b^2$ . El origen del sistema coordenado se llama **centro** de la elipse, y a las intersecciones con los ejes coordenados del eje mayor se les llama **vértices**. A causa de su simetría con respecto al centro, a las elipses y a las hipérbolas se les conoce como **cónicas centrales**.



**Figura 5.3.1** (a) Elipse,  $a^2 > b^2$ . (b) Elipse,  $a^2 < b^2$ .

Quizá el mejor método para hacer un dibujo de la gráfica de la elipse dada por la ecuación 5 es el siguiente:

1. Trazar los ejes  $x$  y  $y$ .
2. Determinar  $h$  y  $k$ .
3. Trazar los ejes  $u$  y  $v$ .
4. Trazar el rectángulo auxiliar cuyos lados son  $u = \pm a$ ,  $v = \pm b$ .
5. Inscribir la elipse en el rectángulo auxiliar, como se ve en la figura 5.3.1.

Una vez terminado el dibujo, se pueden borrar el rectángulo auxiliar y los ejes  $u$  y  $v$ , si se desea, dejando el dibujo relacionado sólo con los ejes  $xy$ .

### EJEMPLO 1

Dibujar la gráfica de

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y = -4. \quad (11)$$

Determinar el eje mayor, el eje menor, el centro y los vértices.

Completamos el cuadrado en  $x$  y  $y$  y obtenemos

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) = -4 + 36 + 4$$

o sea

$$9(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 36,$$



y finalmente llegamos a

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1. \quad (12)$$

Definimos a las coordenadas trasladadas  $u, v$  mediante

$$u = x - 2, \quad v = y + 1,$$

y en términos de ellas la ecuación 12 se transforma en

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} = 1. \quad (13)$$

Los ejes  $u$  y  $v$  se muestran en la figura 5.3.2. La gráfica de la ecuación 13 queda dentro del rectángulo definido por las rectas  $u = \pm 2, v = \pm 3$ , y sus coordenadas al origen

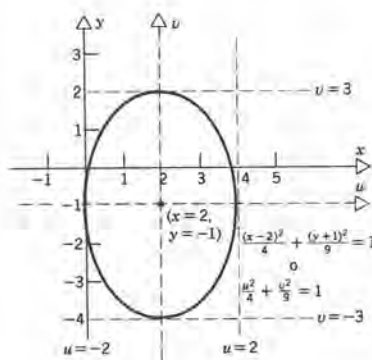


Figura 5.3.2

son  $(\pm 2, 0)$  y  $(0, \pm 3)$  en el sistema coordenado  $uv$ . Una vez ubicados esos puntos se puede trazar el rectángulo para inscribir en él a la elipse sin dificultad.

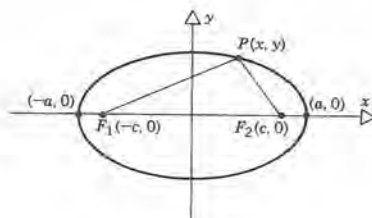
En el sistema coordenado  $xy$  los ejes mayor y menor son las rectas  $x = 2$  y  $y = -1$ , respectivamente. El centro está en  $(2, -1)$  y los vértices en  $(2, 2)$  y  $(2, -4)$ . ■

### Construcción geométrica de la elipse

Se puede definir a una elipse mediante una forma equivalente como el lugar geométrico de los puntos para los que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Para deducir la ecuación que satisface este lugar geométrico es conveniente escoger el sistema de coordenadas que se ve en la figura 5.3.3. Entonces, los dos puntos fijos son  $(c, 0)$  y  $(-c, 0)$ , donde  $c > 0$ .

**Figura 5.3.3**

La construcción geométrica de una elipse:  $|PF_1| + |PF_2| = 2a > 2c$ .



Sea la distancia fija  $2a$ , donde  $2a > 2c$ . Entonces  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ , o sea

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Transponemos el segundo radical al lado derecho del signo igual y elevamos al cuadrado la ecuación resultante para obtener

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

con algo de manipulación algebraica se reduce lo anterior a

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevamos al cuadrado de nuevo y encontramos que

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2).$$

Por último, definimos a  $b^2 = a^2 - c^2$  y entonces se deduce que

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

o sea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (14)$$

Por otro lado, si seleccionamos las coordenadas de tal modo que los puntos fijos sean  $(0, c)$  y  $(0, -c)$ , y que la distancia fija sea  $2b > 2c > 0$ , una deducción semejante conduce de nuevo a la ecuación 14 donde  $a^2 = b^2 - c^2$ . En cualquier caso los dos puntos fijos se llaman **focos** de la elipse; siempre quedan en el eje mayor, y la distancia  $c$  del centro de la elipse a los focos se llama **longitud focal**. En general,  $c$  está dado por

$$c^2 = |a^2 - b^2|. \quad (15)$$

Nótese que los focos siempre están más cerca del centro que los vértices. Para la elipse del ejemplo 1, la longitud focal es  $c = \sqrt{5}$ , y los focos son los puntos  $(2, -1 \pm \sqrt{5})$ .

Las elipses tienen varias aplicaciones interesantes. Por ejemplo, a veces los arcos de los puentes son elípticos. Sin embargo, posiblemente la presencia mejor conocida de las elipses en la naturaleza es la del mismo sistema solar. Cada planeta se desplaza alrededor del sol en una órbita elíptica en la cual el sol está en uno de los focos. Las órbitas difieren considerablemente entre sí en la forma, varían de órbitas casi circulares hasta órbitas bastante alargadas. En el caso de la Tierra, su órbita es casi circular; las longitudes de los semiejes mayor y menor son, respectivamente, 93.004 y 92.991 millones de kilómetros. Con esas cifras, la ecuación de la órbita terrestre se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{x^2}{22\,392.13} + \frac{y^2}{21\,497.42} = 1 \quad (16)$$

en la cual  $x$  y  $y$  se dan en millones de kilómetros.

## EJEMPLO 2

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos están en  $(-3, 3)$  y  $(1, 3)$ , y que pasa por  $(-1, 5)$ .

El centro de la elipse es el punto medio entre los dos focos, o sea, está en  $(-1, 3)$ . Entonces, la elipse tiene su ecuación de la forma

$$\frac{(x + 1)^2}{a^2} + \frac{(y - 3)^2}{b^2} = 1. \quad (17)$$

Para determinar las constantes  $a$  y  $b$ , necesitamos dos condiciones. Una proviene del hecho de que la longitud focal de la elipse dada es la mitad de la distancia entre los dos focos, y por tanto  $c = 2$ . En consecuencia,

$$a^2 - b^2 = 4. \quad (18)$$

Nótese que hemos escrito la ecuación 18 de tal manera que  $a > b$ ; el eje mayor contiene a los focos y por tanto, en este caso es paralelo al eje  $x$ . La segunda condición se obtiene sustituyendo  $x = -1$  y  $y = 5$  en la ecuación 17 con el resultado siguiente:

$$0 + \frac{4}{b^2} = 1.$$

En ella,  $b^2 = 4$  y, de acuerdo con la ecuación 18,  $a^2 = 8$ . Por consiguiente, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x + 1)^2}{8} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1. \quad (19)$$

La elipse se muestra en la figura 5.3.4. ■



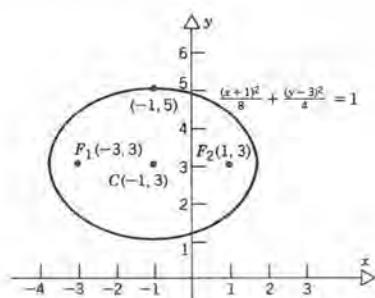


Figura 5.3.4

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, determinar la posición del centro y los focos, así como las longitudes de los semiejes mayor y menor de la elipse dada. A continuación hacer un dibujo de la gráfica.

1.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

2.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

3.  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

4.  $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y = 6$

5.  $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 5$

6.  $4x^2 + 3y^2 + 8x + 18y = -6$

7.  $x^2 + 4y^2 - 4x + 16y = -4$

8.  $4x^2 + 64x + 9y^2 - 18y = 23$

En los problemas 9 a 14, deducir la ecuación de la elipse que tiene las propiedades dadas.

9. Focos en  $(-1, 2)$  y  $(3, 2)$ ; un vértice está en  $(5, 2)$ .
10. Vértices en  $(-1, -2)$  y  $(-1, 6)$ ; longitud focal  $\sqrt{7}$ .
11. Centro en  $(1, 2)$ ; un foco en  $(1, 5)$ ; un vértice en  $(1, -3)$ .
12. Focos en  $(2, 3)$  y  $(2, -2)$ ; tangente a la recta  $y = 5$ .
13. El semieje menor tiene 3 unidades de longitud; un foco está en  $(-2, 3)$ ; un vértice está en  $(-3, 3)$ .
14. Vértices en  $(1, -3)$  y  $(1, 7)$ ; la longitud focal es 3.

15. Hallar la ecuación que satisfacen los puntos  $P(x, y)$  tales que la suma de sus distancias a  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$  sea 10.
16. Deducir la ecuación que satisfacen los puntos  $P(x, y)$  tales que la suma de sus distancias a  $(-2, -2)$  y  $(-2, 4)$  sea 12.
17. Deducir la ecuación que satisfacen los puntos  $P(x, y)$  tales que la suma de sus distancias a  $(-1, 2)$  y  $(3, -1)$  sea 8.
18. Hallar la ecuación que satisfacen los puntos  $P(x, y)$  tales que la suma de sus distancias a  $(-2, -1)$  y  $(2, 1)$  sea 6.
19. Se define la **excentricidad**  $e$  de una elipse como la razón de su longitud focal a la longitud del semieje mayor. Para la elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (i)$$

cundo  $a > b$  tenemos que

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (ii)$$

Igualmente, para la elipse (i) cuando  $b > a$ ,

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \quad (iii)$$

(a) Demostrar que, en ambos casos,

$$0 < e < 1.$$

(b) Demostrar que cuando  $e \rightarrow 0$ , la elipse tiende a ser un círculo. ¿Qué sucede con los dos focos?

(c) Determinar la forma límite de la elipse cuando  $e \rightarrow 1$ .

En los problemas 20 a 23, calcular la excentricidad de la elipse dada.

20.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  (ver problema 2)

21.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$  (ver problema 1)

22.  $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y = 6$  (ver problema 4)

23.  $x^2 + 4y^2 - 4x + 16y = -4$  (ver problema 7)

En los problemas 24 a 27, deducir la ecuación de la elipse que tenga las propiedades solicitadas.

24. Centro en  $(2, 1)$ ; un foco en  $(-1, 1)$ ; excentricidad  $3/5$ .

25. Focos en  $(-1, 2)$  y  $(3, 2)$ ; excentricidad  $2/3$ .

26. Un vértice en  $(1, 4)$ ; un foco en  $(-3, 2)$ ; excentricidad  $2/\sqrt{5}$ ; ejes paralelos a los ejes coordenados.

27. Centro en  $(-1, -3)$ ; un vértice en  $(3, -3)$ ; excentricidad  $1/2$ .

28. Acerca de la ecuación 16 del texto, determinar la excentricidad de la órbita de la Tierra.

29. **Propiedades de reflexión de la elipse.** Demostrar que un rayo que emana de uno de los focos de una elipse se refleja en ella y pasa por el otro foco.

*Sugerencia:* escoger un sistema de coordenadas tal que los focos  $F_1$  y  $F_2$  queden en  $(\pm c, 0)$ . Escoger un punto  $P(x_0, y_0)$  arbitrario en la elipse, y determinar la pendiente de la recta normal  $N$  en ese punto. Demostrar que el ángulo entre  $N$  y  $PF_1$  es igual al ángulo entre  $N$  y  $PF_2$ .

30. Una varilla de longitud  $l$  se divide mediante un punto  $P$  en dos partes cuyas longitudes son  $rl$  y  $(1-r)l$ , respectivamente, donde  $0 < r < 1$ . Si la varilla se mueve de tal modo que uno de sus extremos queda en el eje  $x$  y el otro queda en el eje  $y$ , deducir una ecuación de la trayectoria que sigue el punto  $P$ .

## 5.4 HIPÉRBOLAS

Continuaremos estudiando la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F, \quad (1)$$

pero ahora supondremos que  $A$  y  $C$  tienen signos opuestos. Procedemos exactamente como en la sección 5.3, completando el cuadrado tanto en  $x$  como en  $y$  y obtenemos

$$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = M, \quad (2)$$

en la cual de nuevo

$$h = -\frac{D}{2A}, \quad k = -\frac{E}{2C}, \quad M = F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}. \quad (3)$$

Si  $M \neq 0$ , podemos entonces dividir a la ecuación 2 entre  $M$ . Como  $A$  y  $C$  tienen signos contrarios, los cocientes  $A/M$  y  $C/M$  también tienen signos contrarios. Sea  $a^2 = |M/A|$  y  $b^2 = |M/C|$ . Entonces la ecuación 2 adquiere la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

si  $A$  y  $M$  tienen el mismo signo, y la forma

$$-\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

en caso de que  $A$  y  $M$  tengan signos opuestos. Nótese que  $a = \sqrt{|M/A|} > 0$ , y que  $b = \sqrt{|M/C|} > 0$ .

Las ecuaciones 4 y 5 son las formas estándar de la ecuación de una **hipérbola**. Veremos primero la gráfica de la ecuación 4. Para simplificar más esta ecuación de nuevo introduciremos un sistema trasladado de coordenadas que se define mediante

$$u = x - h, \quad v = y - k; \quad (6)$$

y entonces la ecuación 4 se vuelve

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Como  $u^2/a^2 \geq 1$ , se infiere que no hay parte de la gráfica que quede en la región en la que  $|u| < a$ . Además, hay intersecciones con el eje  $u$  en  $(-a, 0)$  y en  $(a, 0)$ , pero no hay intersecciones con el eje  $v$ . También, de acuerdo con la ecuación 7, es consecuencia inmediata que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes  $u$  y  $v$ , y por tanto es suficiente tener en cuenta sólo la porción de dicha gráfica que queda en el primer cuadrante del plano  $uv$ .

Derivando implícitamente a la ecuación 7 con respecto a  $u$ , obtenemos

$$\frac{2u}{a^2} - \frac{2vv'}{b^2} = 0$$

o bien

$$v' = \frac{b^2}{a^2} \frac{u}{v}. \quad (8)$$

Así, en el primer cuadrante,  $v' > 0$  y por consiguiente  $v$  crece cuando lo hace  $u$ . Como  $v' \rightarrow \infty$  cuando  $v \rightarrow 0+$ , se sigue que la gráfica tiene una tangente vertical en la intersección con el eje  $u$  en  $(a, 0)$ .

Derivando por segunda vez con respecto a  $u$ , tenemos que

$$v'' = \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{v} - \frac{uv'}{v^2} \right).$$

Sustituimos a  $v'$  de la ecuación 8 y también, empleando la ecuación 7, se obtiene



$$v'' = -\frac{b^4}{a^2 v^3}. \quad (9)$$

Por tanto, en el primer cuadrante  $v'' < 0$  y la gráfica de la ecuación 8 es cóncava hacia abajo en esa zona.

Para determinar la forma de la gráfica en el primer cuadrante cuando  $u$  y  $v$  son grandes, despejamos  $v$  de la ecuación 7, y queda

$$v = b \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1}, \quad (10)$$

en la cual se considera la raíz cuadrada positiva. Si  $u$  es muy grande, entonces  $u^2/a^2$  es mucho mayor que 1 y por tanto  $v \cong bu/a$ . En realidad, demostraremos ahora que en el primer cuadrante la gráfica es asintótica a la recta  $v = bu/a$  cuando  $u \rightarrow \infty$ , esto es, demostraremos que la distancia  $d$  entre la hipérbola y la recta  $v = bu/a$  tiende a cero cuando  $u \rightarrow \infty$ . La distancia en realidad no es mayor que la distancia vertical  $r$  entre dos puntos, uno en la hipérbola y otro en la recta  $v = bu/a$ , que tienen la misma coordenada  $u$  (véase figura 5.4.1). Por consiguiente, es suficiente demostrar que  $r \rightarrow 0$  cuando  $u \rightarrow \infty$ . Esta distancia  $r$  está dada por

$$r = \frac{b}{a} u - b \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1};$$

es la diferencia entre dos cantidades, cada una de las cuales se hace infinita cuando  $u \rightarrow \infty$ . Para examinar esa diferencia con más cuidado, racionalizaremos la expresión anterior. Así,

$$r = \left[ \frac{b}{a} u - b \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1} \right] \frac{\left[ \frac{b}{a} u + b \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1} \right]}{\left[ \frac{b}{a} u + b \sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1} \right]}$$

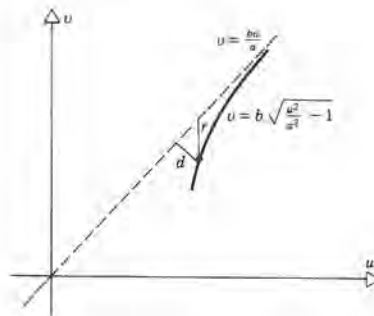


Figura 5.4.1

$$= \frac{b^2}{\frac{b}{a}u + b\sqrt{\frac{u^2}{a^2} - 1}}. \quad (11)$$

Cuando  $u \rightarrow \infty$ , queda claro, de acuerdo con la ecuación 11, que  $r \rightarrow 0$ ; por tanto, la recta  $v = bu/a$  es en realidad una asíntota de la hipérbola.

Como en el caso de la elipse, el rectángulo auxiliar acotado por  $u = \pm a$ ,  $v = \pm b$  ayuda mucho a dibujar la hipérbola definida por la ecuación 7. La hipérbola queda fuera de este rectángulo, pero es tangente a él en las intersecciones con los ejes. Además, las asíntotas de la hipérbola son las extensiones de las diagonales del rectángulo. Nótese que las asíntotas separan al plano  $uv$  en cuatro sectores, y que la hipérbola queda completamente dentro de dos de ellos. El hallar las intersecciones con los ejes  $u$  y  $v$  es una forma conveniente para determinar en qué sectores se ubica la hipérbola.

La gráfica de la ecuación 4 o de la ecuación 7 se dibuja con facilidad basándose en la información que se obtuvo antes, mediante el siguiente procedimiento:

1. Trazar los ejes  $x$  y  $y$ .
2. Determinar  $h$  y  $k$ .
3. Trazar los ejes  $u$  y  $v$ .
4. Trazar el rectángulo auxiliar cuyos lados son  $u = \pm a$ ,  $v = \pm b$ .
5. Trazar las diagonales del rectángulo auxiliar y prolongarlas más allá del rectángulo.
6. Localizar las intersecciones con los ejes en  $u = \pm a$  y  $v = 0$ .
7. Hacer un dibujo de la hipérbola que pase por las coordenadas al origen y que sea asíntótica a las prolongaciones de las diagonales del rectángulo, haciendo uso de la simetría de la gráfica con respecto a los ejes  $u$  y  $v$ .

En la figura 5.4.2a se muestra el dibujo de la gráfica de la ecuación 4. Como en el caso de la elipse, una vez terminado el dibujo se pueden borrar los ejes  $u$  y  $v$ , si se desea.

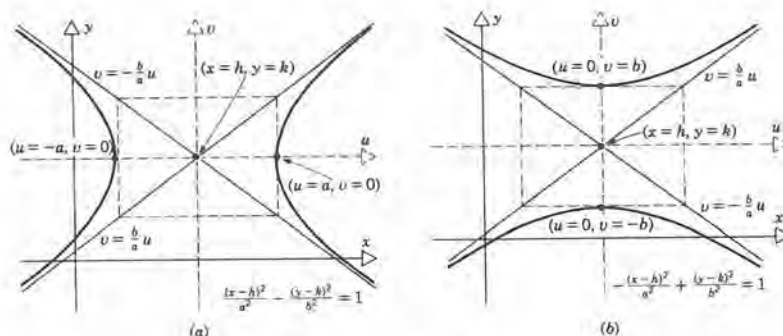


Figura 5.4.2

La gráfica de la ecuación 5 es muy semejante. La única diferencia es que en el paso 6 las intersecciones con los ejes están ubicadas en  $u = 0$  y  $v = \pm b$ . Por tanto, las dos ramas de la hipérbola se abren verticalmente, y no horizontalmente. La gráfica de la ecuación 5 se muestra en la figura 5.4.2b.

El punto de intersección de los dos ejes de simetría se llama **centro** de la hipérbola, y las intersecciones con uno de los ejes se llaman **vértices**. La recta que pasa por los vértices se llama **eje transversal**, y a la distancia entre los vértices se le llama **diámetro transversal**. La recta que pasa por el centro y que es perpendicular al eje transversal se llama **eje conjugado**.

Se tiene un caso especial degenerado si, en la ecuación 2,  $A$  y  $C$  son de signos opuestos y  $M = 0$ . En este caso, se puede escribir la ecuación 2 en la forma siguiente:

$$A(x - h)^2 = -C(y - k)^2$$

o bien, como  $A$  y  $C$  tienen signos opuestos y por tanto  $-(A/C) > 0$ ,

$$y - k = \pm \sqrt{-\left(\frac{A}{C}\right)} (x - h). \quad (12)$$

Así, la gráfica consta de dos rectas que se intersecan cuya pendiente es  $\pm\sqrt{-(A/C)}$  y que pasan por el punto  $(x = h, y = k)$ .

## EJEMPLO 1

Hacer un esquema de la gráfica de

$$-x^2 + 4y^2 - 4x - 8y = 16. \quad (13)$$

Si se completa el cuadrado en  $x$  y en  $y$ , se obtiene

$$-(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = 16 - 4 + 4$$

o sea

$$-(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 16$$

y finalmente

$$-\frac{(x + 2)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1. \quad (14)$$

Por consiguiente,  $h = -2$ ,  $k = 1$ , y el sistema trasladado de coordenadas se define mediante

$$u = x + 2, \quad v = y - 1. \quad (15)$$



Los ejes  $u$  y  $v$  se indican mediante líneas punteadas en la figura 5.4.3. En términos de esas coordenadas, la ecuación 14 se vuelve

$$-\frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{4} = 1. \quad (16)$$

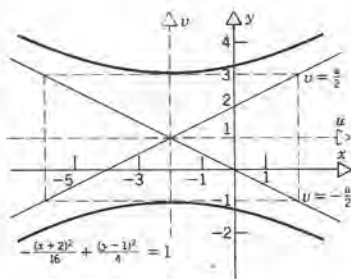


Figura 5.4.3

El rectángulo auxiliar está definido por las rectas  $u = \pm 4$ ,  $v = \pm 2$ , y las asíntotas por  $v = \pm u/2$ . Por último, los vértices están en el eje  $v$  en los puntos  $(0, -2)$  y  $(0, 2)$ . Empleando esta información, así como las propiedades de simetría, podemos dibujar la gráfica, como se ve en la figura 5.4.3. ■

### Construcción geométrica de la hipérbola

Se puede dar la definición geométrica de la hipérbola como el conjunto de los puntos  $P(x, y)$  para los cuales la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante. Para obtener una ecuación que satisfagan estos puntos es conveniente seleccionar un sistema de coordenadas de modo que los dos puntos fijos sean  $(-c, 0)$  y  $(c, 0)$ , donde  $c > 0$ , como se ve en la figura 5.4.4. Si la distancia fija es  $2a$ , donde  $a < c$ , entonces, mediante una deducción casi exactamente igual a la de la sección 5.3 se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (17)$$

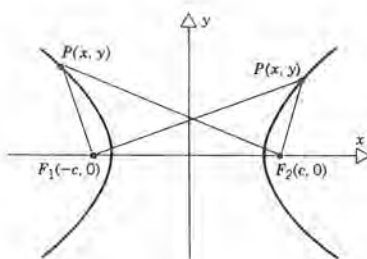


Figura 5.4.4

La construcción geométrica de una hipérbola:

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a < 2c, \text{ o bien}$$

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a < 2c.$$

en la cual  $b^2 = c^2 - a^2$ . Por otro lado, si los puntos fijos están en  $(0, -c)$  y  $(0, c)$ , y si la distancia fija es  $2b < 2c$ , se obtiene entonces

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (18)$$

en la cual  $a^2 = c^2 - b^2$ . En todos los casos, a los dos puntos fijos se les llama **focos** y están ubicados siempre en el eje transversal, a iguales distancias del centro. A la distancia  $c$  que hay del centro a cualquiera de los focos se le llama **longitud focal**, y siempre está dada por

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (19)$$

Nótese que para una hipérbola, los focos siempre quedan más alejados del centro que los vértices. Para la hipérbola del ejemplo 1, la longitud focal es  $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . Los focos son los puntos  $(-2, 1 + 2\sqrt{5})$  y  $(-2, 1 - 2\sqrt{5})$ .

## EJEMPLO 2

Hallar una ecuación de la hipérbola cuyos vértices están en  $(3, 1)$  y  $(-5, 1)$ , una de cuyas asíntotas tiene la pendiente  $-3/4$ .

El centro de la hipérbola es el punto medio entre los vértices, que en este caso es  $(-1, 1)$ . Además, el eje transversal es la recta  $y = 1$ , el diámetro transversal es 8, y por consiguiente  $a = 4$ . Por último, como las asíntotas tienen pendientes  $\pm b/a$  en general, se infiere que en este caso  $b = 3$ . Por tanto, la ecuación de esta hipérbola es

$$\frac{(x + 1)^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{9} = 1. \quad (20)$$

Su gráfica se muestra en la figura 5.4.5. ■

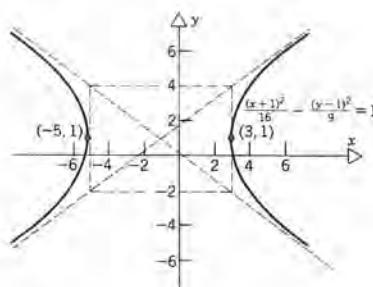
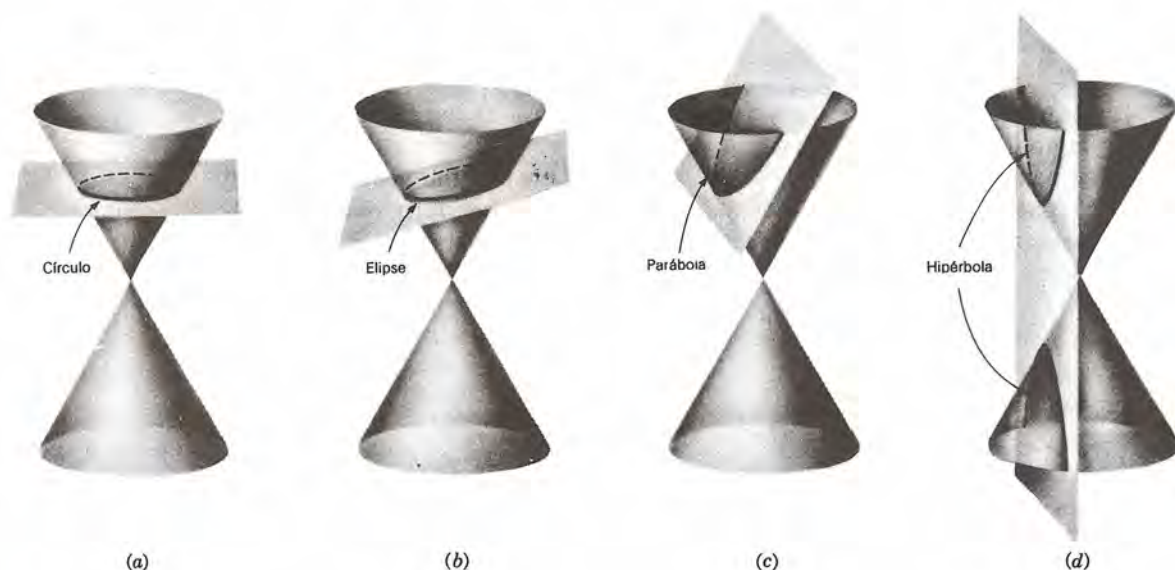


Figura 5.4.5

### Secciones cónicas

Además de ser gráficas de ecuaciones cuadráticas con dos variables, y como resultado de ciertas construcciones geométricas, las parábolas, elipses e hipérbolas también se presentan al menos de otra manera importante en las matemáticas. Al igual que los círculos y líneas rectas en algunos casos especiales, son las curvas de intersección de un cono con un plano, esto es, son secciones de un cono, o secciones cónicas (véase figura 5.4.6). Los matemáticos griegos llevaron a cabo investigaciones extensas y complicadas con estas curvas, y descubrieron la mayor parte de sus propiedades, que hoy en día resultan ser muy conocidas. Mencionaremos en especial a Apolonio de Perga, quien escribió un extenso tratado sobre ellas. Estos antiguos sabios trabajaban desde un punto de vista puramente geométrico, ya que no conocieron los beneficios del álgebra de coordenadas, que se desarrolló muchos siglos después. Ello hace que el avance de sus investigaciones sea muy asombroso para el estudiante en la actualidad. El demostrar la equivalencia de las curvas definidas en forma geométrica como secciones de un cono y como las que se obtienen como gráficas de ecuaciones cuadráticas se necesita llevar a cabo un análisis un tanto difícil, que no presentaremos aquí.



**Figura 5.4.6**

Intersecciones de un cono con un plano. (a) Círculo. (b) Elipse. (c) Parábola. (d) Hipérbola.



## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, localizar el centro y los vértices, determinar las pendientes de las asíntotas de la hipérbola dada. A continuación hacer un dibujo de la gráfica.

$$1. \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1 \qquad 2. -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$3. \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

$$4. -(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$$

$$5. -4x^2 + y^2 + 8x + 6y = 11$$

$$6. x^2 - 4y^2 - 4x + 16y = 28$$

$$7. 4x^2 - 3y^2 - 8x + 18y = 59$$

$$8. 3x^2 + 12x - y^2 + 6y = -39$$

En los problemas 9 a 14 deducir la ecuación de la hipérbola que tiene las propiedades descritas.

9. Un vértice en  $(2, 0)$ ; focos en  $(3, 0)$  y  $(-3, 0)$ .
10. Centro en  $(2, -1)$ ; una asíntota es  $2(y+1) = 3(x-2)$ ; un vértice en  $(2, -4)$ .
11. Focos en  $(-1, 3)$  y  $(-1, -5)$ ; una asíntota es  $x-2y = 1$ .
12. Un vértice en  $(2, 3)$ ; un foco en  $(2, -1)$ ; el diámetro transversal tiene 6 unidades de longitud.
13. Las asíntotas son  $3x-4y = -11$  y  $3x+4y = 5$ ; un foco en  $(4, 2)$ .
14. Centro en  $(-2, 1)$ ; longitud focal 3; un vértice en  $(0, 1)$ .
15. Deducir una ecuación que satisfagan los puntos  $P(x, y)$  tales que la diferencia de sus distancias a  $(0, -2)$  y  $(0, 2)$  sea 2.
16. Hallar una ecuación que satisfagan los puntos  $P(x, y)$  tales que la diferencia de sus distancias a  $(-3, 3)$  y  $(3, 3)$  sea 4.
17. Deducir una ecuación que satisfagan los puntos  $P(x, y)$  tales que la diferencia de sus distancias a  $(-1, 2)$  y  $(3, -1)$  sea 3.
18. Hallar una ecuación que satisfagan los puntos  $P(x, y)$  tales que la diferencia de sus distancias a  $(-2, 1)$  y  $(2, -1)$  sea 4.
19. La excentricidad  $e$  de una hipérbola se define como

la razón de la longitud focal a la mitad del diámetro transversal. Para la hipérbola

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (i)$$

la excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \qquad (ii)$$

mientras que para la hipérbola

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (iii)$$

tenemos que

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}. \qquad (iv)$$

(a) Demostrar que  $e > 1$  en cualquier caso.

(b) Determinar la forma límite de la hipérbola cuando  $e \rightarrow 1$  y cuando  $e \rightarrow \infty$ .

*Sugerencia:* considerar a  $c$  fijo.

En los problemas 20 a 23, calcular la excentricidad de la hipérbola dada.

$$20. -(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 4 \qquad (\text{Problema 4})$$

$$21. \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1 \qquad (\text{Problema 1})$$

$$22. x^2 - 4y^2 - 4x + 16y = 28 \qquad (\text{Problema 6})$$

$$23. 4x^2 - 3y^2 - 8x + 18y = 59 \qquad (\text{Problema 7})$$

En los problemas 24 a 27, deducir la ecuación de la hipérbola que tenga las propiedades que se describen.

24. Vértices en  $(1, -2)$  y  $(1, 4)$ ; excentricidad 2.

25. Focos en  $(-1, 2)$  y  $(3, 2)$ ; excentricidad  $3/2$ .

26. Centro en  $(-2, 3)$ ; un foco en  $(4, 3)$ ; excentricidad  $6/5$ .

27. Una asíntota es  $y+1 = 2(x-3)$ ; un foco está en  $(6, -1)$ ; excentricidad  $\sqrt{5}$ .

28. Calcular la excentricidad de una hipérbola cuyas asíntotas son  $2(y-2) = \pm 3(x+1)$ .

- \*29. En el problema 28 de la sección 5.2 se demostró que siempre es posible transformar la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F \quad (i)$$

en una de la forma

$$\alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 + \delta u + \epsilon v = \kappa \quad (ii)$$

mediante una rotación de ejes

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta,$$

$$y = u \sin \theta + v \cos \theta. \quad (iii)$$

- (a) Emplear los resultados del problema que acabamos de mencionar para demostrar que

$$B^2 - 4AC = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

para todos los valores del ángulo  $\theta$  de rotación. Si se selecciona a  $\theta$  de tal manera que  $\beta = 0$ , entonces  $B^2 - 4AC = -4\alpha\gamma$ .

- (b) Demostrar que la ecuación (ii) con  $\beta = 0$  representa una elipse, una parábola o una hipérbola, según si  $\alpha\gamma$  es positivo, cero o negativo, respectivamente.

- (c) Demostrar que la ecuación (i) representa una elipse, una parábola o una hipérbola dependiendo de que el valor  $B^2 - 4AC$  sea negativo, cero o positivo, respectivamente.

## 5.5 ECUACIONES PARAMÉTRICAS

En las secciones anteriores hemos descrito cómo dibujar una curva en el plano, que es la gráfica de una función

$$y = f(x), \quad (1)$$

o bien que es la gráfica de una ecuación

$$\phi(x, y) = 0. \quad (2)$$

A las ecuaciones 1 y 2 las llamaremos ecuaciones *cartesianas*. La ventaja de la ecuación 1 es que es relativamente fácil calcular el valor de  $y$  que corresponde a un valor dado de  $x$ . Sin embargo, las curvas que tienen la ecuación de la forma (1) están limitadas a ser las que son intersecadas a lo más una vez por una recta paralela al eje  $y$ . Las ecuaciones de la forma (2) están asociadas con una mayor variedad de curvas, por ejemplo, las elipses y las hipérbolas. Sin embargo, tienen la desventaja de que puede ser difícil calcular el o los valores de  $y$  que corresponden a una  $x$  dada, porque ello implica despejar a  $y$  de la ecuación 2. En resumen, la ecuación *explícita* 1 es más fácil, pero la ecuación *implícita* 2 es más general.

En muchos casos podemos obtener tanto simplicidad como generalidad empleando una tercera manera de dar una descripción analítica de una curva. A este tipo de descripción se le llama *representación paramétrica* y a las ecuaciones que resultan se les llama **ecuaciones paramétricas**. Presentaremos la idea de una representación paramétrica en un contexto físico.

Consideremos el movimiento de una partícula en el plano  $xy$ . La posición instantánea de esa partícula está dada por sus coordenadas  $x$  y  $y$ . Cuando la partícula se mueve en el plano, sus coordenadas cambian con el tiempo. Al describir el movimiento de esa partícula es natural expresar sus coordenadas como funciones del tiempo. Así, escribimos

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \text{para } t \text{ en } I \quad (3)$$

en donde  $t$  denota el tiempo y en donde  $I$  es algún intervalo en el cual las funciones  $f$  y  $g$  están definidas. En lugar de relacionar entre sí directamente a  $x$  y  $y$ , las ecuaciones 3 expresan a  $x$  y a  $y$  como funciones de una tercera variable, el *parámetro*  $t$ . Para cada  $t$ , las ecuaciones 3 determinan *un punto*; el conjunto de esos puntos es la *trayectoria* de la partícula en movimiento. Así, se dice que las ecuaciones 3 constituyen un conjunto de ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula.

Al emplear las representaciones paramétricas se debe tener cuidado no sólo de dar las ecuaciones en la forma (3), sino también enunciar el intervalo  $I$  en el cual se permite que varíe el parámetro; en otras palabras, es esencial indicar el dominio de las funciones  $f$  y  $g$ . Si  $f$  y  $g$  son continuas en un intervalo  $I$ , se dice entonces que un conjunto de ecuaciones paramétricas (3) define un **arco**, o **curva**, en el plano  $xy$ . La *dirección positiva* del arco es la dirección que corresponde a valores crecientes del parámetro.

Veamos algunos ejemplos de representaciones paramétricas, principiando con algunas curvas familiares.

### EJEMPLO 1

Sean

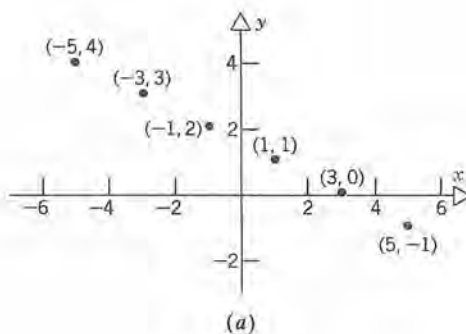
$$x = 2t - 1, \quad y = -t + 2. \quad (4)$$

Describir la curva en el plano  $xy$  que corresponde a este conjunto de ecuaciones paramétricas para  $t$  en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ ; para  $t$  en el intervalo  $[0, 3]$ .

Comencemos graficando algunos puntos de la curva. La tabla 5.1 muestra los valores  $x$  y  $y$  para varios valores de  $t$  y los puntos correspondientes se muestran en la figura 5.5.1a. Parece, de acuerdo con esta figura, que los seis puntos marcados quedan en una recta.

**Tabla 5.1** Valores de  $x = 2t - 1$ ,  $y = -t + 2$ .

$t$	$x$	$y$
-2	-5	4
-1	-3	3
0	-1	2
1	1	1
2	3	0
3	5	-1



**Figura 5.5.1**



Para demostrar que lo anterior es cierto, podemos seguir así: despejar a  $t$  de la segunda de las ecuaciones 4 y obtenemos  $t = 2 - y$ ; a continuación sustituimos esta expresión en la primera de las ecuaciones 4 en lugar de  $t$ . El resultado es la ecuación cartesiana

$$x = 2(2 - y) - 1,$$

o sea

$$x + 2y = 3, \quad (5)$$

que es la ecuación de una recta. La recta se muestra en la figura 5.5.1b. Cuando  $t$  varía de  $-\infty$  a  $\infty$ , la recta es recorrida en la dirección indicada por la flecha.

A continuación consideremos el intervalo  $0 \leq t \leq 3$ . Los puntos que corresponden a  $t = 0$  y  $t = 3$  son  $(-1, 2)$  y  $(5, -1)$ , respectivamente. Cuando  $t$  está en  $[0, 3]$  obtenemos el segmento de recta que aparece en la figura 5.5.1c, que une a  $(-1, 2)$  con  $(5, -1)$ , incluyendo los puntos extremos. ■

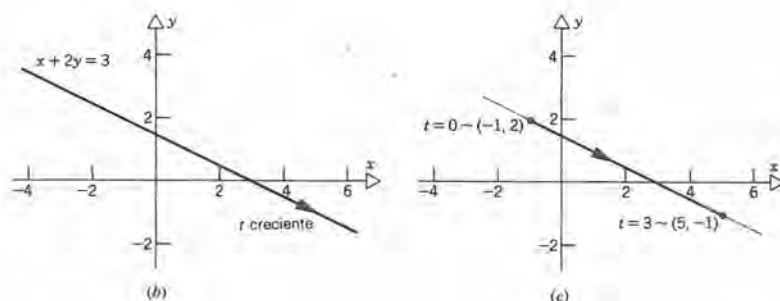


Figura 5.5.1

## EJEMPLO 2

Describir la curva que corresponde a las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 \operatorname{sen} t, \quad y = 4 \cos t \quad (6)$$

para  $-\pi \leq t \leq 0$ ; también para  $-\pi \leq t \leq 2\pi$ .

Para eliminar el parámetro  $t$ , escribimos primero las ecuaciones 6 en la siguiente forma:

$$\frac{x}{3} = \operatorname{sen} t, \quad \frac{y}{4} = \cos t.$$

Elevamos al cuadrado y sumamos esas ecuaciones, para obtener

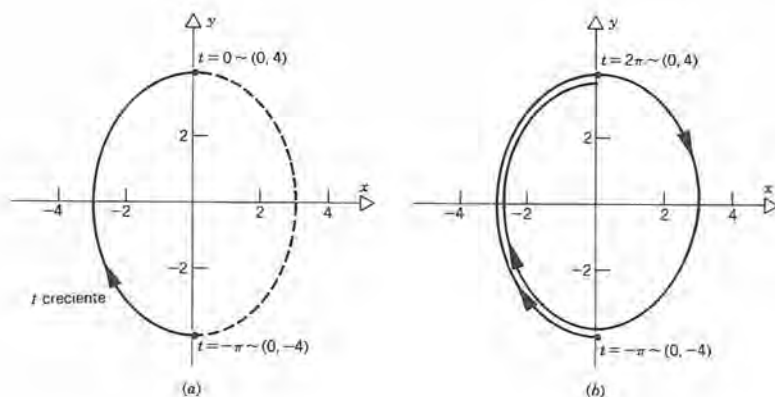


Figura 5.5.2

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1. \quad (7)$$

La ecuación 7 tiene como gráfica a la elipse que se muestra en la figura 5.5.2a. Cuando  $t$  está en el intervalo  $[-\pi, 0]$   $x$  siempre es negativa o cero, y  $y$  crece de  $-4$  a  $4$ . Por tanto, las ecuaciones 6 corresponden a la mitad izquierda de la elipse, recorrida en sentido dextrógiro cuando  $t$  crece.

Por otro lado, cuando  $t$  está en  $[-\pi, 2\pi]$ , las ecuaciones 6 corresponden a uno y medio circuitos de la elipse (7), en sentido dextrógiro, comenzando en  $(0, -4)$  y terminando en  $(0, 4)$ . Este arco se indica en la figura 5.5.2b. ■

### EJEMPLO 3

Se tienen las ecuaciones paramétricas

$$x = -\frac{3(1 - \tau^2)}{1 + \tau^2}, \quad y = \frac{8\tau}{1 + \tau^2} \quad (8)$$

para  $-1 \leq \tau \leq 1$ . Identificar el arco que describen.

En este caso puede no ser inmediatamente obvio cómo proceder para eliminar el parámetro  $\tau$  de las ecuaciones 8. Sin embargo, si las escribimos en la siguiente forma

$$\frac{x}{3} = -\frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \frac{y}{4} = \frac{2\tau}{1 + \tau^2},$$

entonces, al elevar al cuadrado y sumar, obtendremos

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} &= \frac{(1 - \tau^2)^2}{(1 + \tau^2)^2} + \frac{4\tau^2}{(1 + \tau^2)^2} \\
 &= \frac{1 - 2\tau^2 + \tau^4 + 4\tau^2}{(1 + \tau^2)^2} \\
 &= \frac{1 + 2\tau^2 + \tau^4}{(1 + \tau^2)^2} = 1.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Por tanto, los puntos que satisfacen a las ecuaciones 8 quedan en la elipse descrita por la ecuación 9. Los valores  $\tau = -1$  y  $\tau = 1$  corresponden a los puntos  $(0, -4)$  y  $(0, 4)$ , respectivamente. Como  $x \leq 0$  para  $-1 \leq \tau \leq 1$ , se infiere que este intervalo de  $\tau$  corresponde sólo a la mitad izquierda de la elipse, recorrida en sentido dextrógiro cuando crece  $\tau$ . Obsérvese que es igual que el primer arco del ejemplo 2; sin embargo, las ecuaciones 8 son bastante distintas de las ecuaciones 6. Esto demuestra que a la misma curva se le pueden asignar conjuntos de ecuaciones paramétricas completamente diferentes. ■

Cuando nos encontramos con una curva descrita por un conjunto de ecuaciones paramétricas, un modo de proceder consiste en eliminar el parámetro, obteniendo con ello una ecuación cartesiana de la forma (2). A continuación se puede dibujar la gráfica mediante los métodos desarrollados anteriormente en este capítulo. Este método hubiera sido conveniente, por ejemplo, en cada uno de los ejemplos anteriores. Sin embargo, en casos más complicados con frecuencia es difícil o imposible eliminar el parámetro para obtener una ecuación cartesiana correspondiente. Entonces se aconseja hacer un dibujo de la gráfica a partir de las propias ecuaciones paramétricas. Esto se puede hacer marcando puntos que correspondan a varios valores de  $t$ , y a continuación unirlos mediante una curva suave en el sentido de crecimiento de  $t$ . Como en el caso de las ecuaciones cartesianas, podrá ayudar también el buscar otra información útil para trazar un buen dibujo. Es de especial importancia la determinación de la pendiente de la curva en cada punto.

Supongamos, entonces, que deseamos calcular la pendiente del arco descrito por las ecuaciones 3

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \text{cuando } t \text{ está en } I$$

en un punto  $(x, y)$  que corresponde a un valor de  $t$  en  $I$ . Para un incremento  $\Delta t$  de  $t$  se tienen los incrementos respectivos  $\Delta x$  de  $x$  y  $\Delta y$  de  $y$ , dados por

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t), \quad \Delta y = g(t + \Delta t) - g(t). \tag{10}$$

Así,  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  es el punto en la curva que está asociado con el valor del parámetro  $t + \Delta t$  (véase figura 5.5.3). La razón  $\Delta y/\Delta x$  es la pendiente del segmento de recta que une a los puntos  $(x, y)$  y  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . El límite de  $\Delta y/\Delta x$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  es la pendiente que se busca. Para calcular este límite procederemos como sigue: si  $f$  y  $g$  son derivables con respecto a  $t$ , entonces sus incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  se pueden expresar cómodamente empleando la teoría de la aproximación lineal descrita en la sección 3.4. Recurriendo al teorema 3.4.1, tenemos que



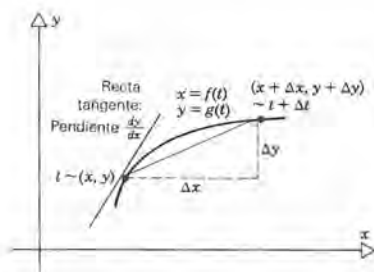


Figura 5.5.3

$$\Delta x = f'(t)\Delta t + r(t + \Delta t, t)\Delta t, \quad (11)$$

$$\Delta y = g'(t)\Delta t + \bar{r}(t + \Delta t, t)\Delta t, \quad (12)$$

en las cuales  $r(t + \Delta t, t) \rightarrow 0$  y  $\bar{r}(t + \Delta t, t) \rightarrow 0$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Por último, observemos que  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero al mismo tiempo. Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g'(t)\Delta t + \bar{r}(t + \Delta t, t)\Delta t}{f'(t)\Delta t + r(t + \Delta t, t)\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g'(t) + \bar{r}(t + \Delta t, t)}{f'(t) + r(t + \Delta t, t)} \\ &= \frac{g'(t)}{f'(t)}, \end{aligned} \quad (13)$$

considerando únicamente que  $f'(t) \neq 0$ . La ecuación 13 es la que deseábamos para la pendiente de la curva que representan las ecuaciones 3; involucra sólo a las derivadas de las funciones  $f$  y  $g$  que aparecen en la representación paramétrica (3).

Si las ecuaciones  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  definen una función  $y = F(x)$ , entonces la pendiente de la gráfica de  $F$  está dada por  $F'(x) = dy/dx$ . Llegamos a la conclusión, de acuerdo con la ecuación 13, de que

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \quad (14)$$

para la cual se entiende que el lado izquierdo de la ecuación 14 se evalúa en el valor de  $x$ , dado por  $x = f(t)$ . Si para algún valor de  $t$  ocurre que  $f'(t) = 0$ , pero  $g'(t) \neq 0$ , entonces la pendiente de la curva es infinita y su tangente es vertical. Si tanto  $f'(t)$  como  $g'(t)$  son cero en el mismo punto, entonces la ecuación 14 no tiene sentido y no se puede emplear para determinar la pendiente allí. El comportamiento de la curva en esos puntos se debe determinar de alguna otra manera. Para eliminar puntos como esos de nuestra atención, a veces se pide que  $f'^2(t) + g'^2(t) > 0$ .

Si se escribe la ecuación 14 en la notación de Leibniz, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \quad (15)$$

Así, la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  es la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $t$  dividida entre la correspondiente de  $x$  con respecto a  $t$ . La analogía entre la ecuación 15 y la aritmética de las fracciones es una de las bellezas de la notación de Leibniz. Las derivadas de orden superior se pueden calcular al derivar la ecuación 15 con respecto a  $x$ . Por ejemplo, al partir de la ecuación 15, y al sustituir a  $y$  por  $dy/dx$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{(d/dt)[g'(t)/f'(t)]}{(d/dt)[f(t)]} \\ &= \frac{f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Se dice que el arco definido por las ecuaciones 3 es suave, en cualquier intervalo en el cual tiene una tangente que varía continuamente. Para asegurarse de que esto es así, es suficiente pedir que  $f'$  y  $g'$  sean funciones continuas y que  $f'^2(t) + g'^2(t) > 0$  en el intervalo. Si no se satisface la última condición, entonces el arco puede ser o no ser suave. Desde luego que una vez que se haya calculado  $dy/dx$  y posiblemente  $d^2y/dx^2$ , se pueden sacar conclusiones acerca de si  $y$  es creciente o decreciente, y si la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo, consultando la sección 5.1.

A continuación veremos algunos ejemplos más de ecuaciones paramétricas.

#### EJEMPLO 4

Para el arco descrito por las ecuaciones 6, en el ejemplo 2,

$$x = 3 \sin t, \quad y = 4 \cos t, \quad -\pi \leq t \leq 0$$

calcular la pendiente en el punto en el que  $t = -\pi/3$ .

Esto se puede hacer, naturalmente, eliminando el parámetro, como en el ejemplo 2, para derivar a continuación la ecuación 7 resultante. Sin embargo, deseamos ejemplificar el procedimiento que se basa en las propias ecuaciones paramétricas. De acuerdo con la ecuación 15 tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-4 \sin t}{3 \cos t}.$$

Cuando  $t = -\pi/3$ , obtenemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\pi/3} = \frac{-4(-\sqrt{3}/2)}{3(1/2)} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

que es la pendiente que buscábamos. El lector puede comprobar que este resultado también se obtiene a partir de la ecuación 7. ■

### EJEMPLO 5

Calcular la pendiente de la curva definida por

$$x = 3(\cos t + t \sin t), \quad y = 3(\sin t - t \cos t) \quad (17)$$

en el punto en que  $t = \pi/6$ .

Partiremos directamente de las ecuaciones paramétricas dadas y, derivando, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = 3(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 3t \cos t,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3(\cos t - \cos t + t \sin t) = 3t \sin t.$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación 15,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin t}{3t \cos t} = \tan t.$$

Cuando  $t = \pi/6$ , obtenemos

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\pi/6} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

que es la pendiente de la tangente en el punto dado. ■

### EJEMPLO 6

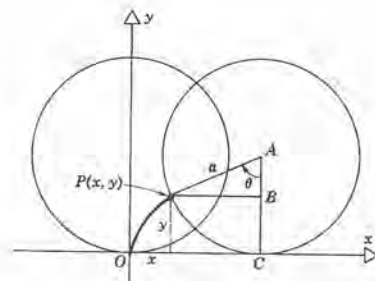
(Cicloide)

Supongamos que un círculo de radio  $a$  está ubicado con su centro en  $(0, a)$ , y que por tanto es tangente al eje  $x$  en el origen. Hagamos que el círculo ruede sin resbalar en la dirección positiva del eje  $x$ . Deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que sigue el punto  $P$  en el círculo, que al principio estaba en el origen (véase figura 5.5.4).

A la curva en cuestión se le llama **cicloide**, y sus ecuaciones paramétricas se pueden deducir como sigue. Sean  $x$  y  $y$  las coordenadas del punto  $P$ , y sea  $\theta$  el ángulo entre la recta vertical  $AC$  y el radio  $AP$ . Como el círculo rueda sin resbalar, tenemos que

$$OC = \text{arco } PC = a\theta.$$





**Figura 5.5.4**  
Construcción geométrica  
de una cicloide.

Entonces

$$x = OC - PB = a\theta - a \operatorname{sen} \theta$$

y

$$y = CA - BA = a - a \cos \theta.$$

Así, las ecuaciones

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta); \quad 0 \leq \theta < \infty \quad (18)$$

son un conjunto de ecuaciones paramétricas de la cicloide con el ángulo central  $\theta$  como parámetro.

Aunque es posible eliminar a  $\theta$  de las ecuaciones 18, obteniendo con ello una ecuación sólo en  $x$  y  $y$ , la ecuación cartesiana que se obtiene es bastante más complicada y se usa raras veces. La cicloide es un ejemplo de una curva que se estudia con mayor facilidad a través de su representación paramétrica.

Vamos a describir ahora la gráfica de la cicloide. Nótese primero que un aumento de  $\theta$  en  $2\pi$  no ocasiona cambio en  $\operatorname{sen} \theta$  y  $\cos \theta$  debido a su carácter periódico. Así, un aumento de  $\theta$  en  $2\pi$  no ocasiona cambio en  $y$ , pero sí un cambio  $2\pi a$  en  $x$ . En otras palabras,  $y$ , como función de  $x$  es periódica y su periodo es de  $2\pi a$ . Por tanto, es suficiente hacer el dibujo de la gráfica en el intervalo de  $x$  cuya longitud es  $2\pi a$ , digamos, desde  $x = 0$  hasta  $x = 2\pi a$ . Nos restringiremos a ese intervalo; esto es, restringiremos a  $\theta$  al intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

A continuación, observemos que se infiere de inmediato, a partir de la segunda de las ecuaciones 18, que  $y \geq 0$  siempre. Además, dentro del intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , tenemos que  $y = 0$  cuando  $\theta = 0$  y cuando  $\theta = 2\pi$ ; así,  $y = 0$  para  $x = 0$  y para  $x = 2\pi a$ .

Determinaremos la pendiente  $dy/dx$  derivando las ecuaciones 18. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{a(1 - \cos \theta)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (19)$$

La ecuación 19 da a  $dy/dx$ , excepto cuando  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ , y en esos puntos tanto el numerador como el denominador son cero. Sin tomar en cuenta esos puntos particula-

res, por el momento, vemos de la ecuación 19 que  $dy/dx$  tiene el mismo signo que  $\sin \theta$ . Así,  $dy/dx > 0$  para  $0 < \theta < \pi$ , y  $dy/dx < 0$  para  $\pi < \theta < 2\pi$ . Por tanto, la gráfica tiene un punto máximo cuando  $\theta = \pi$ , esto es, en el punto  $x = \pi a$ ,  $y = 2a$ .

Derivando la ecuación 19 obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d(dy/dx)/d\theta}{dx/d\theta} \\ &= \frac{(1 - \cos \theta)\cos \theta - \sin \theta(\sin \theta)}{(1 - \cos \theta)^2} \cdot \frac{1}{a(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{1}{a} \frac{\cos \theta - 1}{(1 - \cos \theta)^3} = -\frac{1}{a(1 - \cos \theta)^2}.\end{aligned}\quad (20)$$

Esta cantidad es negativa cuando  $0 < \theta < 2\pi$ , y de esta manera  $dy/dx$  decrece en este intervalo. Por tanto, la gráfica es cóncava hacia abajo en  $0 \leq x \leq 2\pi a$ .

Por último, determinaremos la forma de la gráfica cerca de los puntos especiales  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ . Tal como está, la ecuación 19 no es de utilidad, porque tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando  $\theta$  tiende a 0 o a  $2\pi$ . Sin embargo, la podemos reformular del modo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}\quad (21)$$

Como  $\sin \theta$  tiende a cero pasando por valores positivos cuando  $\theta$  tiende a cero por la derecha, se infiere que  $dy/dx \rightarrow \infty$  cuando  $\theta \rightarrow 0$  por la derecha. Igualmente,  $dy/dx \rightarrow -\infty$  cuando  $\theta \rightarrow 2\pi$  por la izquierda. De este modo, la gráfica tiene una tangente vertical en los puntos  $(0, 0)$  y  $(2\pi a, 0)$ , que corresponden a  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ , respectivamente.

Obsérvese que  $dx/d\theta = a(1 - \cos \theta)$  y que  $dy/d\theta = a \sin \theta$  son continuas siempre, pero que ambas son cero cuando  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ . Así, la curva puede no ser suave en esos puntos; de hecho, la gráfica presenta un pico, o cúspide, allí.

Conjuntando toda la información que hemos encontrado, podemos trazar un buen dibujo de la cicloide. En el intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi a$  ésta tiene la forma general de un

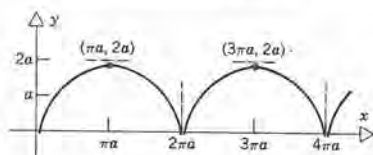


Figura 5.5.5 Cicloide.

arco, como se ve en la figura 5.5.5. Fuera del intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi a$  se traza rápidamente la gráfica haciendo uso de su carácter periódico. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20, hacer un dibujo del arco representado por el conjunto dado de ecuaciones paramétricas e indicar la dirección positiva. También, hallar una ecuación cartesiana correspondiente.

$$1. x = 3t - 6, \quad y = t - 2; \quad -\infty < t < 2$$

$$2. x = -2t + 1, \quad y = 3t + 4; \quad -3 < t \leq 1$$

$$3. x = 2 \sin t, \quad y = 2 \cos t; \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$4. x = 2 \cos t, \quad y = -3 \sin t; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$5. x = 2 \sin 3t, \quad y = -2 \cos 3t; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$6. x = 3 \sin 2t, \quad y = 4 \cos 2t; \quad 0 < t < 2\pi$$

$$7. x = 2 \sin t, \quad y = 4 \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$8. x = t^2 + 3, \quad y = 2t - 1; \quad 0 \leq t < \infty$$

$$9. x = \sec t, \quad y = 2 \tan t; \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$10. x = \tan 2t, \quad y = \sec 2t; \quad \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$$

$$11. x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \quad 0 \leq t < \infty$$

$$12. x = \frac{a}{1+t}, \quad y = \frac{bt}{1+t}; \quad 0 \leq t \leq 4,$$

en las cuales  $a$  y  $b$  son constantes diferentes de cero.

$$13. x = 1 + 3 \sin t, \quad y = -2 + 4 \cos t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$14. x = -2 + \sec 2t, \quad y = 1 + 2 \tan 2t; \quad -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$$

$$15. x = \cos t, \quad y = \cos 2t; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$16. x = 3t, \quad y = t^3; \quad -\infty < t < \infty$$

$$17. x = t^2, \quad y = t^3; \quad -\infty < t \leq 0$$

$$18. x = \sqrt{t} + 2, \quad y = t + \sqrt{2}; \quad 0 \leq t < \infty$$

$$19. x = \frac{1+t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-t}{1+t^2}; \quad -\infty < t < \infty$$

$$20. x = \sin t, \quad y = \sin 2t; \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

En los problemas 21 a 26, deducir una ecuación de la tangente a la curva dada en el punto dado.

$$21. x = 2 \cos t, \quad y = -3 \sin t; \quad t = \frac{\pi}{4}$$

$$22. x = t^2 + 3, \quad y = 2t - 1; \quad t = 3$$

$$23. x = \tan 2t, \quad y = \sec 2t; \quad t = \frac{\pi}{6}$$

$$24. x = t^2 + 3t, \quad y = t^3; \quad t = 2$$

$$25. x = \sqrt{t} + 2, \quad y = t + \sqrt{2}; \quad t = 1$$

$$26. x = \cos t, \quad y = \cos 2t; \quad t = \frac{\pi}{3}$$

En los problemas 27 a 32, determinar a  $dy/dx$  y  $d^2y/dx^2$  como funciones del parámetro  $t$ .

$$27. x = 3 \sin 2t, \quad y = 4 \cos 2t$$

$$28. x = \sec t, \quad y = -2 \tan t$$

$$29. x = 1 + 3 \cos t, \quad y = -2 + 4 \sin t$$

$$30. x = 2t^2 - 3t + 1, \quad y = -t^2 + 2t + 2$$

$$31. x = t^3 + 1, \quad y = t^2 - 2t$$

$$32. x = \sin t, \quad y = \cos 2t$$

33. Deducir una ecuación cartesiana que equivalga al siguiente conjunto de ecuaciones paramétricas:

$$x = 2t^2 - 3t + 1, \quad y = -t^2 + 2t + 2,$$

y caracterizar la curva que representan. No hacer el dibujo de la gráfica.

*Sugerencia:* eliminar a  $t^2$  al poner a la cantidad



$x + 2y$  en términos de  $t$ . A continuación, consultar el problema 29 de la sección 5.4.

34. Demostrar que las ecuaciones paramétricas

$$x = a_1 t^2 + a_2 t + a_3,$$

$$y = b_1 t^2 + b_2 t + b_3,$$

corresponden a una parábola para cualquier selección de las constantes  $a_1, \dots, b_3$  tales que  $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ .

*Sugerencia:* combinar las ecuaciones dadas para obtener una ecuación que no contenga a  $t^2$ . A continuación ver el problema 29 de la sección 5.4.

35. Un círculo de radio  $a$  rueda sin resbalar por el eje  $x$ . El punto  $P$  está ubicado originalmente a una distancia  $b \neq a$  directamente abajo del centro del círculo. Si  $b < a$ , entonces  $P$  se puede representar como un punto de un rayo de una rueda de bicicleta; si  $b > a$ , entonces  $P$  se puede representar como un punto de la caja de una rueda de ferrocarril. Cuando se mueve el círculo, el punto  $P$  traza una curva que se llama *trocoide*.

(a) Con una gráfica semejante a la de la figura 5.5.4, deducir una representación paramétrica de la trocoide.

(b) Hacer un dibujo de la trocoide cuando  $b < a$  y cuando  $b > a$ .

- \*36. La trayectoria de un punto  $P$  de un círculo de radio  $b$ , que rueda sin resbalar en el interior de un círculo más grande de radio  $a > b$  se llama *hipocicloide*. Con la figura 5.5.6, demostrar que una representación paramétrica de la hipocicloide es

$$x = (a - b)\cos \theta + b \cos \left( \frac{a - b}{b} \right) \theta,$$

$$y = (a - b)\sin \theta - b \sin \left( \frac{a - b}{b} \right) \theta.$$

*Sugerencia:* nótese que  $a\theta = b\phi$ , siendo  $\theta$  y  $\phi$  los ángulos que aparecen en la figura 5.5.6

- \*37. Suponer que en el problema 36  $a = 4b$ .

(a) Emplear el resultado que se obtuvo en ese problema para hallar ecuaciones paramétricas para la hipocicloide, en este caso.

(b) Hacer un esquema de la gráfica de esta hipocicloide. Se le llama hipocicloide de cuatro cúspides.

(c) Deducir una ecuación cartesiana para la hipocicloide de cuatro cúspides.

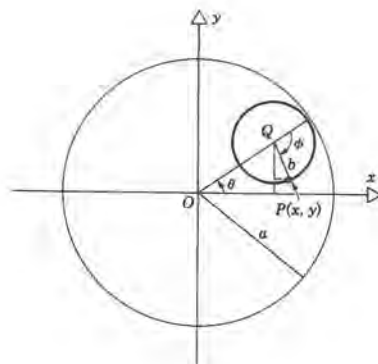


Figura 5.5.6

Construcción de una hipocicloide.

- \*38. Suponer que  $a = nb$  en el problema 36, siendo  $n$  un entero positivo. En ese caso hay una cúspide en el círculo mayor cada vez que el círculo menor completa una revolución. También en ese caso, cada vez que el círculo menor da una vuelta completa al círculo mayor, se produce una hipocicloide de  $n$  cúspides. Hacer un dibujo de la hipocicloide para  $n = 2$  y para  $n = 6$ .
- \*39. Considere la hipocicloide (problema 36) para el caso en el cual  $a/b$  es racional, pero no entero; esto es, sea

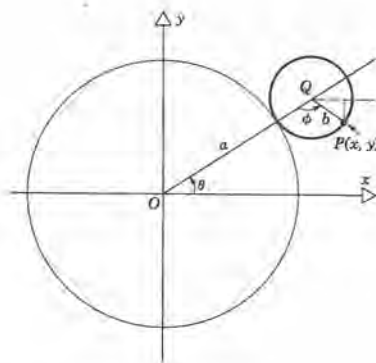


Figura 5.5.7

Construcción de una epicicloide.

$qa = pb$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros. Entonces, el círculo más pequeño da  $p$  vueltas completas cuando completa  $q$  circuitos en la circunferencia del círculo mayor. Hacer un dibujo de la hipocicloide correspondiente a  $p = 5$  y  $q = 2$ .

\*40. Suponer que hay un círculo de radio  $b$  que rueda sin resbalar por el exterior de la circunferencia de un círculo de radio  $a$ , donde  $a > b$ . La curva que describe un punto del círculo menor se llama *epicicloide*. Hallar una representación paramétrica de la epicicloide (véase figura 5.5.7).

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 4, determinar si la relación dada es simétrica con respecto al eje  $x$ , con respecto al eje  $y$  y con respecto al origen.

1.  $y^3 = \frac{x^2 - 1}{x^3}$
2.  $(xy)^3 = x \sin(xy) + x^2$
3.  $\cos x = \sin|y| + \pi$
4.  $y = x \sin x + 1$

En los problemas 5 a 8, determinar todas las asíntotas: verticales, horizontales o inclinadas.

5.  $x^2y^2 + 2 = (x + y)(x - y)$
6.  $f(x) = \frac{3x^2 + x - 10}{x^2 - 4} + 1, \quad x \neq \pm 2$
7.  $4x(4x + 3y) = 4 + 12xy + 9y^2$
8.  $y^2 - 1 = x^2y^2$

En los problemas 9 a 12, trazar la gráfica de la relación dada, indicando, cuando sea posible, los máximos y mínimos locales, los puntos de inflexión, las asíntotas y los ceros.

9.  $y^2 - x^2 = 2y - x - 1$
10.  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$
11.  $f(x) = \frac{\sin x}{x - \pi/2}$
12.  $f(x) = \frac{x - 1}{(x - 3)(x + 1)}$

En los problemas 13 a 24, hacer un dibujo de la sección cónica dada. Incluir y marcar

en la parábola: el foco, el vértice y la directriz

en la elipse: los focos, el centro, los vértices, las longitudes de los semiejes mayor y menor

en la hipérbola: los focos, el centro, los vértices y las asíntotas

13.  $x^2 - 18x - 3y + 78 = 0$
14.  $9x^2 + y^2 - 18x = 0$
15.  $8x^2 - y^2 - 4y - 12 = 0$
16.  $y^2 - 4x - 4y - 6 = 0$
17.  $4x^2 - 36y^2 - 32x + 36y + 91 = 0$
18.  $4x^2 + 81y^2 + 24x - 324y + 36 = 0$
19.  $9x^2 - 8y^2 + 36x + 48y - 72 = 0$
20.  $4y^2 - x + 4y + 2 = 0$
21.  $4x^2 + 5y^2 + 40x - 50y + 205 = 0$
22.  $y^2 + 10x - 2y - 99 = 0$
23.  $x^2 - 36y^2 - 12x + 144y - 72 = 0$
24.  $13x^2 + 12y^2 - 26x - 143 = 0$

En los problemas 25 a 39, hallar una ecuación de la cónica que tenga las propiedades descritas.

25. (Parábola) la directriz es  $y = 2$ ; el foco está en  $(1, -4)$ .
26. (Elipse) la longitud focal es  $\sqrt{2}$ ; la longitud del semi-eje mayor es 3, paralelo al eje  $x$ ; el centro está en  $(2, 0)$ .
27. (Hipérbola) el eje transversal es  $y = 1$ ; la longitud focal es  $\sqrt{29}$ ; una de las asíntotas es  $y = (5/2)x - 4$ .
28. (Elipse) los focos están en  $(3, -2)$  y  $(3, -5)$ ; un vértice está en  $(3, -\frac{1}{2})$ .
29. (Hipérbola) el centro está en  $(-1, 0)$ ; un foco está en  $(5, 0)$ ; la excentricidad es 6.
30. (Parábola) la directriz es  $x = -4$ ; el vértice está en  $(-10, -2)$ .
31. (Hipérbola) el diámetro transversal es 6; los focos están en  $(-3, 8)$  y  $(-3, -2)$ .

32. (Elipse) los vértices están en  $(3, 0)$  y  $(3, -8)$ ; la longitud del semieje menor es 4.
33. (Dos parábolas) el vértice está en  $(1, -3)$ ; el eje de simetría es  $x = 1$ ; la longitud focal es  $3/4$ .
34. (Dos parábolas) el vértice está en  $(5, -2)$ ; la curva pasa por  $(1, -4)$ .
35. (Dos elipses) la longitud del semieje mayor es 3; la del semieje menor es 1; un vértice está en  $(3, -2)$ ; los ejes mayor y menor son paralelos a los ejes coordenados  $x$  y  $y$ , respectivamente.
36. (Dos hipérbolas) las asíntotas son  $y = (3/4)x - 6$  y  $y = (-3/4)x$ ; la longitud focal es 5; los ejes transversal y conjugado son paralelos a los ejes coordenados  $x$ ,  $y$ .
37. El lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto  $(-1, 2)$  y de la recta  $x = -4$ .
38. El lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a  $(-3, 3)$  y a  $(5, 3)$  es 16.
39. El lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los puntos  $(2, 1)$  y  $(6, 1)$  es 1.

En los problemas 40 a 42, hacer un dibujo de la sección cónica dada. Consultar los problemas 25 a 28 de la sección 5.2.

$$40. 2\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}y^2 - 4\sqrt{2}xy + 7x - 9y + 4\sqrt{2} = 0$$

$$41. 13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0$$

$$42. 8x^2 + 8y^2 - 20xy - 18 = 0$$

43. Determinar cotas del valor de la coordenada  $x$ ,  $x_0$ , del centro de una hipérbola no degenerada, que tenga las siguientes propiedades:

el eje transversal es  $y = -2$ ;

el diámetro transversal es 12;

la longitud focal es  $2|x_0|$ .

En los problemas 44 a 51 hallar la ecuación cartesiana a partir de las ecuaciones paramétricas dadas, y hacer un dibujo de la gráfica en el intervalo especificado de  $t$ .

$$44. x = 2t^2, \quad y = 2t^4 + 1; \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$45. x = 3 + 2t, \quad y = 5 - t; \quad -3 \leq t \leq 3$$

$$46. x = \sin t \cos t, \quad y = 4 \sin 2t; \\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$47. x = \frac{6 + \sec t}{3}, \quad y = \tan^2 t - 1; \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$48. x = \cos t + \sin t, \quad y = \sin 2t + 1; \\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$49. x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = t^2; \quad 0 \leq t < \infty$$

$$50. x = 1 + \sqrt{\frac{\sin^2 t}{9} + 4}, \quad y = \frac{\cos t - 4}{2}; \\ 0 \leq t \leq \pi$$

$$51. x = t^3 - 1; \quad y = t^2 + 2; \quad 0 \leq t \leq 2$$

En los problemas 52 a 55, determinar la gráfica de las ecuaciones paramétricas sin hallar la ecuación cartesiana.

$$52. x = \sin t, \quad y = 1 + \frac{t^2}{\pi^2}; \quad -3\pi \leq t \leq 3\pi$$

$$53. x = \frac{1}{\pi - t}, \quad y = \sin t; \quad 0 < t < \pi$$

$$54. x = |t| \sin t, \quad y = t^2; \quad -\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$55. x = t \sin^2 t, \quad y = \cos t; \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi$$

En los problemas 56 a 60, determinar los valores de  $dy/dx$  y de  $d^2y/dx^2$  como funciones de  $t$ . Deducir la ecuación de la tangente a la curva definida por las ecuaciones paramétricas cuando  $t = \frac{1}{2}$ .

$$56. x = \sqrt{1+t}, \quad y = \frac{1}{t}$$

$$57. x = \sin^2(\pi t), \quad y = \cos(\pi t)$$

$$58. x = \frac{1}{1-t}, \quad y = t^{1/2}$$

$$59. x = t^3, \quad y = 1 + t^2$$

$$60. x = t^3, \quad y = \cos^2(\pi t)$$





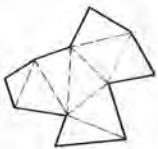
# CÁLCULO

## Capítulo 6

### La integral

El área de una región delimitada por completo por segmentos de rectas se puede calcular con relativa facilidad. Por ejemplo, tenemos una fórmula sencilla para el área de un triángulo, mientras que el área de una región poligonal más complicada se puede calcular subdividiéndola en triángulos, como se ve en la figura 6.1.1. Sin embargo, el problema es mucho más difícil si la región está delimitada, al menos en parte, por una curva en lugar de líneas rectas. Los matemáticos griegos resolvieron algunos problemas de este tipo; pero sólo con el descubrimiento del cálculo se dispuso de un método más poderoso y general.

El método para calcular el área de una región de forma esencialmente arbitraria emplea la segunda operación básica del cálculo, que se llama integración. Si bien cada una de las dos operaciones fundamentales: la derivación (para determinar tangentes) y la integración (para calcular áreas) tiene propiedades y aplicaciones importantes, lo que es de crucial importancia es que están, de hecho, estrechamente relacionadas. Esta relación, percibida primero con claridad por Newton y enunciada por Leibniz, es la base de gran parte de la belleza conceptual y de gran parte del poder computa-



**Figura 6.1.1** Determinación del área de un polígono por reducción a triángulos.

cional del cálculo. La relación entre la derivación y la integración se conoce como el teorema fundamental del cálculo, y se puede expresar de más de una manera. Presentaremos dos enunciados complementarios en los teoremas 6.4.2 y 6.4.3 en este capítulo. Como su nombre lo sugiere, el teorema fundamental del cálculo es piedra fundamental del tema; gran parte de lo que vimos antes sirve de preparación para dicho teorema, y gran parte de lo que sigue es una exploración de sus consecuencias.

## 6.1 NOTACIÓN DE SUMA: ÁREA

Antes de ocuparnos de la integración, que es la segunda operación principal del cálculo, es necesario estudiar algo de notación y de ideas preliminares.

### Notación de suma

Con frecuencia debemos manejar sumas como la siguiente:

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2, \quad (1)$$

o como la siguiente:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \quad (2)$$

o también

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n), \quad (3)$$

en las cuales, en cada caso,  $n$  es un entero positivo. Se emplea normalmente una notación abreviada para facilitar el manejo de esas expresiones. El símbolo  $\Sigma$  representa una suma; así,

$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n. \quad (4)$$

En palabras, se sustituyen los enteros de 1 a  $n$  en lugar de  $i$  en  $u_i$  y las expresiones resultantes se suman. Para el símbolo  $\sum_{i=1}^n u_i$  decimos que “la suma de  $u_i$  desde  $i = 1$  hasta  $i = n$ .” A la cantidad  $u_i$  se le llama **sumando**, y a la letra  $i$  se le llama **índice de la suma**. Obsérvese que en lugar de la ecuación 4 podríamos haber escrito también

$$\sum_{j=1}^n u_j = u_1 + u_2 + \cdots + u_n. \quad (5)$$

Las ecuaciones 4 y 5 muestran que la letra empleada como índice de la suma no importa, ya que no aparece en el resultado final; así, al índice de la suma se le llama a veces “índice mudo.” El conjunto de valores que toma el índice de suma se llama **alcance de la suma**. El alcance es de 1 a  $n$  en la ecuación 4, pero en general puede ir desde un entero cualquiera a otro. Así, para



$$\sum_{j=\alpha}^{\beta} u_j = u_{\alpha} + u_{\alpha+1} + \cdots + u_{\beta}, \quad (6)$$

el alcance de la suma es de  $\alpha$  hasta  $\beta$ . A los números  $\alpha$  y  $\beta$  de la ecuación 6 se les llama **límite inferior** y **límite superior** de la suma, respectivamente.

En términos de la notación  $\Sigma$ , se pueden escribir las ecuaciones 1, 2 y 3 como sigue:

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2, \quad (7)$$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{j=0}^n x^j, \quad (8)$$

y

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (9)$$

respectivamente. Nótese que hemos empleado letras distintas para el índice de la suma en cada caso, y que en la ecuación 8 el límite inferior es 0 y no 1.

Algunas propiedades de las sumas, que nos son familiares, expresadas en la notación  $\Sigma$ , son:

$$\sum_{i=1}^n cu_i = c \sum_{i=1}^n u_i \quad (10)$$

y

$$\sum_{i=1}^n (u_i + v_i) = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n v_i. \quad (11)$$

En palabras, la ecuación 10 dice que se puede sacar un factor común de cada término de una suma, mientras que la ecuación 11 es la propiedad distributiva de la suma. Un resultado menos obvio es

$$\sum_{i=1}^n (u_{i+1} - u_i) = u_{n+1} - u_1. \quad (12)$$

Para comprenderlo, nótese que el lado izquierdo de la ecuación 12 se puede desarrollar como

$$\sum_{i=1}^n (u_{i+1} - u_i) = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \cdots + (u_{n+1} - u_n).$$

El primer término en cada conjunto de paréntesis anula al segundo término del siguiente paréntesis, conduciendo al resultado (12). Debido a esta propiedad de cancelación, a esta suma se le llama *telescópica*. Por último, nótese que

$$\sum_{i=1}^n c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ términos}} = nc. \quad (13)$$

Si el sumando no depende del índice de la suma, simplemente se repite el número adecuado de veces, lo cual es equivalente a una multiplicación.

A veces es útil correr el índice de la suma. Por ejemplo, si deseamos que la suma de la ecuación 8 comience con un índice cuyo valor sea 1 y no 0, podemos hacer que  $k = j + 1$  o que  $j = k - 1$ . Entonces  $j = 0$  corresponde a  $k = 1$ ;  $j = n$  corresponde a  $k = n + 1$ , y por supuesto  $x^j = x^{k-1}$ . Entonces, en lugar de la ecuación 8, podemos escribir

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=1}^{n+1} x^{k-1}. \quad (14)$$

Si lo deseamos, podemos remplazar ahora índice mudo  $k$  por alguna otra letra como  $j$ , y el resultado es

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{j=1}^{n+1} x^{j-1}. \quad (15)$$

Con un poco de práctica se puede pasar directamente de la ecuación 8 a la ecuación 15 en un paso, en lugar de los dos pasos que hemos detallado.

Al manipular sumas con la notación  $\Sigma$ , y en especial cuando se cambia el índice de la suma, se aconseja detenerse de vez en cuando para comprobar lo hecho. Hágase lo anterior escribiendo unos cuantos términos de la suma para asegurarse que se inicia y se detiene en donde se desea y que los términos tienen la forma adecuada.

### EJEMPLO 1

Evaluar

$$\sum_{k=1}^{12} (2^k - 2^{k-1}).$$

Se trata de una suma telescópica de la forma (12). Así

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{12} (2^k - 2^{k-1}) &= (2 - 2^0) + (2^2 - 2) + \cdots + (2^{12} - 2^{11}) \\ &= 2^{12} - 2^0 = 4096 - 1 = 4095. \blacksquare \end{aligned}$$

### EJEMPLO 2

Reformular la suma

$$\sum_{j=1}^n a_j x^{j-1} \quad (16)$$

de tal manera que el sumando tenga el factor  $x^j$  en lugar de  $x^{j-1}$ .

Primero haremos que  $j - 1 = k$  o que  $j = k + 1$ . Entonces

$$\sum_{j=1}^n a_j x^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k.$$

A continuación tan sólo reemplazamos al índice mudo  $k$  por el  $j$ , obteniendo

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} x^j, \quad (17)$$

que es la expresión que queríamos. El lector debe comprobar que el lado derecho de la ecuación 17 es equivalente a la expresión original (16) escribiendo algunos términos de cada una. ■

### EJEMPLO 3

Escribir la expresión

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 15^2 \quad (18)$$

con la notación  $\Sigma$ .

La expresión (18) es la suma de los cuadrados de los primeros ocho enteros positivos *impares*. Para escribirla en términos de  $\Sigma$  necesitamos un método para generar sólo números impares cuando un índice  $j$  recorra un intervalo de enteros. Obsérvese que siempre  $2j - 1$  es un número impar cuando  $j$  es un entero; además,  $2j - 1 = 1, 3, 5, \dots, 15$  cuando  $j = 1, 2, 3, \dots, 8$ . Así,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 15^2 = \sum_{j=1}^8 (2j - 1)^2.$$

En forma más general,

$$\sum_{j=1}^n (2j - 1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2. \quad (19)$$

Igualmente, si sólo deben aparecer números pares en una suma, entonces se debe emplear  $2j$  al escribir dicha suma en notación  $\Sigma$ . Por ejemplo

$$2^3 + 4^3 + \cdots + 18^3 = \sum_{j=1}^9 (2j)^3. \quad \blacksquare$$



## Área

Estamos acostumbrados a pensar y a hablar acerca de áreas desde los primeros años de la escuela, pero resulta que es más difícil de lo que uno espera definir el área de una región bidimensional más o menos arbitraria. Sin embargo, tenemos un concepto intuitivo del área, que consta de las siguientes tres propiedades:

1. *Propiedad del rectángulo.* El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura.
2. *Propiedad de la suma.* El área de una región que consta de rectángulos que no se traslapan (los que pueden tener límites comunes) es la suma de las áreas de los rectángulos separados.
3. *Propiedad de comparación.* Si la región  $R_1$  está contenida en la región  $R_2$ , entonces el área de  $R_1$  no es mayor que el área de  $R_2$ .

Supongamos ahora que se nos da una función  $f$  en un intervalo  $[a, b]$  y supongamos además que  $f$  es continua y no negativa. Creemos, en forma intuitiva, que la región  $R$  limitada por las rectas  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  y la curva  $y = f(x)$  que aparece en la figura 6.1.2a tiene un área. ¿Cómo definir a esta área, y cómo poder calcularla?

La idea básica es aproximar la región uniendo un gran número de rectángulos delgados que no se traslapan (véase figura 6.1.2b). El área de la región que se desea queda entonces aproximada por la suma de las áreas de los rectángulos. Si se emplean más y más rectángulos con bases más y más reducidas, se puede esperar razonablemente que la suma de sus áreas se acercará más y más al área de la región dada.\* El siguiente ejemplo muestra el procedimiento.

### EJEMPLO 4

Calcular el área de la región del plano  $xy$  acotada por el eje  $x$ , la recta  $x = b > 0$ , y la parábola  $y = x^2$  (véase figura 6.1.3).

El primer paso consiste en aproximar esta región mediante cierto número de rectángulos. Esto se puede hacer de varias maneras, pero lo más sencillo es proba-

---

\* Es, en esencia, el método de exhaustión, originado por Eudoxio (408?-355? A. C.). Fue usado por Arquímedes (287?-212 A. C.) con destreza particular. Arquímedes es el más grande matemático de la antigüedad; es opinión generalizada que Arquímedes, Newton y Gauss fueron los tres matemáticos más grandes de todos los tiempos. Arquímedes vivió en Siracusa, en lo que hoy es Sicilia. Su empleo del método de exhaustión para calcular las áreas y los volúmenes de muchas figuras planas y de cuerpos sólidos precedió al desarrollo del cálculo integral muchos siglos después. También fue la primera persona en la historia de Occidente en calcular a  $\pi$  de modo sistemático. En especial, calculó que  $223/71 < \pi < 220/70$ , y que las cotas superior e inferior difieren en  $1/497$ . Desarrolló muchas propiedades de cierta curva espiral llamada espiral de Arquímedes. Entre otras cosas, demostró que esta curva se puede emplear para resolver dos problemas antiguos: la trisección de un ángulo y la cuadratura de un círculo, aunque sin emplear compás y regla únicamente. Sin embargo, es mejor conocido, quizá, por sus trabajos sobre la palanca y por su desarrollo de los principios de la hidrostática. Perdió la vida cuando Siracusa cayó bajo los romanos durante la segunda guerra púnica, después de haber inventado varios ingeniosos artificios de guerra que ayudaron a prolongar el sitio durante más de dos años.



Figura 6.1.2

blemente emplear rectángulos verticales de igual ancho. Así, comenzamos subdividiendo el intervalo  $[0, b]$  en el eje  $x$  en  $n$  partes iguales, y la longitud de cada una es  $h = b/n$ . Identificaremos a los puntos de subdivisión como  $x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h, \dots, x_n = nh = b$ . En la figura 6.1.3 se muestran cuatro subintervalos.

Veamos al primer subintervalo  $[0, h]$ . Construyamos un rectángulo cuya base sea el intervalo  $[0, h]$  y cuya altura sea la distancia hasta la gráfica de  $y = x^2$  para determinado valor de  $x$  en  $[0, h]$ . Por ejemplo, podemos emplear el punto medio  $x = h/2$  de la base para calcular la altura del rectángulo, como se ve en la figura 6.1.4. En el primer subintervalo la altura del rectángulo es  $(h/2)^2$  y su área es  $h(h/2)^2 = h^3/4$ . Si proseguimos del mismo modo en el segundo intervalo  $[h, 2h]$ , nos encontramos con que la altura del rectángulo es  $(3h/2)^2$  y que su área es  $h(3h/2)^2 = 9(h^3/4)$ . Construyendo de este modo un rectángulo sobre cada uno de los  $n$  subintervalos y sumando las áreas de los rectángulos, obtendremos la suma

$$S_n = \frac{h^3}{4} [1 + 9 + 25 + \dots + (2n - 1)^2] = \frac{h^3}{4} \sum_{k=1}^n (2k - 1)^2, \quad (20)$$

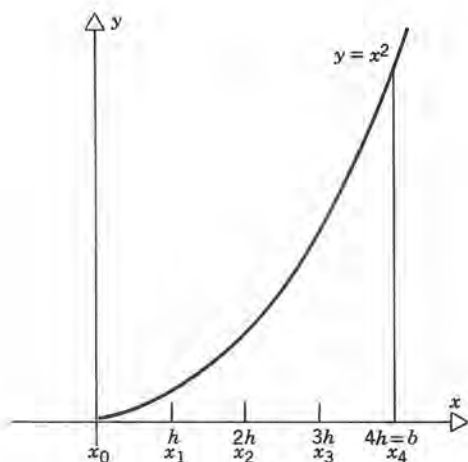


Figura 6.1.3

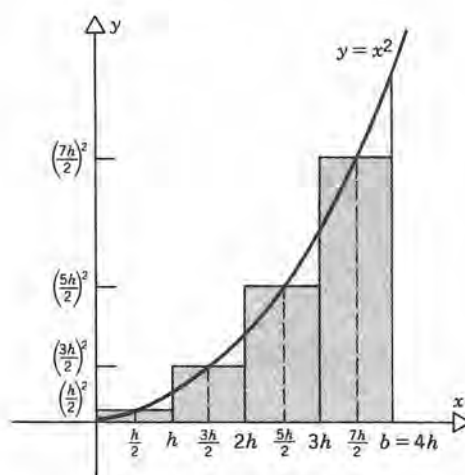


Figura 6.1.4

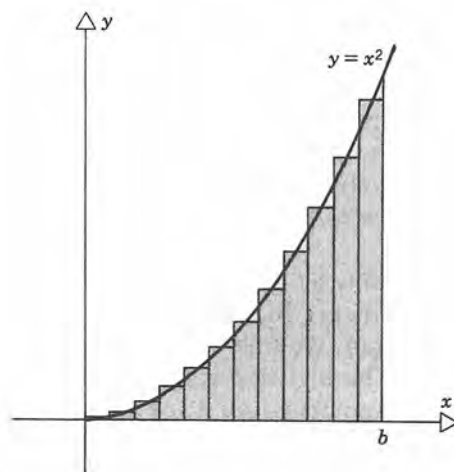


Figura 6.1.5

que es una aproximación al área de la región dada. Recordando que  $h = b/n$ , podemos escribir también que  $S_n$  es

$$S_n = \frac{b^3}{4} \frac{[1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2]}{n^3} = \frac{b^3}{4} \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (2k - 1)^2. \quad (21)$$

Al aumentar el número de rectángulos, esperamos obtener una mejor aproximación al área bajo la parábola. Por ejemplo, compárese la figura 6.1.5 con doce rectángulos, con la figura 6.1.4 que sólo tiene cuatro. Es razonable esperar que  $S_n$ , definida por la ecuación 21, se acerque más y más a determinado número específico cuando  $n$  se hace más y más grande. En otras palabras, buscamos el límite de  $S_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Sin embargo, en la ecuación 21 no queda obvio cuál es ese límite, porque para grandes valores de  $n$  el lado derecho de esa ecuación es la razón de dos números muy grandes. Si calculamos  $S_n$  para diversos valores de  $n$ , obtendremos los resultados que aparecen en la tabla 6.1. Estos resultados sugieren que el límite de  $S_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  podría ser  $b^3/3$ . Para comprobar esta conjetura es necesario encontrar una expresión más útil para

Tabla 6.1 Valores de la suma  $S_n$  de aproximación.

$n$	$S_n/b^3$
1	0.25
2	0.3125
3	0.32407407
4	0.328125
5	0.330
10	0.3325
100	0.333325



la suma  $1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ . Esto se puede hacer mediante el principio de inducción matemática. No describiremos aquí este principio, porque nos apartaría mucho de nuestro tema. Sin embargo, véanse los problemas 23 a 30. Empleando el principio de inducción es posible demostrar que para cada entero positivo  $n$ ,

$$1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1). \quad (22)$$

Entonces, podremos expresar a  $S_n$  como

$$S_n = \frac{b^3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{n(2n-1)(2n+1)}{n^3} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b^3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \\ &= \frac{b^3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Para valores grandes de  $n$  cada uno de los dos factores se aproxima a dos, y por tanto,  $S_n$  se aproxima a  $b^3/3$  cuando  $n$  aumenta sin cota. Por consiguiente, en forma intuitiva, es razonable aceptar que  $b^3/3$  es el área bajo la parábola. Después *definiremos* el área de tal modo que lleguemos a este resultado en esta región. ■

Regresemos ahora al asunto de calcular el área  $A(R)$  de la región  $R$  en la figura 6.1.2a, acotada por las rectas  $x = a$  y  $x = b$ , el eje  $x$  y la curva  $y = f(x)$ . Seguiremos esencialmente el mismo procedimiento que en el ejemplo 4.

El primer paso es subdividir el intervalo  $[a, b]$  en un conjunto de  $n$  subintervalos mediante los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , dispuestos de tal modo que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ . Esto se muestra en la figura 6.1.6a. El espaciamiento entre los puntos puede no ser uniforme. Sea  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  la longitud del  $i$ ésimo intervalo. Para aproximar el área limitada por  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$ ,  $y = 0$  y  $y = f(x)$  que aparece en la figura 6.1.6b seleccionaremos cualquier punto de  $[x_{i-1}, x_i]$ , lo llamaremos  $x_i^*$  un punto estrella, y formaremos el rectángulo cuya altura es  $f(x_i^*)$ . El área  $f(x_i^*) \Delta x_i$  de este rectángulo es

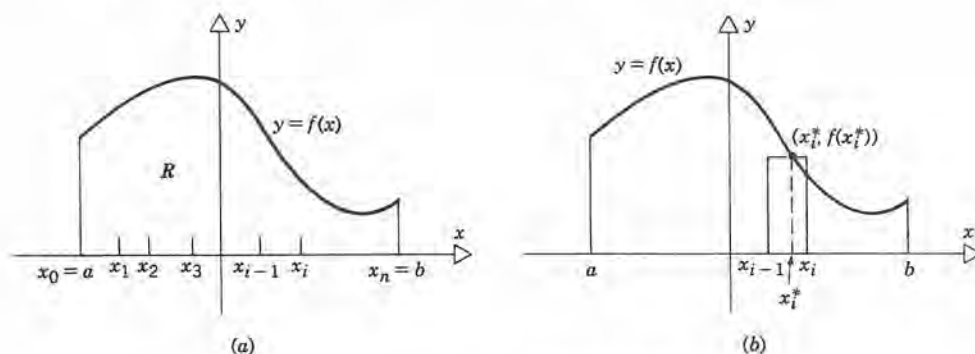


Figura 6.1.6

una aproximación al área acotada por  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$ ,  $y = 0$  y  $y = f(x)$ . Prosiguiendo del mismo modo en los demás subintervalos y sumando después los resultados, llegamos a la conclusión de que

$$\begin{aligned} S &= f(x_1^*) \Delta x_1 + f(x_2^*) \Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*) \Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \end{aligned} \quad (25)$$

es una aproximación al área de  $R$  (véase figura 6.1.7). Las áreas adicionales que han aparecido se somborean con mayor intensidad, mientras que las áreas que faltan se somborean con menos intensidad.

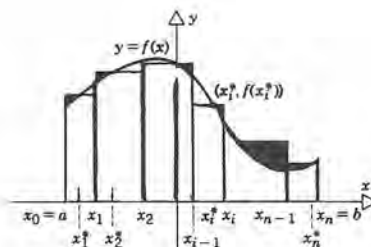


Figura 6.1.7

En general, el valor de  $S$  que obtenemos en la ecuación 25 depende de lo siguiente:

1. Del número de puntos de la partición que escojamos.
2. De cómo estén espaciados los puntos de la partición.
3. De cómo se escoja el punto  $x_i^*$  estrella en cada subintervalo.

La pregunta fundamental que debemos contestar es si los valores de  $S$  correspondientes a diversas particiones y a diferentes puntos estrella tienden a acumularse más y más cerca de determinado número cuando hacemos más y más finas las particiones. Más exactamente, si escogemos más y más puntos de división de tal modo que la longitud del subintervalo más grande se haga más y más pequeña, ¿se acercan más y más los valores de  $S$  a determinado número? Si es así, es natural que este número sea el área  $A(R)$  de la región  $R$ . El proceso de seleccionar más y más puntos de partición de tal modo que la longitud del subintervalo más grande sea cada vez menor es, naturalmente, un proceso de límite. Lo representaremos simbólicamente escribiendo  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x_i \rightarrow 0$ .

Tenemos entonces que

$$A(R) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (26)$$

Aunque tenemos alguna noción previa de lo que es el área, en realidad la ecuación 26 es la definición del área de la región  $R$ .

El proceso de límite de la ecuación 26 es mucho más complicado que el límite de una función en un punto. Por tanto, con frecuencia la ecuación 26 no es una manera eficaz para calcular el área de una región determinada.

Nótese que en el ejemplo 4 no definimos al límite 26 de una manera general. En ese ejemplo, sólo empleamos un tipo de subdivisión: los subintervalos uniformes, y a los puntos estrella los seleccionamos de un modo: el punto medio de cada subintervalo. No vimos si un tipo distinto de subdivisión o una selección distinta de los puntos estrella pudieran conducir a un resultado diferente.

Una posible desventaja más del procedimiento anterior es que, aunque para cada  $n$  el valor de  $S_n$  es una aproximación al área que se desea, puede no ser fácil decir qué tan buena es la aproximación, o aun si es demasiado grande o demasiado pequeña, a menos que se pueda evaluar el límite de la ecuación 26. Esta limitante se puede superar hasta cierto punto empleando rectángulos inscritos y circunscritos, cuyos lados superiores queden siempre, respectivamente, abajo y arriba de la curva dada.

## EJEMPLO 5

Calcular el área de la región delimitada por el eje  $x$ , la recta  $x = b > 0$  y la parábola  $y = x^2$  empleando (a) rectángulos inscritos y (b) rectángulos circunscritos.

Como en el ejemplo 4, subdividiremos al intervalo  $[0, b]$  en  $n$  partes iguales de longitud  $h = b/n$ . En la figura 6.1.8a se muestra la aproximación mediante rectángulos inscritos, que quedan por debajo de la curva. El área del  $j$ ésimo rectángulo (figura 6.1.8b), es el producto de su base  $h$  por su altura  $(j-1)^2 h^2$ . La suma de las áreas de todos los rectángulos inscritos es

$$\begin{aligned} s_n &= h^3 \sum_{j=1}^n (j-1)^2 = h^3 [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2] \\ &= \frac{b^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]. \end{aligned} \quad (27)$$

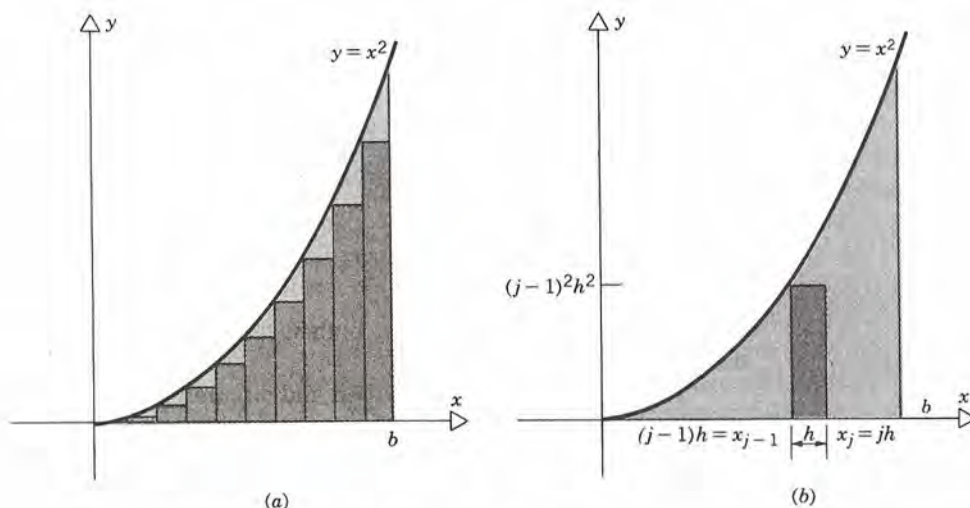
Análogamente, el área del  $j$ ésimo rectángulo circunscrito (véase figura 6.1.9b) es el producto de su base  $h$  por su altura  $j^2 h^2$ , y el área de todos los rectángulos circunscritos de la figura 6.1.9a es

$$\begin{aligned} \sigma_n &= h^3 \sum_{j=1}^n j^2 = h^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2). \end{aligned} \quad (28)$$

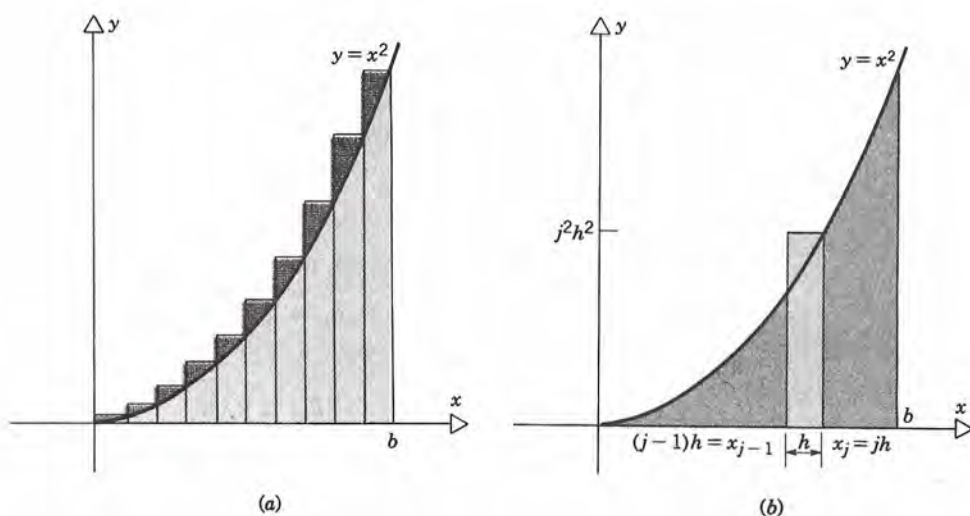
Haciendo uso de la identidad (véase el problema 25)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6, \quad (29)$$





**Figura 6.1.8** Aproximación al área de una región mediante rectángulos inscritos.



**Figura 6.1.9** Aproximación al área de una región mediante rectángulos circunscritos.

podemos expresar a  $s_n$  y a  $\sigma_n$  como

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) = \frac{b^3}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right), \quad (30)$$

$$\sigma_n = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \quad (31)$$

Entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$ , tanto  $s_n$  como  $\sigma_n$  tienden a  $b^3/3$ , lo cual concuerda con el resultado del ejemplo 4.

Sin embargo, el empleo de rectángulos inscritos y circunscritos nos ha permitido avanzar un poco. Para cada valor de  $n$  sabemos que el área  $A$  siempre queda entre  $s_n$  y  $\sigma_n$ . Además, si aproximamos a  $A$  mediante el promedio de  $s_n$  y  $\sigma_n$ ,

$$A \cong A_n = \frac{s_n + \sigma_n}{2}, \quad (32)$$

entonces, hay una cota sencilla (véase figura 6.1.10) del error  $E_n = A - A_n$ , que es

$$|E_n| \leq \frac{\sigma_n - s_n}{2}. \quad (33)$$

En el ejemplo que nos ocupa, tenemos que  $\sigma_n - s_n = b^3/n$  de acuerdo con las ecuaciones 27 y 28 de manera que

$$|E_n| \leq \frac{b^3}{2n}. \quad (34)$$

Por ejemplo, si  $b = 2$  y  $n = 50$ , entonces

$$s_n = 2.5872, \quad \sigma_n = 2.7472, \quad A_n = 2.6672, \quad (35)$$

y

$$|E_n| \leq 0.08. \quad (36)$$

En realidad la aproximación  $A \cong 2.6672$  es mucho mejor de lo que sugiere el límite (36) del error. Como el valor exacto de  $A$  es  $\frac{8}{3}$ , el valor aproximado de 2.6672 tiene un error de sólo 0.0005333. ■

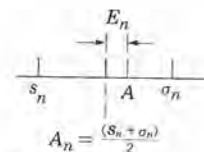


Figura 6.1.10

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 12 evaluar la suma

1.  $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{k}$

2.  $\sum_{r=0}^3 3^r$

3.  $\sum_{k=2}^3 k^k$

4.  $\sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \sin \frac{i\pi}{2}$

5.  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$

6.  $\sum_{i=1}^4 \left( \frac{2}{i} + 2i \right)$

7.  $\sum_{i=1}^{1000} 1$

8.  $\sum_{i=1}^n 1000$

9.  $\sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k(k+1)}$

Sugerencia:  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{?}{k} - \frac{?}{k+1}$

10.  $\sum_{r=0}^3 2r(1+r)$

11.  $\sum_{n=1}^{87} [\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n-2}]$

12.  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{4i^2 - 1}$

## 312 LA INTEGRAL

*Sugerencia:*  $\frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{?}{2i - 1} - \frac{?}{2i + 1}$

13. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{r=0}^{n-1} u_{r+1} = \sum_{j=2}^{n+1} u_{j-1} = \sum_{i=0}^{n-1} u_{n-i}$$

14. Demostrar que

$$\sum_{k=m}^n a_k x^k = \sum_{r=0}^{n-m} a_{m+r} x^{m+r}.$$

En los problemas 15 a 18, expresar la suma en forma desarrollada.

15.  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^k$

16.  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

17.  $\sum_{i=0}^{n-1} f \left[ a + \frac{i(b-a)}{n} \right] \frac{b-a}{n}$

18.  $\sum_{i=1}^n \frac{x^{n-i}}{n+i}$

En los problemas 19 a 22, expresar la suma en notación abreviada  $\Sigma$

19.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{26}$

20.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$

21.  $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots - \frac{x^{29}}{29}$

22.  $x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} - \cdots + \frac{x^{21}}{441}$

El principio de inducción es un medio de establecer la validez de determinadas afirmaciones para todos los valores enteros positivos. Sea  $P(n)$  un enunciado, afirmación o proposición que depende del entero positivo  $n$ . Si

1.  $P(1)$  es cierta.
2.  $P(k+1)$  es cierta si  $P(k)$  es cierta; entonces  $P(n)$  es cierta para todo entero positivo  $n$ .

Los problemas 23 a 30 muestran el empleo del principio de inducción.

23. Se tiene la proposición  $P(n)$ :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

(a) Demostrar que  $P(1)$  es cierta.

(b) Suponiendo que  $P(k)$  es cierta, esto es, que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Sumando  $k+1$  a cada lado de esta ecuación, demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2),$$

y que, en consecuencia,  $P(k+1)$  es cierta. Así se establece, mediante el principio de inducción, que  $P(n)$  es cierta para todo entero positivo.

24. En el ejemplo 4 del texto nos ayudamos con la fórmula

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).$$

Emplear el principio de inducción para comprobar este resultado para todo entero positivo  $n$ .

En los problemas 25 a 28, emplear el principio de inducción para demostrar la afirmación dada, donde  $n$  es un entero positivo arbitrario.

25.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

26.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

27.  $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{1}{3}n(4n^2 + 6n - 1)$

28.  $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad n \geq 2$

En los problemas 29 y 30 calcular la expresión dada para algunos cuantos valores de  $n$  y a continuación proponer una fórmula general, y por último demostrar su hipótesis empleando el principio de inducción.

29.  $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = ?$

30.  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = ?$

En los problemas 31 a 34 evalúe la suma dada. Puede usted emplear los resultados de los problemas 23 a 28.



$$31. \sum_{i=1}^n (3 - 2i) \qquad 32. \sum_{i=1}^n (1 + i)^2$$

$$33. \sum_{k=1}^n 2k(1 + k)^2 \qquad 34. \sum_{r=0}^n (1 - 2r + 6r^2)$$

35. Se tiene la región triangular  $r$  limitada por las rectas  $y = 0$ ,  $x = b > 0$  y  $y = x$ . Subdividir  $[0, b]$  en subintervalos iguales.

(a) Mediante rectángulos inscritos y circunscritos formar sumas aproximadas  $s_n$  y  $\sigma_n$  respectivamente.

(b) Determinar una cota para el error  $E_n$  si el área se aproxima mediante  $A_n = (s_n + \sigma_n)/2$ .

(c) Hallar el área de  $R$ .

36. Seguir las instrucciones del problema 35 para la región acotada por las rectas  $y = 0$ ,  $x = b > 0$  y la curva  $y = x^3$ .

37. Para la región triangular del problema 35 formar una suma de aproximación  $S_n$  seleccionando como punto estrella al punto medio de cada subintervalo. A continuación calcular el área de  $R$ .

38. Seguir las instrucciones del problema 37 para la región que se describe en el problema 36. *Sugerencia:* necesitará una expresión para la suma de los cubos de los primeros  $n$  enteros impares. Emplear el resultado del problema 26 para deducir la expresión requerida.

39. Demostrar que

$$2 \sin \frac{1}{2}x \cos kx = \sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x,$$

con lo cual se establece la identidad

$$2 \sin \frac{1}{2}x \sum_{k=1}^n \cos kx = \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x.$$

En especial, si  $\sin \frac{1}{2}x \neq 0$ , entonces

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x}$$

## 6.2 LA INTEGRAL DE RIEMANN

Hasta ahora, nuestro estudio se ha motivado por el deseo de calcular el área de una región acotada en parte por una curva continua más o menos arbitraria. Finalmente, hemos obtenido la expresión

$$A(R) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \qquad (1)$$

que da el área de esa región. Sucede que hay muchas otras cantidades de interés que se pueden expresar también como límites de sumas semejantes a la ecuación 1; por ejemplo, véanse los problemas 23 a 26. Por tanto, es importante tener en cuenta este proceso matemático independientemente de cualquier aplicación particular. A continuación volveremos a examinar el procedimiento que conduce a la ecuación 1 desde un punto de vista puramente analítico, esto es, sin emplear consideraciones geométricas.

Supongamos que  $f$  es una función acotada en el intervalo  $[a, b]$ . Obsérvese que no pedimos que  $f$  sea continua o no negativa. Una **partición** del intervalo  $[a, b]$  es un conjunto finito de puntos que divide a  $[a, b]$  en subintervalos en los que  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . La longitud del  $i$ ésimo subintervalo es  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Se acostumbra emplear el símbolo  $\Delta$  para representar una partición:

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$$

A continuación necesitamos un número adecuado que mida la *fineza* de una partición. La mejor selección para este objeto es la longitud del subintervalo más grande. A este número se le llama **norma** de la partición, y se representa mediante  $\|\Delta\|$ ; así,

$$\|\Delta\| = \max \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Por ejemplo, si el intervalo  $[-1, 1]$  se subdivide mediante los puntos  $-1 < -\frac{3}{4} < 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$ , entonces  $\Delta = \{-1, -\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$ . El subintervalo más grande es el que va de  $-\frac{3}{4}$  a 0; por tanto  $\|\Delta\| = \frac{3}{4}$ . Obsérvese que hay muchas otras particiones de  $[-1, 1]$  para las cuales  $\|\Delta\| = \frac{3}{4}$ , que son aquellas cuyo subintervalo más grande mide  $\frac{3}{4}$ .

El siguiente paso es seleccionar un punto estrella  $x_i^*$  en cada subintervalo y formar el producto  $f(x_i^*)\Delta x_i$ . A continuación sumaremos todos los subintervalos para obtener

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i. \quad (3)$$

La notación  $S(f, \Delta)$  resalta el hecho de que la suma no sólo depende de la función  $f$ , sino también de la partición  $\Delta$ , y desde luego de la selección de los puntos estrella. A una suma de la forma (3) se le llama **suma de Riemann**.<sup>\*</sup> Nótese que es la misma que la suma de la ecuación 1, aunque ahora no estamos suponiendo que  $f(x)$  sea no negativa, y por tanto no interpretamos los términos individuales como áreas de rectángulos.

Por último, necesitaremos considerar el límite de la suma de Riemann (3) cuando  $n \rightarrow \infty$  y cuando  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , o análogamente, cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . Si, para una función  $f$  dada, la suma de Riemann (3) tiende a un número único  $I$  cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , entonces  $I$  se llama la **integral** (o la integral de Riemann) de  $f$  desde  $a$  hasta  $b$  y se dice que  $f$  es **integrable** (o Riemann integrable) en  $[a, b]$ . Usualmente, se emplea la notación

$$\int_a^b f(x) dx$$

en lugar de  $I$  para denotar a la integral de  $f$  desde  $a$  hasta  $b$ ; al símbolo  $\int$  se le conoce

<sup>\*</sup> Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), estudiante primero, y después profesor de la universidad de Göttingen, fue un matemático notablemente dotado y versátil. Su desarrollo de la integración, basado en lo que hoy se conoce como sumas de Riemann, aparece en un trabajo sobre las series de Fourier escrito en 1854, pero que no se publicó sino hasta 1867.

Su disertación doctoral en 1851 contenía resultados fundamentales de la teoría de las funciones de variable compleja, incluyendo el célebre teorema de la transformación de Riemann.

Poco tiempo después (1854), Riemann presentó un trabajo fundamental sobre geometría no euclidiana en el que exploraba las propiedades de los espacios curvos (o Riemannianos), que Einstein empleó después en la teoría de la relatividad general.

En 1859 formuló Riemann un enunciado acerca de los ceros de determinada función, importante en la teoría de los números. Desde entonces la hipótesis de Riemann se ha visto respaldada por abundante evidencia numérica, pero permanece sin comprobación a pesar de los mejores esfuerzos de generaciones de matemáticos. Es uno de los más famosos problemas matemáticos no resueltos. Desafortunadamente, Riemann no era físicamente robusto y murió de tuberculosis a los cuarenta años.



como el **signo de la integral**\*\*, a  $f$  se le llama **integrand**, y  $a$  y  $b$  son los **límites inferior y superior** de integración, respectivamente. La  $(x)$  y la  $dx$  no desempeñan ningún papel esencial en la notación en esta etapa, y a veces se omiten; posteriormente, serán convenientes en determinados casos. De cualquier modo, la  $x$  es una variable muda de integración semejante al índice de la suma, y se puede reemplazar con cualquier otra letra si fuera conveniente. Resumiendo las afirmaciones anteriores, tenemos la siguiente definición de la integral de Riemann:

**DEFINICIÓN 6.2.1** Si  $f$  es una función acotada en el intervalo  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (4)$$

considerando que este límite existe, es la integral de Riemann de  $f$  en  $[a, b]$ . Por otro lado, si el límite no existe, entonces  $f$  no es integrable en  $[a, b]$ .

En términos de la definición de límite, la ecuación 4 dice que  $\int_a^b f(x) dx$  es el número  $I$  con la siguiente propiedad: para cada  $\epsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que para todas las particiones tales que  $\|\Delta\| < \delta$  y para todas las selecciones de los puntos estrella  $x_i^*$  de cada una de tales particiones, se cumple que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i - I \right| < \epsilon. \quad (5)$$

Hay tres preguntas principales que deseamos considerar, acerca de las integrales.

1. ¿Son integrables todas las funciones? Si no es así, ¿podemos especificar una clase grande y útil de funciones que sean integrables?
2. ¿Hay algunas propiedades útiles de las integrales?
3. Dada una función  $f$  particular, ¿hay una manera eficaz de evaluar  $\int_a^b f(x) dx$ ?

Responderemos parcialmente a la primera pregunta en esta sección, y en la sección 6.3 trataremos la segunda. Con respecto a la evaluación de las integrales, una posibilidad es emplear la definición 6.2.1. Sin embargo, el proceso de límite que implica esta definición es complicado. Para una función  $f$  dada, un intervalo  $[a, b]$  dado y un valor dado de  $\|\Delta\|$ , hay un número infinito de particiones de  $[a, b]$  y para cada partición de éstas hay una infinidad de maneras para seleccionar los puntos  $x_i^*$  estrella. En consecuencia, la definición raramente resulta ser un camino eficiente para calcular el valor de una integral. Por fortuna, hay otros medios. A partir de la sección 6.4 presentaremos un poderoso método analítico para evaluar muchas integrales. También se pueden calcular aproximaciones numéricas, como en el ejemplo 5 de la sección 6.1, en el ejemplo 3 a continuación, o mediante el empleo de algoritmos como los de la sección 6.6.

Sin embargo, en algunos casos especiales se puede emplear la definición para evaluar la integral de una función.

\*\* El signo de la integral es otra de las notaciones introducidas por Leibniz. Fue usado por él por primera vez en 1675.



**EJEMPLO 1**

Supongamos que  $f$  es la función constante  $f(x) = c$  en  $[a, b]$ . Entonces, para cualquier partición de  $[a, b]$  y cualquier selección de puntos estrella, tenemos que  $f(x_i^*) = c$ , de esta manera

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b - a).$$

Para esta función, toda suma de Riemann es igual a  $c(b - a)$ ; por tanto, la función constante es integrable y

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

No debe sorprendernos que si  $c > 0$ , este cálculo dé el área de un rectángulo de altura  $c$  y base  $b - a$ . ■

**EJEMPLO 2**

Suponer que la función  $f$  se define en  $[a, b]$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional;} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Tomemos cualquier partición de  $[a, b]$ . En cada subintervalo siempre hay números racionales e irracionales. Si formamos una suma de Riemann seleccionando cada punto estrella como un número racional, obtendremos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \Delta x_i = b - a.$$

Por otro lado, si formamos una suma de Riemann seleccionando a cada punto estrella de modo que sea un número irracional, obtendremos

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \Delta x_i = 0.$$

Así, para toda partición de  $[a, b]$ , independientemente de qué tan pequeño sea  $\|\Delta\|$ , siempre podremos encontrar sumas de Riemann cuyos valores sean  $b - a$  y 0. Las sumas de Riemann no tienden a determinado número y por tanto esta función no es integrable. ■

El ejemplo 2 da la respuesta a la primera parte de la pregunta 1: no todas las funciones son integrables. Es difícil decir exactamente qué funciones *son* integrables, excepto repitiendo la definición 6.2.1. Sin embargo, en los dos teoremas siguientes se mencionan condiciones suficientes de aplicación amplia para la integrabilidad. Omiti-

remos las demostraciones de esos teoremas, aunque el problema 27 indica parte de la demostración del teorema 6.2.2.

### Teorema 6.2.1

Supongamos que  $f$  está acotada en el intervalo  $[a, b]$  y que también es continua en este intervalo, excepto a lo más en un número finito de puntos. Entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

### Teorema 6.2.2

Supongamos que  $f$  está acotada en el intervalo  $[a, b]$  y que  $[a, b]$  se puede subdividir en un número finito de subintervalos siendo  $f$  en cada uno de ellos no decreciente o no creciente. Entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

Se infiere de los teoremas 6.2.1 o 6.2.2 que un polinomio de cualquier grado es integrable en cualquier intervalo finito; una función racional es integrable en cualquier intervalo finito que no contenga un cero del denominador; las funciones seno y coseno son integrables en cualquier intervalo finito y las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante son integrables en cualquier intervalo finito que no contenga una discontinuidad infinita de la función. También, funciones tales como  $f(x) = [[x]]$ , que están acotadas y son continuas excepto en un número finito de puntos de cualquier intervalo  $[a, b]$ , son integrables.

Hacemos notar que los teoremas 6.2.1 y 6.2.2 dan sólo condiciones de suficiencia. Hay funciones que son integrables en un intervalo  $[a, b]$  que no satisfacen las hipótesis de ninguno de esos teoremas.

Nótese también que las definiciones y teoremas de esta sección se aplican a funciones acotadas en el intervalo  $[a, b]$ . Después, en el capítulo 11, examinaremos los temas de integrabilidad de funciones no acotadas e integrabilidad de funciones acotadas en intervalos no acotados. Sin embargo, por el momento sólo limitaremos nuestro estudio a la integración de funciones acotadas en intervalos acotados.

Nuestro desarrollo de la integral de Riemann se originó en el problema de calcular el área de determinadas regiones. Sin embargo, la definición de integral que hemos dado está libre del lenguaje geométrico y no depende de conceptos geométricos. Por tanto, podemos reformular la definición del área, contenida en la ecuación 26 de la sección 6.1.

**DEFINICIÓN 6.2.2** Si  $f$  es continua y no negativa en  $[a, b]$ , entonces el área  $A(R)$  de la región  $R$  acotada por las rectas  $x = a$  y  $x = b$ , el eje  $x$  y la gráfica de  $y = f(x)$  es

$$A(R) = \int_a^b f(x) dx. \quad (6)$$

### Estimaciones de Integrales; sumas superior e inferior

Con frecuencia, se desea estimar el valor de una integral, en especial cuando es difícil o imposible calcular su valor exacto. Se puede obtener un resultado burdo, pero a veces útil, si conocemos las cotas superior e inferior del integrando, esto es, si sabemos que para toda  $x$  en  $[a, b]$ ,

$$m \leq f(x) \leq M. \quad (7)$$

Entonces, para cualquier partición  $\Delta$  y cualquier selección de los puntos estrella, la suma correspondiente de Riemann,  $S(f, \Delta)$ , satisface a

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b - a).$$

Combinando este resultado con la cota inferior semejante, tenemos que

$$m(b - a) \leq S(f, \Delta) \leq M(b - a). \quad (8)$$

Si suponemos que  $f$  es integrable y tomamos el límite cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , obtendremos

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a). \quad (9)$$

También se pueden encontrar cotas mucho más exactas, aunque a un costo de cálculos más extensos. Recuérdese que en el ejemplo 5 de la sección 6.1 empleamos rectángulos inscritos y circunscritos para obtener cotas inferiores y superiores, respectivamente, del área bajo una parábola. Se puede emplear el mismo método para estimar los valores de las integrales en general.

Sea la función integrable  $f$  dada en  $[a, b]$ ; por comodidad supondremos que  $f$  es continua. Sea  $\Delta$  una partición arbitraria de  $[a, b]$ . Representaremos mediante  $M_i$  y  $m_i$ , respectivamente, el valor máximo y mínimo de  $f$  en el  $i$ ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Entonces, la suma de Riemann máxima posible para esta partición se obtiene seleccionando a  $x_i^*$  de tal modo que  $f(x_i^*) = M_i$  en cada subintervalo. A esta suma se le llama **suma superior** de la partición  $\Delta$  y está dada por

$$\sigma(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (10)$$

Análogamente, la **suma inferior** para  $\Delta$  es

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i. \quad (11)$$

Está claro que cualquier otra suma de Riemann

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i \quad (12)$$



para esta partición debe quedar entre las sumas superior e inferior:

$$s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta) \leq \sigma(f, \Delta). \quad (13)$$

Además, es posible demostrar que

$$s(f, \Delta) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sigma(f, \Delta). \quad (14)$$

La desigualdad 14 es semejante a la relación correspondiente para el área, que aparece en la sección 6.1 y brinda un medio para estimar el valor de la integral. En general, lo más sencillo es emplear una partición uniforme y tomar los puntos de la partición más y más cercanos entre sí hasta que la diferencia  $\sigma(f, \Delta) - s(f, \Delta)$  sea tan pequeña como se desee.

### EJEMPLO 3

Emplear las sumas superior e inferior para estimar el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx. \quad (15)$$

El integrando es continuo y creciente en el intervalo  $[0, \pi/2]$ . Por tanto, de acuerdo con los teoremas 6.2.1 o 6.2.2, se sabe que existe la integral (15). Para estimar su valor podemos dividir el intervalo  $[0, \pi/2]$  en  $n$  subintervalos iguales, siendo la longitud de cada uno de ellos  $h = \pi/2n$ . Los puntos de la partición son  $x_i = ih = i\pi/2n$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . En el  $i$ ésimo subintervalo  $\sin x$  alcanza sus valores máximo y mínimo en los extremos derecho e izquierdo, respectivamente; esto es,  $M_i = \sin x_i$  y  $m_i = \sin x_{i-1}$ . Así, la suma superior para esta partición es

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \sin x_i \Delta x_i = h \sum_{i=1}^n \sin(ih). \quad (16)$$

Similarmente, la suma inferior es

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \sin x_{i-1} \Delta x_i = h \sum_{i=1}^n \sin[(i-1)h] \\ &= h \sum_{i=1}^{n-1} \sin(ih). \end{aligned} \quad (17)$$

La diferencia de las sumas es

$$\sigma_n - s_n = h \sin nh = \frac{\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n}, \quad (18)$$

que, de acuerdo con la ecuación 14, da una cota superior para el error cometido al emplear ya sea  $\sigma_n$  o  $s_n$  para aproximar la integral dada.

Si evaluamos las sumas  $\sigma_n$  y  $s_n$  para varios valores de  $n$ , obtendremos la información de la segunda y tercera columnas de la tabla 6.2. De acuerdo con esos datos, parece que las sumas superior e inferior y, en consecuencia, todas las sumas de Riemann, tienden a un número cercano a 1. De hecho, es fácil demostrar mediante el método que se presentará en la sección 6.4, que el valor de la integral (15) es exactamente 1. De acuerdo con los valores tabulados, vemos que  $s_n$  y  $\sigma_n$  tienen un error de menos de uno por ciento cuando  $n = 80$ , lo cual es consistente con las desigualdades (14). Sin embargo, si usamos el valor promedio de  $s_n$  y  $\sigma_n$  para aproximar la integral (cuarta columna de la tabla 6.2), obtendremos una exactitud mucho mayor: con sólo diez subintervalos el resultado es exacto dentro de un cuarto del uno por ciento.

Otro modo de proceder es calcular la suma de Riemann que corresponde a determinada selección de los puntos estrella. Por ejemplo, si seleccionamos a cada  $x_i^*$  de tal modo que sea el punto medio de cada subintervalo, obtendremos los resultados de la tabla 6.3. Estas aproximaciones son extremadamente buenas; por ejemplo, para  $n = 10$ , el error es apenas un poco mayor que un décimo del uno por ciento.

Si bien los cálculos que condujeron a las tablas 6.2 y 6.3 se llevaron a cabo en una microcomputadora, también es posible hacerlos con una calculadora de bolsillo al menos hasta  $n = 10$ . ■

**Tabla 6.2** Sumas superior e inferior para  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ .

$n$	Suma inferior $s_n$	Suma superior $\sigma_n$	Promedio $(s_n + \sigma_n)/2$
10	0.9194032	1.076483	0.997943
20	0.9602161	1.038756	0.999486
40	0.9802366	1.019506	0.999871
80	0.9901504	1.009785	0.999968

**Tabla 6.3** Sumas de Riemann para  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ .

$n$	Suma de Riemann $S_n$
10	1.001029
20	1.000257
40	1.000064
80	1.000016

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 4 determinar la norma de la partición del intervalo dado.

- $[0, 2]$ ,  $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{7}{8} < 1 < \frac{3}{2} < 2$
- $[1, 4]$ ,  $1 < 1.1 < 1.5 < 2 < 2.01 < 2.02 < 2.1 < 2.5 < 3 < 4$
- $[a, b]$ ,  $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$ ,

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$4. [a, b], \quad x_i = a + \frac{i}{2^n}(b - a),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, 2^n$$

En los problemas 5 a 8 obtener un valor aproximado de la integral dada empleando la partición dada y para los puntos estrella  $x_i^* = x_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta x_i$ .

$$\textcircled{5} \quad \int_1^2 \frac{x}{1+x} dx, \quad \Delta = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\}$$

$$\textcircled{6} \quad \int_0^1 \cos \frac{x}{2} dx, \quad \Delta = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$$

$$\textcircled{7} \quad \int_{-1/2}^1 |x| dx, \quad \Delta = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$$

$$\textcircled{8} \quad \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1 + x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$$

En los problemas 9 a 14, calcular las sumas superior e inferior,  $\sigma(f, \Delta)$  y  $s(f, \Delta)$ , respectivamente, para el integrando y la partición dados.

$$\textcircled{9} \quad \int_1^2 \frac{1}{x} dx, \quad \Delta = \{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$$

$$\textcircled{10} \quad \int_0^{\pi/2} \sin x dx, \quad \Delta = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\textcircled{11} \quad \int_{-2}^0 \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \Delta = \{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\}$$

$$\textcircled{12} \quad \int_2^4 \sqrt{1+x} dx, \quad \Delta = \{2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

$$\textcircled{13} \quad \int_0^2 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Delta = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$$

$$\textcircled{14} \quad \int_1^3 (4-x^2) dx, \quad \Delta = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$$

En los problemas 15 a 20, llevar a cabo el procedimiento siguiente: introducir una partición que divida al intervalo de integración en  $n$  subintervalos iguales.

(a) Evaluar la suma superior  $\sigma_n$  y la inferior  $s_n$  para  $n = 10$ .

(b) Repetir la parte (a) para  $n = 20, 40$  y  $80$ .

(c) Determinar  $(\sigma_n + s_n)/2$  para  $n = 10, 20, 40$  y  $80$ .

(d) Seleccionando los puntos estrella de modo que sean los puntos medios de cada subintervalo, evaluar la suma correspondiente de Riemann  $S_n$  para  $n = 10, 20, 40$  y  $80$ . Comparar cada suma de

Riemann con el valor correspondiente que se encontró en la parte (c).

$$\textcircled{15} \quad \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$\textcircled{16} \quad \int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\textcircled{17} \quad \int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx$$

$$\textcircled{18} \quad \int_0^{\pi/3} \tan x dx$$

$$\textcircled{19} \quad \int_1^3 (4-x^2) dx$$

$$\textcircled{20} \quad \int_{0.5}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

En los problemas 21 y 22 el integrando no es creciente ni decreciente en el intervalo de integración. Ello dificulta un poco encontrar las sumas superior e inferior. Con una partición uniforme con  $n$  subintervalos iguales y seleccionando los puntos estrella de tal modo que sean el punto medio de cada subintervalo, determinar la suma de Riemann correspondiente  $s_n$  para las siguientes integrales cuando  $n = 10, 20, 40$  y  $80$ .

$$\textcircled{21} \quad \int_0^{\pi} x \cos x dx$$

$$\textcircled{22} \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \sin 2x dx$$

**23. Distancia recorrida.** Una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad constante  $v > 0$  recorre una distancia  $vT$  en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Supongamos ahora que la velocidad de la partícula es función del tiempo,  $v = v(t)$ , y que  $v(t) \geq 0$ , de modo que la partícula siempre se mueve en la misma dirección. Formar una partición  $\Delta$  de  $[0, T]$  y demostrar que la distancia  $d$  recorrida en  $[0, T]$  está dada en forma aproximada por

$$d \cong S(v, \Delta) = \sum_{i=1}^n v(t_i^*) \Delta t_i.$$

Si  $v$  es integrable, entonces

$$d = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(v, \Delta) = \int_0^T v(t) dt.$$

**24. Volumen.** El volumen de una varilla de longitud  $l$  y de área de sección transversal uniforme  $A$  es  $Al$ . Supongamos ahora que el área de la sección transversal varía con la posición, de tal modo que  $A = A(x)$  para  $0 \leq x \leq l$ . Definir una partición  $\Delta$  de  $[0, l]$  y demostrar que

$$V \cong S(A, \Delta) = \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x_i.$$



Si  $A$  es integrable, entonces

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(A, \Delta) = \int_0^t A(x) dx.$$

25. **Trabajo.** El trabajo efectuado por una fuerza constante para mover una partícula una distancia  $s$  a lo largo de una recta es  $Fs$ , siendo  $F$  la componente de la fuerza en la dirección del movimiento. Supongamos ahora que la fuerza varía con la posición de la recta, de modo que  $F = F(x)$ , donde  $0 \leq x \leq s$ . Formar una partición  $\Delta$  de  $[0, s]$  y demostrar que el trabajo efectuado  $W$  por la fuerza al mover una partícula de  $x = 0$  a  $x = s$  está dado en forma aproximada por

$$W \cong S(F, \Delta) = \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x_i.$$

Si  $F$  es integrable, entonces

$$W = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(F, \Delta) = \int_0^s F(x) dx.$$

26. **Masa.** La masa de un alambre de longitud  $l$  y densidad (masa por unidad de longitud)  $\rho$  constante es  $\rho l$ . Supongamos ahora que la densidad varía con la posición, de modo que  $\rho = \rho(x)$  para  $0 \leq x \leq l$ . Formar una partición  $\Delta$  de  $[0, l]$  y demostrar que la masa  $m$  del alambre está dada, en forma aproximada, por

$$m \cong S(\rho, \Delta) = \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*) \Delta x_i.$$

Si  $\rho$  es integrable, entonces

$$m = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\rho, \Delta) = \int_0^l \rho(x) dx.$$

- \*27. En este problema demostraremos un resultado relacionado con el teorema 6.2.2. Supongamos que  $f$  está acotada y es no decreciente en  $[a, b]$  y que  $\Delta$  es una partición arbitraria de  $[a, b]$ . Sean  $\sigma(f, \Delta)$  y  $s(f, \Delta)$  las sumas superior e inferior, respectivamente.

(a) Demostrar que

$$\sigma(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i,$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i.$$

(b) Recuérdese que  $\|\Delta\|$  es la longitud del subintervalo más grande de la partición; demostrar que

$$\begin{aligned} \sigma(f, \Delta) - s(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i \\ &\leq \|\Delta\| \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

(c) Emplear el resultado de la parte (b) para demostrar que

$$\sigma(f, \Delta) - s(f, \Delta) \leq \|\Delta\| [f(b) - f(a)].$$

Por tanto, si  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , entonces  $\sigma(f, \Delta) - s(f, \Delta) \rightarrow 0$  también. ¿Qué teorema justifica esta conclusión?

(d) Modificar el argumento para llegar a la misma conclusión si  $f$  es no creciente en  $[a, b]$ .

## 6.3 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

Para motivar el concepto de la integración en las secciones 6.1 y 6.2, únicamente nos apoyamos mucho en una idea intuitiva del área bajo una curva. Sin embargo, como hemos hecho notar, la definición 6.2.1 de la integral de Riemann es sólo analítica y no depende de las propiedades o de la terminología geométricas. Esto hizo posible, en la definición 6.2.2, especificar el área en términos de una integral. La validez de esta definición descansa en el hecho de que se puede comprobar (y así lo haremos después en muchos casos), que la definición 6.2.2, cuando se aplica a regiones elementales acotadas por líneas rectas y círculos da los mismos resultados de la geometría plana.

Por el momento, notaremos que la interpretación de determinadas integrales en términos de áreas de figuras simples nos proporciona un modo de evaluar esas integrales.

### EJEMPLO 1

Si  $c > 0$ , entonces  $\int_a^b c \, dx$  es el área del rectángulo de base  $b - a$  y altura  $c$  que se ve en la figura 6.3.1. Es decir,

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a). \quad (1)$$

Desde luego, esto concuerda con el resultado del ejemplo 1 de la sección 6.2. ■

### EJEMPLO 2

La integral  $\int_a^b x \, dx$  es el área del trapecioide que aparece en la figura 6.3.2. La altura promedio del trapecioide es  $(b + a)/2$ , y su base es  $b - a$ , de modo que

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b + a)(b - a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \quad (2)$$

### EJEMPLO 3

Para  $a > 0$ , la integral  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$  se puede identificar con el área de la cuarta parte del círculo de radio  $a$  de la figura 6.3.3. Entonces

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi a^2}{4}, \quad a > 0. \quad (3)$$

Posteriormente, en el problema 31 de la sección 6.5, evaluaremos a esta integral siguiendo métodos analíticos y obtendremos el mismo resultado. Por otro lado, si evaluamos la integral mediante el procedimiento numérico que se indica en el problema 23, podemos obtener buenas aproximaciones numéricas de  $\pi$ . ■

A continuación procedemos a desarrollar algunas propiedades de la integral. Aunque esas propiedades son válidas para integrandos más generales, ayudará a representarlas si se considera al integrando como continuo y no negativo, así como interpretar a las integrales como áreas.

Primero, si  $f$  es integrable en el intervalo  $[a, b]$ , entonces se puede demostrar que  $f$  también es integrable en cualquier subintervalo de  $[a, b]$ . Además, hasta ahora hemos supuesto siempre que  $b > a$ . También necesitaremos considerar casos en los cuales  $b = a$  y  $b < a$ .

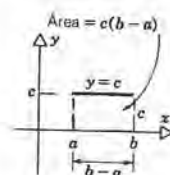


Figura 6.3.1

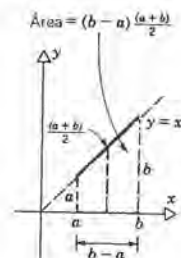


Figura 6.3.2

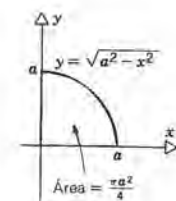


Figura 6.3.3

**DEFINICIÓN 6.3.1** Si  $f(a)$  existe, entonces

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (4)$$

En términos geométricos, la ecuación 4 dice que no hay área bajo un punto. Si  $b > a$  y existe  $\int_a^b f(x) dx$ , entonces

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx. \quad (5)$$

En palabras, si se invierten los límites de integración, se cambia el signo de la integral.

El primer teorema dice que el valor de una integral no se afecta por los valores del integrando en cualquier conjunto finito de puntos.

### Teorema 6.3.1

Si  $f$  y  $g$  son funciones acotadas, integrables en  $[a, b]$  y si  $f(x) = g(x)$  excepto en un conjunto finito de puntos de  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx. \quad (6)$$

**Demostración.** Supongamos primero que sólo hay un punto  $c$  en  $[a, b]$  para el cual  $f(c) \neq g(c)$ . Entonces, para una partición particular y una selección de puntos estrella determinada, las sumas de Riemann para  $f$  y  $g$ , que son  $S(f, \Delta)$  y  $S(g, \Delta)$ , respectivamente, sólo pueden diferir en aquellos términos en los que interviene  $c$ . Sólo puede haber un término de éstos, a menos que  $c$  sea un punto de la partición, en cuyo caso habrá dos términos. Así,

$$|S(f, \Delta) - S(g, \Delta)| \leq 2\|\Delta\| |f(c) - g(c)|. \quad (7)$$

El lado derecho de la ecuación 7 tiende a cero cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . En consecuencia,  $S(f, \Delta)$  y  $S(g, \Delta)$  deben tender al mismo número, lo cual significa que la ecuación 6 es válida. Se puede extender el argumento directamente para abarcar un número finito de puntos en los que  $f(x)$  y  $g(x)$  sean diferentes.  $\square$

Los dos teoremas siguientes serán muy útiles para evaluar integrales, como se verá después.



**Teorema 6.3.2****(Linealidad)**

Si las funciones acotadas  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$ , entonces también es integrable la función  $\alpha f + \beta g$  para cualesquiera constantes  $\alpha$  y  $\beta$  reales; además,

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (8)$$

Mediante la aplicación repetida del teorema 6.3.2 se puede extender la conclusión (8) a cualquier número finito de términos. El resultado del teorema 6.3.2 es semejante a la correspondiente propiedad de los límites en un punto, expresada en la ecuación 5 de la sección 2.3. Como la integración implica un proceso de límite, pudiera uno pensar que la demostración del teorema 6.3.2 se limita a ese resultado anterior. Sin embargo, no es éste el caso porque el proceso de límite es en la integración, en el cual intervienen distintas particiones y diferentes selecciones de puntos estrella para un solo valor de  $\|\Delta\|$ , más complicado que el proceso de límite para las funciones. La demostración del teorema 6.3.2 es bastante extensa y por tanto se omite. El ejemplo siguiente es una aplicación típica de ese teorema.

**EJEMPLO 4**

Evaluar

$$\int_0^3 (2x + \sqrt{9 - x^2}) dx.$$

Como la función  $f(x) = 2x + \sqrt{9 - x^2}$  es continua en  $[0, 3]$ , la integral existe. De acuerdo con el teorema 6.3.2, tenemos que

$$\int_0^3 (2x + \sqrt{9 - x^2}) dx = 2 \int_0^3 x dx + \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx. \quad (9)$$

A continuación se pueden evaluar las integrales individuales remitiéndonos a los resultados de los ejemplos 2 y 3. De acuerdo con la ecuación 2, para  $a = 0$  y  $b = 3$ , tenemos que

$$\int_0^3 x dx = \frac{9}{2}. \quad (10)$$

A continuación, según la ecuación 3,

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9\pi}{4}. \quad (11)$$

Y finalmente, sustituyendo las ecuaciones 10 y 11 en la ecuación 9, obtenemos

$$\int_0^3 (2x + \sqrt{9 - x^2}) dx = 2 \left( \frac{9}{2} \right) + \frac{9\pi}{4} = 9 \left( 1 + \frac{\pi}{4} \right) \cong 16.07. \quad \blacksquare \quad (12)$$

### Teorema 6.3.3

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales cualesquiera, y si existen dos de las integrales siguientes, entonces

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (13)$$

Si  $a < c < b$  y si  $f$  es continua y no negativa, entonces el teorema 6.3.3 dice que el área bajo la curva  $y = f(x)$  desde  $x = a$  hasta  $x = c$  más el área desde  $x = c$  hasta  $x = b$ , es igual al área desde  $x = a$  hasta  $x = b$ . Esto se muestra en la figura 6.3.4. Sin embargo, el teorema 6.3.3 es válido independientemente del orden de los números  $a$ ,  $b$  y  $c$ ; en especial,  $c$  no necesita estar entre  $a$  y  $b$ . También,  $f$  no necesita ser continua ni no negativa. Así, el teorema 6.3.3 es una generalización de la propiedad aditiva del área que se citó en la sección 6.1. Si bien la figura 6.3.4 hace plausible al teorema 6.3.3, se omite una prueba detallada.

Nótese que el enunciado del teorema 6.3.3 es consistente con la definición 6.3.1. Por ejemplo, si  $a = b = c$ , entonces la ecuación 13 se reduce a

$$2 \int_a^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx,$$

y necesariamente  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Además, si  $b = a$ , entonces la ecuación 13 se reduce a

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0,$$

de modo que

$$\int_a^c f(x) dx = - \int_c^a f(x) dx.$$

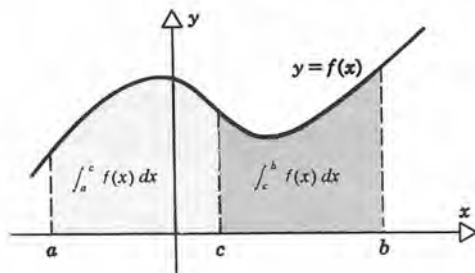


Figura 6.3.4

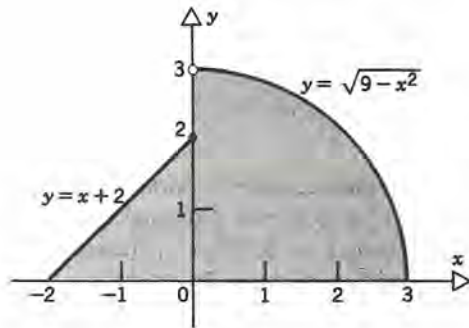


Figura 6.3.5

Los ejemplos que siguen muestran cómo se puede emplear el teorema 6.3.3.

### EJEMPLO 5

Evaluar la integral, desde  $-2$  hasta  $3$ , de

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq 0; \\ \sqrt{9 - x^2}, & 0 < x \leq 3. \end{cases} \quad (14)$$

Como la función  $f$  está acotada en  $[-2, 3]$  y es continua excepto en un punto, la integral existe. En la figura 6.3.5 se muestra la gráfica de  $f$ .

De acuerdo con el teorema 6.3.3,

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx. \quad (15)$$

De la figura 6.3.5, la primera integral es el área del triángulo cuyos vértices son  $(-2, 0)$ ,  $(0, 0)$  y  $(0, 2)$ ; entonces

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 (x + 2) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2. \quad (16)$$

De acuerdo con la ecuación 11, la segunda integral es

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9\pi}{4}. \quad (17)$$

Al evaluar la integral (17) se permite escribir el integrando como  $\sqrt{9 - x^2}$ , aunque  $f(0) = 2 \neq \sqrt{9 - 0}$ ; recuérdese que de acuerdo con el teorema 6.3.1 el valor de  $f$  en un punto no afecta el valor de la integral. Por tanto, sustituyendo las ecuaciones 16 y 17 en la ecuación 15,



$$\int_{-2}^3 f(x) dx = 2 + \frac{9}{4}\pi \approx 9.07. \blacksquare \quad (18)$$

### EJEMPLO 6

Calcular el valor de

$$\int_2^5 x^2 dx. \quad (19)$$

En los ejemplos 4 y 5 de la sección 6.1 encontramos que el área de la región entre el eje  $x$ , la recta  $x = b$  y la parábola  $y = x^2$  es  $b^3/3$ . Expresando este resultado en forma de una integral tenemos

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}. \quad (20)$$

A continuación usaremos el teorema 6.3.3 para escribir la integral (19) en la forma

$$\int_2^5 x^2 dx = \int_2^0 x^2 dx + \int_0^5 x^2 dx,$$

o bien, empleando la definición 6.3.1,

$$\int_2^5 x^2 dx = \int_0^5 x^2 dx - \int_0^2 x^2 dx.$$

Esta relación se muestra en la figura 6.3.6. Entonces, haciendo uso de la ecuación 20 para  $b = 5$  y  $b = 2$ , respectivamente, tenemos que

$$\int_2^5 x^2 dx = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3} = 39. \blacksquare$$

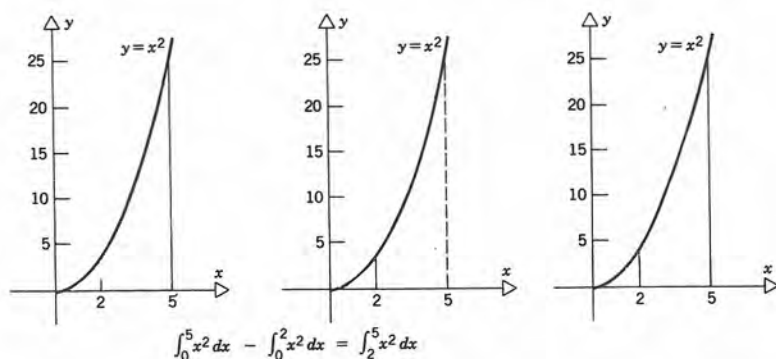


Figura 6.3.6

Obsérvese que el procedimiento que seguimos en el ejemplo 6 puede utilizarse también para demostrar que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}. \quad (21)$$

### Teorema 6.3.4

#### (Comparación)

Si la función  $f$  acotada es integrable en  $[a, b]$  y si

$$f(x) \geq 0 \quad (22)$$

para toda  $x$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (23)$$

La demostración de este teorema es muy sencilla. Como  $f$  es integrable, las sumas de Riemann tienden a un valor límite definido cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . Además, toda suma de Riemann es no negativa porque  $f(x) \geq 0$ , y por tanto el valor límite también debe ser no negativo.  $\square$

La interpretación geométrica obvia del teorema 6.3.4, cuando  $f$  es continua, es que el área es no negativa. Los siguientes corolarios son consecuencias inmediatas de este teorema.

### Corolario 6.3.1

Si las funciones acotadas  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$  y si  $f(x) \geq g(x)$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \quad (24)$$

**Demostración.** Se tiene que  $f(x) - g(x) \geq 0$ , y entonces, de acuerdo con el teorema 6.3.4,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0.$$

En consecuencia, según el teorema 6.3.2,

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0,$$

y entonces resulta inmediatamente la ecuación 24.  $\square$

Obsérvese que si  $f$  y  $g$  son continuas y no negativas de manera que se pueden interpretar como áreas las integrales de la ecuación 24, entonces este corolario expresa la propiedad de comparación de áreas mencionada en la sección 6.1 (véase figura 6.3.7).

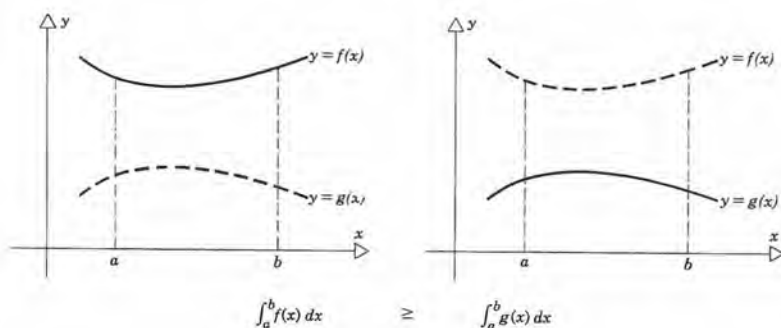


Figura 6.3.7

### Corolario 6.3.2

Si la función acotada  $f$  es integrable en  $[a, b]$  entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (25)$$

**Demostración.** Si  $f$  está acotada y es integrable en  $[a, b]$ , entonces se puede demostrar (aunque nosotros no lo haremos) que  $|f|$  también es integrable en  $[a, b]$ . Partiendo de las desigualdades

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

se infiere del corolario 6.3.1 que

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Como las condiciones  $-a \leq u \leq a$  y  $|u| \leq a$  son equivalentes, se infiere inmediatamente el resultado que se busca.  $\square$

Con frecuencia en la práctica son útiles los corolarios 6.3.1 y 6.3.2, así como en



estudios teóricos para establecer las cotas de una integral. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 7

Obtener una cota superior para

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Como  $\operatorname{sen} x \leq 1$  para toda  $x$ , fácilmente deducimos que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \approx 1.571.$$

Se puede calcular una cota superior más exacta si empleamos la desigualdad  $0 \leq \operatorname{sen} x \leq x$  en  $[0, \pi/2]$ , que es más precisa; véase el ejemplo 2 de la sección 4.1. Entonces tenemos que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} x \, dx = \frac{(\pi/2)^2}{2} \approx 1.234,$$

en la cual hemos empleado la ecuación 2 para evaluar la integral. Las funciones que acotan  $y = x$  y  $y = 1$  se muestran en la figura 6.3.8. En esta figura se puede ver que todavía se puede tener una cota superior mejor mediante la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & 1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Empleando esta función obtenemos

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \leq \int_0^1 x \, dx + \int_1^{\pi/2} 1 \, dx = 0.5 + \frac{\pi}{2} - 1 \approx 1.071.$$

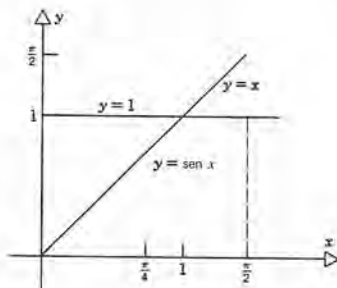


Figura 6.3.8 Estimación de  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx$ .

Como hicimos notar en el ejemplo 3 de la sección 6.2, el valor exacto de  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$  es uno. ■

### Teorema 6.3.5

#### (Teorema del valor medio)

Si la función  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces existe al menos un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \quad (26)$$

**Demostración.** Como  $f$  es continua en  $[a, b]$ , tiene un mínimo  $m$  y un máximo  $M$  en  $[a, b]$ ,

$$m \leq f(x) \leq M.$$

De acuerdo con la ecuación 9 de la sección 6.2, tenemos que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a),$$

o bien

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M.$$

Como  $f$  es continua, sabemos, según el teorema 2.6.3, que  $f$  toma todos los valores entre su mínimo y su máximo; por tanto, existe un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx. \quad \square$$

Para interpretar en forma geométrica este resultado, veamos el caso en que  $f(x) > 0$  como se ilustra en la figura 6.3.9. El área bajo la curva es igual al área del



**Figura 6.3.9**  $\int_a^b f(x) \, dx = (b-a) f(c).$

rectángulo de base  $b - a$  y altura  $f(c)$ . Como consecuencia, la zona de sombreado tenue bajo la recta  $y = f(c)$  y sobre la curva  $y = f(x)$  debe ser igual al área cuyo sombreado es más intenso y que queda sobre la recta  $y = f(c)$  y bajo la curva  $y = f(x)$ . Nótese también que para el dibujo de la figura 6.3.9 hay dos puntos que se podrían usar para  $c$ , que son el que se indica y otro punto a la derecha. El teorema 6.3.5 no nos dice cómo encontrar el punto  $c$ ; lo que con frecuencia es importante en las aplicaciones del teorema del valor medio como las que se darán en la siguiente sección, es simplemente la existencia del punto  $c$ , y no su ubicación.

Independientemente del signo de  $f$ , la cantidad

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

se conoce como el **valor medio** (o valor promedio) de la función  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ . Esta definición es una generalización de la media aritmética  $\bar{x}$  de un conjunto de números  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; esto es,  $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ . Si  $f$  es continua, entonces el teorema 6.3.5 dice que  $f$  alcanza su valor medio al menos una vez en el intervalo. Por ejemplo, si  $v$  es la velocidad de una partícula que se mueve en línea recta, entonces

$$\frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

es la velocidad promedio en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Si  $v$  es continua, entonces en determinado instante la partícula debe tener una velocidad igual a su velocidad promedio.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 emplear las propiedades de la integral y la interpretación geométrica de la integral de una función continua no negativa para evaluar la integral que se pide.

1.  $\int_1^3 (3x - 2) dx$

2.  $\int_{-1}^1 (6 - 3x) dx$

3.  $\int_{-2}^3 |x| dx$

4.  $\int_{-2}^2 (2 + \sqrt{4 - x^2}) dx$

5.  $\int_{-1}^2 f(x) dx$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

6.  $\int_0^4 g(x) dx$ ,

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + \sqrt{1 - (x - 2)^2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ -x + 4, & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

7.  $\int_1^{-1} (1 - \sqrt{1 - x^2}) dx$

8.  $\int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1 - x^2}) dx$

9.  $\int_0^3 (2 - |x - 1|) dx$

10.  $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx$

En los problemas 11 a 16, usar las ecuaciones 1, 2, 8 y 21 para evaluar la integral dada.

11.  $\int_{-3}^6 (2 - 3x) dx$

12.  $\int_{-1}^2 (2 - 3x + 4x^3) dx$



## 334 LA INTEGRAL

$$13. \int_0^1 (2x + 1)^2 dx \quad 14. \int_{-1}^1 (1 - x)^2 dx$$

$$15. \int_3^1 (2x^2 + 3x) dx$$

$$16. \int_{-2}^3 f(x) dx,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = -2 \\ 2x^2, & -2 < x \leq 1 \\ 1 - 2x, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

17. Si la función  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y si  $-M \leq f(x) \leq M$ , demostrar que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b - a).$$

18. Si la función  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y si  $|f(x)| \leq M$ , demostrar que

$$\left| \int_c^{c+h} f(x) dx \right| \leq M|h|,$$

en la cual  $c$  y  $c + h$  están en  $[a, b]$ . Nótese que  $h$  puede ser negativa. Este resultado demuestra que el valor absoluto de una integral siempre es menor o igual que una cota del valor absoluto del integrando multiplicada por la longitud del intervalo de integración.

En los problemas 19 a 22 deducir las desigualdades que se presentan.

$$19. \frac{2}{5} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 2$$

$$20. \int_{-\pi}^{3\pi/2} 2 \left| \sin \frac{x}{10} \right| dx \leq \pi$$

$$21. \int_0^1 x^4 dx \geq \int_0^1 x^6 dx$$

$$22. 2\sqrt{2} \leq \int_1^3 \sqrt{1+x} dx \leq 4$$

- ©23. En este problema emplearemos el hecho de que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

para aproximar el valor de  $\pi$ .

- Dividir el intervalo  $[0, 1]$  en  $n$  subintervalos iguales. Determinar la suma inferior  $s_n$  y la suma superior  $\sigma_n$  para  $n = 10, 20, 40$  y  $80$ .
  - Calcular  $(s_n + \sigma_n)/2$  para  $n = 10, 20, 40$  y  $80$ .
  - Escoger el punto medio de cada subintervalo como punto estrella. Calcular la suma de Riemann correspondiente para  $n = 10, 20, 40$  y  $80$ .
24. ¿Cuál es el valor promedio de la función lineal  $f(x) = mx + c$  en el intervalo  $[a, b]$ ? ¿En qué punto o puntos toma  $f$  su valor promedio?
25. La velocidad de una partícula es  $v(t) = 2 + 3t^2$ , en pies por segundo para  $0 \leq t \leq 10$ . ¿Cuál es la velocidad promedio para el intervalo de tiempo  $[2, 5]$ ?
26. Un automóvil se desplaza a 25 mi/h durante una hora, y a continuación a 40 mi/h durante otra hora más. Trazar una gráfica sencilla de la velocidad instantánea como función del tiempo, y como función de la distancia recorrida.
- ¿Cuál es la velocidad promedio con respecto al tiempo?
  - ¿Cuál es la velocidad promedio con respecto a la distancia?
  - ¿Por qué la velocidad promedio con respecto a la distancia es mayor que la velocidad promedio con respecto al tiempo?

Este problema muestra que al calcular el promedio de una cantidad se debe especificar la variable independiente.

27. Si la función  $f$  es continua en  $[a, b]$  y si  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , demostrar que existe un punto  $c$  en  $[a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ .
28. **Teorema del valor medio generalizado.** Supongamos que  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$ , que  $g(x) \geq 0$  en  $[a, b]$  y que

$$\int_a^b g(x) dx > 0.$$

Mostrar que existe un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Ésta es una forma más general del teorema 6.3.5.

## 6.4 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Hasta ahora hemos descrito los procesos de derivación y de integración en forma independiente entre sí. A continuación veremos la estrecha relación que existe entre ambos conceptos, un resultado al que se le conoce como el teorema fundamental del cálculo. Entre otras cosas, esta relación nos permite evaluar en forma rápida y exacta muchas integrales mediante las antiderivadas, en lugar de recurrir a uno u otro proceso de aproximación numérica.

Supongamos que la función  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y por tanto en el subintervalo  $[a, x]$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Sea

$$F(x) = \int_a^x f(s) \, ds, \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Así, la función  $F$  es la integral de  $f$  desde  $a$  hasta el límite superior variable  $x$ . Obsérvese que hay dos variables distintas en la ecuación 1, indicadas mediante  $x$  y  $s$ . La variable independiente es  $x$ , porque para cada valor de  $x$ , la ecuación 1 define el valor correspondiente de  $F(x)$ . La otra variable es la variable muda de integración. Para evitar confusiones, se deberá representar mediante alguna letra distinta de  $x$ ; en este caso hemos empleado  $s$ . Si  $f$  es continua y no negativa, entonces  $F(x)$  es el área de la región en el plano  $sy$  que está limitada por las rectas  $s = a$  y  $s = x$ , el eje  $s$ , y la gráfica de  $y = f(s)$ . Esta región se muestra en la figura 6.4.1.

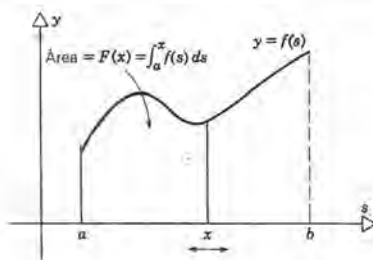


Figura 6.4.1

### EJEMPLO 1

La función  $f(x) = x^2$  es integrable en cualquier intervalo acotado. De acuerdo con la ecuación 21 de la sección 6.3, estando  $b$  sustituida por  $x$ , tenemos que

$$F(x) = \int_a^x s^2 \, ds = \frac{x^3 - a^3}{3}.$$

Por ejemplo, si  $a = -1$ , entonces

$$F(x) = \frac{x^3 + 1}{3}. \blacksquare$$

A continuación indagaremos algunas propiedades importantes de la función  $F$ .

### Teorema 6.4.1

Sea la función  $f$  acotada e integrable en  $[a, b]$ . Entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds, \quad a \leq x \leq b,$$

es continua en  $[a, b]$ .

**Demostración.** Debemos demostrar que si  $x$  es cualquier punto de  $[a, b]$ , entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x)$ . Tenemos

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(s) ds - \int_a^x f(s) ds.$$

Por tanto, según el teorema 6.3.3,

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(s) ds. \quad (2)$$

Esta relación se muestra en la figura 6.4.2. La conclusión ahora parece obvia, geoméricamente. Cuando  $h \rightarrow 0$ , el ancho de la región sombreada de la figura 6.4.2 se reduce y su área tiende a cero, lo cual es la conclusión que se desea. Para demostrar esto en forma analítica, podemos proceder como sigue. Como  $f$  está acotada en  $[a, b]$ , existe una constante  $M$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para toda  $x$  en  $[a, b]$ . Entonces para  $h > 0$ , de acuerdo con el corolario 6.3.2,

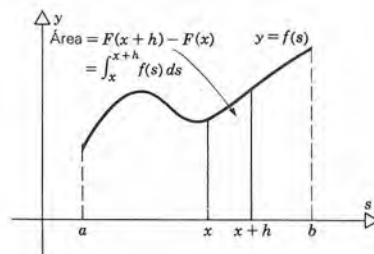


Figura 6.4.2



$$\begin{aligned}
 |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f(s) \, ds \right| \\
 &\leq \int_x^{x+h} |f(s)| \, ds \leq \int_x^{x+h} M \, ds = Mh; \quad (3a)
 \end{aligned}$$

análogamente, para  $h < 0$ ,

$$\begin{aligned}
 |F(x+h) - F(x)| &= \left| - \int_{x+h}^x f(s) \, ds \right| \\
 &= \left| \int_{x+h}^x f(s) \, ds \right| \\
 &\leq \int_{x+h}^x |f(s)| \, ds \leq \int_{x+h}^x M \, ds = M(-h). \quad (3b)
 \end{aligned}$$

Combinando estos resultados obtenemos

$$|F(x+h) - F(x)| \leq M|h|. \quad (4)$$

En consecuencia, cuando  $h \rightarrow 0$ , se infiere de la ecuación 4 que  $F(x+h) - F(x) \rightarrow 0$  y por tanto la función  $F$  es continua en  $x$ .

Se entiende que si  $x$  es el punto  $a$ , entonces necesariamente  $h > 0$  y en consecuencia el límite se toma por la derecha; similarmente, si  $x$  es el punto  $b$ , entonces necesariamente  $h < 0$  y el límite se toma por la izquierda.  $\square$

Nótese que el teorema 6.4.1 afirma que la integración es un proceso de *suavización*; aun cuando el integrando  $f$  tenga discontinuidades, la integral  $F$  no. Esto se verá en el ejemplo 2 que aparece más adelante en esta sección.

El siguiente teorema es la primera forma del teorema fundamental del cálculo.

### Teorema 6.4.2

#### (Primer teorema fundamental del cálculo)

Sea la función  $f$  acotada en  $[a, b]$  y continua en  $(a, b)$ . Entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(s) \, ds, \quad a \leq x \leq b,$$

tiene una derivada en cada punto de  $(a, b)$ , y además

$$F'(x) = f(x), \quad a < x < b. \quad (5)$$

Este teorema afirma que la integración de una función continua  $f$  hasta un límite superior variable produce una función  $F$  que es una antiderivada del integrando. Podemos escribir también la ecuación 5 en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = f(x), \quad (6)$$

con lo cual se aclara que *la derivación es la inversa de la integración*. Esto es, si comenzamos con una función continua  $f$ , la integramos y después la derivamos, regresamos a la función original.

**Demostración.** Para demostrar este teorema emplearemos la definición de la derivada como límite de un cociente de diferencias. Sea  $x$  cualquier punto de  $(a, b)$  y formemos

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(s) ds - \int_a^x f(s) ds \\ &= \int_x^{x+h} f(s) ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Ahora necesitamos una estimación más precisa de esta integral que la de la demostración del teorema 6.4.1. Se entiende que  $h$  está restringida a ser lo suficientemente pequeña como para que  $x+h$  también esté en  $(a, b)$ . Como  $f$  es continua en  $(a, b)$ , es continua en el intervalo de  $x$  a  $x+h$ , y por tanto podremos emplear el teorema del valor medio para integrales (teorema 6.3.5) para escribir la ecuación 7 como sigue:

$$F(x+h) - F(x) = f(c)(x+h-x) = hf(c),$$

en la cual  $c$  es un punto entre  $x$  y  $x+h$  (véase figura 6.4.3). Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c).$$

Es claro que  $c \rightarrow x$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Como  $f$  es continua, el límite de  $f(c)$  existe cuando  $h$  tiende a cero y es igual a  $f(x)$ . Así,  $F'(x) = f(x)$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ .  $\square$

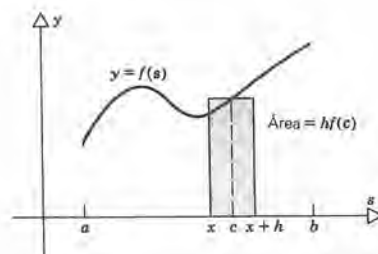


Figura 6.4.3

**EJEMPLO 2**

Considerar la función

$$f(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq 1, \\ 2, & 1 < s \leq 2, \end{cases}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 6.4.4a.

Evaluemos

$$F(x) = \int_0^x f(s) \, ds, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Al usar la ecuación 1 de la sección 6.3, tenemos que para  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\int_0^x f(s) \, ds = \int_0^x 1 \, ds = x;$$

para  $1 < x \leq 2$

$$\begin{aligned} \int_0^x f(s) \, ds &= \int_0^1 1 \, ds + \int_1^x 2 \, ds = 1 + 2(x - 1) \\ &= 2x - 1. \end{aligned}$$

De aquí que

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

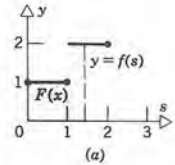
Nótese que aun cuando  $f$  es discontinua en 1, la función  $F$  es continua en ese punto, como afirma el teorema 6.4.1. Además, en  $0 < x < 1$  tenemos que  $F'(x) = 1 = f(x)$  y en  $1 < x < 2$  se tiene que  $F'(x) = 2 = f(x)$ . De acuerdo con la figura 6.4.4b queda claro que  $F$  no tiene derivada en 1 y, desde luego, es un punto de discontinuidad de  $f$ . ■

A continuación presentamos la segunda forma de la relación fundamental entre la derivación y la integración.

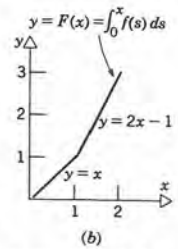
**Teorema 6.4.3****(Segundo teorema fundamental del cálculo)**

Sea la función  $f$  acotada en  $[a, b]$  y continua en  $(a, b)$ . Sea  $G$  cualquier función que sea continua en  $[a, b]$  y tal que  $G'(x) = f(x)$  en  $(a, b)$ . Entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a). \quad (8)$$



**Figura 6.4.4**



**Figura 6.4.4**



**Demostración.** Recuérdese que según los teoremas 6.4.1 y 6.4.2, la función  $F$ , definida por

$$F(x) = \int_a^x f(s) \, ds, \quad (9)$$

es continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$ , y que  $F'(x) = f(x)$  en  $(a, b)$ . Así, tanto  $F$  como  $G$  son antiderivadas de  $f$  en  $(a, b)$ . En consecuencia, según el teorema 4.1.5, pueden diferir a lo más en una constante, o sea

$$F(x) = G(x) + c. \quad (10)$$

Si hacemos que  $x = a$ , y observamos que  $F(a) = 0$ , entonces  $c = -G(a)$ , y por tanto

$$F(x) = G(x) - G(a). \quad (11)$$

Sustituyendo en la ecuación 9 este resultado para  $F(x)$ , obtenemos

$$G(x) - G(a) = \int_a^x f(s) \, ds. \quad (12)$$

Finalmente, haciendo que  $x = b$  en la ecuación 12, se obtiene la ecuación 8.  $\square$

Como  $f(s) = G'(s)$ , se puede escribir la ecuación 12 también como sigue:

$$\int_a^x G'(s) \, ds = G(x) - G(a), \quad (13)$$

siempre que  $G'$  sea acotada en  $[a, b]$  y continua en  $(a, b)$ . La ecuación 13 dice que, bajo las hipótesis mencionadas y a excepción de una constante aditiva, la *integración es la inversa de la derivación*. Esto es, si partimos de la función  $G$ , la derivamos y a continuación integramos el resultado, obtendremos de nuevo la función original  $G$  aumentada, cuando más, en una constante.

Bajo las condiciones del teorema 6.4.3 se puede evaluar la integral  $\int_a^b f(x) \, dx$  si podemos encontrar una función  $G$  que sea continua en  $[a, b]$  tal que  $G'(x) = f(x)$  en  $(a, b)$ . Modificando ligeramente la definición que aparece en la sección 3.3, llamaremos a esa función  $G$  antiderivada de  $f$ .

También se usa con frecuencia el término **integral indefinida** para referirse a  $G$ , y de aquí en adelante emplearemos las palabras “integral indefinida” y “antiderivada” indistintamente. La notación

$$G(x) = \int f(x) \, dx + c, \quad (14)$$

en la que aparece el signo de la integral sin límites de integración, se emplea comúnmente para indicar las integrales indefinidas o antiderivadas de  $f$ . La expresión  $\int f(x) \, dx$  indica un determinado representante de la clase de integrales indefinidas o antiderivadas de  $f$ ; sumando la constante  $c$  arbitraria, abarcamos todos los miembros

de esta clase de funciones. De este modo el símbolo  $\int$ , cuando se usa sin límites de integración, tiene el mismo significado que el operador  $D^{-1}$  introducido en la sección 3.3.

Cuando sea necesario, por claridad, la integral  $\int_a^b f(x) dx$ , con límites numéricos de integración, se llamará **integral definida**. Sin embargo, con frecuencia se omiten los modificativos “indefinida” y “definida” cuando de acuerdo con el contexto está claro cuál de ellos se menciona, y entonces la palabra “integral” sola puede significar, según el caso, integral definida o indefinida. Recuérdese que la primera es un número, mientras que la segunda es una función.

En las secciones 3.2 y 3.3 encontramos que

$$D(x^r) = rx^{r-1}, \quad (15)$$

y que

$$D^{-1}x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1, \quad (16)$$

siendo  $c$  una constante arbitraria. Empleando la notación de la ecuación 14 para integrales indefinidas, podemos expresar la ecuación 16 del siguiente modo:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1. \quad (17)$$

De la misma manera, en la sección 3.6 encontramos que

$$D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = -\sin x, \quad (18)$$

y que

$$D^{-1} \cos x = \sin x + c, \quad D^{-1} \sin x = -\cos x + c. \quad (19)$$

De ahora en adelante, escribiremos con frecuencia la ecuación 19 en la siguiente forma:

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c. \quad (20)$$

Otra notación que se emplea comúnmente es

$$G(x) \Big|_a^b \text{ en lugar de } G(b) - G(a).$$

Así, se puede escribir la ecuación 13 como sigue:

$$\int_a^b f(x) dx = G(x) \Big|_a^b, \quad (21)$$

en la cual  $G$  es una antiderivada de  $f$ .

Nótese que, al emplear la ecuación 13 o la ecuación 21 para evaluar una integral

definida, no es necesario incluir la constante arbitraria  $c$  en  $G(x)$ . Si se incluye, se anulará en la resta  $G(b) - G(a)$ .

Veamos ahora algunos ejemplos del empleo del teorema 6.4.3.

### EJEMPLO 3

Calcular el área de la región delimitada por el eje  $x$ , la recta  $x = 4$ , y la curva  $y = \sqrt{x}$ .

El área que se busca está dada por

$$A = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx$$

(véase figura 6.4.5). Para evaluar esta integral debemos encontrar una función cuya derivada sea  $x^{1/2}$ . De acuerdo con la ecuación 17 esa función es  $G(x) = 2x^{3/2}/3$ . Entonces, de acuerdo con el teorema 6.4.3,

$$A = \frac{2}{3}(4)^{3/2} - \frac{2}{3}(0)^{3/2} = \frac{16}{3}. \blacksquare$$

### EJEMPLO 4

Evaluar

$$\int_0^{\pi/2} (2x - 3 \operatorname{sen} x) \, dx.$$

Empleando el teorema 6.3.2, podemos escribir la integral dada en la forma

$$\int_0^{\pi/2} (2x - 3 \operatorname{sen} x) \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} x \, dx - 3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx. \quad (22)$$

Las integrales del lado derecho de la ecuación 22 se pueden evaluar mediante las ecuaciones 17 y 20, respectivamente, y el resultado es

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (2x - 3 \operatorname{sen} x) \, dx &= 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\pi/2} - 3(-\cos x) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 2 \left[ \frac{\pi^2}{8} - 0 \right] - 3[0 - (-1)] = \frac{\pi^2}{4} - 3 \cong -0.5326. \blacksquare \end{aligned}$$

### Integrandos discontinuos

El teorema 6.4.3 se aplica a integrandos que sean continuos en el intervalo de integración con la posible excepción de los puntos de los extremos. Sin embargo, es igual-

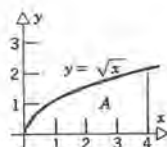


Figura 6.4.5



mente fácil evaluar las integrales cuyos integrandos tengan un número finito de discontinuidades en el interior del intervalo de integración. Por ejemplo, supóngase que  $f$  es discontinua en  $c$ , siendo  $a < c < b$ . Entonces, de acuerdo con el teorema 6.3.3,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (23)$$

y cada una de las integrales del lado derecho de la ecuación 23 se puede evaluar mediante el teorema 6.4.3, siempre que se puedan encontrar las antiderivadas adecuadas. Igualmente, si  $f$  es discontinua en  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , siendo  $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx, \quad (24)$$

y se puede aplicar el teorema 6.4.3 a cada término de la derecha. Ya hemos mostrado este procedimiento en el ejemplo 2. A continuación presentaremos otro ejemplo.

### EJEMPLO 5

Evaluar  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 6.4.6.

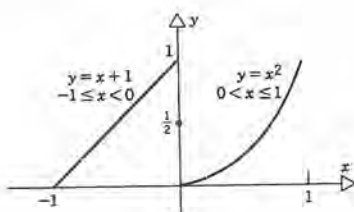


Figura 6.4.6

La función  $f$  está acotada en  $[-1, 1]$  y es continua, excepto en  $x = 0$ , de modo que la integral existe. Para evaluarla escribiremos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x + 1) dx + \int_0^1 x^2 dx. \end{aligned} \quad (26)$$

El teorema 6.4.3 se aplica a cada una de las últimas integrales, y

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}. \blacksquare\end{aligned}$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 18, evaluar la integral dada.

1.  $\int_0^2 3x^4 dx$

2.  $\int_{-4}^{-1} \frac{3}{x^2} dx$

3.  $\int_0^{\pi/2} (2 - \cos x) dx$

4.  $\int_0^4 (x^2 + x^{1/2}) dx$

5.  $\int_{-1}^1 s(2 + s^2) ds$

6.  $\int_0^4 (2t - 1)(t + 1) dt$

7.  $\int_0^{\pi/4} (3 + 6s + 2 \operatorname{sen} s) ds$

8.  $\int_{-2}^{-1} \frac{2 - 3x^2 + 6x^4}{2x^2} dx$

9.  $\int_{-\pi/2}^{\pi} (3 \cos x - \frac{1}{3} \operatorname{sen} x) dx$

10.  $\int_1^4 (2x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2}) dx$

11.  $\int_0^x (2t + t^{1/2}) dt, \quad x > 0$

12.  $\int_{-1}^x (2t^2 + 4t^{1/3}) dt$

13.  $\int_0^x (3 - \cos t) dt$

14.  $\int_0^x (2 + 5 \operatorname{sen} t) dt$

15.  $\int_0^{x^2} (1 + 2t) dt$

16.  $\int_1^{3x} (2 - 3t + t^2) dt$

17.  $\int_{2x}^{x^2} (3 - 4t) dt$

18.  $\int_{x^2}^{x^3} \cos t dt$

En los problemas 19 a 26 evaluar la integral dada

19.  $\int_0^2 f(x) dx,$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

20.  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(t) dt,$

$$g(t) = \begin{cases} \cos t, & -\frac{\pi}{2} \leq t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

21.  $\int_{-10}^{10} f(x) dx,$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \pm n, \\ x, & x \neq \pm n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, 10$$

22.  $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} h(s) ds,$

$$h(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos s, & \frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi \\ 2 \operatorname{sen} s, & \pi < s \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

23.  $\int_{-1}^1 |2x + 1| dx$

24.  $\int_{-1}^2 |x(x - 1)| dx$

25.  $\int_{-2}^2 |1 - x^2| dx$

26.  $\int_{-1}^2 (|x| + 3|x - 1|) dx$

27. Demostrar que si  $p$  y  $q$  son enteros positivos, entonces

$$\int_0^1 (x^{p/q} + x^{q/p}) dx = 1.$$

28. Determinar el valor promedio de la función  $f(x) = 2x^{1/3} + 3x$  en el intervalo  $[1, 3]$ .

29. (a) La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una recta es  $v = A \operatorname{sen} \omega t$ , donde  $A$  y  $\omega$  son constantes. Obsérvese que la velocidad es periódica y su periodo es  $2\pi/\omega$ ; determínese la velocidad promedio en un periodo.

(b) Si la velocidad es  $v = A \sin^2 \omega t$ , calcular la velocidad promedio en un periodo. *Sugerencia:* usar una identidad trigonométrica para expresar a  $\sin^2 \omega t$  como una suma de dos funciones que sepa el lector cómo integrar.

30. La fuerza gravitacional que actúa sobre una partícula es  $-k/r^2$ , siendo  $k$  una constante positiva y  $r$  la distancia al centro de la tierra. El signo menos indica que la fuerza está dirigida hacia la tierra (véase figura 6.4.7). ¿Cuál es el trabajo  $w$  que efectúa la fuerza de atracción para mover la partícula de  $r = r_A$  a  $r = r_B$ ?

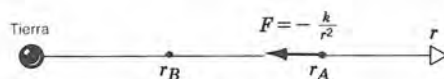


Figura 6.4.7

31. (a) Hacer un dibujo de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & 0 \leq x < 1; \\ 2 + x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (b) Determinar la función

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

y hacer un dibujo de su gráfica.

- (c) Describir el comportamiento de  $f$  y  $F$  en la vecindad de  $x = 1$ .

32. Demostrar que

$$\int_0^x |t| dt = \frac{1}{2}x|x|, \quad \text{para toda } x.$$

### Derivación de integrales

Los problemas 33 a 44 dan aplicaciones y, en algunos casos, extensiones del teorema 6.4.2.

33. Si

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt,$$

determinar  $F'(x)$ .

34. Si

$$F(x) = \int_x^0 \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt,$$

determinar  $F'(x)$ .

35. Si

$$F(x) = 2x + \int_0^x \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt,$$

determinar: (a)  $F(0)$ , (b)  $F'(0)$ , (c)  $F''(0)$ .

36. Si

$$F(x) = 2 + x + \int_0^{x^2} \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt,$$

determinar  $F'(x)$ .

*Sugerencia:* hacer  $u = x^2$  y usar la regla de la cadena para calcular la derivada de la integral dada.

37. Si

$$F(x) = \int_{1-x^2}^{1+x^2} \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt, \quad 0 \leq x < 10,$$

determinar  $F'(x)$ .

*Sugerencia:* escribir la integral como una suma de dos integrales, desde  $1 - x^2$  hasta 1 y desde 1 hasta  $1 + x^2$ , respectivamente.

38. Si

$$G(x) = \int_x^{x^2} \frac{2}{(1+t^2)^2} dt$$

para  $x > 1$ , determinar  $G'(x)$ .

39. Si

$$F(x) = \int_0^{1+x^2} t f(t) dt$$

para  $x > 0$ , determinar  $F'(x)$ .

40. Suponer que la función  $f$  es continua y que las funciones  $u$  y  $v$  son derivables. Demostrar que

$$(a) \frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = f[u(x)]u'(x).$$

$$(b) \frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt = f[u(x)]u'(x) - f[v(x)]v'(x).$$



41. Si

$$F(x) = \int_0^x \left( t \int_1^t f(s) ds \right) dt$$

donde la función  $f$  es continua, determinar: (a)  $F'(x)$ ,  
(b)  $F'(1)$ , (c)  $F''(x)$  y (d)  $F''(1)$ .

En los problemas 42 a 44 suponer que la función  $f$  es continua y que la ecuación es válida para toda  $x \geq 0$ .

42. Si

$$\int_0^x f(t) dt = \sqrt{1+x^2} - 1,$$

determinar  $f(1)$ .

43. Si

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = \sqrt{1+x^2} - 1,$$

determinar  $f(\pi/2)$ .

44. Si

$$\int_0^x tf(t) dt = x^2 + x \sin x + \cos x - 1,$$

determinar  $f(\pi/2)$ .

## 6.5 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIONES

Hemos visto que la regla de la cadena es quizá la herramienta más versátil y poderosa para calcular derivadas. La contraparte de esta regla para las integrales es el empleo de sustituciones, o cambios de variable de integración. Este método es igualmente poderoso y general, y se adapta a una amplia variedad de integrales definidas e indefinidas. En las secciones 3.5 y 3.6 hemos dado ya algunas fórmulas de antiderivación, deducidas mediante la regla de la cadena. Las tres de mayor importancia son las ecuaciones 16 de la sección 3.5 y las ecuaciones 27 y 28 de la sección 3.6. A continuación las escribiremos con notación de integrales.

$$\int [u(x)]^r u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1, \quad (1)$$

$$\int [\cos u(x)] u'(x) dx = \sin u(x) + c, \quad (2)$$

$$\int [\sin u(x)] u'(x) dx = -\cos u(x) + c. \quad (3)$$

En esta sección nos abocaremos al problema de determinar antiderivadas desde un punto de vista algo distinto y también extenderemos el proceso a las integrales definidas.

### EJEMPLO 1

Evaluar

$$\int 3x \cos x^2 dx. \quad (4)$$

Supóngase que introducimos la nueva variable  $u = x^2$ . Entonces  $du = 2x \, dx$ , o sea  $x \, dx = du/2$ . Sustituyendo en la integral 4 en lugar de  $x^2$  y  $x \, dx$ , tenemos que

$$\int 3x \cos x^2 \, dx = \int 3 \cos u \frac{du}{2} = \frac{3}{2} \int \cos u \, du. \quad (5)$$

Una integral indefinida, o antiderivada, de  $\cos u$ , es  $\sin u$ , y así obtenemos

$$\int 3x \cos x^2 \, dx = \frac{3}{2} \sin u + c, \quad (6)$$

en la cual  $c$  es una constante arbitraria. Por último, sustituimos  $x^2$  en lugar de  $u$  en la ecuación 6, lo cual da

$$\int 3x \cos x^2 \, dx = \frac{3}{2} \sin x^2 + c. \quad \blacksquare \quad (7)$$

## EJEMPLO 2

Evaluar

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx. \quad (8)$$

En este caso introduciremos la nueva variable  $u = x^2 + 1$ , y entonces  $du = 2x \, dx$  y la integral (8) se transforma en

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx = \int u^{1/2} \, du. \quad (9)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int 2x\sqrt{x^2 + 1} \, dx &= \frac{2}{3} u^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{3/2} + c. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (10)$$

## EJEMPLO 3

Evaluar

$$\int \sin^8 x \cos x \, dx. \quad (11)$$

En este caso podemos hacer que  $u = \operatorname{sen} x$ . Entonces,  $du = \cos x \, dx$  y, sustituyendo en la integral (11) obtendremos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^8 x \cos x \, dx &= \int u^8 \, du \\ &= \frac{1}{9} u^9 + c \\ &= \frac{1}{9} \operatorname{sen}^9 x + c. \quad \blacksquare\end{aligned}\tag{12}$$

En cada uno de los ejemplos 1 a 3 se puede comprobar la corrección del resultado derivándolo (mediante la regla de la cadena) y demostrando que se obtiene el integrando original. En cada uno de esos ejemplos también es posible, quizá después de algo de aciertos y errores, descubrir la antiderivada necesaria, más o menos por inspección. Sin embargo, en los tres casos, la sustitución reduce inmediatamente el problema a una integral elemental. Esto ejemplifica la meta final de una sustitución, que es simplificar la integral y, si es posible, reducirla a una que se pueda resolver mediante una fórmula elemental de integración.

A continuación pasemos a las sustituciones y a su relación con la regla de la cadena desde un punto de vista más general que en los ejemplos 1 a 3. Supongamos que nos enfrentamos al problema de determinar una integral indefinida  $\int g(x) \, dx$ , y que la función necesaria no sea inmediatamente obvia. Además, supongamos que podemos reconocer una función  $u = u(x)$  tal que

$$g(x) = f[u(x)]u'(x)\tag{13}$$

para alguna función  $f$ . Entonces, si  $F$  es una antiderivada de  $f$ , se sigue que, de acuerdo con la regla de cadena,

$$\frac{d}{dx} F[u(x)] = f[u(x)]u'(x).\tag{14}$$

Por tanto,  $F[u(x)]$  es la antiderivada de  $g$  que se desea y

$$\begin{aligned}\int g(x) \, dx &= \int f[u(x)]u'(x) \, dx = \int \frac{d}{dx} F[u(x)] \, dx \\ &= F[u(x)] + c.\end{aligned}\tag{15}$$

Obsérvese que (como en los ejemplos 1 a 3) el empleo de la notación de Leibniz para la derivada hace aparecer más sencillo el procedimiento que expresa la ecuación 15. Recuérdesse que si  $u = u(x)$ , entonces  $du = u'(x) \, dx$ , y podemos escribir, en lugar de la ecuación 15,

$$\begin{aligned}\int g(x) \, dx &= \int f(u) \, du = \int F'(u) \, du \\ &= F(u) + c = F[u(x)] + c.\end{aligned}\tag{16}$$



Al emplear sustituciones para encontrar integrales indefinidas, surgen naturalmente algunas preguntas, como las siguientes:

1. Para una integral dada, ¿cómo podemos estar seguros de que una sustitución será eficaz?
2. Suponiendo que una sustitución pudiera ayudar, ¿cómo podemos hallar la sustitución adecuada para cada caso?

Al continuar con el estudio de la integración, encontraremos que determinados tipos de integrales se prestan a sustituciones de tipos determinados también. Sin embargo, por el momento contestaremos la primera pregunta diciendo que no puede uno siempre prever si una sustitución será útil o no. Con todo, es un método que se aplica mucho y ciertamente debe tenerse en mente para cualquier integral cuya antiderivada no sea evidente de inmediato. Acerca de la sustitución que se debe usar, en general, se debe indicar que depende del modo en que la variable de integración aparezca en el integrando. Algunas veces la mejor sustitución no es obvia. En ese caso, será muy aconsejable tratar simplemente una sustitución que parezca posible. Si funciona, bien; aun si no funciona, quizá por el modo de fallar nos sugerirá algo distinto que pueda ser mejor.

Así, el procedimiento consiste en escoger una  $u$  que parezca razonable y a continuación hacer la sustitución para determinar la función  $f$  consistente con la ecuación 13. Si se conoce una función  $F$  tal que  $F'(u) = f(u)$ , podremos entonces completar la integración. Si no es evidente alguna antiderivada para  $f$ , entonces veremos si podemos hacer una mejor selección de  $u$ . Ésta es la esencia del método del cambio de variable.

Una reacción natural es sentir que si es difícil (o imposible) reconocer la integral indefinida que se desee sólo por inspección, entonces será igualmente difícil, o imposible, encontrar la función  $u$  de la ecuación 13. Afortunadamente, la experiencia indica que éste no es el caso. La selección de la función  $u$  debe sugerir la forma de  $g(x)$ , por nuestro conocimiento de las funciones  $f$  para las cuales podemos reconocer antiderivadas y por nuestra destreza analítica. Ayuda mucho la práctica.

Nótese que en el análisis anterior siempre hemos dicho “introducir un cambio de variable  $u = u(x)$ .” Es igualmente correcto decir “introducir un cambio de variable  $x = x(u)$ .” Está implícito en el procedimiento que debemos ser capaces de pasar de la variable  $x$  a la variable  $u$  que introdujimos, y de la variable  $u$  a la variable  $x$ . No importa cómo se introduzca la variable  $u$ , el objeto es transformar  $g(x) dx$  a  $f(u) du$  de tal manera que conozcamos una antiderivada de  $f$ . A veces esto se puede lograr en más de una forma, como muestra el ejemplo siguiente.

#### EJEMPLO 4

Evaluar

$$\int x^2 \sqrt{x+1} \, dx. \quad (17)$$

La dificultad para evaluar esta integral es la presencia de la raíz cuadrada de una suma,  $\sqrt{x+1}$ . Sin embargo, si el integrando fuera de la forma  $\sqrt{x}$  por un polinomio, no habría dificultad. Por tanto, probaremos

$$u = x + 1 \text{ por tanto } du = dx, \text{ y } x = u - 1. \quad (18)$$

Con lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x+1} \, dx &= \int (u-1)^2 \sqrt{u} \, du \\ &= \int (u^2 - 2u + 1) u^{1/2} \, du \\ &= \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) \, du \\ &= \frac{u^{7/2}}{7/2} - 2 \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + c \\ &= \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c \\ &= 2(x+1)^{3/2} \left[ \frac{1}{7}(x+1)^2 - \frac{2}{5}(x+1) + \frac{1}{3} \right] + c. \end{aligned} \quad (19)$$

Una sustitución alternativa es

$$u = \sqrt{x+1}; \text{ entonces } x+1 = u^2 \text{ y } dx = 2u \, du. \quad (20)$$

En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x+1} \, dx &= \int (u^2 - 1)^2 u \, 2u \, du \\ &= 2 \int u^2 (u^4 - 2u^2 + 1) \, du \\ &= 2 \int (u^6 - 2u^4 + u^2) \, du \\ &= 2 \left( \frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right) + c \\ &= 2u^3 \left( \frac{u^4}{7} - \frac{2u^2}{5} + \frac{1}{3} \right) + c \\ &= 2(x+1)^{3/2} \left[ \frac{1}{7}(x+1)^2 - \frac{2}{5}(x+1) + \frac{1}{3} \right] + c. \quad (21) \end{aligned}$$

## EJEMPLO 5

Evaluar

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 3x \cos x^2 \, dx. \quad (22)$$

Encontramos en el ejemplo 1 que  $\frac{3}{2}\sin x^2 + c$  es una antiderivada del integrando. Recuerdese que no necesitamos la constante arbitraria para evaluar la integral definida (22). Por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 3x \cos x^2 dx &= \frac{3}{2} \sin x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{3}{2} \left( \sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1.061. \quad \blacksquare\end{aligned}\quad (23)$$

En el ejemplo 5 evaluamos la integral (22) empleando una antiderivada que habíamos encontrado antes mediante la sustitución  $u = x^2$ . También pudimos haber usado la misma sustitución para transformar los límites de integración a modo de obtener una integral definida nueva, expresada en términos de la variable  $u$ . Mostraremos esto para el caso del ejemplo 5 y a continuación enunciaremos un teorema general.

Si  $u = x^2$ , entonces, correspondiendo a los límites  $x$  de integración 0 y  $\sqrt{\pi/2}$  obtenemos los valores de  $u$  0 y  $\pi/4$ , respectivamente. Así,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 3x \cos x^2 dx &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/4} \cos u du \\ &= \frac{3}{2} \sin u \Big|_0^{\pi/4} = \frac{3\sqrt{2}}{4},\end{aligned}\quad (24)$$

lo cual concuerda con la ecuación 23.

El teorema general de sustituciones en una integral definida es el siguiente:

### Teorema 6.5.1

Suponiendo que se satisfacen las siguientes condiciones

1.  $u = u(x)$  es continua y tiene derivada continua en  $[a, b]$ , donde  $u(a) = c$  y  $u(b) = d$ .
2.  $f$  es continua en el conjunto de valores que toma  $u = u(x)$ .

Entonces

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x) dx = \int_c^d f(u) du. \quad (25)$$

**Demostración.** Obsérvese que cuando  $x$  varía de  $a$  a  $b$ , la continuidad de  $u(x)$  asegura que  $u$  toma todos los valores del intervalo  $[c, d]$ , pero además, puede  $u$  también tomar valores fuera de  $[c, d]$ , como se ve en la figura 6.5.1. Ésta es la causa de que se pide que  $f$  sea continua en el conjunto de valores que toma  $u$  y no sólo en  $[c, d]$ .

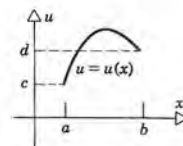


Figura 6.5.1



Ahora, como  $f$  es continua en  $[c, d]$ , tiene una antiderivada  $F$  y

$$\int_c^d f(u) du = F(d) - F(c). \quad (26)$$

Por otro lado, de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} F[u(x)] = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x). \quad (27)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)] = F(d) - F(c). \quad (28)$$

Combinando las ecuaciones 26 y 28 se obtiene el resultado (25).  $\square$

## EJEMPLO 6

Evaluar

$$\int_1^4 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} \frac{1}{x^2} dx. \quad (29)$$

Si notamos que  $1/x^2$  es, excepto por el signo, la derivada de  $1/x$ , ello nos puede sugerir la sustitución  $u = x^{-1}$ . Entonces  $du = -x^{-2}dx$ , y los límites de integración se vuelven  $u = 1$  y  $u = \frac{1}{4}$ , que corresponden a  $x = 1$  y  $x = 4$ , respectivamente. Entonces, sustituyendo en la integral (29), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-1/2} \frac{1}{x^2} dx &= -\int_1^{1/4} (1 + 2u)^{-1/2} du \\ &= \int_{1/4}^1 (1 + 2u)^{-1/2} du. \end{aligned} \quad (30)$$

Obsérvese que en el último paso hemos cambiado el signo de la integral invirtiendo los límites de integración. Para evaluar la integral (30), puede ayudarnos una segunda sustitución. Sea  $v = 1 + 2u$ ; entonces  $dv = 2du$ , ó  $du = dv/2$ . Los límites de integración se vuelven  $v = \frac{3}{2}$  y  $v = 3$ , que corresponden a  $u = \frac{1}{4}$  y a  $u = 1$ , respectivamente. Así

$$\begin{aligned} \int_{1/4}^1 (1 + 2u)^{-1/2} du &= \frac{1}{2} \int_{3/2}^3 v^{-1/2} dv = \frac{1}{2} \cdot 2v^{1/2} \Big|_{3/2}^3 \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0.5073. \end{aligned} \quad (31)$$

De acuerdo con la ecuación 30, éste también es el valor de la integral original, la (29).

En este ejemplo hemos evaluado la integral en dos etapas, empleando una sustitución diferente en cada una de ellas. Desde luego que si hubiéramos introducido la

sustitución  $v = 1 + (2/x)$  desde el principio, hubiéramos obtenido el resultado con mayor rapidez. Sin embargo, este ejemplo demuestra que no necesariamente debemos encontrar desde el principio la sustitución óptima. Si podemos determinar una sustitución que simplifique el problema igualándolo con algo que ya exista, entonces se aclararán cualesquiera pasos posteriores necesarios. En cualquier caso, a veces se aconseja descomponer un procedimiento complicado en una sucesión de pasos sencillos, en lugar de tratar de hacer todo de inmediato. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 30 emplear una sustitución adecuada para evaluar la integral indefinida o definida que se plantea.

1.  $\int \sqrt{3+2x} \, dx$

2.  $\int \frac{dx}{(3+2x)^2}$

3.  $\int x(9+x^2)^3 \, dx$

4.  $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \, dx$

5.  $\int \frac{t}{(1+4t^2)^3} \, dt$

6.  $\int \frac{t}{(9-t^2)^2} \, dt$

7.  $\int x^3(4-x^4)^3 \, dx$

8.  $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} \, dx$

9.  $\int \cos 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \, dx$

10.  $\int 3x \sin 5x^2 \, dx$

11.  $\int \tan \pi \theta \sec \pi \theta \, d\theta$

12.  $\int \frac{x \sin \sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}} \, dx$

13.  $\int \cos^3 2x \sin 2x \, dx$

14.  $\int \tan 3\theta \sec^2 3\theta \, d\theta$

15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

16.  $\int s(1+s)^{1/3} \, ds$

17.  $\int x^5 \sqrt{2+x^2} \, dx$

18.  $\int (x-2)^2(x+3)^{11} \, dx$

19.  $\int x(a^2+x^2)^r \, dx, \quad r \neq -1$

20.  $\int x^2(a^3+x^3)^r \, dx, \quad r \neq -1$

21.  $\int_0^4 \sqrt{4+3x} \, dx$

22.  $\int_1^6 \frac{dx}{(2x+3)^2}$

23.  $\int_0^4 x\sqrt{16-x^2} \, dx$

24.  $\int_0^3 \frac{3x^2}{\sqrt{1+x}} \, dx$

25.  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot \theta \csc^2 \theta \, d\theta$

26.  $\int_0^{\sqrt{\pi}} t \sin t^2 \, dt$

27.  $\int_1^4 \frac{ds}{\sqrt{s}(4+\sqrt{s})^3} \, ds$

28.  $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2} \, dx$

29.  $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx$

30.  $\int_0^{a/2} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$

31. En el ejemplo 3 de la sección 6.3 hemos interpretado que  $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx$  es el área de la cuarta parte de un círculo de radio  $a$  y por tanto hemos llegado a la conclusión de que el valor de esa integral es  $\pi a^2/4$ . En esta ocasión indicaremos un modo de evaluar esta integral en forma analítica.

(a) Sea  $x = a \sin \theta$ ; demostrar que

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta.$$

(b) Usar la fórmula de la mitad del ángulo  $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$  para simplificar la integral que se obtuvo en la parte (a).

(c) Sea  $u = 2\theta$  y en consecuencia demostrar que

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \, dx = \frac{\pi a^2}{4}.$$

En los problemas 32 a 34 emplear la sustitución  $x = a \sin \theta$  para evaluar la integral dada.

32.  $\int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

33.  $\int_0^{a/2} \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

34.  $\int_0^{a/2} \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$

35. (a) Si  $f$  es una función par integrable, demostrar que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(b) Si  $f$  es una función impar integrable, demostrar que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

36. Si  $m$  y  $n$  son enteros positivos, demostrar que

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx.$$

## 6.6 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El teorema fundamental del cálculo, teorema 6.4.3, nos proporciona un medio de evaluar cualquier integral definida para la cual podemos identificar una antiderivada del integrando. La clase de tales integrales se amplió mucho en la sección 6.5 mediante el empleo de sustituciones en el integrando. Se amplía todavía más mediante otros métodos que describiremos después, en especial en el capítulo 9. Sin embargo, quedan muchas integrales que no se pueden tratar con este método porque sus integrandos no tienen antiderivadas que se puedan expresar en forma sencilla alguna. Si se necesita el valor de una de esas integrales, con frecuencia es necesario emplear un método de aproximación numérica. Recuérdese que ya hemos partido desde este punto de vista en las secciones 6.1 y 6.2, en donde calculamos los valores de algunas integrales evaluando alguna suma de Riemann particular.

A continuación describiremos dos métodos adicionales, que se conocen como la regla del trapecioide y la regla de Simpson, para evaluar integrales en forma numérica. La regla del trapecioide es fácil de deducir y sencilla de emplear. Desafortunadamente, su exactitud con frecuencia no es mejor que la de una suma de Riemann con un número semejante de términos. La deducción de la regla de Simpson sigue los lineamientos que la del trapecioide, pero es mucho más complicada. Sin embargo, el empleo de la regla de Simpson no es más difícil que el de la regla del trapecioide o de las sumas de Riemann y en general da una aproximación mucho más exacta. Así, entre las alternativas que mencionaremos, el método que se selecciona usualmente es el de la regla de Simpson. Tanto la regla de trapecioide como la de Simpson tienen asociadas estimaciones *a priori* del error que a veces se pueden emplear para darse cuenta antes de cómo emplear el procedimiento para alcanzar la exactitud que se desea.

Supongamos que deseamos aproximar el valor de

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

en la cual  $f$  es una función acotada integrable dada. Definimos una partición uniforme

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

que subdivida al intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos iguales, cada uno de ellos con una longitud



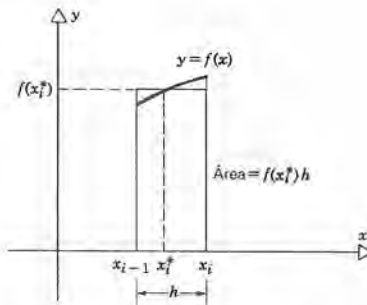
$$h = \frac{b - a}{n}. \quad (2)$$

La regla del trapecioide y la regla de Simpson se originan en dos modos diferentes de aproximar el integrando en cada subintervalo.

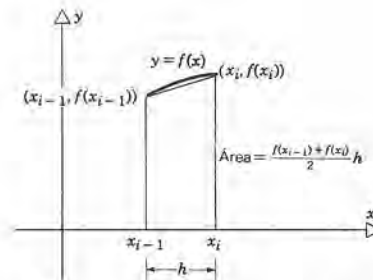
### Regla del trapecioide

Para ayudar a captar el significado de las fórmulas que siguen, ilustraremos el caso en el que el integrando  $f$  es continuo y no negativo. Entonces la integral (1) se puede interpretar como el área bajo la gráfica de  $f$  desde  $a$  hasta  $b$ . Sin embargo, estas fórmulas se aplican a integrandos que pueden ser negativos o discontinuos.

Recuérdese que al formar una suma de Riemann aproximamos el área bajo la gráfica de  $f$  en el  $i$ ésimo subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  mediante el área  $f(x_i^*)h$  de un rectángulo de base  $h$  y altura  $f(x_i^*)$  (véase figura 6.6.1). En lugar de ello, podemos aproximar el área bajo la gráfica con el área del trapecioide que aparece en la figura 6.6.2. Enunciado



**Figura 6.6.1** Aproximación mediante un rectángulo.



**Figura 6.6.2** Aproximación mediante un trapecioide.

de otra forma, aproximaremos la gráfica de  $y = f(x)$  mediante el segmento de recta que pasa por los puntos  $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$  y  $[x_i, f(x_i)]$ . El área del trapecioide en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  es

$$[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \frac{h}{2}. \quad (3)$$

Para aproximar la integral (1) aplicaremos la fórmula (3) a cada subintervalo y sumaremos los resultados. Como se indica en la figura 6.6.3, esto es equivalente a aproximar la gráfica de  $f$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$  mediante la curva poligonal que pasa por los puntos de la gráfica que corresponden a los puntos de la partición  $x_1, \dots, x_n$  en el eje  $x$ . Este resultado es

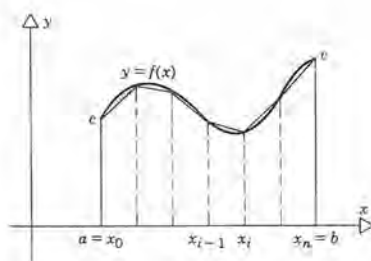


Figura 6.6.3 Aproximación con una poligonal.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\cong \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \frac{h}{2} \\
 &= \frac{h}{2} \{ [f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] \\
 &\quad + \cdots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \} \\
 &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \\
 &\quad + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Si hacemos que  $y_i = f(x_i)$  y representamos la aproximación trapezoidal a la integral (1) mediante  $T_n$ , entonces se puede escribir la ecuación 4 de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx \cong T_n = \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n). \quad (5)$$

La ecuación 5 se conoce como la **regla del trapecioide**. Nótese que se necesitan  $n + 1$  evaluaciones de la función, una más que cuando se emplea una suma de Riemann con la misma partición. Mencionamos el número de veces que se debe evaluar la función  $f$  porque es la consideración más importante para desarrollar un procedimiento general para evaluar en forma numérica una integral definida. La mayor parte del tiempo de cálculo que se invierte para evaluar  $T_n$  de acuerdo con la ecuación 5, o en emplear cualquier fórmula semejante de integración numérica, es para evaluar a  $f$  en un conjunto de puntos.

## EJEMPLO 1

Emplear la regla del trapecioide para aproximar el valor de

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx. \quad (6)$$

Recuérdese que en el ejemplo 3 de la sección 6.2 empleamos varias sumas de

**Tabla 6.4** Aproximaciones  
a  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$  empleando  
la regla del trapecioide.

$n$	$T_n$
10	0.9979431
20	0.9994860
40	0.9998716
80	0.9999679

Riemann para aproximar la integral dada. Desde luego, el valor exacto de la integral, de acuerdo con el teorema 6.4.3, es

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \quad (7)$$

Los resultados de emplear la regla del trapecioide para varios valores de  $n$  para evaluar esta integral se muestran en la tabla 6.4. Podemos comparar esos resultados con los de la tabla 6.3 de la sección 6.2, obtenida mediante sumas de Riemann en las que los puntos estrella se escogieron como los puntos medios de cada subintervalo. Para esta integral, las sumas de Riemann dan una aproximación más exacta que la regla del trapecioide. Si comparamos la tabla 6.4 con la última columna de la tabla 6.2, notaremos que los resultados concuerdan, a excepción de posibles diferencias en el último decimal, que probablemente se originan debido a distintos procedimientos de redondeo. Esto es, la regla del trapecioide da los mismos resultados que el valor medio de las sumas superior e inferior. Éste siempre es el caso para integrandos que son no decrecientes o no crecientes en el intervalo de integración. ■

Es natural, e importante, preguntar si se puede hacer alguna afirmación general acerca de la exactitud con la que la regla del trapecioide aproxima la integral correspondiente. Se puede llegar al siguiente resultado mediante métodos algo más avanzados que el nivel de este libro.

### Teorema 6.6.1

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , si existe  $f''$  en  $(a, b)$ , si  $T_n$  está dado por la fórmula del trapecioide (5) y si  $E_n$  es el error, entonces

$$\int_a^b f(x) \, dx = T_n + E_n \quad E_n = \frac{f(\xi)(b-a)h^2}{12}, \quad (8)$$

donde  $h = (b-a)/n$ ,  $n$  es el número de subintervalos en la partición de  $[a, b]$  y  $\xi$  es algún número del intervalo  $(a, b)$ .



Como el teorema no nos da información acerca de cómo determinar el número  $\xi$ , se emplea en general la fórmula del error para dar una cota para el error. Si hay un número  $M_2$  tal que  $|f''(x)| \leq M_2$  para  $a < x < b$ , entonces

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| = |E_n| = \frac{|f''(\xi)|(b-a)h^2}{12} \leq \frac{M_2(b-a)h^2}{12} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \quad (9)$$

Nótese que  $M_2$  no depende de  $n$ . Por tanto, para  $a$  y  $b$  fijos, el error  $E_n$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , cosa que intuitivamente esperábamos. (Véase también el Probl. 23.) Además,  $E_n$  es proporcional al cuadrado del tamaño del paso  $h$ . Si reducimos el tamaño del paso por un factor de  $\frac{1}{2}$ , o sea, si duplicamos el número de pasos, se reduce el error por un factor de  $\frac{1}{4}$ ; si se reduce el tamaño del paso por un factor de  $\frac{1}{10}$ , se reduce el error por un factor de  $\frac{1}{100}$ . Desde luego, el precio para esta reducción en el error es el número adicional de veces que se debe calcular  $f(x)$  cuando se aumenta  $n$ .

Al emplear la fórmula (9) para estimar la exactitud de la aproximación  $T_n$  debemos hacer notar dos cosas.

1. En general, al encontrar una cota  $M_2$  para  $|f''(x)|$  no encontraremos la mejor posible.
2. Aun cuando encontremos el mejor valor posible de  $M_2$ , es improbable que  $M_2 = f''(\xi)$ , donde  $\xi$  es el punto en el cual se alcanza la igualdad en la ecuación 8.

Así, en general, nuestra cota para el error es tan sólo eso: una cota. En el problema 25 se da una fórmula muy útil para estimar, pero no para acotar, el error en que se incurre al emplear la regla del trapecioide.

## EJEMPLO 2

Estimar el error al usar la regla del trapecioide para evaluar la integral  $\int_a^b \sin x dx$  del ejemplo 1.

En este caso,  $f(x) = \sin x$ , de manera que  $f''(\xi) = -\sin \xi$ . En el intervalo  $[0, \pi/2]$  estamos seguros tan sólo de que  $0 \leq \sin \xi \leq 1$ , por lo que  $M_2 = 1$  es el mejor valor posible. Entonces, de acuerdo con la ecuación 9, obtenemos

$$|E_n| \leq \frac{(\pi/2)^3}{12n^2} \cong \frac{0.322982}{n^2}. \quad (10)$$

Los errores reales por emplear la regla del trapecioide para esta integral se pueden ver en la tabla 6.4 y se muestran en la tabla 6.5 junto con las cotas para el error calculadas con la ecuación 10. Obsérvese que, aun cuando usamos el óptimo valor posible de  $M_2$ , la cota para el error (10) sobreestima el error real en más de 50 por ciento. Este resultado no es raro de ninguna manera. ■

**Tabla 6.5** Errores que aparecen al emplear la regla del trapecioide para aproximar  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ .

$n$	Error real	Cota para el error de acuerdo con la ecuación 10
10	0.0020569	0.0032298
20	0.0005140	0.0008075
40	0.0001284	0.0002019
80	0.0000321	0.0000505

### EJEMPLO 3

Si la integral

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{2 + x^2}$$

se ha de calcular empleando la regla del trapecioide con un error menor que  $5 \times 10^{-4}$ , ¿qué valor de  $n$  se debe emplear?

Según la ecuación 9, sabemos que

$$|E_n| \leq \frac{M_2(2-0)^3}{12n^2} = \frac{2M_2}{3n^2}, \quad (11)$$

en la cual  $M_2$  es una cota para  $|f''(x)|$  en  $(0, 2)$  siendo  $f(x) = (2 + x^2)^{-1}$ . Debemos determinar a  $M_2$  para seleccionar a continuación a  $n$  de tal forma que  $2M_2/3n^2 < 5 \times 10^{-4}$ . Tenemos

$$f'(x) = \frac{-2x}{(2 + x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(2 + x^2)^2} + \frac{(-2x)(-2)(2x)}{(2 + x^2)^3} = \frac{-2(2 - 3x^2)}{(2 + x^2)^3}.$$

Para encontrar una cota para

$$|f''(x)| = \frac{2|2 - 3x^2|}{(2 + x^2)^3} \quad \text{en} \quad 0 < x < 2$$

hacemos a  $|2 - 3x^2|$  lo más grande que sea posible, por ejemplo 10 en  $x = 2$  y a  $(2 + x^2)^3$  tan pequeño como sea posible como, por ejemplo, 8 cuando  $x = 0$ . Por tanto, en  $0 < x < 2$ ,

$$|f''(x)| \leq \frac{2(10)}{8} = 2.5 = M_2. \quad (12)$$

A continuación seleccionamos a  $n$  de tal modo que se satisfaga la desigualdad

$$\frac{2(2.5)}{3n^2} < 5 \times 10^{-4}.$$

Para esto se necesita que

$$n^2 > \frac{10^4}{3},$$

o sea

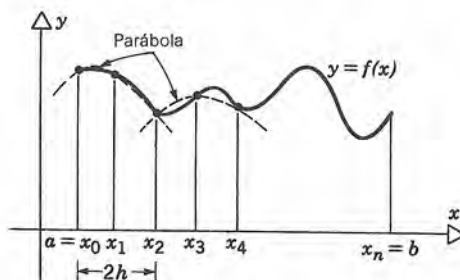
$$n > 57.73.$$

Así, si seleccionamos a  $n \geq 58$ , podremos estar seguros de que el error al evaluar  $I$  es menor que  $5 \times 10^{-4}$ . No podemos asegurar que si  $n < 58$  el error será mayor que  $5 \times 10^{-4}$ . Es muy probable que se puedan emplear valores de  $n$  mucho menores que 58, ya que no hemos obtenido el mejor valor posible de  $M_2$ . Con algo más de trabajo, podemos demostrar que el máximo de  $|f''(x)|$  en  $0 \leq x \leq 2$  se obtiene en  $x = 0$  y es  $\frac{1}{2}$ . Si usamos  $\frac{1}{2}$  para  $M_2$  en lugar de 2.5, encontraremos que se necesita que  $n \geq 26$ . Todavía este valor de  $n$  podría ser demasiado grande, ya que  $M_2$  probablemente sea mayor que el valor de  $f''(\xi)$  que da la igualdad en la ecuación 8. ■

### Regla de Simpson

Es un esquema de aproximación mucho más exacto que la regla del trapecoide, pero no necesita de mayor esfuerzo de cálculo. En lugar de aproximar la gráfica de  $y = f(x)$  mediante un segmento de recta en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , se aproxima mediante un arco de parábola en cada uno de los subintervalos  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Como ahora empleamos dos intervalos de partición para cada subintervalo, debemos hacer que  $n$  sea un *entero par*.

En cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , se seleccionan los tres coeficientes de la parábola de aproximación de tal modo que la parábola pase por los puntos  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$ , y  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Esto se ve en la figura 6.6.4. Así, si la parábola de aproximación en  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  es  $Ax^2 + Bx + C$ , entonces seleccionamos a  $A$ ,  $B$  y  $C$  de tal modo que



**Figura 6.6.4** Aproximación parabólica.



$$\begin{aligned}
 A(x_i - h)^2 + B(x_i - h) + C &= f(x_{i-1}) = y_{i-1}, \\
 Ax_i^2 + Bx_i + C &= f(x_i) = y_i, \\
 A(x_i + h)^2 + B(x_i + h) + C &= f(x_{i+1}) = y_{i+1}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

En las ecuaciones 13 hemos escrito  $x_{i-1}$  en lugar de  $x_i - h$ , y  $x_{i+1}$  en lugar de  $x_i + h$ , donde es  $h$  la anchura uniforme de la partición. Dejaremos a un lado, por el momento, el procedimiento algebraico para despejar a  $A$ ,  $B$  y  $C$  de las ecuaciones 13.

A continuación aproximamos la integral de  $f$  en  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  mediante

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx = \int_{x_i-h}^{x_i+h} (Ax^2 + Bx + C) dx. \tag{14}$$

Sucede que cuando se despejan  $A$ ,  $B$  y  $C$  de las ecuaciones 13, se sustituyen en la ecuación 14 y se lleva a cabo la integración, el resultado es

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}). \tag{15}$$

En el problema 26 se describen los detalles de las operaciones algebraicas, que son algo largas.

Podemos emplear ahora la fórmula (15) para deducir la regla de Simpson.\* Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \\
 &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\
 &\quad + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)
 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx \approx S_n &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\
 &\quad + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).
 \end{aligned} \tag{16}$$

La ecuación 16 es la regla de Simpson. Obsérvese que involucra el mismo número de

---

\* La idea de evaluar una integral reemplazando el integrando por un polinomio adecuado de interpolación apareció en los *Principia* de Newton en 1687. El método se desarrolló después con alguno de los seguidores de Newton, incluyendo a Roger Cotes (1682-1716) y James Stirling (1692-1770), quienes ya conocían lo que hoy llamamos la regla de Simpson. Algunos años después Thomas Simpson (1710-1761) redescubrió esta fórmula de integración aproximada, la publicó (1743) en un libro de ensayos matemáticos y ahora se asocia con su nombre. En su tiempo, Simpson fue conocido como autor de textos famosos de álgebra, geometría y trigonometría, que se continuaron publicando durante muchos años después de su muerte.

evaluaciones que la regla del trapecioide. También podemos dar una fórmula para el error de la aproximación de Simpson.

### Teorema 6.6.2

Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , si existe  $f^{iv}$  en  $(a, b)$ , si  $S_n$  está dada por la ecuación 16 y si  $E_n$  es el error, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = S_n + E_n, \quad E_n = -\frac{f^{iv}(\xi)(b-a)h^4}{180}, \quad (17)$$

en la cual  $h = (b-a)/n$ ,  $n$  es el número (par) de subintervalos iguales en la partición de  $(a, b)$  y  $\xi$  es algún número del intervalo  $(a, b)$ .

Como en el caso de la regla del trapecioide, podemos emplear la ecuación 17 para obtener una cota para el error. Si hay un número  $M_4$  tal que  $|f^{iv}(x)| \leq M_4$  en  $a < x < b$ , entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| &= |E_n| = \frac{|f^{iv}(\xi)|(b-a)h^4}{180} \\ &\leq \frac{M_4(b-a)h^4}{180} = \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}. \end{aligned} \quad (18)$$

De acuerdo con la ecuación 18, la cota para el error al emplear la regla de Simpson es proporcional a  $h^4$ , mientras que para la regla del trapecioide es proporcional a  $h^2$ . Así, aunque la regla de Simpson no es más complicada que la regla del trapecioide, es mucho más exacta. En realidad, si se reduce el tamaño del paso por un factor de  $\frac{1}{2}$ , se reduce la cota para el error por un factor de  $\frac{1}{16}$ ; si se reduce el tamaño del paso  $h$  por un factor de  $\frac{1}{10}$ , la cota para el error se reduce por un factor de  $\frac{1}{10,000}$ . Probablemente sea seguro decir que la regla de Simpson, o alguna de sus variantes, es la fórmula que se usa con más frecuencia en la integración numérica. Desafortunadamente, no siempre es fácil emplear la estimación del error (18), ya que es necesario obtener una cota  $M_4$  para  $|f^{iv}(x)|$ , y  $f^{iv}$  puede ser una función complicada. Por último, nótese que si  $f$  es un polinomio de grado menor que cuatro, entonces  $f^{iv} = 0$  para toda  $x$  y el error debe ser cero, y por consiguiente la regla de Simpson da el valor exacto de la integral.

### EJEMPLO 4

Emplear la regla de Simpson para evaluar la integral  $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$  del ejemplo 1, y emplear la cota para el error (18) para estimar el error.

En la tabla 6.6 aparecen los resultados del empleo de la regla de Simpson. Nótese que se obtiene una aproximación mucho mayor empleando la regla de Simpson con  $n = 10$ , que con la regla del trapecioide con  $n = 80$ . En realidad, la regla de Simpson

**Tabla 6.6** Aproximaciones a  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$  empleando la regla Simpson

$n$	$S_n$	Cota para el error de la ecuación 19
10	1.000003	0.000005
20	1.000000	0.000000322
40	1.000000	0.0000000207
80	1.000000	0.0000000012

es exacta hasta seis cifras decimales cuando  $n = 20$ . En este caso es fácil de aplicar la cota para el error (18), ya que  $f^{iv}(x) = \sin x$ , y por tanto podemos emplear  $M_4 = 1$ . En consecuencia

$$|E_n| \leq \frac{(\pi/2)^5}{180n^4} \cong \frac{0.053128}{n^4}. \quad (19)$$

Las cotas de acuerdo con la ecuación 19 se muestran en la última columna de la tabla 6.6. Si comparamos los resultados de la tabla 6.6 con los de las tablas 6.4 y 6.5 veremos claramente la ganancia en la exactitud que se obtiene cuando se emplea la regla de Simpson, en comparación con la regla del trapecioide. ■

Si es difícil emplear la cota para el error (18) debido a que  $f^{iv}(x)$  es una función complicada, entonces podemos proceder de modo más *ad hoc*. Por ejemplo, si duplicamos el número de puntos de la partición y nos encontramos con que el resultado no varía hasta determinado número de decimales, podemos llegar a la conclusión, con razonable seguridad, de que esos decimales están calculados correctamente, o sea, que son exactos.

## EJEMPLO 5

Emplear la regla del trapecioide y la regla de Simpson para evaluar

$$\int_0^{\pi/3} \tan x \, dx. \quad (20)$$

Todavía no tenemos modo alguno de determinar una antiderivada de  $\tan x$  y por tanto no podemos evaluar esta integral mediante el teorema 6.4.3. Si aplicamos la regla del trapecioide y la regla de Simpson, obtendremos los resultados de la tabla 6.7. Como los valores obtenidos mediante la regla de Simpson para  $n = 40$  y para  $n = 80$  concuerdan hasta seis cifras decimales, podemos confiar bastante en que son correctos y en que

$$\int_0^{\pi/3} \tan x \, dx \cong 0.693147. \quad (21)$$



**Tabla 6.7** Aproximaciones a  $\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx$  empleando la regla del trapecioide y la regla de Simpson

$n$	$T_n$	$S_n$
10	0.6958760	0.6931951
20	0.6938318	0.6931503
40	0.6933186	0.6931474
80	0.6931900	0.6931472

Obsérvese también en la tabla 6.7 que la regla de Simpson sólo con 10 subintervalos da casi la misma exactitud que la regla del trapecioide con 80 subintervalos, mostrando de nuevo que la regla de Simpson da una exactitud mucho mayor. ■

## PROBLEMAS

Los problemas 1 a 16 piden la evaluación numérica de varias integrales definidas. Se pueden llevar a cabo los cálculos necesarios con una calculadora de bolsillo para  $n = 10$ , pero para valores mayores de  $n$  se debe emplear una calculadora programable o, de preferencia, una computadora.

En los problemas 1 a 16 emplear la regla del trapecioide y la regla de Simpson para determinar los valores aproximados de la integral que se pide. Hacer  $n = 10, 20, 40$  y  $80$ . Siempre que sea posible, comparar sus resultados con el valor exacto de la integral, obtenido empleando el teorema 6.4.3. También, siempre que sea posible, comparar con los resultados de los problemas 15 a 22 de la sección 6.2.

1.  $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$

2.  $\int_0^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$

3.  $\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$

4.  $\int_1^3 (4-x^2) \, dx$

5.  $\int_{1/2}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$

6.  $\int_0^\pi x \cos x \, dx$

7.  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \sin 2x \, dx$

8.  $\int_0^2 \frac{dx}{(1+x)^2}$

9.  $\int_0^1 x^2 \sin x \, dx$

10.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

11.  $\int_0^\pi \sqrt{\sin \frac{x}{2}} \, dx$

12.  $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx$

13.  $\int_0^2 \sqrt{1+2x} \, dx$

14.  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x} \, dx$

15.  $\int_0^\pi \cos(\theta - 0.5 \sin \theta) \, d\theta$

16.  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$

En los problemas 17 a 20 emplear el límite adecuado para el error para determinar qué tan grande debe ser  $n$  para que el error en la evaluación de la integral dada sea menor que  $10^{-4}$ . Para cada una de las integrales emplear

(a) La regla del trapecioide.

(b) La regla de Simpson.

Comparar los resultados con los resultados de los problemas indicados.

17.  $\int_{1/2}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ ; ver problema 5

18.  $\int_0^2 \frac{dx}{(1+x)^2}$ ; ver problema 8
19.  $\int_0^2 \sqrt{1+2x} \, dx$ ; ver problema 13
20.  $\int_0^\pi \sin^2 x \, dx$ ; ver problema 12

©21. A veces es necesario evaluar una integral cuyo integrando no está dado por fórmula analítica alguna. Por ejemplo, los cálculos demuestran\* que para determinadas condiciones de funcionamiento la relación  $p$  de la presión en un cojinete unidimensional de corredera con gas a la temperatura ambiente está dada como una función de la posición  $x$  de acuerdo con los datos de la tabla 6.8. La capacidad de carga  $W$  del cojinete está dada por  $W/BLp_a = \int_0^1 [p(x) - 1]dx$ , donde  $B$  y  $L$  son el ancho y la longitud del cojinete, respectivamente, y  $p_a$  es la presión del ambiente. Calcular el valor aproximado de  $W$  empleando la regla de Simpson.

**Tabla 6.8 Datos para el problema 21**

$x$	$p$	$x$	$p$
0	1.000	$\frac{7}{12}$	1.303
$\frac{1}{12}$	1.035	$\frac{8}{12}$	1.352
$\frac{2}{12}$	1.072	$\frac{9}{12}$	1.394
$\frac{3}{12}$	1.113	$\frac{10}{12}$	1.411
$\frac{4}{12}$	1.157	$\frac{11}{12}$	1.355
$\frac{5}{12}$	1.204	1	1.000
$\frac{6}{12}$	1.253		

©22. Comprobar que empleando la regla de Simpson con  $n = 4$  y  $n = 8$  para evaluar  $\int_{21}^3 x^3 dx$  se obtiene la respuesta exacta. Este resultado es, desde luego, válido para cualquier  $n$  par.

23. Demostrar que la fórmula del trapecioide (5) se puede escribir en la forma

$$T_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i + \frac{1}{2}[f(a) - f(b)]h,$$

$$\Delta x_i = h.$$

Ya que la suma del lado derecho de esta ecuación es una suma de Riemann para  $\int_a^b f(x) \, dx$  y como  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b f(x) \, dx.$$

24. Demostrar que si  $f$  es creciente en  $[a, b]$ , o decreciente en el mismo intervalo, entonces para cada  $n$  la regla del trapecioide da la misma aproximación a  $\int_a^b f(x) \, dx$  que el valor medio de las sumas superior e inferior.
25. En el texto habremos notado que, mientras que la ecuación 9 da una cota para el error al emplear la regla del trapecioide, puede no dar una estimación exacta de ese error. Hay una estimación\*\* útil dada por

$$E_n \cong \frac{-(b-a)^2}{12n^2} [f'(b) - f'(a)]. \quad (i)$$

Nótese que esto es una estimación del error, y no una cota para el mismo. Sin embargo, es de uso muy sencillo, ya que no es necesario calcular y acotar a  $f''(x)$ . Además, la fórmula (i) no involucra valor absoluto alguno y por tanto da la dirección del error.

(a) Emplear la ecuación (i) para estimar el error en los valores calculados de  $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$  del ejemplo 1. Comparar estas estimaciones con los datos de la segunda columna de la tabla 6.5.

(b) Emplear la ecuación (i) para estimar el valor par de  $n$  que se necesita para evaluar  $\int_0^2 (2+x^2)^{-1} dx$  con un error "menor" que  $5 \times 10^{-4}$ , y comparar el resultado con el que se obtuvo en el ejemplo 3.

26. En este problema deduciremos la fórmula (15). Esto es, si  $y = g(x) = Ax^2 + Bx + C$ , entonces

$$\int_{x_i-h}^{x_i+h} (Ax^2 + Bx + C) \, dx$$

$$= \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}), \quad (i)$$

en la cual  $y_i = g(x_i)$ . La deducción es particularmente fácil para el caso en que  $x_i = 0$ , caso que veremos primero.

(a) Demostrar que

\* W. A. Gross, *Gas Film Lubrication* (Lubricación con membrana gaseosa), Wiley New York, 1962, Pág. 71.

\*\* E. Rozema, *American Mathematical Monthly*, 87, 1980, Págs. 124-128.

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{2}{3}Ah^3 + 2Ch. \quad (ii)$$

Así, para  $x_i = 0$ ,  $B$  no aparece en el resultado y sólo es necesario despejar a  $A$  y  $C$  del sistema de ecuaciones 13. Empleando  $x_i = 0$  tenemos inmediatamente que  $C = y_i$ . Demostrar que  $A = (y_{i-1} + y_{i+1} - 2y_i)/2h^2$ . Sustituyendo  $A$  y  $C$  en la ecuación (ii) se obtiene la fórmula (i).

(b) Para el caso en que  $x_i \neq 0$ , demostrar que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx$$

$$= \frac{h}{3} [A(6x_i^2 + 2h^2) + B(6x_i) + 6C]. \quad (iii)$$

Despejando a  $C$  de la segunda de las ecuaciones 13 y sustituyendo en la ecuación (iii) se obtiene

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx = \frac{h}{3} (2h^2A + 6y_i). \quad (iv)$$

Con ello sólo necesitamos despejar a  $A$  de las ecuaciones 13. Demostrar que  $2h^2A = y_{i-1} + y_{i+1} - 2y_i$ . Sustituyendo a  $2h^2A$  de la ecuación (iv) se obtiene la fórmula (i).

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 8 evaluar la suma que se pide.

$$1. \sum_{j=1}^5 \frac{1}{j^2 + 1}$$

$$2. \sum_{j=12}^{14} \sin^2 \frac{j\pi}{4}$$

$$3. \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

$$\text{Hint: } \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{?}{k+2} - \frac{?}{k+3}$$

$$4. \sum_{k=2}^{16} \frac{1}{k^2(k+1)(k-1)}$$

$$\text{Hint: } \frac{1}{k^2(k+1)(k-1)} = \frac{?}{k^2-1} - \frac{?}{k^2}$$

$$5. \sum_{k=0}^{52} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3})$$

$$6. \sum_{k=1}^{29} (k^2 + 1)$$

$$7. \sum_{n=1}^{32} (2n+1)(n-3)$$

$$8. \sum_{k=3}^{20} k^2$$

En los problemas 9 a 12 expresar la suma en notación  $\Sigma$ .

$$9. \sin(3x+1) + \sin(4x+3) + \sin(5x+5) + \cdots + \sin(11x+17)$$

$$10. (-1) + (4x^2 - 2) + (8x^2 - 3) + (12x^2 - 4) + \cdots + (56x^2 - 15)$$

$$11. \frac{1}{x^2} - \frac{2}{2x^2} + \frac{4}{3x^2} - \frac{8}{4x^2} + \cdots - \frac{128}{8x^2}$$

$$12. \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^2} - \frac{5}{3x^2} - \frac{7}{4x^2} + \frac{9}{5x^2} + \frac{11}{6x^2} - \cdots + \frac{25}{13x^2} + \frac{27}{14x^2} - \frac{29}{15x^2} - \frac{31}{16x^2}$$

En los problemas 13 a 17, comparar la suma superior  $\sigma$ , la suma inferior  $s$  y la suma de Riemann  $S$  usando  $x_i^* = x_i + (\Delta x_i/2)$ . ¿Cuál es la mejor estimación?

$$13. \int_1^6 (x^2 + 3) dx; \quad \Delta = \{1, 1.5, 2, 3, 4.5, 5.5, 6\}$$

$$14. \int_{-1}^3 \frac{1}{2+x} dx; \quad \Delta = \{-1, -0.5, 0, 2, 2.25, 3\}$$

$$15. \int_{-3}^3 x^3 dx; \quad \Delta = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$16. \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx; \quad \Delta = \{1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.75, 2\}$$



$$17. \int_{-2}^5 (x-1)(x+2)(x-4) dx;$$

$$\Delta = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

En los problemas 18 a 22 evaluar la integral dada.

$$18. \int_0^4 (\sqrt{16-x^2} + 3x^2) dx$$

$$19. \int_0^2 [(1+2x)^2 - \sqrt{4-x^2}] dx$$

$$20. \int_{-3}^8 f(x) dx,$$

$$\text{where } f(x) = \begin{cases} x, & -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{9-x^2}, & 0 < x < 3 \\ 1+x^2, & 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$21. \int_0^{10} f(x) dx,$$

$$\text{where } f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2}, & 0 \leq x \leq 5 \\ (3x-2)^2, & 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

$$22. \int_0^3 (x^2 + \sqrt{9-x^2}) dx$$

En los problemas 23 y 24 demostrar que es cierta la desigualdad dada.

$$23. \frac{8}{\sqrt{109}} \leq \int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} \leq \frac{8}{\sqrt{13}}$$

$$24. 10 \leq \int_{-2}^3 (x^2 + 7x + 12) dx \leq 210$$

En los problemas 25 a 27 calcular el valor medio de la integral dada.

$$25. \int_{2\pi}^{5\pi/2} \sin 2x dx \quad 26. \int_0^{10} (x^2 - 10x + 21) dx$$

$$27. \int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$$

En los problemas 28 a 50, evaluar la integral dada empleando, de ser necesario, las sustituciones adecuadas.

$$28. \int_{-2}^6 (3x^4 - 2x + 1) dx$$

$$29. \int_{-5}^{10} f(x) dx,$$

$$\text{where } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & -5 \leq x < 0 \\ \sqrt{50-2x^2}, & 0 \leq x \leq 5 \\ x, & 5 < x \leq 10 \end{cases}$$

$$30. \int_6^{10} |x^2 - 16x + 63| dx \quad 31. \int_{\pi/2}^{7\pi/12} \sin^2 3x dx$$

$$32. \int_1^3 \frac{3x^5 + x + 1}{x^3} dx \quad 33. \int_a^x \sin^2 \left( t + \frac{\pi}{4} \right) dt$$

$$34. \int_a^x t^2 \sin(t^3 + \pi) dt$$

$$35. \int_{-\sqrt{\pi/2}}^{2\sqrt{\pi/3}} t \sin^2(3t^2) \cos(3t^2) dt$$

$$36. \int_1^4 \frac{t^{1/2}}{\sqrt{1+t^{3/2}}} dt \quad 37. \int_0^{\pi/4} t^{-1/2} \sin(\pi + t^{1/2}) dt$$

$$38. \int_1^4 t^{3/2} (1 + t^{5/2})^2 dt$$

$$39. \int_{-1/2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-4t}} dt$$

$$40. \int_0^{\pi/2} [\sin(\cos x + x) \sin x - \sin(\cos x - x)] dx$$

$$41. \int_0^1 t(t^{1/2} + t^2)^2 dt \quad 42. \int_1^2 \frac{\sqrt{3t}}{(t^{3/2} + 1)^2} dt$$

$$43. \int_0^1 \frac{1-t^6}{1+t^{3/2}} dt \quad 44. \int_a^b t \cot(t^2) \csc^3(t^2) dt$$

$$45. \int_{-1}^3 t^2(1+t)^{1/2} dt \quad 46. \int_4^6 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$47. \int_a^b 2x^2 \sqrt{\frac{x^3}{2} + 1} dx \quad 48. \int_2^4 t(2+3t)^{-1/3} dt$$

$$49. \int_0^{\pi/2} (x + \pi) \cos(x^2 + 2\pi x + \pi^2) dx$$

$$50. \int_0^{\pi/4} \tan x \sec^4 x dx$$

En los problemas 51 y 52 emplear las estimaciones para el error para la regla del trapecio y la regla de Simpson para determinar una  $n$  suficiente que asegure que  $|E_n| < 0.001$ .

$$51. \int_0^{\pi} \sin x^2 dx$$

$$52. \int_1^4 \frac{x^7 + 1}{x} dx$$

En los problemas 53 a 56 estimar el valor de la integral empleando la regla del trapecio y la regla de Simpson haciendo (a)  $n = 10$ ; (b)  $n = 20$ ; (c)  $n = 40$ ; (d)  $n = 80$ .

• 53.  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx$

• 54.  $\int_1^3 \frac{1}{x^2 \sqrt{x+1}} \, dx$

• 55.  $\int_0^{10} x^{3/2} \cos^2 x \, dx$

• 56.  $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^{1/2}} \, dx$

# CÁLCULO

## Capítulo 7

### Aplicaciones de la integral

En el capítulo 6 se encontró el área de una región “arbitraria” aproximando con muchos rectángulos delgados y a continuación pasando al límite cuando el número de rectángulos tiende a infinito y el área de cada uno de ellos tiende a cero. La integración es la abstracción matemática de este proceso, que se define volviendo a enunciar el procedimiento en un lenguaje libre de terminologías asociadas con aplicaciones geométricas o de otra índole. Una vez comprendida la integración como operación puramente matemática, se puede aplicar al cálculo de una amplia variedad de cantidades que se pueden expresar como suma de un gran número de términos individualmente pequeños.

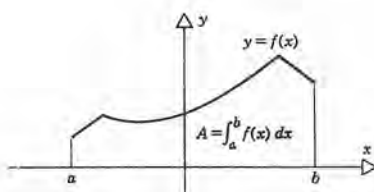
A continuación examinaremos varios casos en los que la integración aparece de modo natural de esta manera. Las particularidades comunes a cada problema son que se expresa una cantidad de interés en forma de suma, a continuación se toma el límite cuando el número de términos aumenta sin cota y la magnitud de cada término disminuye hasta cero. Si, a medida que se refina la aproximación, hay un equilibrio entre el número creciente de términos y el tamaño en disminución de cada uno, entonces el resultado es una expresión de la cantidad dada como una integral. Es una ventaja enorme porque los métodos que se desarrollaron en las secciones 6.4 a 6.6, así como los que se verán después en los capítulos 8 y 9, se pueden emplear para evaluar en forma sistemática las integrales requeridas.



## 7.1 MÁS SOBRE ÁREAS DE REGIONES PLANAS

Se dice que una región plana  $R$  está **acotada** si se puede incluir dentro de un rectángulo de tamaño adecuado. Por otro lado, si no existe ese rectángulo, entonces  $R$  es **no acotada**. En la sección 6.2 expresamos el área de la región (véase figura 7.1.1) delimitada por la gráfica de una función continua  $f$  no negativa, el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  como la integral

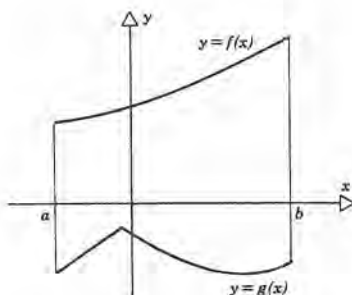
$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$



**Figura 7.1.1** Área bajo la gráfica de una función continua no negativa.

A continuación deseamos mostrar cómo calcular las áreas de regiones acotadas algo más generales.

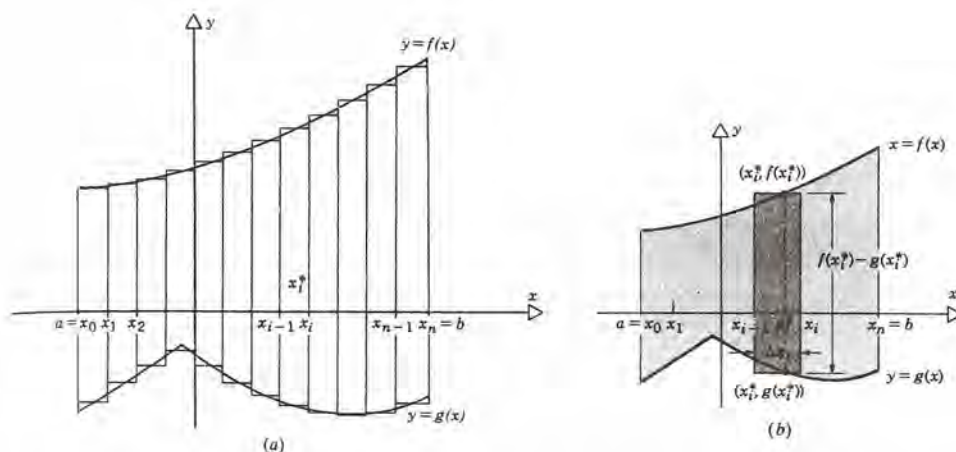
Supongamos que las funciones  $f$  y  $g$  son continuas y que satisfacen  $g(x) \leq f(x)$  en  $[a, b]$ . ¿Cómo definimos al área de la región que muestra la figura 7.1.2, entre las gráficas de esas funciones y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ ?



**Figura 7.1.2** Área comprendida entre las gráficas de  $f$  y  $g$ .

Es natural proceder como lo hicimos antes para definir el área bajo la gráfica de una función continua no negativa. Dividimos el intervalo  $[a, b]$ , escogemos puntos estrella y construimos rectángulos de aproximación como se ve en la figura 7.1.3a. En la figura 7.1.3b se muestra el rectángulo especial cuya base es  $\Delta x_i$  y su altura es  $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ . La suma de Riemann correspondiente

$$\sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x_i$$



**Figura 7.1.3** (a) Conjunto típico de rectángulos de aproximación. (b) El  $i$ ésimo rectángulo.

es una aproximación de lo que consideramos en forma intuitiva ser el área de la región en cuestión. Además, esta aproximación mejora a medida que la norma de la partición disminuye. Así, *definiremos el área de la región comprendida entre las gráficas de  $f$  y  $g$ , y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  como el número*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (2)$$

## EJEMPLO 1

Calcular el área de la región acotada por  $y = x^2/2$  y  $y = 3 \sin x$ , y las rectas  $x = \pi$  y  $x = 3\pi/2$ .

La región de interés se ve en la figura 7.1.4. Tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \left( \frac{x^2}{2} - 3 \sin x \right) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{6} + 3 \cos x \right) \Big|_{\pi}^{3\pi/2} \\ &= \frac{27\pi^3}{48} - \frac{\pi^3}{6} + 3 \\ &= 3 + \frac{19\pi^3}{48} \approx 15.273. \end{aligned} \quad (3) \quad \blacksquare$$

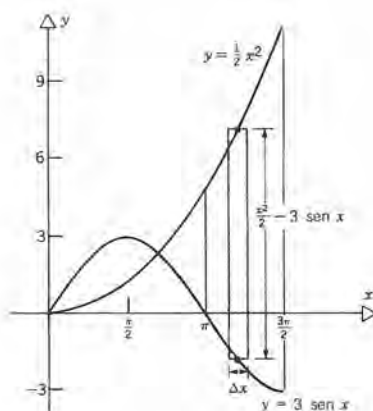


Figura 7.1.4

Nótese que si  $g(x) = 0$  en la ecuación 2, entonces necesariamente  $f(x) \geq 0$  y la ecuación 2 se reduce a la ecuación 1, como debería ser. Por otro lado, si  $f(x) = 0$  en la ecuación 2, entonces necesariamente  $g(x) \leq 0$  y la ecuación 2 establece que *el área acotada por una función continua no positiva  $g$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  está dada por*

$$A = \int_a^b [-g(x)] dx. \quad (4)$$

## EJEMPLO 2

Calcular el área de la región comprendida entre la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$  y el eje  $x$  entre  $x = -2$  y  $x = 3$ .

La curva  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$  y la región de interés aparecen en la figura 7.1.5. Nótese que  $f(x) \leq 0$  en  $[-2, 2]$  y  $f(x) \geq 0$  en  $[2, 3]$ . Los elementos genéricos en la suma de Riemann que aproximan al área en los intervalos para los cuales  $f(x) \leq 0$  y para los que  $f(x) \geq 0$  también se muestran. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 [-f(x)] dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx + \int_2^3 \left( \frac{1}{2}x^2 - 2 \right) dx \\ &= \left( -\frac{x^3}{6} + 2x \right) \Big|_{-2}^2 + \left( \frac{x^3}{6} - 2x \right) \Big|_2^3 \end{aligned}$$



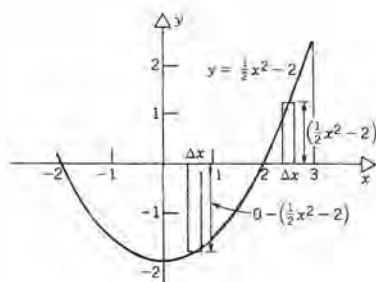


Figura 7.1.5

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \left( -\frac{8}{6} + 4 \right) - \left( \frac{8}{6} - 4 \right) \right] + \left[ \left( \frac{27}{6} - 6 \right) - \left( \frac{8}{6} - 4 \right) \right] \\
 &= -\frac{8}{3} + 8 + \frac{19}{6} - 2 = \frac{13}{2}. \blacksquare
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Los resultados que se dan en las ecuaciones 1 y 4 se pueden combinar como sigue:  
*el área A de la región comprendida entre la gráfica de una función continua f y el eje x desde x = a hasta x = b es*

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx. \tag{6}$$

En los intervalos en los que  $f(x) \geq 0$  tenemos que  $|f(x)| = f(x)$  como en la ecuación 1, y en aquellos en los que  $f(x) \leq 0$  se tiene  $|f(x)| = -f(x)$  como en la ecuación 4. Si se pueden determinar los intervalos para los cuales  $f(x) \geq 0$  y aquellos para los cuales  $f(x) \leq 0$ , entonces la integral de la ecuación 6 se puede escribir como suma de integrales en los intervalos respectivos.

También podemos volver a enunciar el resultado que aparece en la ecuación 2 en forma más general. Sean f y g dos funciones continuas en  $[a, b]$ . *Entonces el área A de la región comprendida entre las gráficas de f y g desde x = a, a x = b, es*

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx. \tag{7}$$

Nuevamente, para evaluar la integral en la ecuación 7, debemos determinar los intervalos en los cuales  $f(x) - g(x) \geq 0$  y aquellos en los que  $f(x) - g(x) \leq 0$ , para entonces escribir la integral de la ecuación 7 en forma de una suma de integrales en los intervalos respectivos.

Antes de considerar algunos ejemplos adicionales, haremos notar algunos linea-

mientos que se deberían seguir para determinar el área de una región acotada por las gráficas de funciones continuas.

1. Trazar un dibujo de la región y de sus fronteras. Observar si la región es simétrica con respecto a uno de los ejes coordenados, o quizá con respecto a alguna otra recta.
2. Para los problemas en los cuales interviene una sola función determinar los puntos, si es que los hay, en los cuales la curva cruza los ejes coordenados.
3. Si intervienen dos curvas, determinar sus puntos de intersección, si es que los hay.
4. Establecer un elemento genérico para el área de un rectángulo en la suma de Riemann que aproxime al área de la región. Comprobar la fórmula obtenida para la altura ( $\geq 0$ ) del rectángulo genérico al recorrer el intervalo de integración.
5. Establecer una integral o una suma de integrales que expresen el área de la región. Aprovechar cualesquiera propiedades de simetría que pueda tener la región.
6. Evaluar la integral o las integrales.

### EJEMPLO 3

Determinar el área de la región acotada que se encuentra arriba de la gráfica de  $y = 3|x|/2$  y por debajo de la parábola  $y = 1 + x^2/2$ .

En la figura 7.1.6 se muestra esta región. Para determinar los puntos de intersección

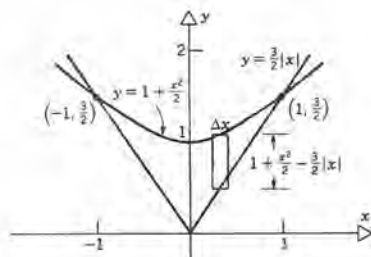


Figura 7.1.6

debemos resolver en forma simultánea las dos ecuaciones. Para  $x \geq 0$  tenemos que  $|x| = x$ ; en consecuencia

$$1 + \frac{x^2}{2} = \frac{3x}{2},$$

o bien

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) = 0.$$

La raíz relevante es  $x = 1$ , que corresponde a  $y = \frac{3}{2}$ . Análogamente, para  $x < 0$ , se obtiene  $x = -1$ ,  $y = \frac{3}{2}$ . Obsérvese que la región es simétrica con respecto al eje y. Por

tanto, podemos proceder a calcular el área de la mitad de la región, la parte para la que  $x \geq 0$ , para multiplicarla después por dos. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 \left( 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x \right) dx \\ &= 2 \left( x + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{4}x^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left( 1 + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} \right) = 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{6}. \end{aligned} \quad (8)$$

Nótese que si no aprovechamos la ventaja de la simetría de la región, entonces el cálculo será un poco más largo. En ese caso, de acuerdo con la ecuación 2 tenemos que

$$A = \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}|x| \right) dx.$$

Debemos entonces dividir la integral en dos partes porque  $|x|$  tiene distintas expresiones dependiendo de si  $x \geq 0$  ó si  $x \leq 0$ . Por tanto

$$A = \int_{-1}^0 \left( 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right) dx + \int_0^1 \left( 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x \right) dx.$$

Evaluando esas integrales se llega al mismo resultado que antes. ■

## EJEMPLO 4

Calcular el área de la región acotada por las curvas  $y = x$  y  $y = x^2$  entre  $x = 0$  y  $x = 2$ .

Primero hacemos un dibujo de las dos curvas, como se ve en la figura 7.1.7. Nótese que se intersecan en  $(1, 1)$ . A continuación trazamos dos rectángulos genéricos y observamos en la figura que la altura del rectángulo es  $x - x^2$  para  $0 \leq x \leq 1$  y es  $x^2 - x$  para  $1 \leq x \leq 2$ . Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left[ \left( \frac{8}{3} - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= 1. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (9)$$



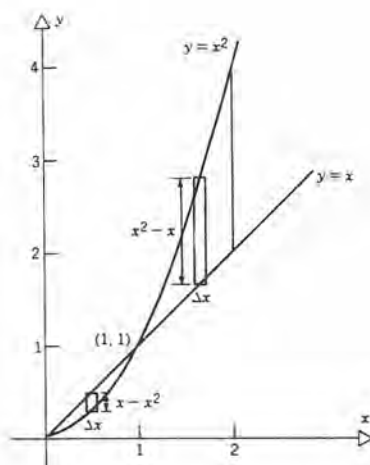


Figura 7.1.7

### EJEMPLO 5

Calcular el área de la región acotada entre las curvas  $y^2 = x + 1$  y  $y = x - 1$ .

Primero haremos un dibujo de las curvas. La curva  $y^2 = x + 1$  es una parábola que se abre hacia la derecha, y la función  $y = x - 1$  es una recta (véase figura 7.1.8a. Los puntos de intersección se determinan resolviendo en forma simultánea las dos ecuacio-

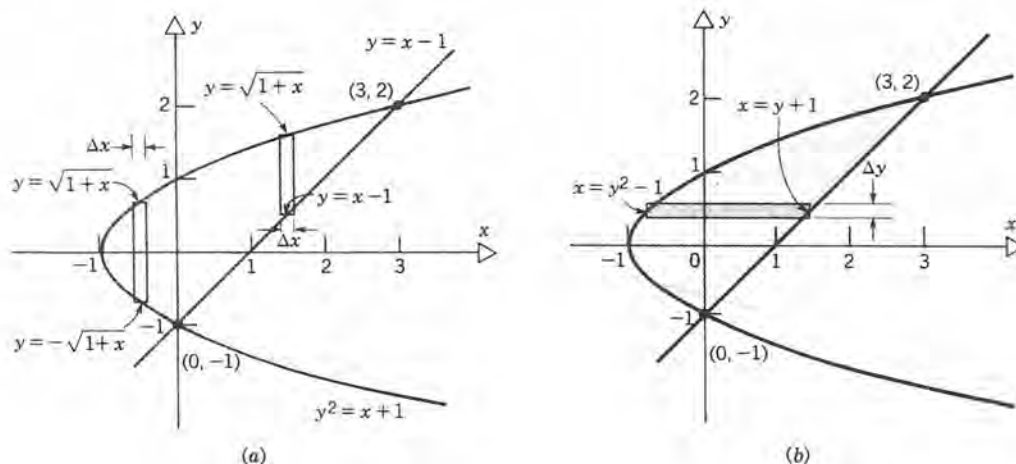


Figura 7.1.8 (a) Elementos verticales de área. (b) Elementos horizontales de área.

nes. De la segunda ecuación tenemos que  $x = 1 + y$ ; sustituyendo en la primera ecuación obtenemos

$$y^2 = (1 + y) + 1,$$

o bien

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

o bien

$$(y - 2)(y + 1) = 0.$$

Encontramos que  $x = 3$  corresponde a  $y = 2$ , y que  $x = 0$  corresponde a  $y = -1$ . Así, los puntos de intersección son  $(0, -1)$  y  $(3, 2)$ .

A continuación dibujamos un elemento genérico de la suma de aproximación. Nótese que para  $-1 \leq x \leq 0$  la región está acotada por la rama superior de la parábola,  $y = \sqrt{1+x}$ , y la rama inferior de la misma,  $y = -\sqrt{1+x}$ . Sin embargo, para  $0 \leq x \leq 3$  la frontera inferior de la región es  $y = x - 1$ . Así, hemos expresado el área total como la suma de las áreas de dos regiones.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 [\sqrt{1+x} - (-\sqrt{1+x})] dx + \int_0^3 [\sqrt{1+x} - (x-1)] dx \\ &= 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1+x} dx + \int_0^3 [\sqrt{1+x} - (x-1)] dx \\ &= 2 \left[ \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{(1+x)^{3/2}}{3/2} - \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \right]_0^3 \\ &= 2 \left( \frac{2}{3} \right) + \left[ \frac{2}{3} (8-1) - \left( \frac{9}{2} - 3 \right) \right] = \frac{9}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Es algo más fácil calcular el área en cuestión si formamos sumas de Riemann con un elemento genérico como el que muestra la figura 7.1.8b; esto es, si integramos con respecto a  $y$  en lugar de hacerlo con respecto a  $x$ . En este caso el intervalo de integración es  $-1 \leq y \leq 2$ . La longitud del elemento genérico es  $(1+y) - (-1+y^2)$  para toda  $y$  en el intervalo de integración. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [(1+y) - (-1+y^2)] dy \\ &= \int_{-1}^2 (2+y-y^2) dy \\ &= \left[ 2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \left( 4 + 2 - \frac{8}{3} \right) - \left( -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (11)$$

El ejemplo 5 muestra que a veces puede uno calcular un área integrando tanto con respecto a  $x$  o bien con respecto a  $y$ . En algunos casos una de las maneras resulta bastante más fácil que la otra y por tanto al resolver un problema de integración debe uno tener en cuenta ambas posibilidades. En el ejemplo 5 la integración con respecto a  $x$  necesitaba de la evaluación de dos integrales, mientras que la integración con respecto a  $y$  sólo requirió de una.

Al calcular las áreas de regiones bastante complicadas con frecuencia es deseable subdividir a la región original en subregiones y después sumar las áreas de las subregiones. Con frecuencia se puede hacer esto en más de una forma. Es muy posible que un modo de subdividir un área conduzca a integrales difíciles de evaluar, mientras que otro modo puede conducir a integrales más sencillas. Así, en cualquier problema moderadamente complicado, se debe pensar algo en cómo reducir al mínimo el esfuerzo de cálculo necesario.

Terminaremos esta sección con algunas anotaciones más acerca del concepto de área. Recuérdese que en las secciones 6.1 y 6.2 empleamos nuestra apreciación intuitiva de área para buscar una definición de la integral de Riemann. Sin embargo, esta definición se dio en forma analítica y sin recurrir a ideas ni lenguaje geométricos. A continuación, una vez definida la integral, definimos el área de una región dada como el valor de una integral correspondiente. Hasta ahora nos hemos restringido a determinadas regiones limitadas por las gráficas de funciones continuas y quizá por partes de los ejes coordenados u otros segmentos de rectas. Sin embargo, una vez expresadas las áreas como integrales, es natural extender el concepto de área a cualquier región para la que exista una integral correspondiente, aun cuando el integrando pueda tener numerosas discontinuidades. Verdaderamente, puede uno remplazar la palabra “continuo” por la palabra “integrable” en la definición 6.2.2 y en los enunciados semejantes de esta sección. Por ejemplo, si  $f$  y  $g$  son dos funciones integrables en el intervalo  $[a, b]$ , entonces el área entre sus gráficas desde  $x = a$  hasta  $x = b$  se puede definir como

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \quad (12)$$

lo cual concuerda con la definición anterior (7) si  $f$  y  $g$  son continuas. De este modo podemos asignar un área a algunos conjuntos muy complicados de puntos en el plano  $xy$ , incluyendo algunos que podríamos esperar que no tuvieran área, de acuerdo con nuestra concepción del término.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 18 calcular el área de la región acotada que satisface las condiciones que se dan. Se aconseja hacer un dibujo de la región e indicar un elemento de área rectangular típico.

1. La región en el primer cuadrante acotada por  $y = 2x + x^2/2$ ,  $y = 0$  y  $x = 2$ .

2. La región comprendida entre  $y = \cos 2x$  y  $y = 2$  desde  $x = \pi$  hasta  $x = 2\pi$ .
3. La región comprendida entre el eje  $x$  y  $y = \sin x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = \pi$ .
4. La región comprendida entre  $y = 2x$  y  $y = -x^2$  desde  $x = 1$  hasta  $x = 3$ .



5. La región acotada por  $y = 1 - x^2$  y  $y = -3$ .
6. La región acotada por  $x = -y^2$  y  $x = -4$ .
7. La región que se encuentra por debajo de  $y = 2 - x^2$  y por arriba de

$$y = \begin{cases} |x|, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

8. Región acotada por  $x - 1 = y^2$ ,  $x = 4y - 3$  y el eje  $x$ .
9. La región acotada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2 - x$  y el eje  $x$ .
10. La región acotada por  $y = (1 + x)^{-1/2}$ ,  $y = 1$  y  $x = 3$ .
11. La región comprendida entre  $y = \sin x$  y  $y = \sin(x - \pi/2)$ , desde  $x = 0$  hasta  $x = \pi$ .
12. La región comprendida entre  $y = x^3 + 1$  y  $y = x + 1$ .
13. La región en el primer cuadrante, que está acotada por  $y = x^{-2}$ ,  $y = x$  y  $x = 3$ .
14. La región comprendida entre  $x = y^2$  y  $x = 4 - y^2$ .
15. La región comprendida entre  $x = |y|$  y  $x = 2 - y^2$ .
16. La región acotada por  $y = x^2 - 2x$  y  $y = 3x$ .
17. La región comprendida entre  $y = \sin x$  y  $y = \cos x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 2\pi$ .
18. La región acotada por  $x = 2y - y^2$  y  $x + y = 0$ .

En los problemas 19 a 24 calcular el área de la región dada de dos maneras distintas: emplear elementos de área paralelos al eje  $y$  y después emplearlos paralelos al eje  $x$ .

19. La región acotada por  $x = y^2$  y  $x = 1$ .
20. La región acotada por  $x = y^2$ ,  $x + y = 2$ , y  $y = -1$  que contiene al punto  $(1, 0)$ .
21. La región en el primer cuadrante acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x^4$  y  $x = 0$ .
22. La región acotada por  $y = x^3$ ,  $y = 2 - x$  y  $y = 3x + 2$  que contiene al punto  $(0, 1)$ .
23. La región acotada por  $y = x^3$ ,  $x + y = 2$  y el eje  $y$ .
24. La región acotada por  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 3x$  y el eje  $x$ .

En los problemas 25 a 28 establecer una integral cuyo valor sea el área de la región dada. Establecer una integral quiere decir determinar al integrando y a los límites de integración; no evaluar la integral.

25. La región en el primer cuadrante acotada por el eje  $y$ , la recta  $y = \sqrt{3}x$ , y el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .
26. La región en el primer cuadrante acotada por el eje  $x$ , la parábola  $y = x^2/3$ , y el círculo  $x^2 + y^2 = 4$ .
27. La región común a los círculos  $x^2 + y^2 = a^2$  y  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ .
28. La región dentro del círculo  $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$  que está sobre la rama de la hipérbola  $xy = 1$  dentro del primer cuadrante.
29. La región limitada por la curva  $y^2 = x - 1$  y la recta  $x = 5$  se divide en dos partes de igual área mediante la recta  $x = a$ . Calcular el valor de  $a$ .

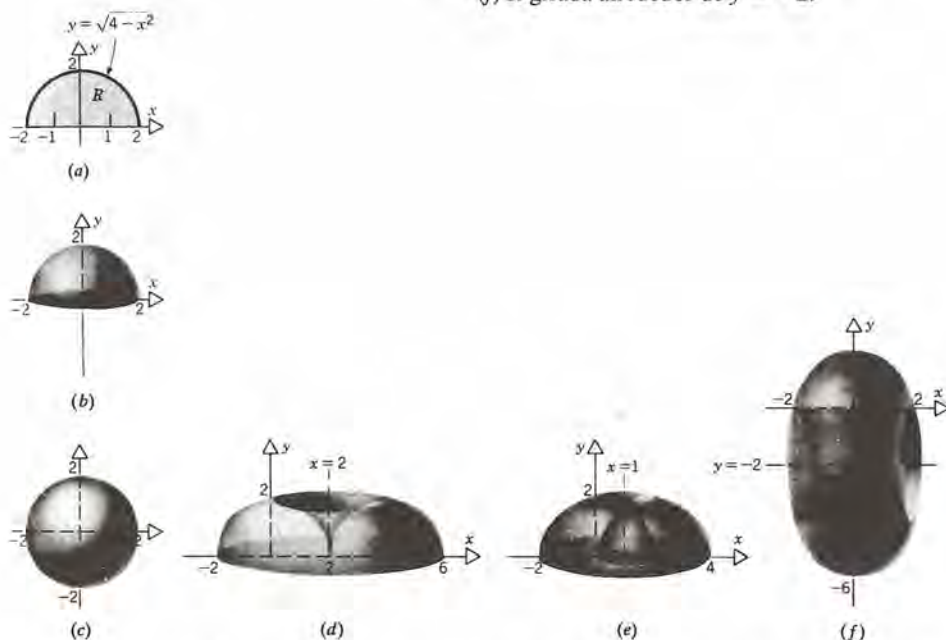
## 7.2 VOLUMEN

En esta sección estudiaremos el cálculo de volúmenes extendiendo los procedimientos que se desarrollaron en la sección anterior para calcular áreas. Comenzaremos con los sólidos de revolución. Un **sólido de revolución** se obtiene haciendo girar una región del plano alrededor de una recta en dicho plano. La recta se llama **eje de revolución**. En la figura 7.2.1 se muestran los sólidos de revolución que se obtienen al hacer girar la región acotada por el semicírculo  $y = \sqrt{4 - x^2}$  y el eje  $x$  alrededor de diferentes ejes de revolución.

Supongamos que la función  $f$  es no negativa y continua en  $[a, b]$ . Considere el sólido de revolución que se obtiene haciendo girar la región acotada por la curva  $y = f(x)$ , el eje  $x$ , y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  alrededor del eje  $x$ ; véanse las figuras 7.2.2a y 7.2.2b. ¿Qué significa el volumen de este sólido de revolución y cómo lo calculamos?

Sea  $\Delta$  partición de  $[a, b]$ ; seleccionemos los puntos estrella  $x_i^*$  y construyamos los rectángulos con bases  $\Delta x_i$  y alturas  $f(x_i^*)$  (véase figura 7.2.2c). Cuando el  $i$ ésimo

**Figura 7.2.1** (a) Región semicircular  $R$ .  
 (b)  $R$  girada alrededor del eje  $y$ .  
 (c)  $R$  girada alrededor del eje  $x$ .  
 (d)  $R$  girada alrededor de  $x = 2$ .  
 (e)  $R$  girada alrededor de  $x = 1$ .  
 (f)  $R$  girada alrededor de  $y = -2$ .



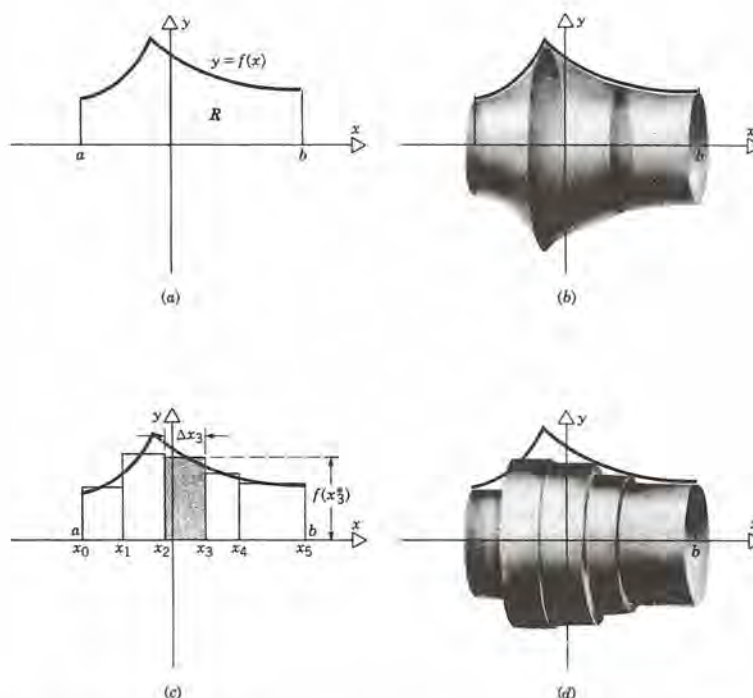
rectángulo gira alrededor del eje  $x$  obtenemos un cilindro circular angosto de radio  $f(x_i^*)$  y espesor  $\Delta x_i$  (véase figura 7.2.2d). El volumen de este cilindro circular es

$$\Delta V_i = \pi [f(x_i^*)]^2 \Delta x_i. \quad (1)$$

Para la partición que se ve en la figura 7.2.2c, el volumen total de los cinco cilindros es  $\sum_{i=1}^5 \Delta V_i$ . Para una partición  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  tenemos  $n$  cilindros con un volumen total

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i^*)]^2 \Delta x_i. \quad (2)$$

Esta suma de Riemann da una aproximación a lo que de modo intuitivo consideramos que es el volumen del sólido de revolución. Cuando se hace menor la norma de la partición  $\|\Delta\|$ , esta aproximación tiende a ser mejor. Además, como  $f^2$  también es continua y por tanto integrable, sabemos que las sumas de Riemann (2) tienden a la integral definida correspondiente cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . De este modo, enunciaremos la siguiente definición.



**Figura 7.2.2** (a) La región  $R$  bajo la gráfica de  $f$ . (b)  $R$  girada alrededor del eje  $x$ .  
(c) Elementos rectangulares de área. (d) Elementos cilíndricos de volumen.

**DEFINICIÓN 7.2.1** Sea la función  $f$  continua y no negativa en  $[a, b]$ . El volumen  $V$  del sólido de revolución que se obtiene haciendo girar la región acotada por la curva  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$  alrededor del eje  $x$  es

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) \, dx. \quad (3)$$

Nótese que  $\pi f^2(x)$  es el área de la sección transversal circular del sólido de revolución en el punto  $x$  del eje de revolución. Si escribimos  $\pi f^2(x) = A(x)$  para esta área, podremos expresar entonces la ecuación 3 en la forma

$$V = \int_a^b A(x) \, dx \quad (4)$$

(véase figura 7.2.3). Así, para calcular el volumen de un sólido de revolución determinamos la fórmula para el área de la sección transversal y la integramos a lo largo del eje de revolución.



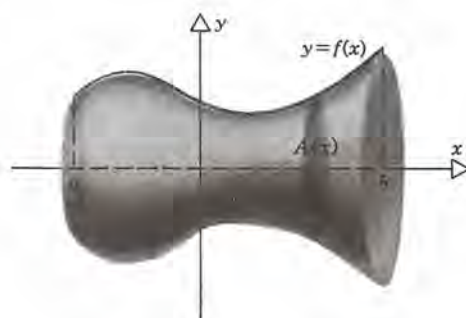
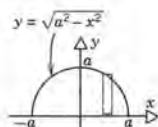


Figura 7.2.3

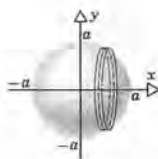
**EJEMPLO 1**

Calcular el volumen de una esfera de radio  $a$  haciendo girar una región semicircular alrededor de su diámetro.

Hacemos girar la región semicircular acotada por  $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  donde  $-a \leq x \leq a$  alrededor del eje  $x$  (véase figura 7.2.4). Según la ecuación 3, el volumen de la esfera es



(a)



(b)

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-a}^a \pi [\sqrt{a^2 - x^2}]^2 dx = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx \\
 &= \pi \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^a \\
 &= \pi \left[ \left( a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \left( -a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \right] \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3}.
 \end{aligned}$$

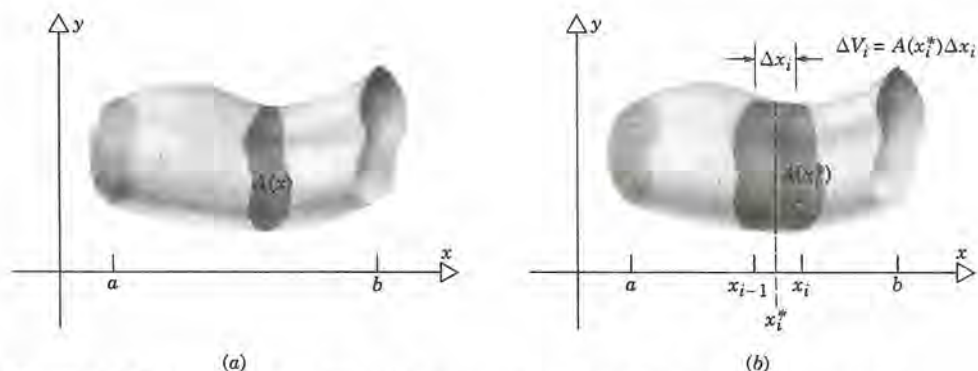
Figura 7.2.4

Debido a la simetría obvia de la región semicircular con respecto a la recta  $x = 0$ , también pudimos haber calculado el volumen de un hemisferio y después multiplicarlo por 2, esto es

$$V = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx. \blacksquare$$

**Método de las rebanadas**

Examinemos con mayor cuidado la ecuación 4. Supongamos que tenemos un sólido, que no necesariamente sea un sólido de revolución, que esté acotado por dos planos paralelos perpendiculares al eje  $x$  en  $x = a$  y  $x = b$ . También, supongamos que conocemos el área  $A(x)$  de la sección transversal perpendicular en el punto  $x$  y que la función  $A$  es continua en  $[a, b]$  (véase figura 7.2.5a). El volumen del sólido se define y se calcula de modo exactamente igual al volumen del sólido de revolución que se



**Figura 7.2.5** (a) Volumen con sección transversal  $A(x)$ . (b) Una sección angosta típica.

acaba de estudiar. Se da una partición al intervalo  $[a, b]$ , se seleccionan puntos estrella  $x_i^*$ , se calculan las áreas de las secciones transversales correspondientes  $A(x_i^*)$  y se construyen elementos de volumen cuya base sea  $A(x_i^*)$  y su ancho sea  $\Delta x_i$ , como en la figura 7.2.5b. La suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x_i$$

da una aproximación, que mejora cuando  $\|\Delta\|$  disminuye, a lo que anticipamos que va a ser el volumen del sólido. De acuerdo con lo anterior hacemos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 7.2.2** Sea un sólido acotado por dos planos perpendiculares al eje  $x$  en  $x = a$  y  $x = b$ . Sea  $A(x)$  el área de la sección transversal cortada en el sólido por un plano perpendicular al eje  $x$  en el punto  $x$ . Si la función  $A$  es continua, entonces el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x) dx. \quad (5)$$

Este método de cálculo de volúmenes se llama método de las rebanadas.

En los ejemplos que siguen mostraremos el empleo de este método.

## EJEMPLO 2

Calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada con lado  $a$  y altura  $h$ .

Seleccionamos a nuestro eje como se indica en la figura 7.2.6a. Para calcular el área  $A(x)$  de la sección transversal de la pirámide a una altura  $x$  sobre la base, hacemos uso de triángulos semejantes como se ve en la figura 7.2.6b. En la altura  $x$ , el área de la sección transversal perpendicular es  $(2s)^2$ . De acuerdo con la figura 7.2.6b, tenemos, por triángulos semejantes, que

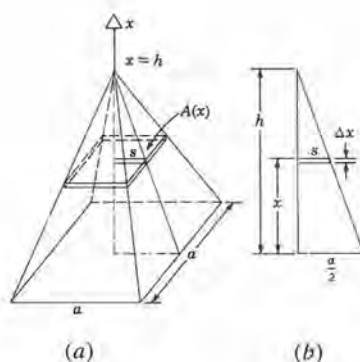


Figura 7.2.6

$$\frac{s}{(a/2)} = \frac{h-x}{h}.$$

De aquí que

$$s = \frac{a(h-x)}{2h} = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{x}{h}\right).$$

Así,

$$A(x) = a^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2,$$

y

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x) \, dx = a^2 \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \, dx \\ &= a^2 \int_0^h \left(1 - \frac{2x}{h} + \frac{x^2}{h^2}\right) \, dx \\ &= a^2 \left(x - \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{3h^2}\right) \Big|_0^h \\ &= a^2 \left(h - h + \frac{h}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} a^2 h. \blacksquare \end{aligned}$$

La fórmula para el volumen de un sólido de revolución que se dio en la ecuación 3 es un caso especial de la fórmula (5) obtenida mediante el método de las rebanadas, donde  $A(x) = \pi f^2(x)$ . Es más, el método de las rebanadas nos permite calcular el



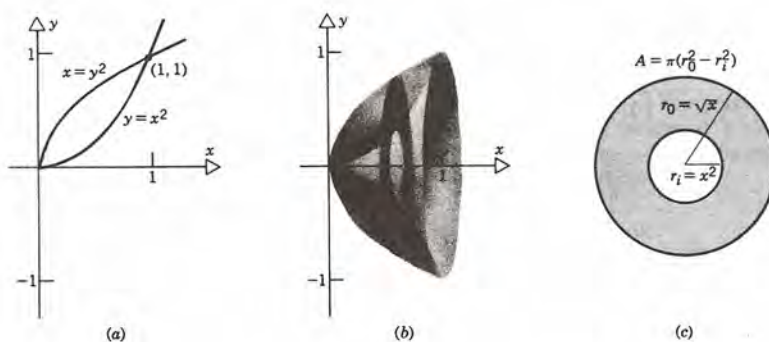


Figura 7.2.7

volumen de otros sólidos de revolución; por ejemplo, el obtenido al hacer girar regiones planas alrededor de una recta que no sea frontera de la región. Esto se muestra en los siguientes tres ejemplos.

### EJEMPLO 3

Calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por  $y = x^2$  y  $x = y^2$  alrededor del eje  $x$ .

La región acotada por las dos curvas se muestra en la figura 7.2.7a. El sólido de revolución se obtiene haciendo girar esta región alrededor del eje  $x$  y se muestra en la figura 7.2.7b. El primer paso para calcular el volumen del sólido por el método de las rebanadas es calcular el área de la sección transversal del sólido en la posición  $x$ , donde  $0 \leq x \leq 1$ . De acuerdo con la figura 7.2.7b es claro que la sección transversal es un disco circular con un agujero en el centro, como una arandela (véase figura 7.2.7c). A esta región se le llama anillo. Su área es la del círculo exterior menos la del círculo interior. Si  $r_0$  es el radio exterior y  $r_i$  el radio interior, entonces el área está dada por

$$\pi r_0^2 - \pi r_i^2 = \pi(r_0^2 - r_i^2).$$

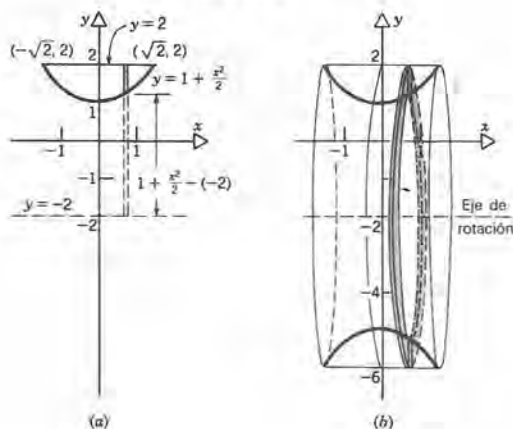
Para este problema en particular tenemos que  $r_0 = \sqrt{x}$  y  $r_i = x^2$ . Así,

$$A(x) = \pi(x - x^4),$$

y

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) \, dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) \, dx \\ &= \pi \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

Figura 7.2.8



$$= \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10}.$$

#### EJEMPLO 4

Calcular el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región acotada por  $y - 1 = x^2/2$  y la recta  $y = 2$  alrededor de la recta  $y = -2$ .

La región plana acotada por  $y - 1 = x^2/2$  y la recta  $y = 2$  se presenta en la figura 7.2.8a. Los puntos de intersección de las dos funciones se obtienen resolviendo las dos ecuaciones en forma simultánea. Esto da  $x = \pm \sqrt{2}$ ; en consecuencia, los puntos de intersección son  $(-\sqrt{2}, 2)$  y  $(\sqrt{2}, 2)$ . El sólido de revolución que se obtiene haciendo girar esta región alrededor de la recta  $y = -2$  se muestra en la figura 7.2.8b.

Nuevamente, el área de la sección transversal del sólido en la posición  $x$  es un anillo. Para este problema  $r_0 = 2 - (-2) = 4$ , y  $r_i = (1 + \frac{1}{2}x^2) - (-2) = 3 + \frac{1}{2}x^2$ . Así,

$$A(x) = \pi[4^2 - (3 + \frac{1}{2}x^2)^2],$$

y

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} A(x) dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} [4^2 - (3 + \frac{1}{2}x^2)^2] dx,$$

en donde hemos empleado la simetría de la región con respecto al eje  $y$ . Al evaluar la última integral se obtiene

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (7 - 3x^2 - \frac{1}{4}x^4) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \left[ 7x - x^3 - \frac{x^5}{20} \right] \bigg|_0^{\sqrt{2}} \\
 &= 2\pi \left( 7\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{20} \right) \\
 &= 48\pi \frac{\sqrt{2}}{5}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

### EJEMPLO 5

Calcular el volumen que se obtiene al girar la región acotada por la curva  $y = \sqrt{4-x^2}$  y el eje  $x$  alrededor de la recta  $x = 2$  (véase figura 7.2.1d). En este caso es conveniente emplear a  $y$  como la variable de integración. El elemento genérico del área, como se ve en la figura 7.2.9 es un anillo. El área de este elemento es  $\pi(r_0^2 - r_i^2)$ , donde

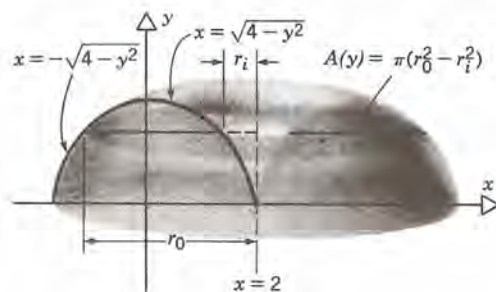


Figura 7.2.9

$r_0$  es el radio del anillo exterior y  $r_i$  es el del anillo interior. Para un valor fijo de  $y$  debemos hallar las coordenadas  $x$  correspondientes de los puntos de la curva más cercanos a  $x = 2$  y las de los más alejados de  $x = 2$ . Como  $y = \sqrt{4-x^2}$ , por lo tanto  $y^2 = 4 - x^2$  y también

$$x = \pm \sqrt{4 - y^2}.$$

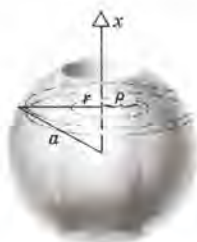
Es evidente que  $r_i = 2 - (\sqrt{4 - y^2})$  y que  $r_0 = 2 - (-\sqrt{4 - y^2})$ . Entonces

$$A(y) = \pi[(2 + \sqrt{4 - y^2})^2 - (2 - \sqrt{4 - y^2})^2],$$

y

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^2 A(y) dy = \pi \int_0^2 [(2 + \sqrt{4 - y^2})^2 - (2 - \sqrt{4 - y^2})^2] dy \\
 &= \pi \int_0^2 \{[4 + 4\sqrt{4 - y^2} + (4 - y^2)] - [4 - 4\sqrt{4 - y^2} + (4 - y^2)]\} dy
 \end{aligned}$$





(a)

$$= 8\pi \int_0^2 \sqrt{4 - y^2} dy.$$

Como en el ejemplo 3 de la sección 6.3 podemos evaluar esta integral al reconocer que es el área de la cuarta parte de un círculo de radio 2. Así,

$$V = 8\pi \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 = 8\pi^2. \blacksquare$$

### EJEMPLO 6

Se barrena un agujero de radio  $p$  a través de una esfera de radio  $a > p$ . El eje del agujero coincide con un diámetro de la esfera. Calcular el volumen de esfera agujerada.

La esfera con el agujero se muestra en la figura 7.2.10a. Ubicaremos al eje  $x$  a lo largo del eje del agujero y por consiguiente a lo largo del diámetro de la esfera, y mediremos  $x$  desde el centro de la esfera. Primero calcularemos el área de una sección transversal del sólido perpendicular al eje  $x$ . Esta área es la de la sección de la esfera menos la de la sección del agujero. De acuerdo con la figura 7.2.10a, tenemos que

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi r^2 - \pi p^2 \\ &= \pi(a^2 - x^2) - \pi p^2. \end{aligned}$$

A continuación determinaremos el intervalo de integración, que es la longitud del agujero. De acuerdo con la figura 7.2.10b, es claro que el límite superior de integración es  $\sqrt{a^2 - p^2}$ . Así

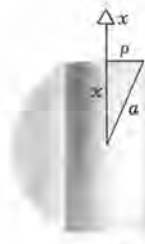
$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\sqrt{a^2 - p^2}} \pi(a^2 - x^2 - p^2) dx \\ &= 2\pi \left[ (a^2 - p^2)x - \frac{x^3}{3} \right] \bigg|_0^{\sqrt{a^2 - p^2}} \\ &= 2\pi \left[ (a^2 - p^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(a^2 - p^2)^{3/2} \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} (a^2 - p^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Cuando  $p = 0$  esta fórmula se reduce a  $4\pi a^3/3$ , lo cual era de esperarse. ■

### Método de los casquillos cilíndricos

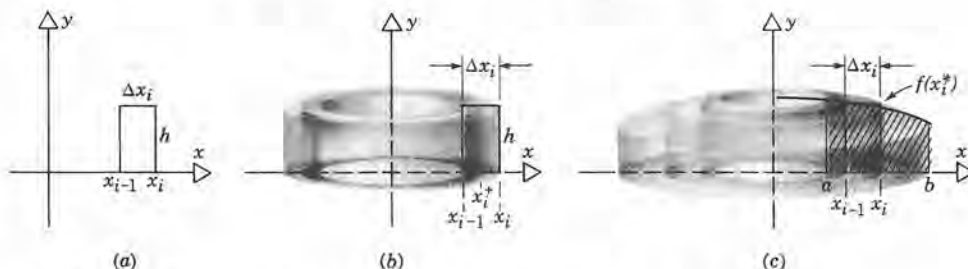
Otro método de cálculo del volumen de un sólido de revolución se conoce como el método de los casquillos cilíndricos. Para usar este método se aproxima el sólido mediante varios casquillos cilíndricos angostos, en lugar de hacerlo mediante varios cilindros sólidos angostos como en el método de las rebanadas.

Figura 7.2.10



(b)

Primero se calcula el volumen de un casquillo cilíndrico. Supongamos que el rectángulo que se ve en la figura 7.2.11a se hace girar alrededor del eje  $y$ , formando así el casquillo cilíndrico de la figura 7.2.11b. La base del rectángulo es  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



**Figura 7.2.11** (a) Elemento rectangular de área. (b) Elemento de volumen en forma de casquillo cilíndrico. (c) Volumen aproximado mediante casquillos cilíndricos.

y su altura es  $h$ . El volumen  $V_s$  del casquillo es la diferencia entre el volumen del cilindro exterior menos el del cilindro interior, o sea

$$\begin{aligned} V_s &= \pi x_i^2 h - \pi x_{i-1}^2 h = \pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) h \\ &= \pi (x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) h = 2\pi x_i^+ h \Delta x_i, \end{aligned} \quad (6)$$

en la cual  $x_i^+ = (x_i + x_{i-1})/2$  es el radio medio de la cáscara,  $\Delta x_i$  es su espesor y  $h$  es su altura.

A continuación supongamos que  $f$  es función continua no negativa en  $[a, b]$ , donde  $a \geq 0$ , y sea  $R$  la región acotada por la gráfica de  $f$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ . Deseamos calcular el volumen del sólido de revolución que se forma al girar a  $R$  alrededor del eje  $y$  como se ve en la figura 7.2.11c. Para aproximar el volumen de este sólido tomamos una partición del intervalo  $[a, b]$  y para cada subintervalo seleccionamos a  $x_i^+ = x_i^* = (x_i + x_{i-1})/2$ . Entonces formamos el rectángulo de base  $\Delta x_i$  y altura  $f(x_i^+)$  y lo hacemos girar alrededor del eje  $y$ . En la figura 7.2.11c se muestra el casquillo cilíndrico que resulta, que tiene un volumen  $2\pi x_i^+ f(x_i^+) \Delta x_i$ . El volumen total de los  $n$  casquillos formados de esta manera es

$$2\pi \sum_{i=1}^n x_i^+ f(x_i^+) \Delta x_i. \quad (7)$$

La suma (7) aproxima al volumen  $V$  del sólido de revolución y en general la aproximación mejora cuando se hace más fina la partición. Como  $xf(x)$  es continua, la suma de Riemann (7) tiende al valor de la integral correspondiente cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  y entonces se obtiene

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx. \quad (8)$$

El método de los casquillos es una forma alternativa para el cálculo de los volúmenes

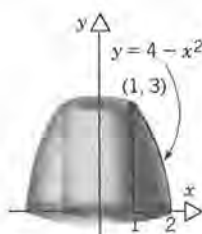


Figura 7.2.12

de determinados sólidos. A veces la integral (8) resulta ser más sencilla que la que se obtiene mediante el método de las rebanadas.

### EJEMPLO 7

Considerar la región de la figura 7.2.12 comprendida entre la parábola  $y = 4 - x^2$  y el eje  $x$  desde  $x = 1$  hasta  $x = 2$ . Calcular el volumen del sólido formado al girar esta región alrededor del eje  $y$ .

De acuerdo con la ecuación 8, el volumen que se desea es

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x(4 - x^2) dx = 2\pi \int_1^2 (4x - x^3) dx \\ &= 2\pi \left( 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 \\ &= 2\pi \left( 4 - \frac{7}{4} \right) = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$

Este mismo valor se obtiene también con facilidad mediante el método de las rebanadas e integrando con respecto a  $y$ . ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 16 calcular el volumen del sólido generado haciendo girar la región plana dada alrededor del eje dado. Puede resultar de ayuda hacer un dibujo del sólido de revolución, con una sección transversal genérica para cada problema.

1. La región acotada por  $y = 2x^{1/4}$ , el eje  $x$  y la recta  $x = 4$ , girando alrededor del eje  $x$ .
2. La región acotada por  $y = x^2$ , el eje  $x$  y la recta  $x = 2$ , girando alrededor del eje  $x$ .
3. La región del problema 2, girando alrededor del eje  $y$ .
4. El triángulo del plano  $xy$  cuyos vértices están en  $(0,0)$ ,  $(h,0)$  y  $(h,a)$ , girando alrededor del eje  $x$ . (Nótese que es un cono circular de altura  $h$  y radio  $a$ ).
5. La región acotada por  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \pi/2$ , el eje  $x$  y girando el eje  $y$  alrededor del eje  $x$ .
6. La región acotada por  $y = \sqrt{x}$ , el eje  $x$  y la recta  $x = 4$ , girando alrededor del eje  $x = 4$ .
7. La región del problema 6 girando alrededor del eje  $x = 0$ .

8. La región del problema 6 girando alrededor de la recta  $y = 2$ .
9. La región acotada por  $y = x^2$  y  $y = x$ , girando alrededor del eje  $x$ .
10. La región del problema 9 girando alrededor del eje  $y$ .
11. La región del problema 9 girando alrededor de la recta  $x = 1$ .
12. La región del problema 9 girando alrededor de la recta  $y = 1$ .
13. La región acotada por  $y = 2/(\cos 2x)$ , el eje  $y$ , el eje  $x$  y la recta  $x = \pi/6$ , girando alrededor del eje  $x$ .
14. La región acotada por  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ , y el eje  $y$ , para  $0 \leq x \leq \pi/4$ , girando alrededor del eje  $x$ .
15. La región acotada por  $x = y^2$ , la recta  $x = 4$ , y el eje  $x$ , girando alrededor de la recta  $x = 6$ .
16. La región del problema 15 girando alrededor de la recta  $x = 2$ .

En los problemas 17 a 20 emplear el método de los casqui-



llos cilíndricos para calcular el volumen del sólido generado al girar la región plana dada alrededor del eje dado.

17. La región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 0$  y  $x = 2$ , girando alrededor del eje  $y$ .
18. La región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 1$  y  $x = 0$ , girando alrededor del eje  $y$ .
19. La región acotada por  $y = x^2$ ,  $y = 2x$ , girando alrededor del eje  $y$ .
20. La región acotada por  $x - 1 = y^2$  y  $y = \frac{1}{2}(x - 1)$  girando alrededor del eje  $x$ .

En los problemas 21 y 22 establecer una integral (o integrales) con el método de las rebanadas y el método de los casquillos cilíndricos para calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región plana dada alrededor del eje dado. Emplear la ecuación más sencilla para calcular el volumen.

21. La región acotada por  $y = x^2 - 2x$  y  $y = 3x$ , girando alrededor del eje  $y$ .
22. La región acotada por  $y = x^2 - 2x$  y  $y = 3x$  girando alrededor de la recta  $y = -1$ .
23. Calcular el volumen que se obtiene al girar la región acotada por  $y = 3x - x^2$  y  $y = -x$  alrededor del eje  $y$ .
24. Calcular el volumen de un elipsoide de revolución que se obtiene al girar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alrededor del eje  $x$ .

25. La base de un sólido es el disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . Cada sección plana del sólido cortada por un plano perpendicular al eje  $x$  es un triángulo equilátero en la base del sólido. Hallar el volumen del sólido.
26. La base de un sólido es la región  $b^2x^2 + a^2y^2 \leq a^2b^2$ . Cada sección plana del sólido cortado por un plano perpendicular al eje  $x$  es un cuadrado con un lado del cuadrado en la base del sólido. Determinar el volumen del sólido.
27. Un cuenco hemisférico de radio  $a$  se llena con agua a una profundidad  $h < a$ . Determinar el volumen del agua.
28. El círculo  $x^2 + y^2 = a^2$  gira alrededor de la recta  $x = b$ , donde  $b > a$ , formando así un toro (cuerpo en forma de *dona*). Calcular el volumen del toro.

29. Una cuña de queso se corta de un cilindro circular recto de radio  $a$  mediante dos planos, como se ve en la figura 7.2.13. Determinar el volumen de la cuña.

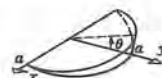


Figura 7.2.13

30. Dos cilindros circulares rectos de radio  $a$  se intersectan en ángulos rectos; esto es, sus ejes se cruzan en ángulos rectos (véase figura 7.2.14). ¿Cuál es el volumen del sólido de intersección?

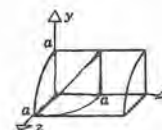


Figura 7.2.14

31. Suponer que un sólido está acotado por los planos  $x = 0$  y  $x = h$ , y que la sección transversal del sólido en un plano perpendicular al eje  $x$  tiene un área  $A(x) = a + bx + cx^2$  para toda  $x$ . En este caso,  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes. Demostrar que el volumen  $V$  del sólido es

$$V = \frac{1}{6}(B_0 + 4M + B_1)h$$

en la cual  $B_0$ ,  $M$  y  $B$  son las áreas de las secciones transversales en  $x = 0$ ,  $x = h/2$  y  $x = h$ , respectivamente. A este sólido se le llama **prismatoide** y a la fórmula para calcular su volumen se le llama **fórmula prismoidea**. Comprobar que esta fórmula concuerda con la del volumen del cono truncado que se muestra en la figura 7.2.15, que se dedujo en la geometría del espacio.

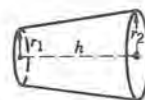


Figura 7.2.15

32. Hacer un esquema de la curva  $y = x^{-2/3}$  para  $x > 0$ .
  - (a) Demostrar que el área  $A_b$  acotada por la curva  $y = x^{-2/3}$ , el eje  $y$  y las rectas  $x = 1$  y  $x = b$ , donde  $b > 1$ , es  $A_b = 3(b^{1/3} - 1)$ .

- (b) Demostrar que el volumen  $V_b$  que se obtiene al girar la región de la parte (a) alrededor del eje  $x$  es  $V_b = 3\pi(1 - b^{-1/3})$ .
- (c) Demostrar que  $A_b \rightarrow \infty$  cuando  $b \rightarrow \infty$ , pero que  $V_b \rightarrow 3\pi$  cuando  $b \rightarrow \infty$ . Con ello tenemos el caso notable en que una "área infinita" girada alrededor de un eje produce un volumen finito.
- (d) Demostrar que el área  $A_\epsilon$  acotada por la curva

$y = x^{-2/3}$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = \epsilon$ , donde  $0 < \epsilon < 1$  y  $x = 1$  es  $A_\epsilon = 3(1 - \epsilon^{1/3})$ .

- (e) Demostrar que el volumen  $V_\epsilon$  que se obtiene al girar la región de la parte (d) alrededor del eje  $x$  es  $V_\epsilon = 3\pi(\epsilon^{-1/3} - 1)$ .
- (f) Demostrar que  $A_\epsilon \rightarrow 3$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$ , pero que  $V_\epsilon \rightarrow \infty$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0+$ . Con ello tenemos el caso opuesto al caso (c), en el cual un área finita girando alrededor de un eje da un "volumen infinito".

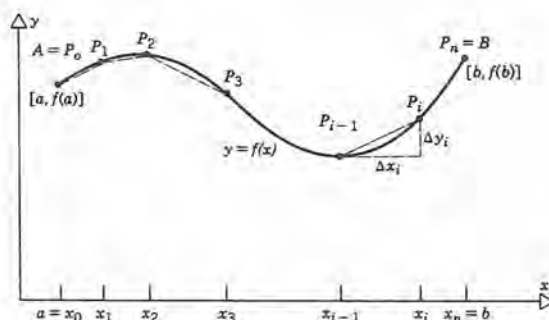
## 7.3 LONGITUD DE ARCO Y ÁREA DE UNA SUPERFICIE

En esta sección abordaremos dos interesantes problemas geométricos: el de calcular la longitud de un arco entre dos puntos de una curva dada y el de calcular el área de una superficie de revolución.

### Longitud de arco

Comenzaremos preguntándonos cómo podemos deducir una fórmula para la longitud de la gráfica de la función  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . Por el momento supondremos que la función  $f$  es continua; después también supondremos que tiene una derivada continua.

Puesto que sabemos cómo calcular la longitud de un segmento de recta, es natural generalizar este procedimiento a modo de obtener la longitud de un arco curvo. Para hacerlo, damos una partición del intervalo  $[a, b]$ , unimos los puntos sucesivos en la curva mediante rectas y consideramos a la suma de las longitudes de esos segmentos



**Figura 7.3.1** Aproximación con una poligonal a la gráfica de  $f$ .

de recta, como una aproximación a la longitud de la curva (véase figura 7.3.1). La longitud del segmento de recta que conecta a los puntos  $P_{i-1}$  y  $P_i$  es

$$\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

en la cual  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  y  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ . La suma

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \quad (1)$$

da una aproximación a nuestro concepto intuitivo de la longitud de la curva desde  $P_0$  hasta  $P_n$ . El segundo paso consiste en ver qué sucede cuando la norma  $\|\Delta\|$  de la partición disminuye. Si la suma de la ecuación 1 tiende a un número definido cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , definimos entonces a este número como la longitud de la curva  $y = f(x)$  desde  $A[a, f(a)]$  hasta  $B[b, f(b)]$ :

$$L(A, B) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}. \quad (2)$$

Si existe el límite de la ecuación 2, entonces se dice que la curva es **rectificable**. De no ser así se llama **no rectificable**.

Para fines de cálculo, es deseable reformular la ecuación (2) en la forma de una integral. Desafortunadamente, la suma de la ecuación 2 no está en la forma de una suma de Riemann, y por tanto no podemos pasar en forma inmediata a una fórmula que contenga una integral para la longitud de la curva. Sin embargo, si suponemos que  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , podemos entonces reformular la ecuación 2 en alguna forma adecuada. Según el teorema del valor medio (teorema 4.1.3), existe una  $x_i^*$  en cada subintervalo  $(x_{i-1}, x_i)$  tal que

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f'(x_i^*) \Delta x_i. \end{aligned} \quad (3)$$

En consecuencia, podemos escribir la suma (1) en la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i, \quad (4)$$

que es una suma de Riemann para la función  $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ . Se necesita ahora otra hipótesis acerca de  $f$  para garantizar que existe la integral correspondiente

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (5)$$

Por ejemplo, es suficiente pedir que  $f'$  sea continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Entonces, cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , cualquier suma de Riemann de la forma (4), independientemente de cómo se seleccionen los puntos estrella, tiende a la integral (5). Así, llegamos al resultado que se enuncia en la definición 7.3.1, la que será para nosotros la definición de longitud de arco.



**DEFINICIÓN 7.3.1** Si la función  $f$  es tal que  $f'$  es continua en  $[a, b]$ , entonces la longitud  $L(A, B)$  de la gráfica de  $f$  entre  $x = a$  y  $x = b$  es

$$L(A, B) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (6)$$

### EJEMPLO 1

Calcular la longitud de la curva  $y = (1/3)x^{3/2}$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(9, 9)$ .

La curva se dibuja en la figura 7.3.2. Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{1}{2} x^{1/2},$$

tenemos, de acuerdo con la ecuación 6, que

$$L = \int_0^9 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x} dx.$$

Esta integral se puede evaluar mediante la sustitución  $u = 1 + x/4$ . Entonces,  $du = dx/4$ ; además,  $x = 0$  y  $x = 9$  corresponden a  $u = 1$  y a  $u = 13/4$ , respectivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_1^{13/4} u^{1/2} du = 4 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{13/4} \\ &= \frac{8}{3} \left[ \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - 1 \right] \cong 12.96. \blacksquare \end{aligned}$$

Para las curvas que puedan representarse mediante  $x = g(y)$ , donde  $g'(y)$  es acotada y continua, se invierten los papeles de  $x$  y  $y$  y la fórmula (6) para la longitud de una curva toma la forma

$$L(A, B) = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy. \quad (7)$$

Si se puede expresar la curva como  $y = f(x)$  o como  $x = g(y)$ , podemos entonces calcular su longitud empleando ya sea la ecuación 6 o la ecuación 7. A veces es mucho más fácil emplear una en lugar de la otra, como lo muestra el ejemplo que sigue.

### EJEMPLO 2

Calcular la longitud de la curva  $y = (x - 1)^{2/3}$  entre  $x = 1$  y  $x = 9$ .

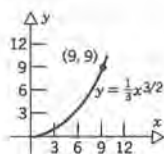


Figura 7.3.2

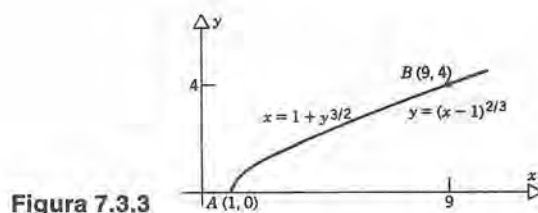


Figura 7.3.3

En la figura 7.3.3 aparece un dibujo de la curva. Al obtener la derivada de  $y$ , tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} (x - 1)^{-1/3}.$$

Nótese que  $dy/dx$  se hace no acotada cuando  $x \rightarrow 1+$ ; por tanto, no podemos emplear la ecuación 6 en el intervalo  $1 \leq x \leq 9$  para calcular la longitud de la curva.

Por otro lado, si reformulamos la ecuación como  $x = 1 + y^{3/2}$ , entonces el cálculo es bastante sencillo. Tenemos que  $y = 0$  cuando  $x = 1$ , y que  $y = 4$  cuando  $x = 9$ ; entonces, el intervalo de integración es  $[0, 4]$  si se considera a  $y$  como la variable independiente. Además

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2} y^{1/2},$$

que es continua para  $y \geq 0$  y, por tanto, podemos emplear la ecuación 7. En consecuencia,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} y^{1/2}\right)^2} dy \\ &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} y} dy. \end{aligned}$$

Esta integral es semejante a la del ejemplo 1. Empleando la sustitución  $u = 1 + 9y/4$ , obtenemos

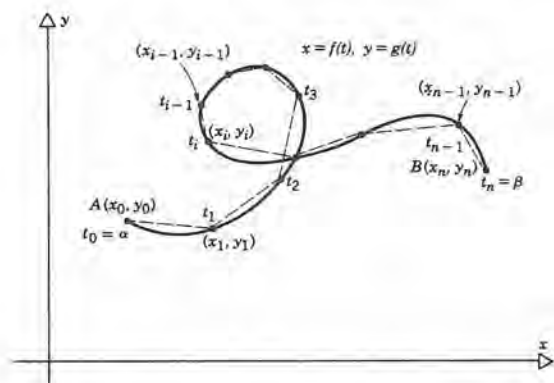
$$\begin{aligned} L &= \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4} y\right)^{3/2} \Big|_0^4 \\ &= \frac{8}{27} [10\sqrt{10} - 1] \cong 9.07. \blacksquare \end{aligned}$$

### Longitud de arco empleando ecuaciones paramétricas

A continuación trataremos el caso de una curva determinada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (8)$$

en las que suponemos que  $f$  y  $g$  tienen primeras derivadas continuas. Para calcular la longitud de esta curva, subdividimos al intervalo  $[\alpha, \beta]$  mediante una partición  $\Delta$ , calculamos los valores correspondientes  $x_i = x(t_i)$  y  $y_i = y(t_i)$  y procedemos como antes (véase figura 7.3.4). Sean  $A$  y  $B$  los puntos finales  $[f(\alpha), g(\alpha)]$  y  $[f(\beta), g(\beta)]$ , respectivamente, del arco.



**Figura 7.3.4** Aproximación con una poligonal a la gráfica de  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} L(A, B) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ahora, de acuerdo con el teorema del valor medio, existe un punto  $t_i^*$  en  $(t_{i-1}, t_i)$  tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

y un punto  $t_i^{**}$  en  $(t_{i-1}, t_i)$  tal que

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(t_i^{**})(t_i - t_{i-1}).$$

Así,

$$\begin{aligned} L(A, B) &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t_i^*) \Delta t_i]^2 + [g'(t_i^{**}) \Delta t_i]^2} \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2} \Delta t_i. \end{aligned} \quad (10)$$

La última ecuación ya casi tiene, aunque no por completo, la forma apropiada de



una suma de Riemann. La dificultad es que, en general, los puntos  $t_i^*$  y  $t_i^{**}$  no son los mismos. Sin embargo, empleando la continuidad de las funciones  $f'$  y  $g'$ , se puede demostrar que el límite de la suma de la ecuación 10 es la integral correspondiente de Riemann. En consecuencia,

$$L(A, B) = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (11)$$

### EJEMPLO 3

Demostrar que la circunferencia del círculo

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es  $2\pi r$ .

Aunque es posible llevar a cabo el cálculo en coordenadas rectangulares, es más sencillo emplear la representación paramétrica natural del círculo que se indica en la figura 7.3.5, o sea

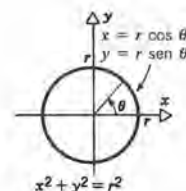
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Entonces

$$\frac{dx}{d\theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta$$

y, según la ecuación 11,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} r d\theta \\ &= 2\pi r. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



**Figura 7.3.5**  
Representación  
paramétrica del  
círculo  $x^2 + y^2 = r^2$ .

### EJEMPLO 4

Calcular la longitud  $L$  de un arco de la cicloide

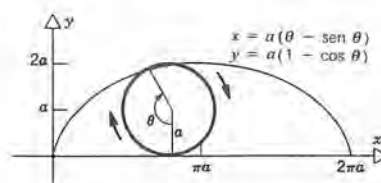
$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad a > 0,$$

que se describió en el ejemplo 6 de la sección 5.5 (véase figura 7.3.6).

Un arco de la cicloide corresponde a  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Tenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta,$$

así que



**Figura 7.3.6** Representación paramétrica de una cicloide.

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= a^2[1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta] \\ &= 2a^2(1 - \cos\theta).\end{aligned}$$

Por tanto

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos\theta} d\theta.$$

Para evaluar esta integral hacemos uso de la identidad trigonométrica  $\sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$ . Entonces

$$L = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta.$$

Como  $\sin(\theta/2) \geq 0$  cuando  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , podemos quitar las barras de valor absoluto en el integrando y obtener

$$\begin{aligned}L &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} d\theta = 2a \left[ -2 \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 4a[-(-1) + 1] = 8a.\end{aligned}$$

El primero en obtener este resultado, esto es, que la longitud del arco de una cicloide es ocho veces el radio del círculo que la genera, fue Sir Christopher Wren, el arquitecto constructor de la catedral de San Pablo y de muchas otras iglesias en Inglaterra. ■

Consideremos la curva  $y = f(x)$  para  $a \leq x \leq b$  y supongamos que la función  $f'$  es continua. Entonces, la función  $s$  definida por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(z)]^2} dz = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz, \quad a \leq x \leq b, \quad (12)$$

da la longitud de la curva desde  $[a, f(a)]$  hasta  $[x, f(x)]$ . A la función  $s$  se le llama **función longitud de arco** y según el teorema 6.4.2,

$$\frac{ds(x)}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (13)$$

Son válidas las fórmulas semejantes a las ecuaciones 12 y 13 si la curva se define mediante  $x = g(z)$  para  $c \leq z \leq d$ . Si la curva se da en forma paramétrica mediante  $x = f(z)$ ,  $y = g(z)$  para  $\alpha \leq z \leq \beta$ , donde  $f'$  y  $g'$  son continuas, entonces

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{\alpha}^t \sqrt{[f'(z)]^2 + [g'(z)]^2} dz \\ &= \int_{\alpha}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz, \quad \alpha \leq t \leq \beta, \end{aligned} \quad (14)$$

y

$$\frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \quad (15)$$

Una forma de recordar las fórmulas (12) a (15) es emplear la relación

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad (16)$$

que se puede ver como una relación de Pitágoras distorsionada (véase figura 7.3.7). En esta fórmula  $dx$  y  $dy$  son diferenciales, y  $ds$  se conoce como la diferencial de la longitud de arco. En especial, si  $y = f(x)$ , entonces  $dy = f'(x)dx$ ,  $ds = s'(x)dx$  y, sustituyendo  $dy$  y  $ds$  en la ecuación 16, obtenemos inmediatamente la ecuación 13. Se puede obtener la ecuación (15) de modo semejante. Se obtiene la longitud  $L$  de la curva si se integra la diferencial de la longitud de arco entre los límites adecuados.

Resumiremos ahora lo que hemos hecho. Primero, hemos introducido el concepto de una curva rectificable. A continuación, afirmamos que si tienen derivadas continuas las funciones adecuadas  $y = f(x)$  ó  $x = g(y)$  ó  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ , entonces la longitud de la curva correspondiente se puede calcular mediante las ecuaciones 6, 7 y 11, respectivamente. La condición de que tengan derivadas continuas las funciones en el intervalo de interés es suficiente para que la curva correspondiente sea rectificable, pero no es necesaria. Sin embargo, se necesita determinada condición de este tipo, ya que una función que sólo sea continua en un intervalo cerrado puede tener una gráfica no rectificable. Más adelante, en el problema 16 de la sección 12.5, aparece un ejemplo de esto.

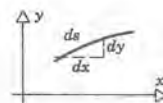


Figura 7.3.7

### Área de una superficie de revolución

A continuación deduciremos una fórmula para el área de una superficie de revolución. En nuestra deducción necesitaremos la fórmula siguiente para el área lateral  $A$  de un cono truncado (véase figura 7.3.8):

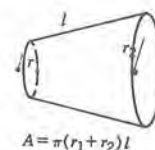
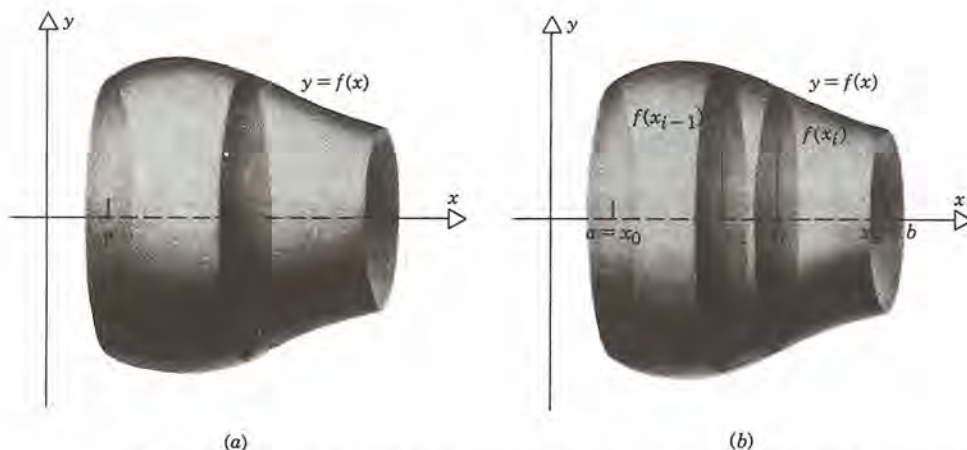


Figura 7.3.8





**Figura 7.3.9** (a) Superficie de revolución generada por  $y = f(x)$ . (b) Superficie de revolución aproximada mediante elementos de superficie cónica.

$$A = \pi(r_1 + r_2)l. \quad (17)$$

En la ecuación 16,  $r_1$  y  $r_2$  son los radios de las bases y  $l$  es la altura sesgada.

A continuación supongamos que la curva  $y = f(x)$ , donde  $f(x) > 0$ , se hace girar alrededor del eje  $x$  (véase figura 7.3.9a). Para calcular el área de la superficie de revolución procedemos en la forma que ya nos es familiar. Damos una partición del intervalo  $[a, b]$ , hacemos que  $y_i = f(x_i)$  y trazamos las rectas  $l_i$  que conectan los puntos  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  y  $(x_i, y_i)$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . El área  $S$  de la superficie se aproxima mediante la suma de las áreas de los conos truncados individuales, como se ve en la figura 7.3.9b; así,

$$S \cong \sum_{i=1}^n \pi(y_{i-1} + y_i)l_i. \quad (18)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta y_i)^2 + (\Delta x_i)^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

y entonces la ecuación 18 se puede reformular como sigue:

$$S \cong \pi \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \quad (20)$$

El siguiente paso consiste en llevar a la ecuación 20 a una forma tal que se pueda determinar el límite cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . Suponiendo que  $f$  tenga una derivada continua, podemos emplear de nuevo el teorema del valor medio para escribir

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$\begin{aligned}
 &= f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\
 &= f'(x_i^*) \Delta x_i, \quad x_i^* \in (x_{i-1}, x_i).
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

A continuación examinamos el término  $[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$ . Como  $f$  es derivable, también es continua; por tanto, por el valor del valor intermedio (teorema 2.6.3),  $f$  toma todos los valores entre su máximo y su mínimo. En especial, hay un punto  $x_i^+ \in [x_{i-1}, x_i]$  en el cual  $f$  es igual al promedio de sus valores en los extremos:

$$f(x_i^+) = \frac{1}{2}[f(x_i) + f(x_{i-1})]. \tag{22}$$

Sustituyendo las ecuaciones 21 y 22 en la ecuación 20, obtenemos

$$S \cong 2\pi \sum_{i=1}^n f(x_i^+) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2} \Delta x_i. \tag{23}$$

Desafortunadamente, la ecuación 23 no es una suma de Riemann, porque tanto  $x_i^+$  como  $x_i^*$  aparecen en la expresión que multiplica a  $\Delta x_i$ . Sin embargo, como hemos dicho en esta sección, empleando la continuidad de  $f$  y de  $f'$  se puede demostrar que cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , el lado derecho de la ecuación 23 tiende a la forma de una integral correspondiente desde  $a$  hasta  $b$ . Así, nos llegamos a la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 7.3.2** Sea la función  $f$  no negativa y supongamos que tiene una continua en  $[a, b]$ . Entonces, el área  $S$  de la superficie generada al girar la gráfica  $y = f(x)$  alrededor del eje  $x$  es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{24}$$

## EJEMPLO 5

Calcular el área de la superficie de una esfera de radio  $a$ .

Podemos generar una esfera de radio  $a$  haciendo girar al semicírculo  $y = f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  alrededor del eje  $x$  (véase figura 7.3.10). Como

$$f'(x) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{(a^2 - x^2)^{1/2}},$$

Se infiere por la ecuación 24 que

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\
 &= 2\pi \int_{-a}^a a dx
 \end{aligned}$$



Figura 7.3.10

$$= 2\pi a x \Big|_{-a}^a = 4\pi a^2. \blacksquare$$

Hay varias generalizaciones de la ecuación 24 para el caso en el que una curva gira alrededor del eje  $y$  o alrededor de una recta en el plano, o cuando la curva se expresa en forma paramétrica. Estas generalizaciones se describen en los problemas 29 a 34.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 determinar la longitud del arco de la curva dada entre los límites dados.

1.  $y = 3x - 1$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 3$ .
2.  $x = \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ , desde  $t = 0$  hasta  $t = \pi$ .
3.  $y = 2x^{3/2} - 3$  desde  $x = 1$  hasta  $x = 4$ .
4.  $y^2 = 4(x + 1)^3$ , desde  $(-1, 0)$  hasta  $(3, 16)$ .
5.  $4y^3 = 9x^2$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(2, 3^{2/3})$ .
6.  $x = \frac{1}{2}t^2$ ,  $y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}$  desde  $t = 1$  hasta  $t = 4$ .
7.  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ , desde  $t = 0$  hasta  $t = 2\pi$ ,  $a > 0$ .
8.  $x = t^3$ ,  $y = 2t^2$  desde  $t = -1$  hasta  $t = 0$ .
9.  $y = (x^3/6) + (1/2x)$  desde  $x = 2$  hasta  $x = 4$ .
10.  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \sin^3 \theta$ , desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi/2$ ,  $a > 0$ .
11. Determinar la longitud (circunferencia) de la hipocicloide  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , donde  $a > 0$ . *Sugerencia:* introducir una representación paramétrica adecuada.
12. Determinar la longitud de la curva  $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$  en el primer cuadrante, donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas. *Sugerencia:* introducir una representación paramétrica adecuada.
13. Calcular la longitud del arco de la curva  $y = \sqrt{x}|x - 3|/3$  que va desde  $(1, \frac{2}{3})$  hasta  $(3, 0)$ .
14. Calcular la longitud del arco de la curva  $y = |x|\sqrt{2x+3}/3$  que conecta a  $(-1, \frac{1}{3})$  con  $(3, 3)$ .
15. Considerar la elipse  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ , donde  $0 < b < a$ .

(a) Introducir una representación paramétrica adecuada y demostrar que el perímetro  $L$  de la elipse está dado por

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt,$$

donde  $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$  es la excentricidad de la elipse. Esta integral pertenece a la clase conocida como **integrales elípticas**. También se originan en problemas como la determinación del movimiento de un péndulo simple y de la atracción gravitacional de una elipse.

(b) Empleando la fórmula  $\sqrt{1-u} \approx 1 - \frac{1}{2}u$  cuando  $|u|$  es pequeño, demostrar que

$$L \approx 2\pi a \left( 1 - \frac{1}{4}e^2 \right) = 2\pi a \left[ 1 - \frac{a^2 - b^2}{4a^2} \right]$$

cuando  $e$  es pequeña. Evaluar  $L/4a$  para  $e = 0.1, 0.25, 0.5$  y  $0.8$ . Nótese que cuando  $e \rightarrow 0$  el perímetro de la elipse tiende a la circunferencia de un círculo de radio  $a$ .

- \*16. Emplear la regla de Simpson para evaluar la integral elíptica (ver problema 15).

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$$

- (a) para  $e = 0.1$ ;      (b) para  $e = 0.25$ ;  
(c) para  $e = 0.5$ ;      (d) para  $e = 0.8$ .

Comparar los resultados con los del problema 15(b).

- \*17. Emplear la regla de Simpson para calcular la longitud de arco de la parábola  $y = x^2$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(2, 4)$ .  
\*18. Emplear la regla de Simpson para calcular la longitud de arco de la hipérbola  $y - x^2 = 1$  de  $(0, 1)$  a  $(2, \sqrt{5})$ .



En los problemas 19 a 25 calcular el área de la superficie formada al hacer girar la curva dada alrededor del eje  $x$ .

19.  $y = 2x$ ,  $0 \leq x \leq 4$

20.  $y = x^3$ ,  $1 \leq x \leq 3$

21.  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  
siendo  $-r < a < b < r$

22.  $y^2 = x$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ,  $y > 0$

23.  $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ ,  $1 \leq x \leq 4$

24.  $y = \frac{8}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$ ,  $1 \leq x \leq 3$

25.  $y = \sqrt{x+1}$ ,  $0 \leq x \leq 3$

26. Determinar el área de la superficie de un cono circular de altura  $h$  y radio  $r$  obtenido al girar la recta  $y = rx/h$  cuando  $0 \leq x \leq h$  alrededor del eje  $x$ .

27. Emplear la regla de Simpson para calcular el área de la superficie que se genera al hacer girar la parábola  $y = 4 - x^2$  alrededor del eje  $x$ , desde  $x = 0$  hasta  $x = 2$ .

28. Emplear la regla de Simpson para calcular el área de la superficie que se genera al hacer girar la hipérbola  $y = \sqrt{1+x^2}$ , entre  $0 \leq x \leq 2$ , alrededor del eje  $x$ .

29. Suponer que la gráfica de la función  $y = f(x)$ , donde  $a \leq x \leq b$ , queda arriba de la recta  $y = A$ . Demostrar que si  $f'$  es continua en  $[a, b]$ , entonces el área de la superficie que se forma al hacer girar la curva alrededor de la recta  $y = A$  es

$$S = 2\pi \int_a^b [f(x) - A] \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

30. Calcular el área de la superficie que se obtiene al girar la curva  $y = (\frac{2}{3})x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$ , para  $1 \leq x \leq 3$ , alrededor de la recta  $y = -2$ . Véase problema 29.

31. Desarrollar una fórmula que contenga una integral semejante a la de la ecuación 24 para el área de una superficie formada al hacer girar una curva plana alrededor del eje  $y$ . Suponer que la curva plana queda completamente de un lado del eje  $y$  y que satisface la ecuación  $x = g(y)$ , para la cual  $g'$  es continua cuando  $c \leq y \leq d$ . Calcular el área de la superficie formada

al hacer girar la curva  $y = x^2/4$ , desde  $(2, 1)$  hasta  $(4, 4)$ , alrededor del eje  $y$ .

32. Considerar un arco de curva definido por  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  para  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Suponer que las funciones  $f$  y  $g$  son no negativas y que tienen primeras derivadas continuas. Demostrar que el área de la superficie que se obtiene al hacer girar esta curva alrededor del eje  $x$  es

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

En los problemas 33 y 34, usar el resultado del problema 32 para calcular el área de la superficie que se forma al girar la curva dada alrededor del eje  $x$ .

33.  $x = \sinh t$ ,  $y = 1 - \cosh t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

34.  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \sin^3 \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  
 $a > 0$

35. Hacer un dibujo de la gráfica de la curva  $y = x^{-2/3}$  cuando  $1 \leq x \leq b$ , y  $b > 1$ . Sean  $V_b$  y  $S_b$  el volumen del cuerpo y el área de su superficie que se obtienen al hacer girar esta curva alrededor del eje  $x$ .

(a) Demostrar que

$$V_b = 3\pi \left(1 - \frac{1}{b^{1/3}}\right)$$

y que  $V_b \rightarrow 3\pi$  cuando  $b \rightarrow \infty$ .

(b) Demostrar que  $S_b = 2\pi$

$$\int_1^b x^{-2/3} \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-10/3}} dx.$$

(c) Emplear el hecho de que  $1 + \frac{4}{9}x^{-10/3} > 1$  cuando  $x > 1$  para demostrar que  $S_b > 6\pi(b^{1/3} - 1)$ . A continuación demostrar que  $S_b \rightarrow \infty$  cuando  $b \rightarrow \infty$ .

Los resultados de las partes (a), (b) y (c) demuestran que este sólido tiene un volumen finito, pero un área de la superficie infinita. Si fuera un recipiente, le cabría una cantidad finita de pintura, pero necesitaría una cantidad infinita de lámina para cubrir su superficie.

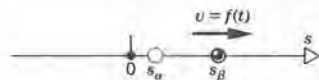
## 7.4 APLICACIONES A LA MECÁNICA

En esta sección describiremos algunos ejemplos en el campo de la mecánica, en los cuales la integración aparece de manera natural.

### Desplazamiento y distancia

Supongamos que una partícula se mueve en una recta con una velocidad  $v = f(t)$ , donde  $t$  es el tiempo (véase figura 7.4.1). Si  $v > 0$ , la partícula se mueve hacia la

**Figura 7.4.1** Partícula que se mueve en línea recta.



derecha, y si  $v < 0$ , se mueve hacia la izquierda. Si la partícula está en la posición  $s_\alpha$  cuando el tiempo es  $t = \alpha$ , en relación con un origen fijo, ¿cuál será la posición  $s_\beta$  de la partícula cuando el tiempo  $t = \beta < \alpha$ ?

Si la velocidad  $v$  es constante, sabemos entonces, por física elemental, que

$$\frac{s_\beta - s_\alpha}{\beta - \alpha} = v, \quad (1)$$

y en consecuencia

$$s_\beta = s_\alpha + v(\beta - \alpha). \quad (2)$$

Deseamos generalizar a la ecuación 2 para incluir el caso en el que  $v$  no sea constante. Procedemos exactamente del mismo modo que hicimos para definir el área y el volumen. Sea  $\Delta$  una partición de  $[\alpha, \beta]$  y seleccionemos un punto estrella  $t_i^*$  en cada subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ . La ecuación siguiente da una aproximación al cambio de posición, o de desplazamiento  $\Delta s_i$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t_i$  desde  $t_{i-1}$  hasta  $t_i$ :

$$\Delta s_i = s(t_i) - s(t_{i-1}) \cong f(t_i^*) \Delta t_i. \quad (3)$$

Ello nos conduce a la aproximación

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i \cong \sum_{i=1}^n f(t_i^*) \Delta t_i \quad (4)$$

para el desplazamiento de  $t = \alpha$  a  $t = \beta$ . Mientras menor sea la norma  $\Delta$  de la partición, más se aproximarán las sumas de Riemann (4) al desplazamiento total. Siempre que  $f$  sea integrable, estas sumas de Riemann tienden a la integral de  $f$ , desde  $t = \alpha$  hasta  $t = \beta$ . Así, si la función velocidad  $f$  es integrable en  $[\alpha, \beta]$ , entonces el desplazamiento  $s_\beta - s_\alpha$  está dado por

$$s_{\beta} - s_{\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt. \quad (5a)$$

Por tanto, la posición de la partícula cuando  $t = \beta$  es

$$s_{\beta} = s_{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt. \quad (5b)$$

## EJEMPLO 1

La velocidad de una partícula que se mueve en una recta es

$$v = (2t^2 + \frac{1}{2}) \text{ cm/s}$$

cuando  $t = 0$  la partícula se encuentra en  $s = -1$  cm. ¿Cuál es la posición de la partícula cuando  $t = 3$  seg? y ¿cuál es el desplazamiento en el intervalo desde  $t = 0$  hasta  $t = 3$ ?

De acuerdo con la ecuación 5 tenemos que

$$\begin{aligned} s_3 &= s_0 + \int_0^3 \left( 2t^2 + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= -1 + \left[ \frac{2t^3}{3} + \frac{t}{2} \right]_0^3 \\ &= -1 + \left( 18 + \frac{3}{2} \right) = 18.5 \text{ cm.} \end{aligned}$$

El desplazamiento es  $s_3 - s_0 = 19.5$  cm. ■

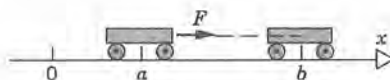
Es importante subrayar que la fórmula (5a) da el cambio neto de la posición, o desplazamiento y que no necesariamente es la distancia total recorrida. Por ejemplo, supongamos que una partícula se encuentra inicialmente en  $s = 0$  y que se mueve con una velocidad 1 desde  $t = 0$  hasta  $t = 1$  y luego con una velocidad  $-1$  desde  $t = 1$  hasta  $t = 2$ . Es claro que la partícula regresa al origen cuando  $t = 2$ , y por tanto no hay cambio en su posición, pero ha recorrido una distancia igual a dos unidades. Para calcular la distancia recorrida a veces se usa el término *rapidez* de la partícula en lugar de velocidad. Como la rapidez de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, tenemos que

$$\text{Distancia recorrida en el intervalo de tiempo } [\alpha, \beta] = \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)| dt, \quad v = f(t). \quad (6)$$



## Trabajo

Cuando se mueve un objeto en una línea recta bajo la acción de una fuerza constante en la dirección del movimiento, al producto de la fuerza por el desplazamiento se le llama trabajo. Si hacemos que la recta sobre la que se mueve el objeto sea el eje  $x$ , el trabajo  $W$  efectuado por una fuerza constante  $F$  en la dirección positiva de  $x$  al mover al objeto del punto  $x = a$  al punto  $x = b$  es  $W = F(b - a)$  (véase figura 7.4.2). En el



**Figura 7.4.2** Trabajo = fuerza por desplazamiento.

sistema inglés de unidades la fuerza se mide en libras y la distancia en pies por lo que el trabajo se mide en pies libras. En el sistema cgs la fuerza se mide en dinas y la distancia en centímetros y por tanto, el trabajo se mide en dinas centímetro, llamados ergios. Y en los sistemas mks e ISO la fuerza se mide en newtons y la distancia en metros; la unidad de medición del trabajo es el newton metro, al que se le llama joule. La relación entre las unidades de medida del trabajo es  $1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergs} = 0.7376 \text{ ft lb}$ . Por ejemplo, si se toma la dirección hacia arriba como positiva, el trabajo efectuado al empujar un escritorio que pesa 84 lb escaleras arriba a una altura de 6 ft es

$$W = 84 \text{ lb} \times 6 \text{ ft} = 504 \text{ ft lb}.$$

A continuación vamos a suponer que la fuerza no es constante, sino que es una función  $F(x)$  de la posición  $x$ . Por ejemplo, en el vuelo espacial la atracción gravitacional de la tierra sobre una nave espacial varía en forma inversa con respecto al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.

¿Cómo se define el trabajo efectuado por una fuerza variable  $F(x)$  al mover un objeto desde  $x = a$  hasta  $x = b$ ? Hallándonos en este punto sería indudablemente muy aburrido decir otra vez que (1) se da una partición del intervalo, (2) se seleccionan puntos estrella, (3) se forman sumas de Riemann de aproximación, (4) se hace que la norma de la partición tienda a cero y (5) y concluir que si  $F$  es integrable, el trabajo  $W$  efectuado para mover el objeto desde  $x = a$  hasta  $x = b$  es

$$W = \int_a^b f(x) \, dx. \quad (7)$$

## EJEMPLO 2

Se sabe, de acuerdo con la evidencia experimental, que la fuerza necesaria para estirar un resorte una distancia  $x$  a partir de su longitud natural es proporcional a  $x$ . Si una

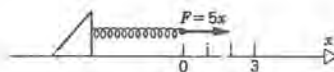


Figura 7.4.3

fuerza de 5 lb estira 1 pulgada al resorte, ¿cuánto trabajo se efectúa al estirar el resorte 3 in.?

Si medimos  $x$  a partir de la posición natural del resorte, entonces la fuerza es  $f(x) = cx$ , siendo  $c$  una constante de proporcionalidad. Cuando  $x = 1$  in,  $F = 5$  lb; por tanto,  $c = 5$  lb/in y  $F(x) = 5x$  (véase figura 7.4.3). Así

$$W = \int_0^3 5x \, dx = \left. \frac{5x^2}{2} \right|_0^3 = 22.5 \text{ in-lb} = 1.875 \text{ ft-lb.} \quad \blacksquare$$

La interpretación geométrica de la ecuación 7 es que cuando la fuerza tiene la misma dirección que el movimiento, entonces el trabajo efectuado es numéricamente igual al área delimitada por la gráfica de la función fuerza,  $y = f(x)$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = a$  y  $x = b$ .

Físicamente, el trabajo hecho por una fuerza que actúa sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de esa partícula (véase el problema 20). Consideremos un sistema mecánico en el que la fuerza necesaria para mover una masa en la dirección positiva es distinta de la fuerza necesaria para moverla en la dirección negativa (véanse las curvas  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, de la figura 7.4.4). El área sombreada representa

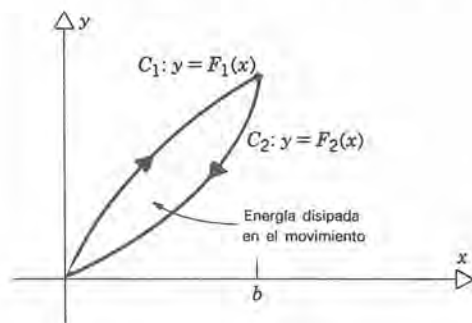


Figura 7.4.4

la diferencia entre el trabajo necesario para mover a la masa desde  $x = 0$  hasta  $x = b$ , y de regreso hasta  $x = 0$ ; por tanto es la diferencia en la energía cinética desde el principio hasta el final del movimiento. Esta energía se disipará como calor. Es este principio el que permite la disipación de la energía de impacto mediante un amortiguador.

### EJEMPLO 3

Un pozo de irrigación tiene 50 ft de profundidad y una sección transversal circular cuyo

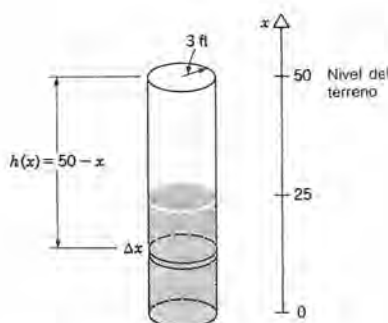


Figura 7.4.5

radio es de 3 ft. Si el pozo está lleno hasta la mitad, calcular el trabajo efectuado por una bomba para vaciarlo, si el agua se eleva desde el nivel de su superficie. La densidad  $w$  del agua es aproximadamente  $62.5 \text{ lb/ft}^3$ .

Debemos tener en cuenta el hecho de que los diferentes elementos de volumen del agua se elevan a diferentes alturas. Veamos el dibujo de la figura 7.4.5. El elemento genérico tiene un volumen de  $9\pi\Delta x \text{ ft}^3$  y pesa  $9\pi w\Delta x \text{ lb}$ . Como este elemento se eleva una altura  $h = 50 - x \text{ ft}$ , el trabajo efectuado es  $9\pi x\Delta x(50 - x) \text{ ft lb}$ . Así, el trabajo total para vaciar el pozo es

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{25} 9\pi w(50 - x) dx \\
 &= 9\pi w \left( 50x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{25} \\
 &= 9\pi w \left[ 50 \cdot 25 - \frac{25 \cdot 25}{2} \right] \\
 &= \frac{3}{4} 9\pi w \times 50 \times 25 = 8437.5\pi w \text{ ft-lb.}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Si  $x$  se mide desde el borde del pozo, en lugar de hacerlo desde el fondo, la fórmula para  $W$  es

$$W = \int_{25}^{50} 9\pi wx dx. \tag{9}$$

Naturalmente, esta integral da el mismo resultado que la ecuación 8. ■

### Presión hidrostática

Supongamos que se coloca una placa de área  $A$  en forma horizontal a una profundidad



$h$  bajo la superficie de un recipiente lleno de líquido. Entonces, la fuerza hacia abajo que ejerce el líquido que está sobre la placa es

$$F = whA, \quad (10)$$

en la cual  $w$  es la densidad del líquido (para el agua,  $w \approx 62.5 \text{ lb/ft}^3$ ). La **presión**, o fuerza por unidad de área, es

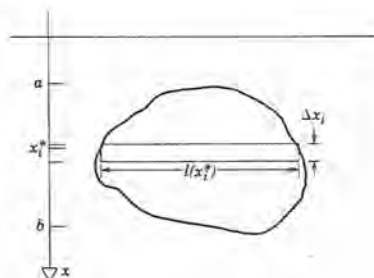
$$p = wh. \quad (11)$$

A partir de las leyes de la física se conocen dos hechos importantes: (a) la presión es la misma en todas las direcciones (principio de Pascal\*) y (b) la presión y la fuerza no dependen de la forma del recipiente. Por ejemplo, la presión y la fuerza en el fondo de cada uno de los recipientes que aparecen en la figura 7.4.6 son las mismas.



**Figura 7.4.6** La presión y la fuerza ejercida sobre el fondo es la misma para los tres recipientes; cada uno de ellos tiene la misma base  $A$  y la misma altura  $h$ .

Supongamos ahora que la placa se sumerge en posición vertical, de modo que la presión es distinta a diferentes profundidades. ¿Cómo calculamos la fuerza que actúa sobre la placa? Veamos el caso que muestra la figura 7.4.7, en donde  $x$  se mide hacia



**Figura 7.4.7**

abajo a partir de la superficie del agua. Sea  $l(x)$  el ancho de la placa a la profundidad  $x$ . Correspondiendo a una partición  $\Delta$  de  $[a, b]$  y a una selección de puntos estrella  $x_i^*$ , se tiene el área del elemento genérico que muestra la figura 7.4.7, y que es  $\Delta A_i = l(x_i^*)\Delta x_i$ . El valor aproximado de la fuerza  $F(x_i^*)$  que actúa sobre el elemento genérico es

\* Aunque este resultado se conoce como principio de Pascal, es consecuencia de las leyes de la mecánica de fluidos y no es un principio independiente.

$$F(x_i^*) = p(x_i^*) \Delta A_i = w x_i^* l(x_i^*) \Delta x_i.$$

La suma

$$F \equiv \sum_{i=1}^n F(x_i^*) = \sum_{i=1}^n w x_i^* l(x_i^*) \Delta x_i$$

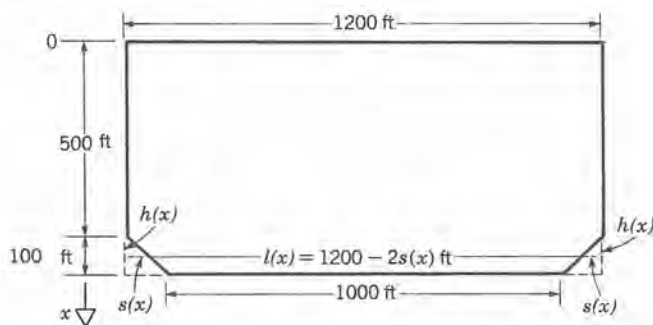
da una aproximación a la fuerza total que ejerce el líquido sobre la placa. Llevando a cabo el procedimiento normal de límite, llegamos a la definición de la fuerza ejercida por el fluido sobre la placa:

$$F = \int_a^b w x l(x) dx. \quad (12)$$

### EJEMPLO 4

La presa Glen Canyon en el río Colorado cerca de la frontera entre Utah y Arizona se construyó entre 1956 y 1963. Tiene una altura aproximada de 600 ft y la longitud del coronamiento es aproximadamente 1200 ft. Sin tener en cuenta la pendiente de la presa, la cara de ésta, vista desde el lado del embalse tiene la forma que muestra la figura 7.4.8. Suponiendo que el embalse está lleno por completo, calcular la fuerza sobre la presa.

**Figura 7.4.8** Diagrama de la presa de Glen Canyon.



Mediremos  $x$  hacia abajo a partir del coronamiento de la presa (véase figura 7.4.8). Primero determinaremos el ancho  $l(x)$  de ésta. Tenemos que

$$l(x) = 1200, \quad 0 \leq x \leq 500.$$

Para  $500 \leq x \leq 600$  haremos uso del hecho de que las esquinas triangulares que se han quitado son triángulos isósceles. Entonces

$$l(x) = 1200 - 2s(x),$$

y  $s(x) = h(x)$ . Además,  $h(x) = x - 500$ , y por tanto  $s(x) = x - 500$ , y

$$l(x) = 1200 - 2(x - 500) = 2200 - 2x, \quad 500 \leq x \leq 600.$$

Empleando la ecuación 12 podemos decir que la fuerza sobre la presa es

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{600} wxl(x) dx = \int_0^{500} 1200wx dx + \int_{500}^{600} wx(2200 - 2x) dx \\ &= 1200w \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{500} + w \left( 1100x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_{500}^{600} \\ &\cong 210.33w \times 10^6 \cong 1.31 \times 10^{10} \text{ lb.} \end{aligned}$$

Podríamos también haber medido  $x$  hacia arriba desde el fondo de la presa. En este caso la fórmula de  $F$  es

$$F = \int_0^{100} w(600 - x)(1000 + 2x) dx + \int_{100}^{600} 1200w(600 - x) dx. \blacksquare$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8 se da la velocidad  $v$  de una partícula que se mueve en línea recta como función del tiempo  $t$ . Suponer que  $v$  se mide en ft/seg y que  $t$  se mide en segundos. Calcular (a) el desplazamiento de la partícula y (b) la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo dado.

1.  $v = 1 - \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

2.  $v = t^2 + 3t + 2$ ,  $0 \leq t \leq 3$

3.  $v = t^2 + t - 2$ ,  $0 \leq t \leq 2$

4.  $v = 2 \cos \frac{1}{2}t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

5.  $v = t\sqrt{1+t^2}$ ,  $0 \leq t \leq 3$

6.  $v = |t - 2|$ ,  $1 \leq t \leq 3$

7.  $v = t - \frac{2}{t^2}$ ,  $1 \leq t \leq 2$

8.  $v = -2 + \sqrt{t}$ ,  $0 \leq t \leq 4$

9. La fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte es proporcional al estiramiento o compresión. Si la longitud natural del resorte es de 12 in y se necesita una fuerza de 16 lb para estirar 1 in al resorte, ¿cuánto trabajo se efectúa para estirar el resorte a una longitud total de 15 in?

10. Un pozo es cilíndrico hasta una profundidad de 50 ft, con radio de 3 ft, y a continuación tiene una forma cónica que se amplía hasta un punto a 75 ft de profundidad. Si el nivel del agua está a 25 ft por debajo de la superficie del terreno, calcular el trabajo efectuado para vaciar el pozo suponiendo que no entra más agua en él.
11. Una alberca tiene 25 ft por 75 ft. Su fondo es un plano inclinado, y tiene una profundidad de 4 ft en la parte menos profunda y 10 ft en la parte más profunda, que queda a 75 ft de distancia. La alberca está llena de agua hasta 1 ft del borde. Calcular la cantidad de trabajo necesaria para vaciarla sobre uno de sus lados.
12. La fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte helicoidal automotriz es proporcional a su estiramiento (o a su compresión). Si la altura natural del resorte es de 9 in y un peso de 600 lb comprime al resorte 1 in., calcular el trabajo efectuado al comprimir el resorte a la mitad de su longitud natural.
13. Dos electrones se repelen entre sí con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Si un electrón está fijo y el otro se mueve de una distancia de 5 cm hasta una de 2 cm a lo largo de una recta que conecta a los electrones, calcular el



## 412 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

trabajo efectuado contra la fuerza de repulsión en términos de la constante de proporcionalidad  $k$ .

14. La Tierra ejerce una fuerza gravitacional

$$F = \frac{km}{r^2}$$

sobre un cuerpo de masa  $m$  situado a una distancia  $r$  del centro de la Tierra. En este caso  $k$  es una constante y  $r > R$ ;  $R$  es el radio terrestre. Demostrar que el trabajo efectuado contra la gravedad, para levantar una cápsula espacial desde la superficie terrestre a una altura  $h$  sobre el terreno es  $W = mgRh/(R + h)$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre. Suponiendo que  $R = 4000$  mi, calcular el trabajo efectuado contra la gravedad para levantar la cápsula espacial que pesa 150 lb en la superficie de la tierra a una altura de 200 mi. Comparar este resultado con el que se obtiene suponiendo que la atracción de la Tierra es constante.

15. Si se pudiera barrenar un agujero recto que pasara por el centro de la Tierra, entonces una partícula de masa  $m$  en este agujero sería atraída al centro con una fuerza  $F = mgr/R$ , donde  $r$  es la distancia al centro,  $R$  es el radio terrestre y  $g$  es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. ¿Cuánto trabajo efectúa esta fuerza de atracción sobre una masa cuando cae desde la superficie hasta el centro?
16. Una cadena que pesa 15 lb/ft cuelga de la azotea de una construcción de 80 ft de altura. ¿Cuánto trabajo se efectúa para jalar la cadena hasta la azotea?
17. Un cilindro circular con un área de sección transversal  $A$  se llena con un gas que se expande o se comprime mediante el movimiento de un pistón en un extremo. Si  $p$  es la presión del gas, entonces la fuerza sobre el pistón es  $pA$ . Demostrar que el trabajo efectuado al comprimir el gas desde la altura  $h_1$  hasta la altura  $h_2$  es

$$W = \int_{h_1}^{h_2} pA \, dh = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$

donde  $V$  es el volumen del gas. Obsérvese que  $p$  debe expresarse como función de  $h$  en la primera integral y como función de  $V$  en la segunda.

18. Suponiendo que la relación entre la presión y el volumen de un gas tiene la forma

$$pV^\gamma = C$$

en la cual  $\gamma$  y  $C$  son constantes, emplear el resultado del problema 17 para demostrar que el trabajo efectuado al cambiar del volumen  $V_1$  y presión  $p_1$  al volumen  $V_2$  y presión  $p_2$  es

$$W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1 - \gamma}, \quad \gamma \neq 1.$$

El parámetro  $\gamma$  es la razón del calor específico a presión constante con respecto al calor específico a volumen constante. Para un proceso adiabático, que es el que se lleva a cabo sin ganancia o pérdida de calor,  $\gamma = 1.4$ . Para un proceso isotérmico, que es aquél en el que la temperatura permanece constante,  $\gamma = 1$ .

19. Un tanque esférico de aceite cuyo radio es de 10 ft está lleno a la mitad y el aceite tiene una densidad de 60 lb/ft<sup>3</sup>. Calcular el trabajo efectuado al bombear el aceite hasta la parte superior del tanque.
20. En este problema demostraremos que el trabajo efectuado sobre una masa  $m$  es igual al cambio en su energía cinética. Supongamos que en la posición  $x = a$  la masa tiene una velocidad  $v_a$  y en la posición  $x = b$  su velocidad es  $v_b$ . Emplear la segunda ley de Newton,  $F = m \, dv/dt$  y la regla de la cadena,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

para demostrar que

$$W = \int_a^b F \, dx = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2.$$

21. Una compuerta de un dique de irrigación tiene la forma de un triángulo isósceles. La orilla superior del triángulo tiene una longitud de 4 ft y los lados iguales miden 3 ft. Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta cuando el dique está lleno.
22. Un carro tanque de gasolina tiene la forma de un cilindro circular horizontal. El radio del cilindro es de 10 pies y la densidad de la gasolina es de 45 lb/ft<sup>3</sup>. Calcular la fuerza que se ejerce sobre el extremo del tanque cuando está lleno. *Sugerencia:* ver el ejemplo 3 de la sección 6.3.
23. Suponer que la sección transversal del carro tanque de gasolina del problema 22 es elíptica cuyo eje mayor (dirección horizontal) es de 16 ft y cuyo eje menor es de 6 ft. Establecer una integral para calcular la fuerza sobre el extremo del tanque cuando está lleno.

24. Una placa semicircular se sumerge en el agua con la parte plana vertical y su diámetro en la parte superior y a 3 ft bajo la superficie del agua. El diámetro de la placa es 2 ft. Calcular la fuerza en el lado de la placa. *Sugerencia:* ver ejemplo 3 de la sección 6.3.
25. La cara vertical de una presa tiene la forma de un trapecoide de 1000 ft en el coronamiento, 700 ft en la base y 80 ft de profundidad. Calcular la fuerza que se ejerce sobre la presa bajo las condiciones siguientes:
- El embalse detrás de la presa está lleno.
  - El embalse detrás de la presa tiene una profundidad de 60 ft.

## 7.5 APLICACIONES A LAS CIENCIAS BIOLÓGICAS Y A LAS CIENCIAS SOCIALES

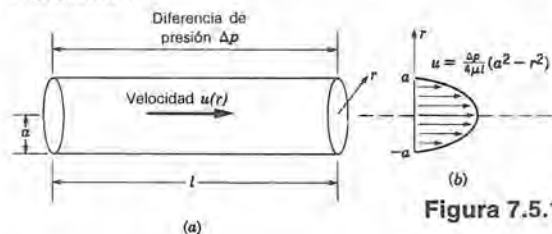
En esta sección veremos algunos ejemplos de cómo se presentan las integrales definidas en las ciencias biológicas y las sociales. En cada caso la idea de establecer una suma de Riemann para representar un valor aproximado de la cantidad que deseamos calcular, para después refinar la partición y obtener la integral definida, es la misma que la de los ejemplos geométricos fundamentales que se describieron en las secciones anteriores. Por esta razón omitiremos algunos de los detalles que deben ser ya completamente familiares al lector.

### Flujo en un capilar

Consideremos un tubo largo y circular de radio  $a$  y longitud  $l$  lleno con un fluido viscoso incompresible como, por ejemplo, agua. Si hay una diferencia  $\Delta p$  en las presiones en los extremos del tubo, entonces el fluido se moverá hacia la dirección de la presión menor. La velocidad del flujo es independiente de la dirección axial y en cada sección transversal tiene la forma

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu l} (a^2 - r^2), \quad (1)$$

en la cual  $r$  es una coordenada radial y  $\mu$  es la viscosidad del fluido (véase figura 7.5.1). Nótese que  $U_0 = (\Delta p)a^2/4\mu l$  es la velocidad en el centro del tubo ( $r = 0$ ). La distribución de velocidad (1) para el flujo en un tubo se conoce como *flujo de Poiseuille*.



**Figura 7.5.1** (a) Flujo impulsado por la presión en un tubo. (b) Perfil de velocidades en un flujo de Poiseuille.



Es interesante calcular el volumen del fluido, conocido como el *flujo*,  $Q$ , que pasa por una determinada sección transversal por unidad de tiempo. Si la velocidad fuera constante, digamos  $U$ , entonces el volumen total de fluido que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo sería

$$\begin{aligned} Q &= U \times \text{área de la sección transversal} \\ &= \pi a^2 U, \end{aligned} \quad (2)$$

cuyas dimensiones son volumen/tiempo.

Cuando no es constante la velocidad, dividimos el área de la sección transversal en pequeñas subáreas adecuadas, calculamos  $Q$  para cada una de ellas aproximando a  $u$  mediante algún valor apropiado constante en cada subárea, y a continuación sumamos todos esos términos. De acuerdo con la ecuación 1 observamos que  $u$  es constante en cada círculo con centro en el origen. Por lo tanto emplearemos anillos circulares como subáreas. Si damos una partición del intervalo  $[0, a]$  mediante los puntos  $r_0, r_1, \dots, r_n$ , el área del anillo que queda entre  $r_{i-1}$  y  $r_i$  (véase figura 7.5.2) es

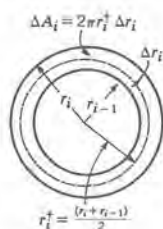


Figura 7.5.2

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \pi(r_i^2 - r_{i-1}^2) \\ &= \pi[(r_{i-1} + \Delta r_i)^2 - r_{i-1}^2] = \pi[2r_{i-1} \Delta r_i + (\Delta r_i)^2] \\ &= 2\pi \left( r_{i-1} + \frac{\Delta r_i}{2} \right) \Delta r_i \\ &= 2\pi r_i^* \Delta r_i. \end{aligned} \quad (3)$$

En este caso  $r_i^*$  está a la mitad entre el radio interior  $r_{i-1}$  y el radio exterior  $r_i$ . A continuación seleccionamos un punto estrella en cada intervalo de modo que  $r_i^* = r_i^*$ . Entonces el flujo asociado con la  $i$ ésima subárea es aproximadamente  $u(r_i^*)2\pi r_i^* \Delta r_i$ , y el flujo total está dado aproximadamente por

$$Q \approx \sum_{i=1}^n 2\pi u(r_i^*) r_i^* \Delta r_i. \quad (4)$$

La suma (4) es una suma de Riemann para la función  $2\pi r u(r)$ , y por tanto si  $u$  es continua, o aunque sea sólo integrable en  $[0, a]$ , entonces cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  la suma del lado derecho de la ecuación 4 tiende a la integral correspondiente. Así

$$Q = \int_0^a 2\pi u(r) r \, dr. \quad (5)$$

Para la distribución de velocidad que se dio en la ecuación 1 tenemos

$$Q = 2\pi \frac{\Delta p}{4\mu l} \int_0^a (a^2 - r^2) r \, dr$$



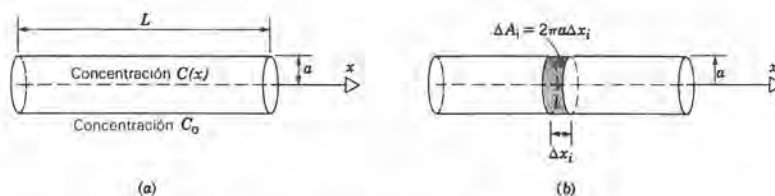
$$= \frac{\pi \Delta p}{2\mu l} \left( \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi (\Delta p) a^4}{8\mu l}. \quad (6)$$

Es instructiva la comparación de las ecuaciones 2 y 6. Si la velocidad fuera constante, el flujo sería proporcional al cuadrado del radio; pero la distribución correcta de la velocidad da un flujo que es proporcional a la cuarta potencia del radio. Así, si el radio del tubo se reduce por un factor de  $\frac{1}{2}$ , la cantidad de fluido que pasa en la sección transversal por unidad de tiempo se reduce por un factor de  $\frac{1}{16}$ , en comparación con tan sólo un factor de  $\frac{1}{4}$  para el modelo simplificado con velocidad constante. Esto muestra las inexactitudes que pueden surgir si se emplea un modelo demasiado sencillo. Otra observación interesante es la siguiente: si bien la sangre no es un fluido tan simple como uno viscoso no compresible y una arteria tampoco es un tubo largo y recto, los resultados obtenidos al emplear la distribución de velocidades (1) sugieren las serias consecuencias de una restricción en una arteria, por pequeña que sea.

## Ósmosis

Uno de los problemas fundamentales en la fisiología, que es el estudio de las funciones y los procesos vitales de los organismos vivos, es comprender cómo pasan los fluidos por una membrana semipermeable, como lo es la pared celular, hacia una solución de mayor concentración, para tratar de igualar las concentraciones en ambos lados de la membrana. Éste es el proceso llamado *ósmosis*.

Supongamos que tenemos un tubo largo de pared delgada, de longitud  $L$  y radio  $a$  lleno de agua salada y que la concentración de sal  $c(x)$  en el tubo es función de la coordenada axial  $x$ . Supóngase además que el tubo está rodeado por agua salada en la que la concentración de sal es constante  $c_0$  y que la pared del tubo es permeable al agua, pero no a la sal (véase figura 7.5.3a). Sabemos, por los experimentos, que la rapidez con la que el agua pasa por la pared del tubo es proporcional a la diferencia de las concentraciones,  $c(x) - c_0$ .



**Figura 7.5.3** Tubo delimitado por una membrana semipermeable.

Para calcular el flujo  $Q$  a través de la pared del tubo dividimos a éste en cilindros como se ve en la figura 7.5.3b. El área de la superficie del  $i$ ésimo cilindro es  $2\pi a \Delta x_i$ . Seleccionando puntos estrella en cada subintervalo, llegamos a la conclusión de que

$$Q \cong \sum_{i=1}^n [c(x_i^*) - c_0] 2\pi a \Delta x_i, \quad (7)$$

y haciendo que  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , que

$$Q = 2\pi a \int_0^L [c(x) - c_0] dx. \quad (8)$$

Para ver una aplicación de este resultado, refiérase al problema 4.

### Teoría de la confiabilidad

Supongamos que tenemos un grupo grande de unidades de un determinado producto manufacturado, como por ejemplo focos eléctricos. Sea  $F(t)$  la proporción de focos que fallan dentro de las primeras  $t$  horas de uso. O bien,  $F(t)$  puede representar la probabilidad de que determinado foco falle dentro de  $t$  horas. La función  $F$  está definida para  $t \geq 0$  y tiene las siguientes propiedades.

1.  $F(0) = 0$ .
2.  $F(t) \geq 0$ .
3.  $F(t)$  es no decreciente.
4.  $F(t) \rightarrow 1$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En la teoría de la confiabilidad a la función  $F$  se le llama **distribución de falla**; más generalmente, a esa función se le llama **distribución de probabilidad**.

La proporción de los productos que todavía dan servicio después de un tiempo  $t$ , pero que fallan antes del tiempo  $t + \Delta t$ , donde  $\Delta t \geq 0$ , esto es, la proporción de los que fallan en el intervalo  $[t, t + \Delta t)$ , está dada por  $F(t + \Delta t) - F(t)$ . Suponiendo que  $F$  es derivable y que  $\Delta t$  es pequeño, podemos escribir

$$F(t + \Delta t) - F(t) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \Delta t \cong F'(t) \Delta t.$$

Por tanto, la proporción de fallas en el intervalo  $[t, t + \Delta t)$  es aproximadamente igual a  $F'(t) \Delta t$ . Así,  $F'(t)$  es una medida de la tendencia del producto a fallar cerca del tiempo  $t$ . La función  $f(t) = F'(t)$  se conoce en la teoría de la confiabilidad como **densidad de falla**; y más generalmente, como **densidad de probabilidad**. Como  $F(0) = 0$ , de acuerdo al teorema 6.4.3,

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds; \quad (9)$$

además, como  $F(t) \rightarrow 1$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(s) ds = 1. \quad (10)$$

**EJEMPLO 1**

Supongamos que mediante pruebas experimentales se ha determinado que para cierto tipo de foco la densidad de falla está dada por

$$f(t) = \begin{cases} At^2(100 - t)^2, & 0 \leq t \leq 100; \\ 0, & t > 100; \end{cases} \quad (11)$$

en la cual  $A$  es constante. Calcular la distribución de falla, el valor de la constante  $A$  y la proporción de focos que fallarán en el intervalo de tiempo  $60 \leq t < 70$ .

De acuerdo con la ecuación 9,

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t As^2(100 - s)^2 ds \\ &= A \int_0^t (10^4s^2 - 2 \times 10^2s^3 + s^4) ds \\ &= A \left[ \frac{10^4t^3}{3} - \frac{10^2t^4}{2} + \frac{t^5}{5} \right], \quad 0 \leq t \leq 100. \end{aligned}$$

Según la ecuación 11, todos los focos fallan cuando  $t = 100$ . Por tanto,  $F(100) = 1$ , y

$$1 = A \left( \frac{10^{10}}{3} - \frac{10^{10}}{2} + \frac{10^{10}}{5} \right),$$

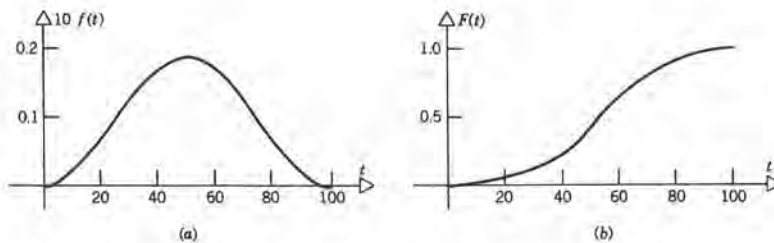
así que

$$A = 3 \times 10^{-9}.$$

Por consiguiente

$$F(t) = (3 \times 10^{-9}) \left[ \frac{10^4t^3}{3} - \frac{10^2t^4}{2} + \frac{t^5}{5} \right], \quad 0 \leq t \leq 100. \quad (12)$$

Desde luego,  $F(t) = 1$  para  $t > 100$ . La densidad de falla y la distribución de falla se presentan en la figura 7.5.4.



**Figura 7.5.4** (a) Función densidad de falla. (b) Función distribución de falla.



La proporción de focos que fallan en  $60 \leq t < 70$  es  $F(70) - F(60)$ . Empleando la ecuación 11 y llevando a cabo las operaciones aritméticas necesarias, encontramos que  $F(70) - F(60) \cong 0.154$ . ■

Una cuestión de interés primordial consiste en determinar el tiempo de falla promedio, o esperado, de un producto que tiene determinada densidad de falla. Para resolver esta cuestión supondremos que todos los productos fallan en el tiempo  $T$ , donde  $T$  es algún número positivo grande. Luego damos una partición del intervalo  $[0, T]$  con los puntos  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ . La proporción de productos que fallan en el intervalo de tiempo  $[t_{i-1}, t_i]$  es  $F(t_i) - F(t_{i-1})$ . Si la norma de la partición es muy pequeña, podemos suponer que todos los productos que fallan en el intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  en realidad fallan en determinado tiempo  $t_i^*$  en  $[t_{i-1}, t_i]$ . Entonces, el tiempo promedio  $\tau$  de falla está dado aproximadamente por

$$\begin{aligned}\tau &\cong \sum_{i=1}^n t_i^* \cdot \{\text{proporción de productos que fallan en } [t_{i-1}, t_i]\} \\ &= \sum_{i=1}^n t_i^* [F(t_i) - F(t_{i-1})].\end{aligned}$$

De nuevo empleamos el teorema del valor medio (teorema 4.1.3) para escribir

$$\tau = \sum_{i=1}^n t_i^* F'(t_i^*) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n t_i^* f(t_i^*) \Delta t_i, \quad t_i^* \in (t_{i-1}, t_i). \quad (13)$$

Como en algunos ejemplos anteriores la suma (13) no es exactamente de Riemann; sin embargo, se transforma en suma de Riemann si en cada intervalo seleccionamos a  $t_i^* = t_i$ . Entonces

$$\tau = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i^* f(t_i^*) \Delta t_i = \int_0^T t f(t) dt, \quad (14)$$

## EJEMPLO 2

Calcular el tiempo esperado de falla  $\tau$  de los focos del ejemplo 1 cuya densidad de falla está dada por la ecuación 11.

De la ecuación 14 obtenemos

$$\begin{aligned}\tau &= (3 \times 10^{-9}) \int_0^{100} t \cdot t^2(100 - t)^2 dt \\ &= (3 \times 10^{-9}) \int_0^{100} (10^4 t^3 - 200 t^4 + t^5) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (3 \times 10^{-9}) \left( \frac{10^4 \cdot 10^8}{4} - \frac{2 \cdot 10^2 \cdot 10^{10}}{5} + \frac{10^{12}}{6} \right) \\
&= 50.
\end{aligned}$$

En este problema el valor  $\tau$  esperado es el punto medio del intervalo  $(0, 100)$  en el cual  $f$  es distinta de cero. Esto se debe a la simetría de  $f$  en este caso, pero en general no es cierto. ■

### Excedente de los consumidores y excedente de los productores

Sea  $x$  el número de determinado artículo, que suponemos que varía en forma continua, y sea  $p$  el precio unitario del artículo. Una curva de demanda da la relación entre el precio y el número de unidades que se comprarán a ese precio. Las curvas típicas de demanda y oferta se muestran en la figura 7.5.5a. En el caso de competencia pura, el equilibrio del mercado está determinado por el punto de intersección de las curvas de demanda y de oferta.



**Figura 7.5.5** (a) Curvas de demanda y oferta. (b) Excedente del consumidor. (c) Excedente del productor.

Supongamos a continuación que se determinan una demanda de mercado  $x_0$  y un precio  $p_0$  correspondiente, en competencia pura o en otra forma. Entonces se venden  $x_0$  artículos a un precio  $p_0$  y se tiene una cantidad de ingreso total igual a  $p_0 x_0$ . Los consumidores que estuvieron dispuestos a pagar más que  $p_0$  ganaron porque se estableció el precio en  $p_0$ , en lugar del precio máximo que hubieran estado dispuestos a pagar. La ganancia total de los consumidores, que se llama **excedente del consumidor** se representa mediante el área bajo la curva de demanda, pero arriba de la recta de precios  $p = p_0$  (véase figura 7.5.5b). Así

$$\begin{aligned}
\text{E.C.} = \text{excedente de consumidor} &= \int_0^{x_0} [p_D(x) - p_0] dx \\
&= \int_0^{x_0} p_D(x) dx - p_0 x_0.
\end{aligned} \tag{15}$$

El excedente de consumidor es una medida de la prosperidad del público consumidor. En la figura 7.5.5b vemos que si la demanda del mercado fuera mayor ( $x > x_0$ ), entonces

el producto se podría haber producido a un costo unitario menor. En consecuencia, habría más producto disponible a menor costo unitario. Naturalmente, suponemos que es posible la producción adicional sin dañar a los recursos naturales, o al menos, con menos daños a la sociedad.

Análogamente, si se establece la cantidad suministrada  $x_0$  al precio  $p_0$ , los productores que hubieran deseado vender el artículo a un precio menor que  $p_0$  han ganado. La ganancia total del productor, que se llama **excedente del productor**, es el área debajo de la recta de precios  $p = p_0$  y arriba de la curva de oferta (véase figura 7.5.5c). Por tanto

$$\begin{aligned} \text{E. P.} = \text{excedente de productor} &= \int_0^{x_0} [p_0 - p_s(x)] dx \\ &= p_0 x_0 - \int_0^{x_0} p_s(x) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Es interesante observar que es posible que haya tanto un excedente del productor y un excedente del consumidor. Es una ventaja del comercio.

## PROBLEMAS

1. Este problema se ocupa de algunos resultados cualitativos acerca del flujo de la sangre en el sistema circulatorio humano que se pueden obtener empleando los resultados del flujo de Poiseuille en un tubo. Primero, observemos que la presión tiene las dimensiones de fuerza/área (dinas/cm<sup>2</sup>) y la viscosidad  $\mu$  tiene dimensiones de (fuerza/área)  $\times$  tiempo (dina seg/cm<sup>2</sup>). La viscosidad efectiva de la sangre es aproximadamente 0.04 dina seg/cm<sup>2</sup>, la cual es cuatro veces la viscosidad del agua.
  - (a) Unas dimensiones razonables para una arteriola (las más pequeñas de las arterias) son 0.5 cm de longitud y 30 micras de radio (1 micra =  $10^{-4}$  cm). El espesor de un glóbulo rojo es de aproximadamente 2 micras. Si la caída de presión por una arteriola es de 50 mm de mercurio (1 mm Hg =  $1.33 \times 10^3$  dinas/cm<sup>2</sup>), calcular el volumen de sangre que fluye por unidad de tiempo en la arteriola.
  - (b) La resistencia  $R$  al flujo en un tubo se define como  $R = \Delta p/Q$ , donde  $\Delta p$  es la caída de presión en el tubo y  $Q$  el flujo volumétrico. Para el flujo de Poiseuille demostrar que  $R = 8\mu/\pi a^4$  dina seg/cm<sup>5</sup>.
  - (c) Un valor razonable para la cantidad de sangre que bombea el corazón es de 6 litros/min = 6000 cm<sup>3</sup>/min. También es razonable suponer que la presión en la arteria que sale del corazón es de 100 mmHg, y que en la vena que entra al corazón es casi cero. ¿Cuál es la resistencia del sistema circulatorio? Suponiendo que el sistema circulatorio se puede comparar con un tubo largo cuya longitud efectiva es de 2 m, ¿cuál es el radio del tubo?
  - (d) Esta parte del problema es continuación de la parte (c). Se sabe que la mayor parte de la resistencia del sistema circulatorio está en las arteriolas y en los capilares y no en las arterias. Consideremos este modelo burdo: sale una sola arteria del corazón que se divide en  $N$  arteriolas, las cuales se conectan después a una vena que regresa al corazón. Suponer, además, que la presión sanguínea es de 100 mmHg en la arteria que sale del corazón, de 90 mmHg en las arteriolas y de 25 mmHg en el extremo final de las arteriolas. Estos 25 mm de presión se pierden en los capilares y en el regreso de las venas al corazón. Suponer también que las arteriolas tienen una longitud de 0.5 cm y un radio de 30 micras. Calcular el número de arteriolas. Nótese que el resultado es especialmente sensible a la hipótesis del radio de las arteriolas.



2. Por un tubo de longitud  $l$  y radio  $a$  fluye la sangre. Durante este flujo el oxígeno se difunde por los lados del tubo y se combina con la sangre que está en la mitad externa del tubo ( $a/2 \leq r \leq a$ ). Suponiendo que el flujo es de Poiseuille, determinar el porcentaje de sangre que se oxigena (moléculas de oxígeno que se combinan con la hemoglobina).
3. Este problema es de optimización que necesita el empleo de la fórmula de resistencia que se dedujo en el problema 1(b). Suponer que un vaso sanguíneo de radio  $a$  une los puntos  $O$  y  $P$  y que otro vaso sanguíneo de radio  $b (< a)$  se ramifica para conectarse con otro punto  $Q$  (véase figura 7.5.6). Determinar el punto de ramificación mediante el cálculo del ángulo  $\theta$  que reduzca al mínimo la resistencia total al flujo de  $O$  a  $Q$ .

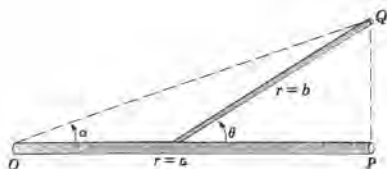


Figura 7.5.6

4. Un tubo de pared delgada permeable de longitud  $L$  está en posición vertical en el seno de una solución acuosa salina con concentración uniforme  $c_0$ . El interior del tubo está lleno con agua salada y la concentración de sal varía linealmente desde  $1.4c_0$  en el fondo hasta  $0.8c_0$  en la parte superior. Si el tubo tiene radio  $a$ , calcular el flujo de agua por las paredes del tubo.
5. (a) Al efectuar una encuesta una agencia de entrevistas sabe que el tiempo necesario para una entrevista disminuye cuando aumenta el número de entrevistas. El tiempo  $T$  necesario para que el mejor entrevistador haga su  $n$ -ésima entrevista es  $T(n) = 2n^{-1/2}$  horas. Así, el tiempo para 400 entrevistas es

$$\sum_{n=1}^{400} 2n^{-1/2}.$$

Calcular una aproximación a esta suma suponiendo que  $n$  es una variable continua en el intervalo

$[1, 401]$  y sustituyendo la suma por una integral adecuada de Riemann. Si a este entrevistador se le pagan \$5/hora, ¿cuánto cuesta completar las 400 entrevistas?

- (b) El tiempo necesario con un entrevistador algo más lento es  $T(n) = 2.5n^{-1/3}$ . Si a este entrevistador se le pagan \$4/hr, ¿cuánto cuesta llevar a cabo las entrevistas?
- (c) En relación con el entrevistador más lento, ¿en cuánto podría justificar el pago al entrevistador más rápido?
6. Un negocio de plomería ha rentado una computadora que debería reducir mucho el costo de su control de inventarios. En ese negocio se calcula que los ahorros en sueldos de empleados serán \$21,000/año. El costo fijo por la renta de la máquina es de \$500/mes, y calculan que los costos de mantenimiento aumentan con el tiempo y que serán de  $1.5t^{3/2}$  miles de dólares al año. En este problema, suponer que todos los costos y los ahorros varían en forma continua con respecto al tiempo.
- (a) Suponiendo que se usa la computadora hasta que ya no sea rentable, ¿cuánto tiempo usará la compañía la computadora, y cuánto dinero ahorrará?
- (b) Si pudieran reducir la tasa de mantenimiento a  $1.5t$  miles de dólares/año, ¿cuánto tiempo podrían emplear en forma redituable la computadora, y cuánto dinero ahorrarían? Comparar con el caso anterior.
- (c) Un análisis más sofisticado de la longevidad de la computadora y los ahorros para la compañía tendrían en cuenta los aumentos salariales. Supóngase que los salarios de los empleados a los que sustituye la computadora son aproximadamente de  $\$21,000(1 + 0.05t)$  y que los costos de mantenimiento son de  $1.5t^{3/2}$  miles de dólares al año. Demostrar que la computadora se puede operar en forma redituable económicamente durante más de 5 años pero menos de 6 y calcular los ahorros en el periodo de 5 años.
7. (a) Calcular la constante  $k$  para que la función

$$f(t) = \begin{cases} k, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

sea una posible función densidad de falla.

- (b) Determinar la correspondiente función distribución de falla.

(c) Determinar el tiempo esperado de falla.

8. (a) Determinar la constante  $k$  para que la función

$$f(t) = \begin{cases} \frac{k}{t^3}, & 1 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

sea una posible función de densidad de falla.

(b) Determinar la correspondiente función de distribución de falla.

(c) Determinar el tiempo esperado de falla.

9. Suponer que la densidad de falla para un grupo grande de focos con filamento especial está dada por

$$f(t) = \begin{cases} At, & 0 \leq t \leq 1 \\ A(2 - t), & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en la cual  $t$  está dado en años.

(a) Calcular la constante  $A$ .

(b) Determinar la distribución de falla.

(c) Determinar la vida esperada de un foco.

10. Si se hace caso omiso de la resistencia del aire, la distancia horizontal  $s$  que recorre un proyectil disparado por un cañón con una velocidad inicial  $v$ , a un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal es  $s(\theta) = (v^2 \sin 2\theta)/g$  (véase figura 7.5.7). Suponer que se

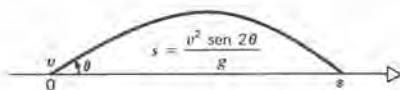


Figura 7.5.7 Trayectoria de un proyectil.

conoce con exactitud la velocidad de salida, pero que sólo se sabe que el ángulo de inclinación está en el intervalo  $[\theta_1, \theta_2]$ . Suponiendo que cualquier valor de  $\theta$  en este intervalo tiene la misma probabilidad, entonces la función densidad de probabilidad para el ángulo de inclinación es

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ 0, & \theta < \theta_1 \text{ o } \theta > \theta_2. \end{cases}$$

(a) Calcular  $E(\theta)$ , el valor esperado de  $\theta$ .

(b) Calcular  $s[E(\theta)]$ .

(c) Definir la suma adecuada de Riemann, y generalizando el argumento que precede a la ecuación 14, demostrar que  $E(s)$ , el valor esperado de  $s$ , es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{v^2}{g} (\sin 2\theta) f(\theta) d\theta.$$

(d) Evaluar  $E(s)$  y observar que  $E(s) \neq s[E(\theta)]$ .

11. Sea  $s(t)$ , lo que se llama *función supervivencia*, que denota a la fracción de una población que sobrevive hasta el tiempo  $t > 0$ . Nótese que  $s(t)$  es función decreciente y que  $0 \leq s(t) \leq 1$ , que  $s(0) = 1$ , y que  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$ . Sea  $r(t)$  la rapidez a la cual se agregan miembros nuevos a la población; esto es, en un intervalo de tiempo desde  $t_{i-1}$  hasta  $t_i$  se agregan aproximadamente  $r(t_i) \Delta t_i$  nuevos miembros a la población. La función  $r$  se llama *función renovación*. Sea  $f(t)$  el tamaño de la población en cualquier tiempo  $t$ . Dando una partición del intervalo  $[0, T]$  y formando sumas adecuadas de Riemann, demostrar que

$$f(T) = f(0)s(T) + \int_0^T s(T-t)r(t) dt.$$

12. La población inicial de una colonia de insectos es  $10^3$ . Si la función supervivencia es  $s(t) = 1/(1+t)^3$  y la función renovación es  $r(t) = 100$ , calcular el tamaño de la población en el tiempo  $T$ . Consultar el problema 11.
13. La población inicial de una colonia de insectos es  $10^4$ . La función supervivencia es  $s(t) = (1+t^2)^{-2}$  y la función renovación en el intervalo  $[0, T]$  es  $r(t) = 30(T-t)$ . Calcular el tamaño de la población en el tiempo  $T$ . Ver el problema 11.

14. La curva de demanda está dada por  $p_D(x) = 81 - x^2$ , para  $0 \leq x \leq 9$ . Determinar el excedente del consumidor para

$$(a) x_0 = 6, \quad (b) p_0 = 64.$$

15. La curva de oferta está dada por  $p_S(x) = 3 + x$ . Calcular el excedente de oferta cuando

$$(a) x_0 = 15, \quad (b) p_0 = 8.$$



16. Para determinado producto, las condiciones de competencia pura determinan su mercado. En cada caso, determinar el excedente del consumidor y el del productor.

$$(a) p_D(x) = \frac{72}{(1+x)^2}, \quad p_S(x) = \frac{2}{5}x$$

$$(b) p_D(x) = 240 - 2x - x^2, \quad p_S(x) = \frac{x^2}{2}$$

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 8 calcular el área de la región acotada que satisface las condiciones dadas.

- Región acotada por  $f(x) = -x^2 + 2$ ,  $g(x) = 3$ ,  $x = 1$  y  $y = 3$ .
- Región acotada por  $f(x) = x^{-2}$ ,  $g(x) = 2 - x^2$ , y  $h(x) = 4$ .
- Región que incluye a  $(0, 0)$ , acotada por  $x^2 + y^2 = 16$  y  $16 + 8x = y^2$ .
- Región acotada por  $f(x) = \cos 2x$  y  $g(x) = (16x^2/\pi^2) - 1$ .
- Región acotada por  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$  y  $y = 0$ .
- Región entre  $x = 2 \cos(\pi y/2)$  y  $x^2 + y^2 = 1$ .
- Región acotada por  $f(x) = -x + 2$ ,  $g(x) = x^3$  y  $x = -2$ .
- Región acotada por arriba por  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  y por abajo por  $g(x) = 1 - x^2$ .

En los problemas 9 a 13 calcular el área de la región dada (a) integrando con respecto a  $x$  y (b) integrando con respecto a  $y$ .

- Región acotada por  $f(x) = 2 - x$  y  $g(x) = x^2$ .
- Región acotada por  $f(x) = x + 5$ ,  $g(x) = 2x - 1$  y  $h(x) = 1 - x$ .
- Región acotada por  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = 2x$ .
- Región acotada por  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  y  $g(x) = -x^2 - 4$ .
- Región acotada por  $f(x) = |2 + x|$  y  $g(x) = x^2$ .

En los problemas 14 a 19 se hace girar la región  $R$  que está arriba del eje  $x$ , abajo de la curva  $x = y^2$ , y donde  $0 \leq x \leq 4$ , alrededor de la recta dada. Calcular el volumen del sólido que resulta empleando (a) discos y (b) casquillos.

- $R$  gira alrededor del eje  $y$ .
- $R$  gira alrededor del eje  $x$ .
- $R$  gira alrededor de  $x = -2$ .

17.  $R$  gira alrededor de  $x = 4$ .

18.  $R$  gira alrededor de  $y = 3$ .

19.  $R$  gira alrededor de  $y = -1$ .

En los problemas 20 a 22, se hace girar a la región  $R$  que queda arriba del eje  $x$  y abajo de  $y = 2 - 2|x|$  alrededor de la recta dada. Calcular el volumen del sólido que resulta empleando (a) discos y (b) casquillos.

20.  $R$  gira alrededor del eje  $x$ .

21.  $R$  gira alrededor de  $y = 3$ .

22.  $R$  gira alrededor de  $x = 2$ .

En cada uno de los problemas 23 a 25 se describe un sólido dado. (a) Hacer un dibujo del sólido. A continuación establecer (sin evaluar) las integrales que dan el volumen del sólido empleando (b) discos, y (c) casquillos.

23. El sólido que se forma al girar alrededor del eje  $y$  la región acotada por las rectas  $x = 0$ ,  $y = 6$ ,  $y = 0$  y

$$y = \begin{cases} 8 - 4x, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ -(x-1)^2 + 4, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

24. El sólido que se forma al girar a la región acotada por  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $y = -(x-1)^3 + 2$  alrededor del eje  $y$ .

25. El sólido que se forma al girar alrededor del eje  $x$  la región acotada por arriba por los mínimos valores de  $y = 20 - \frac{1}{2}x$  y  $y = 16 - (x-9)^2$ ; acotada por abajo por  $y = 0$  y a la izquierda por  $x = 0$ .

En los problemas 26 a 30 calcular la longitud del arco de la curva dada.

- $y = 4x^{3/2}$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 2$ .
- $x = -\sin 2t$ ,  $y = \cos 2t + 1$  desde  $t = 0$  hasta  $t = \pi$ .
- $x = \sin^2 t$ ,  $y = \cos^2 t$  desde  $t = 0$  hasta  $t = \pi/2$ .
- $2y^3 = 5x^2$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(\sqrt{2/5}, 1)$ .
- $3x^2 = 2(y-1)^3$  desde  $(0, 1)$  hasta  $(3\sqrt{2}, 4)$ .



## 424 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

En los problemas 31 a 34, calcular el área de la superficie que se forma al hacer girar la curva dada alrededor del eje  $x$ .

31.  $y = x^3/6$  para  $1 \leq x \leq 4$ .

32.  $y^2 = 9x$  para  $0 \leq x \leq 1$  y  $y > 0$ .

33.  $y = 3x + 1$  para  $0 \leq x \leq 10$ .

34.  $y = 2x^{1/2}$  para  $1 \leq x \leq 4$ .

En los problemas 35 a 38, se da la velocidad de una partícula que se mueve en línea recta, como función del tiempo. Suponer que se mide la velocidad  $v$  en ft/seg y que  $t$  se mide en segundos. Calcular (a) el desplazamiento de la partícula, y (b) la distancia total recorrida.

35.  $v = \cos 2t + \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

36.  $v = 2t^2 - 5t + 2$ ,  $0 \leq t \leq 4$ .

37.  $v = 2t^{-1/2}$ ,  $1 \leq t \leq 9$ .

38.  $v = t^2(3 + t^3)^{1/2}$ ,  $1 \leq t \leq 2$ .

39. La longitud natural de un resorte es de 18 in. Se necesita una fuerza de 12 lb para comprimir o estirar una pulgada este resorte. ¿Cuánto trabajo se necesita para comprimir al resorte dos terceras partes de su longitud original?

40. El techo de un túnel horizontal de una mina se encuentra a 1000 ft bajo la superficie del terreno. Hay una sección de media milla de longitud que tiene 3 ft de

agua. La sección transversal vertical del túnel es un rectángulo que tiene 4 ft de ancho y 5 de alto. Calcular el trabajo efectuado para sacar el agua a la superficie, suponiendo que no entra más agua a la mina.

41. Una pecera tiene la forma de un paraboloide ( $y = x^2/4$ , en pies, girada alrededor del eje  $y$ ), tiene 5 ft de profundidad y tiene agua hasta 4 ft de profundidad en el centro. Calcular el trabajo que se necesita para hacer bajar 2 ft el nivel del agua.

42. Una persona que pesa 150 lb sujeta la parte inferior de una cuerda de 100 ft. La cuerda pesa 2 ft/lb. La persona sube por la cuerda hasta arriba, pero sujetando el extremo de la cuerda. ¿Cuánto trabajo efectuó la persona para subir hasta la parte superior de la cuerda?

43. Se sumerge un automóvil en un estanque, y la parte superior de la ventanilla trasera queda a 10 ft debajo de la superficie del agua. La ventanilla trasera es vertical y tiene 3 ft de ancho en la parte superior, 2 ft de alto y 4 ft de ancho en la parte inferior y tiene la forma de un trapecioide isósceles. Calcular la fuerza que se ejerce sobre el exterior de la ventanilla.

44. Una caja que mide 4 in de longitud, 3 in de ancho y 3 in de alto contiene mercurio y la profundidad de éste es de 2 in. El mercurio tiene una densidad 13.6 veces mayor que la del agua. Calcular la fuerza ejercida sobre cada cara de la caja.

# CÁLCULO

## Capítulo 8

### Funciones elementales trascendentes

La derivación y la integración son operaciones que se aplican a las funciones y, por tanto, se vuelven más útiles a medida que nos familiarizamos con funciones más variadas. Hasta ahora las funciones específicas que hemos descrito comprenden polinomios, funciones racionales, otras funciones algebraicas en las que intervienen exponentes racionales y las seis funciones trigonométricas. Es tiempo de ampliar la clase de funciones\* a las que les podemos aplicar los procesos del cálculo.

---

\* El reconocimiento de la importancia de las funciones en el cálculo se debe, más que a nadie, a Leonhard Euler (1707-1783), el más prominente matemático del siglo dieciocho. Euler creció cerca de Basilea, Suiza; allí estudió en la universidad y fue alumno de Johann Bernoulli. Siguió a su amigo Daniel Bernoulli a San Petersburgo en 1727, y de allí en adelante estuvo asociado con las academias reales de San Petersburgo (1727-1741 y 1766-1783) y de Berlín (1741-1766).

Los trabajos publicados de Euler son más numerosos, por un gran margen, que los de cualquier otro matemático en la historia. Cubrió todas las áreas de las matemáticas que se conocían en su época, incluyendo algunas que él creó, pero sus contribuciones fueron especialmente numerosas en análisis y en ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones a la mecánica. Aunque estuvo ciego durante los últimos diecisiete años de su existencia, su trabajo matemático continuó, sin disminuir tanto en cantidad como en excelencia, hasta el mismo día de su muerte. La Academia de San Petersburgo continuó publicando sus manuscritos durante más de cuarenta años después de su muerte.  
(Continúa)

## 8.1 FUNCIONES INVERSAS

En esta sección consideramos la posibilidad de encontrar una función que sea la inversa de una función dada. Si pensamos en que una función es una operación o transformación de su dominio a su imagen, entonces en términos generales una función inversa debe ser aquella que invierte el efecto de esta operación o transformación. Antes de precisar esta idea, veamos algunos ejemplos.

### EJEMPLO 1

Sea la función  $f$  definida por

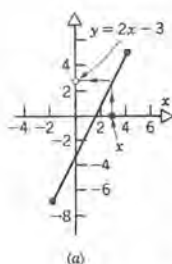
$$y = f(x) = 2x - 3 \quad (1)$$

cuyo dominio es  $[-2, 4]$ . En la figura 8.1.1a se muestra la gráfica de  $f$ . Si es posible, encontrar una función que invierta la transformación que corresponde a  $f$ .

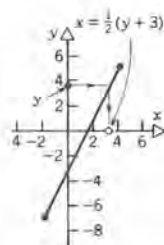
Obsérvese que la imagen de  $f$  es  $[-7, 5]$  y que para todo punto del dominio de  $f$ , la ecuación 1 determina precisamente un punto en su imagen. Para invertir el efecto de esa función, debemos encontrar una función o transformación que obre en la dirección opuesta. Si despejamos a  $x$  de la ecuación 1, obtenemos

$$x = \frac{1}{2}(y + 3) = g(y); \quad y \text{ en } [-7, 5]. \quad (2)$$

Así, con cada punto de la imagen de  $f$  podemos asociar también un punto único del dominio de  $f$  (véase figura 8.1.1b). Esta asociación está dada por la ecuación 2 y define una nueva función  $g$ , de la cual se dice que es la inversa de  $f$ .



(a)



(b)

Figura 8.1.1

### EJEMPLO 2

Sea  $f$  la función definida por

Euler escribió algunos libros sobre cálculo, cuya influencia fue muy grande; el primero, *Introductio in analysin infinitorum* se publicó en 1748, y le siguieron otros volúmenes en 1755 y 1768-1770. El *Introductio* fue el primer texto de cálculo en el cual las funciones ocuparon un lugar central; en él, Euler aclaró que los senos, los cosenos, los logaritmos y los exponenciales, entre otros, se deben considerar como funciones y no como el resultado de una construcción geométrica o de otra índole. Gran parte de nuestra notación moderna en el cálculo fue inventada o difundida por Euler; por ejemplo, la letra  $e$  para indicar la base del sistema de los logaritmos naturales y  $\pi$  para indicar la razón de la circunferencia al diámetro de un círculo.

Euler fue un maestro de las técnicas analíticas en las que intervienen series infinitas, productos infinitos, fracciones continuas y representaciones integrales de funciones. Las fórmulas y teoremas relacionados con su nombre abundan en muchas áreas de las matemáticas; es posible que la más común entre las elementales sea la relación entre las funciones exponencial y trigonométricas,  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

Se puede resumir el lugar de Euler en las matemáticas citando el consejo del eminente matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827) a un joven contemporáneo: "Lea a Euler; es nuestro maestro en todo."



$$y = f(x) = \frac{x^3}{8} \quad (3)$$

cuyo dominio es  $(-\infty, \infty)$  (véase figura 8.1.2a). Si es posible, encontrar una función que sea la inversa de  $f$ .

Nótese que la imagen de  $f$  también es  $(-\infty, \infty)$ . Procedemos como en el ejemplo 1 y despejamos a  $x$  de la ecuación 3, obteniendo con ello

$$x = 2y^{1/3} = g(y). \quad (4)$$

De nuevo, podemos emplear la ecuación 4 para asociar con cada punto de la imagen de  $f$  un punto único del dominio de  $f$ , como se ve en la figura 8.1.2b. Esta asociación define una nueva función  $g$ , que es la inversa de la función  $f$ . ■

Veamos ahora un caso más general. Sea  $f$  una función cuyo dominio es  $D$  y cuya imagen es  $R$ . Entonces para cada  $x$  en  $D$  la función  $f$  asocia exactamente una  $y$  en  $R$ . Supongamos además que para cada  $y$  en  $R$  también hay exactamente una  $x$  en  $D$  tal que  $y = f(x)$ . En este caso decimos que la función  $f$  es una función **biunívoca**. Además, la asociación de una  $x$  única con cada  $y$  en  $R$  nos permite definir una nueva función  $g$  dada por

$$x = g(y), \quad y \text{ en } R \quad (5)$$

en la cual  $x$  es el punto en  $D$  tal que

$$y = f(x), \quad x \text{ en } D. \quad (6)$$

La función  $g$  definida de este modo es la **inversa** de  $f$ . Del mismo modo, se dice que  $f$  es la inversa de  $g$ . Está claro que la imagen de  $f$  es el dominio de  $g$  y viceversa.

Por otro lado, si hay alguna  $y$  en  $R$  para la cual haya dos o más valores de  $x$  en  $D$  tales que  $y = f(x)$ , entonces la función  $f$  no tiene inversa. En este caso  $f$  no es biunívoca. En consecuencia,  *$f$  tiene una inversa si, y sólo si, es una función biunívoca de su dominio a su imagen.*

A veces resulta de gran ayuda observar una consecuencia sencilla de las ecuaciones 5 y 6. Como  $y$  en  $R$  implica que  $x$  está en  $D$ , podemos sustituir a  $y$  en la ecuación 5 mediante la ecuación 6. Con ello obtenemos

$$x = g[f(x)], \quad x \text{ en } D. \quad (7)$$

La ecuación 7 expresa el hecho de que  $g$  invierte la transformación que lleva a cabo  $f$ : comenzando con un valor dado de  $x$  en  $D$  y aplicando sucesivamente las funciones  $f$  y  $g$ , regresamos al valor original. Exactamente del mismo modo podemos sustituir a  $x$  en la ecuación 6 mediante la ecuación 5 y ello da

$$y = f[g(y)], \quad y \text{ en } R. \quad (8)$$

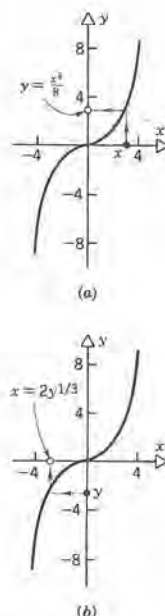


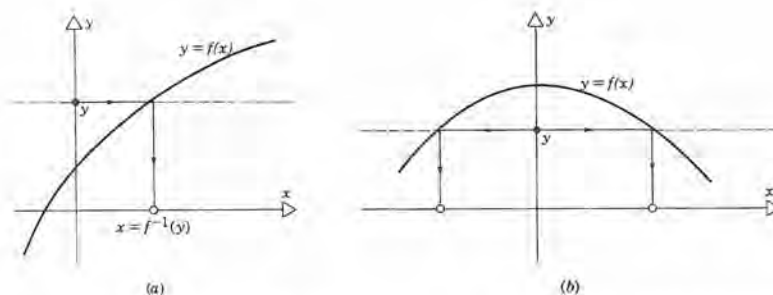
Figura 8.1.2

La ecuación 8 es semejante a la ecuación 7, pero las funciones  $f$  y  $g$  se aplican en orden contrario. El lector puede comprobar que los pares de funciones dados en los ejemplos 1 y 2 satisfacen a las ecuaciones 7 y 8.\*

Con frecuencia se emplea el símbolo  $f^{-1}$  para designar a la función inversa de  $f$ . Nótese que  $-1$  en este caso es un índice y *no* un exponente. En general, la función inversa  $f^{-1}$  y la función recíproca  $1/f$  no son iguales.

El estudio anterior establece la relación que existe entre un par de funciones inversas, pero no comprende una manera satisfactoria de determinar si una función tiene una inversa. Para hacerlo, nos ayudará el ver la cuestión desde un punto de vista geométrico. Desde este punto de vista, para una función dada  $y = f(x)$ , la condición de que haya un valor único de  $x$  en  $D$  asociado con cada valor de  $y$  en  $R$  quiere decir que *una recta paralela al eje  $x$  interseca a la gráfica de  $f$  a lo más una vez*. En las figuras 8.1.3a y 8.1.3b se muestran las gráficas de dos funciones; la primera satisface esta condición y por tanto tiene una inversa, pero la última no.

A continuación traduzcamos esta condición geométrica a una forma más útil. Obsérvese que ciertamente se satisface la condición si  $f$  es creciente, porque entonces  $f(x_1) = f(x_2)$  sólo si  $x_1 = x_2$ . Lo mismo es cierto si  $f$  es decreciente. Se emplea la palabra **monótona** para describir una función que es creciente en un intervalo, o decreciente allí mismo. De acuerdo con el teorema 4.2.1, una condición simple de suficiencia para que  $f$  sea monótona es que su derivada sea siempre positiva o bien siempre negativa. Por tanto, si  $f$  es tal que en el dominio completo de  $f$  la derivada  $f'(x)$  es positiva siempre o bien negativa siempre, entonces  $f$  tiene una inversa. Esta condición no es *necesaria*, como lo muestra el ejemplo 2. También, es fácil de ver que si  $f$  es monótona, entonces su inversa  $f^{-1}$  también es monótona y en la misma dirección que  $f$ . Obsérvese otra vez que la función cuya gráfica aparece en la figura 8.1.3a es monótona, mientras que la que aparece en la figura 8.1.3b no lo es.



**Figura 8.1.3** (a) Función que tiene una inversa. (b) Función que no tiene una inversa.

\* También será instructivo experimentar un poco con una calculadora que tenga varias teclas de función y una tecla de función inversa. Esto es, se comienza con un valor de  $x$ , se oprime una tecla de función y a continuación se calcula el inverso de la misma función. ¿Se obtiene siempre el valor original de  $x$ ?

A continuación supongamos que una función dada  $y = f(x)$  cuyo dominio es  $D$  no tiene inversa, porque al menos para algunos valores de  $y$  hay más de un valor correspondiente  $x$  en  $D$ . En ese caso es posible construir una función relacionada tan sólo con restringir el dominio; si esto se lleva a cabo en forma correcta, esta nueva función puede tener una inversa. Este procedimiento se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3

Sea la función definida por

$$y = f(x) = x^2, \quad x \text{ en } (-\infty, \infty) \quad (9)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 8.1.4a. Está claro que la imagen de  $f$  es  $[0, \infty)$ .

Al tratar de encontrar una inversa despejando a  $x$  de la ecuación 9, inmediatamente nos encontramos con el problema de que para toda  $y$  en  $(0, \infty)$  hay dos valores posibles de  $x$ , que son  $+\sqrt{y}$  y  $-\sqrt{y}$  en  $(-\infty, \infty)$ . Por tanto, la función  $f$  no tiene inversa.

A continuación veamos la función  $F$  dada por

$$y = F(x) = x^2, \quad x \text{ en } (-\infty, 0] \quad (10)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 8.1.4b. Esta función se obtiene a partir de  $y$  mediante una restricción de su dominio. La ecuación

$$y = F(x)$$

tiene una solución única para toda  $y$  en  $[0, \infty)$ , que es

$$x = -\sqrt{y}.$$

La función  $F^{-1}$  definida por

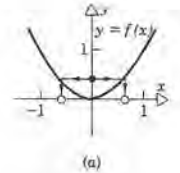
$$F^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \quad y \text{ en } [0, \infty) \quad (11)$$

es por consiguiente la función inversa de  $F$ . Sin embargo, la función  $F^{-1}$  no es una inversa de la función original  $f$ .

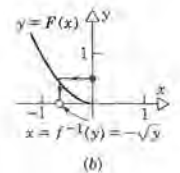
Está claro que se podrían haber empleado otras restricciones para el dominio de  $f$ . Por ejemplo, si  $H(x) = x^2$  para  $x$  en  $[0, \infty)$ , entonces  $H^{-1}(y) = \sqrt{y}$  en  $[0, \infty)$  (véase figura 8.1.4c).

Nótese que las funciones  $F$  y  $H$  son monótonas en sus dominios completos y por tanto deben tener inversas. En contraste, la función  $f$  no es monótona en su dominio. ■

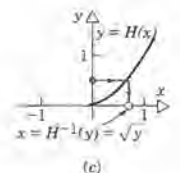
Aun cuando tenga inversa una función  $f$ , podrá ser difícil o imposible encontrar una fórmula explícita para  $f^{-1}$ . Con frecuencia es imposible despejar  $x$  de la ecuación  $y = f(x)$ , excepto por procedimientos numéricos como por ejemplo el método de Newton (sección 4.5). Sin embargo, podemos estudiar determinadas propiedades de



(a)



(b)



(c)

**Figura 8.1.4**

- (a)  $y = x^2$ ,  
 $-\infty < x < \infty$ .
- (b)  $y = x^2$ ,  
 $-\infty < x \leq 0$ .
- (c)  $y = x^2$ ,  
 $0 \leq x < \infty$ .



$f^{-1}$  aun sin tener fórmula explícita alguna para ella. Por ejemplo, si  $f$  es continua y  $f^{-1}$  existe, entonces  $f^{-1}$  también es continua. Además, si  $f$  es derivable y  $f'(x)$  es siempre positiva o siempre negativa, entonces  $f^{-1}$  también es una función derivable, y su derivada se puede expresar en términos de  $f'$ . No demostraremos que  $f^{-1}$  es derivable, pero deduciremos la relación que existe entre las derivadas de  $f$  y  $f^{-1}$ .

Por ejemplo, para la función de la ecuación 3 tenemos que

$$f'(x) = \frac{3x^2}{8}, \quad (12)$$

y para la función inversa  $g$  de la ecuación 4,

$$g'(y) = 2 \cdot \frac{1}{3} y^{-2/3} = \frac{2}{3y^{2/3}}. \quad (13)$$

Sustituyendo  $y = x^3/8$  en la ecuación 13 vemos que

$$\begin{aligned} g'[f(x)] &= g'[x^3/8] = \frac{2}{3(x^3/8)^{2/3}} \\ &= \frac{2}{3(x^2/4)} = \frac{8}{3x^2} \\ &= \frac{1}{f'(x)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Así, para este ejemplo, la derivada de la función inversa  $g$  en un punto  $y$  es el recíproco de la derivada de la función original  $f$  en el punto  $x$  correspondiente.

Consideremos ahora un par de funciones inversas  $f$  y  $f^{-1}$ ; en este caso debemos tener, según la ecuación 7,

$$f^{-1}[f(x)] = x. \quad (15)$$

Supondremos que son derivables tanto  $f$  como  $f^{-1}$ , y diferenciaremos la ecuación 15 con respecto a  $x$ . Si hacemos  $y = f(x)$  y empleamos la regla de la cadena para encontrar la derivada del lado izquierdo de la ecuación 15, tendremos

$$\frac{d}{dy} f^{-1}[y] \frac{d}{dx} f(x) = 1; \quad y = f(x). \quad (16)$$

Por tanto

$$\frac{d}{dy} [f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x). \quad (17)$$

Así, también en el caso general, *las derivadas de  $f$  y  $f^{-1}$  son recíprocas*, siempre y cuando se tome en debida cuenta la relación que hay entre las variables independientes en cada caso. La relación incluida en las ecuaciones 16 y 17 se puede recordar

probablemente con mayor facilidad si observamos que  $y = f(x)$  y  $x = f^{-1}(y)$  y escribimos las ecuaciones 16 y 17 en la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1, \quad \text{o} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}. \quad (18)$$

Subrayamos que  $dy/dx$  y  $dx/dy$  de la ecuación 18 se deben evaluar en los puntos  $x$  y  $y$  correspondientes, relacionados mediante  $y = f(x)$ .

Podemos resumir los resultados que hemos obtenido acerca de las funciones inversas en el siguiente teorema:

### Teorema 8.1.1

Sea la función  $f$  que tiene dominio  $D$  e imagen  $R$  y supóngase que  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $D$ , o bien que  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $D$ . En ese caso  $f$  tiene una función inversa  $f^{-1}$  cuyo dominio es  $R$  y su imagen es  $D$ . La función  $f^{-1}$  también es derivable y su derivada satisface la ecuación 17,

$$\frac{d}{dy} [f^{-1}(y)] = \frac{1}{f'(x)}; \quad y = f(x).$$

Como una muestra de la aplicación de este teorema, veamos el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 4

Supongamos que la función  $f$  está dada por

$$y = f(x) = \frac{(x^3 - 3x^2 - 9x + 7)}{4}. \quad (19)$$

Demostrar que  $f$  tiene una inversa en el intervalo  $[-1, 3]$  y determinar el dominio y la imagen de la función inversa. También, determinar una expresión para la derivada de  $f^{-1}$  y evaluar esta derivada en  $y = -1$ .

Al derivar  $f$  obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 6x - 9)}{4} \\ &= \frac{3(x + 1)(x - 3)}{4}. \end{aligned} \quad (20)$$

Por tanto  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en el intervalo  $(-1, 3)$ , y por tanto, de acuerdo con el teorema 4.2.1,  $f$  es decreciente en  $[-1, 3]$ . Por consiguiente  $f$  tiene inversa allí. Como  $f$  es decreciente en  $[-1, 3]$ , se puede determinar su imagen introduciendo los extremos  $x = -1$  y  $x = 3$ , respectivamente, en la ecuación 19. De este modo obtenemos el

intervalo  $[-5, 3]$  como la imagen de  $f$ . Por tanto  $f^{-1}$  tiene como dominio  $[-5, 3]$  y como imagen  $[-1, 3]$ .

Si escribimos  $x = f^{-1}(y)$ , entonces, de acuerdo con el teorema 8.1.1,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{4}{3(x+1)(x-3)}.\end{aligned}\quad (21)$$

Para expresar a  $dx/dy$  en términos de  $y$  es necesario despejar a  $x$  en términos de  $y$  y a continuación sustituir  $x$  en la ecuación 21. Es impráctico llevar a cabo esto en forma analítica, pero desde luego que es posible, empleando en caso necesario métodos de aproximación, despejar de la ecuación 19 el valor de  $x$  asociado con un valor dado de  $y$ . Por ejemplo, se puede demostrar que  $y = -1$  implica que  $x = 1$ . Por tanto,

$$\left. \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \right|_{y=-1} = \left. \frac{4}{3(x+1)(x-3)} \right|_{x=1} = -\frac{1}{3}.\quad (22)$$

Se puede llevar a cabo el mismo tipo de cálculos en forma repetida si se desea, para definir una tabla extensa de valores de  $f^{-1}(y)$  y de su derivada para varios valores de  $y$ .

Si supiéramos por adelantado que la función  $f$  dada por la ecuación 19 tiene una inversa  $x = f^{-1}(y)$ , podríamos determinar a  $dx/dy$  simplemente derivando la ecuación 19 en forma implícita con respecto a  $y$ . De ese modo obtenemos

$$\frac{d}{dy} y = \frac{d}{dy} \frac{(x^3 - 3x^2 - 9x + 7)}{4}$$

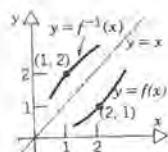
o bien

$$\begin{aligned}1 &= \frac{d}{dx} \frac{(x^3 - 3x^2 - 9x + 7)}{4} \frac{dx}{dy} \\ &= \frac{(3x^2 - 6x - 9)}{4} \frac{dx}{dy},\end{aligned}$$

de la cual se deduce inmediatamente la ecuación 21.

### Graficación de las funciones inversas

Terminaremos esta sección con algunas palabras acerca de las gráficas de las funciones inversas. Comenzamos con una función  $f$  que sea monótona en determinado intervalo y que por consiguiente tiene una inversa. La figura 8.1.5 muestra la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$  para esa función  $f$ . Supongamos que el punto  $(2, 1)$  queda en la gráfica de  $y = f(x)$ . Se puede describir la misma gráfica también mediante la ecuación



**Figura 8.1.5** Se obtiene la gráfica de  $f^{-1}(x)$  al reflejar la gráfica de  $f(x)$  con respecto a la recta  $y = x$ .



$x = f^{-1}(y)$  y de este modo sigue conteniendo al punto  $(2, 1)$ . Sin embargo, la variable independiente se marca en este caso en el eje vertical  $y$  y la dependiente en el eje horizontal  $x$ . Si deseamos marcar la variable independiente en el eje horizontal, como es lo normal, entonces en lugar de la ecuación  $x = f^{-1}(y)$  escribiremos  $y = f^{-1}(x)$ . La gráfica de  $y = f^{-1}(x)$  contiene entonces al punto  $(1, 2)$ . En general, si  $(a, b)$  es un punto de la gráfica de  $y = f(x)$ , entonces  $(b, a)$  es un punto de la gráfica de  $y = f^{-1}(x)$ . En la figura 8.1.5 se muestra también la gráfica de  $y = f^{-1}(x)$ .

El intercambio de coordenadas involucrado al dibujar la gráfica de la función inversa  $y = f^{-1}(x)$  con respecto a los ejes originales es *geométricamente equivalente a reflejar la gráfica de  $y = f(x)$  con respecto a la recta  $y = x$* . Esto, de hecho, es como se debería proceder para hacer el dibujo de la gráfica de  $f^{-1}$  si se dispone de la gráfica de  $f$ . El siguiente ejemplo muestra esta idea, y posteriormente en el capítulo aparecerán más ejemplos.

### EJEMPLO 5

Dibujar la gráfica de la función

$$y = f(x) = \frac{(x^3 - 3x^2 - 9x + 7)}{4}$$

del ejemplo 4 para  $-1 \leq x \leq 3$  y en los mismos ejes dibujar también la gráfica de su función inversa.

En la figura 8.1.6 se muestran las dos gráficas. Primero se hizo un dibujo de la gráfica de  $f$  y a continuación se trazó la gráfica de su función inversa  $f^{-1}$  reflejando

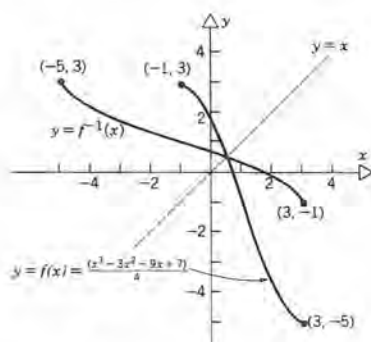


Figura 8.1.6

la gráfica de  $f$  con respecto a la recta  $y = x$ . Obsérvese que no es necesario encontrar la función inversa en forma explícita para trazar su gráfica. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 encontrar la inversa de la función dada. En cada caso determinar el dominio y la imagen de  $f^{-1}$  y hacer un dibujo de las gráficas de  $y = f(x)$  y de  $y = f^{-1}(x)$ . También, comprobar que  $f[f^{-1}(y)] = y$  y que  $f^{-1}[f(x)] = x$ .

1.  $y = f(x) = x - 3$ ;  $x$  en  $[-2, 4]$ .
2.  $y = f(x) = 3x + 2$ ;  $x$  en  $[0, 5]$ .
3.  $y = f(x) = 5 - 2x$ ;  $x$  en  $(1, \infty)$ .
4.  $y = f(x) = x^2 - 4$ ;  $x$  en  $[0, 4]$ .
5.  $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ ;  $x$  en  $(-4, 1]$ .
6.  $y = f(x) = 4x - x^2$ ;  $x$  en  $[2, 3]$ .
7.  $y = f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ ;  $x$  en  $(0, 3]$ .
8.  $y = f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ;  $x$  en  $(-1, \infty)$ .
9.  $y = f(x) = \sqrt{x+2}$ ;  $x$  en  $[2, 7]$ .
10.  $y = f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ;  $x$  en  $(1, 4)$ .

En los problemas 11 a 20 emplear las ecuaciones 16 a 18 para calcular la derivada de  $f^{-1}$ . Comprobar la respuesta hallando la función inversa y derivándola.

11.  $y = f(x) = x - 3$ ; ver problema 1.
12.  $y = f(x) = 3x + 2$ ; ver problema 2.
13.  $y = f(x) = 5 - 2x$ ; ver problema 3.
14.  $y = f(x) = x^2 - 4$ ;  $x$  en  $(0, \infty)$ ; ver problema 4.
15.  $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ ;  $x$  en  $(-\infty, 1)$ ; ver problema 5.
16.  $y = f(x) = 4x - x^2$ ;  $x$  en  $(2, \infty)$ ; ver problema 6.
17.  $y = f(x) = (x-1)/(x+2)$ ;  $x \neq -2$ ; ver problema 7.
18.  $y = f(x) = (x+3)/(x+1)$ ;  $x$  en  $(-1, \infty)$ ; ver problema 8.
19.  $y = f(x) = \sqrt{x+2}$ ;  $x$  en  $(-2, \infty)$ ; ver problema 9.
20.  $y = f(x) = 1 - \sqrt{x}$ ;  $x$  en  $(0, \infty)$ ; ver problema 10.

En los problemas 21 a 26 determinar si la función dada tiene inversa. Si existe  $x = f^{-1}(y)$ , encontrar su derivada;

expresar la respuesta en términos de  $y$  siempre que sea posible.

21.  $y = f(x) = x^3 - 12x + 4$ ;  $x$  en  $(-2, 2)$ .
22.  $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ ;  $x$  en  $(-2, 2)$ .
23.  $y = f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ;  $x$  en  $(0, 2)$ .
24.  $y = f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ;  $x$  en  $(1, \infty)$ .
25.  $y = \cos x$ ;  $x$  en  $[0, 2\pi]$ .
26.  $y = \tan x$ ;  $x$  en  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .
27. Sea  $y = f(x) = \sin x$ . Determinar si esta función tiene inversa si se restringe  $x$  a cada uno de los intervalos que aparecen abajo. Si existe la función inversa  $x = f^{-1}$ , determinar su derivada  $dx/dy$  en términos de  $x$ . A continuación emplear la ecuación  $y = \sin x$  y las identidades trigonométricas para expresar a  $dx/dy$  en términos de  $y$ . Tener la precaución de observar en qué cuadrante está  $x$ .

$$(a) 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$(b) 0 < x < \pi.$$

$$(c) \frac{\pi}{2} < x < 3\frac{\pi}{2}.$$

28. Si  $y = f(x)$  tiene una función inversa  $x = f^{-1}(y)$  y si  $f^{-1}$  es dos veces derivable, demostrar que

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y/dx^2}{(dy/dx)^3}.$$

En los problemas 29 a 36 suponer que existe  $x = f^{-1}(y)$  y que es dos veces derivable. Determinar a  $d^2x/dy^2$  en términos de  $x$ . *Sugerencia:* ver, si es necesario, el problema 28.

29.  $y = 5 - 2x$ ;  $x$  en  $(1, \infty)$ .
30.  $y = 4x - x^2$ ;  $x$  en  $(2, 3)$ .
31.  $y = \frac{x-1}{x+2}$ ;  $x$  en  $(-2, \infty)$ .
32.  $y = x + \frac{2}{x}$ ;  $x$  en  $(0, \sqrt{2})$ .
33.  $y = \sqrt{x+2}$ ;  $x$  en  $(0, 5)$ .

34.  $y = x^3 - 12x + 4$ ;  $x$  en  $(-2, 2)$ .

35.  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ;  $x$  en  $(0, 2)$ .

36.  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ;  $x$  en  $(1, \infty)$ .

37. En todas las partes de este problema suponer que la función  $y = f(x)$  tiene una inversa  $x = f^{-1}(y)$ .(a) Si  $f$  tiene el dominio  $[0, 1]$  y la imagen  $[0, 1]$ , ¿tendrá inversa  $y = [f(x)]^2$ ? Explicar la respuesta.(b) Si  $f$  tiene el dominio  $[0, 1]$  y la imagen  $[-1, 1]$ , ¿tendrá inversa  $y = [f(x)]^2$ ? Explicar la respuesta.(c) Si  $f$  tiene el dominio  $[-1, 1]$  y la imagen  $[0, 1]$ , ¿tendrá  $y = [f(x)]^2$  una inversa? Explicar la respuesta.

38. Trazar la gráfica de una función que tenga inversa, pero que no sea creciente ni decreciente en su dominio completo. ¿Es posible que esa función sea continua en todos sus puntos?

39. Determinar las constantes  $a$  y  $b$  de tal manera que la función  $f$  dada por  $f(x) = (x + a)/(x + b)$  sea igual a su propia inversa.40. Determinar las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  de tal manera que la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

sea igual a su propia inversa.

41. Sea la función  $f$  dada por

$$y = f(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

en la cual  $g$  está definida en el intervalo  $a \leq t \leq b$ .(a) Determinar un conjunto de condiciones que deba satisfacer  $g$  para que  $f$  tenga inversa.(b) Suponiendo que existe  $x = f^{-1}(y)$ , ¿qué condición debe satisfacer  $g$  para que  $f^{-1}$  sea derivable?(c) Determinar  $dx/dy$ .42. Sea la función  $f$  dada por

$$y = f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + 3t^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(a) Demostrar que existe  $x = f^{-1}(y)$ .(b) Determinar  $D_y x$  y  $D_y^2 x$ .43. Determinar una condición suficiente para las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  de manera que la función  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tenga inversa.\*44. Suponer que  $f(x + y) = f(x)f(y)$  y que existe  $f^{-1}$ . Demostrar que

$$f^{-1}(u) + f^{-1}(v) = f^{-1}(uv).$$

Sugerencia: hacer que  $u = f(x)$  y que  $v = f(y)$ .

## 8.2 LA FUNCIÓN LOGARITMO NATURAL

En la sección 3.3 vimos que

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c,$$

(empleando ahora la notación para la integral en vez de la antiderivada) siempre que  $r \neq -1$ . Sin embargo, hasta ahora no hemos encontrado una fórmula de derivación que tenga por resultado  $x^{-1}$ . Por tanto, no tenemos antiderivada para  $1/x$  y en consecuencia no tenemos modo analítico alguno para evaluar una integral cuyo integrando sea  $1/x$ .

También existe una clase importante de funciones elementales para las que no hemos deducido fórmulas de derivación, que son las funciones logarítmicas y las exponenciales. Además, en la sección 3.1 y en varias partes nos hemos visto detenidos hasta para describir el significado de  $x^r$  cuando  $r$  es irracional. En esta sección y en la



siguiente rellenaremos estos huecos de nuestro conocimiento. Más específicamente, demostraremos que la antiderivada de  $x^{-1}$  es una determinada función logarítmica y que podemos emplearla en una forma sencilla para definir a  $x^r$  cuando  $r$  es irracional.

Supondremos que el lector tiene algo de conocimientos acerca de los logaritmos,\* al menos los de base 10. Si  $b > 0$ , representaremos el logaritmo de base  $b$  de un número  $a$  como  $\log_b a$ . Los logaritmos de base 10 se escribirán sin identificar la base, esto es,  $\log a$  quiere decir logaritmo de base 10 de  $a$ . Independientemente de la base que se emplee, la propiedad característica de los logaritmos es que convierten productos en sumas

$$\log_b(a_1 a_2) = \log_b a_1 + \log_b a_2. \quad (1)$$

Para comenzar a relacionar los logaritmos con el cálculo, exploraremos las propiedades de una función  $f$  arbitraria que satisfaga la condición (1) de los logaritmos. Esto es, supondremos que

$$f(cx) = f(x) + f(c), \quad (2)$$

donde  $x$  y  $c$  son distintas de 0 y donde  $c$  es constante. De paso, nótese que si  $x = 1$  entonces la ecuación 2 implica que  $f(1) = 0$ . Suponiendo que  $f$  es derivable, podemos derivar ambos lados de la ecuación 2 con respecto a  $x$ ; con ello se obtiene

$$cf'(cx) = f'(x). \quad (3)$$

Haciendo que  $x = 1$  en la ecuación 3, obtenemos

$$f'(c) = \frac{f'(1)}{c}.$$

Como  $c$  es un número arbitrario, reemplazamos a  $c$  por  $x$  y escribimos

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x}, \quad x \neq 0. \quad (4)$$

En consecuencia, la función  $g(x) = f(x)/f'(1)$  es una antiderivada de  $x^{-1}$ . Con ello hemos establecido la plausibilidad de una relación entre funciones que satisfacen la

\* Los logaritmos fueron descubiertos por John Napier (1550-1617), barón escocés, que hizo uso de la relación entre progresiones geométricas y aritméticas para desarrollar un medio de reemplazar productos por sumas en cálculos numéricos. La investigación de Napier abarcó 20 años y la describió en libros que se publicaron en 1614 y en 1619. La palabra "logaritmo" se debe a Napier.

Las ventajas de los logaritmos de base diez en los cálculos aritméticos fue señalada por Henry Briggs (1561?-1631), profesor de matemáticas en Oxford, quien publicó una extensa tabla de 14 decimales en 1624. Los logaritmos se comenzaron a emplear rápida y extensamente, ya que sus ventajas manifiestas para facilitar cálculos largos fueron apreciadas por los astrónomos y demás científicos. Sin embargo, tomó algo más de tiempo antes de que los logaritmos se consideraran como los valores de una función y pasó más de un siglo para que Euler pudiera resolver algunas de las cuestiones concernientes a esa función logarítmica.

relación logarítmica (2) y funciones cuyas derivadas son  $x^{-1}$ . Naturalmente, no hemos establecido todavía que existen funciones derivables que satisfacen a la ecuación 2.

Es posible obtener más información de la ecuación 2, pero es más fructífero cambiar nuestro punto de vista y considerar a las funciones que son antiderivadas de  $x^{-1}$ . Esas antiderivadas existen porque  $x^{-1}$  es continua en cualquier intervalo que no contiene al origen. De acuerdo con la aclaración que siguió al teorema 6.4.2, se pueden expresar las antiderivadas como integrales. En particular, sea  $a$  una constante positiva, y definamos la función  $f$  de tal modo que

$$f(x) = \int_a^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0. \quad (5)$$

Entonces  $f'(x) = 1/x$  de acuerdo con el teorema 6.4.2, y por tanto  $f$  es una antiderivada de  $x^{-1}$  para  $x > 0$ . Nótese que dos funciones definidas por la ecuación 5 para distintos valores de  $a$  difieren entre sí por una constante aditiva. Por lo que es suficiente examinar sólo una de esas funciones con detalle; es conveniente considerar a la función para la cual  $a = 1$ . Esa función se conoce como la **función logaritmo natural** y se representa con el símbolo  $\ln$ . Así llegamos a la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 8.2.1** La función logaritmo natural,  $\ln$ , está definida como

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0. \quad (6)$$

Podemos ver que se pueden aplicar algunos de los teoremas generales del cálculo para deducir muchas propiedades de la función  $\ln$ . Entre otras cosas, estudiaremos la gráfica de  $y = \ln x$ , y demostraremos que la función  $\ln$  tiene las propiedades que se asociaron antes con los logaritmos; en especial, que satisface la relación logarítmica (2).

Se puede calcular de varios modos el valor de  $\ln x$  para un valor dado de  $x$ . Por ejemplo, por evaluación numérica de la integral en la ecuación 6, como se explicó en la sección 6.6. Desde luego, las calculadoras tienen rutinas interconstruidas para generar en forma automática valores de  $\ln x$ . En la tabla 8.1 se muestran algunos valores representativos de  $\ln x$ . Obsérvese que  $\ln x$  crece mucho más lentamente que la misma  $x$ . En breve consideraremos a  $\ln$  como una bien conocida función elemental casi de la misma manera como la función seno, por ejemplo.

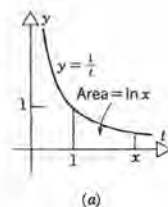
Desde un punto de vista geométrico, notaremos que si  $x > 1$ , entonces  $\ln x$  es el área comprendida entre el eje  $t$  y la gráfica de  $y = 1/t$  desde  $t = 1$  hasta  $t = x$  (véase figura 8.2.1a). Si  $0 < x < 1$ , entonces  $\ln x$  es el negativo del área entre el eje  $t$  y la gráfica de  $y = 1/t$  desde  $t = x$  hasta  $t = 1$ , como se ve en la figura 8.2.1b. Así,  $\ln x > 0$  para  $x > 1$ , y  $\ln x < 0$  para  $0 < x < 1$ .

### Propiedades de la función $\ln$

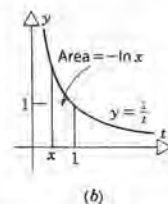
Escribiremos en forma de lista algunas propiedades de la función logaritmo natural, para tener una referencia rápida.

**Tabla 8.1** Algunos valores de la función logaritmo natural

$x$	$\ln x$
1.0	0.00000
1.5	0.40547
2.0	0.69315
3.0	1.09861
4.0	1.38629
5.0	1.60944
10.0	2.30259
50.0	3.91203
100.0	4.60517
1000.0	6.90776



(a)



(b)

**Figura 8.2.1** (a) El logaritmo natural en términos del área para  $x > 1$ . (b) El logaritmo natural en términos del área para  $0 < x < 1$ .

1. **Dominio.** Es claro de la ecuación 6 que el dominio de  $\ln$  es el intervalo  $(0, \infty)$ . Se excluyen otros puntos porque la integral de la ecuación 6 no existe cuando  $x$  no es positivo, debido a la discontinuidad infinita del integrando en el origen.
2. **Continuidad.** La función  $\ln$  es continua en  $(0, \infty)$  de acuerdo con el teorema 6.4.1.
3. **Derivabilidad.** Como el integrando en la ecuación 6 es continuo, la función  $\ln$  es derivable en  $(0, \infty)$  de acuerdo con el teorema 6.4.2. Además, para toda  $x > 0$ ,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \quad (7)$$

Si  $u$  es una función derivable y  $u(x) > 0$ , entonces, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} \ln u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (8)$$

4. **Propiedad de la monotonía.** Como  $(d/dx)\ln x > 0$  para  $x > 0$ , la función  $\ln x$  crece en forma monótona en su dominio, de acuerdo con el teorema 4.2.1. Como  $\ln 1 = 0$ , de nuevo queda claro que  $\ln x > 0$  para  $x > 1$  y que  $\ln x < 0$  para  $0 < x < 1$ .
5. **Concavidad.** De acuerdo con la ecuación 7 vemos inmediatamente que

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln x = -\frac{1}{x^2}, \quad x > 0. \quad (9)$$

Como  $(d^2/dx^2) \ln x < 0$  para  $x > 0$ , entonces, según el teorema 4.2.3 la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en su dominio.

6. **Imagen.** La imagen de  $\ln$  es el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Este hecho no es obvio por el momento, porque nada de lo que hemos dicho hasta ahora pide que  $\ln x$  sea no acotada cuando  $x \rightarrow 0+$  y cuando  $x \rightarrow \infty$ . Regresaremos después a este asunto, en esta sección.

Como resultado de las propiedades 1 a 6, la gráfica de la ecuación  $y = \ln x$  debe tener la forma general dibujada en la figura 8.2.2. En especial, la propiedad 6 implica que  $y = \ln x$  no tiene asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow \infty$ , pero es asíntótica al eje  $y$  negativo cuando  $x \rightarrow 0+$ .

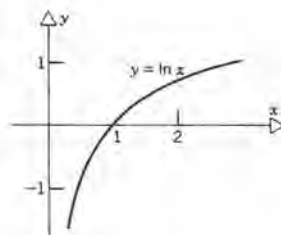


Figura 8.2.2 Gráfica de  $y = \ln x$  para  $x > 0$ .



A continuación comprobaremos que la función  $\ln$  tiene la propiedad característica de las funciones logarítmicas, esto es, que convierte a productos en sumas.

### Teorema 8.2.1

La función logaritmo natural, definida por la ecuación 6,

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0,$$

satisface la relación

$$\ln cx = \ln x + \ln c \quad (10)$$

para toda  $x > 0$  y  $c > 0$ .

**Demostración.** Para comprobar la ecuación 10 adoptemos el punto de vista de que  $x$  es una variable y  $c$  una constante. Entonces, la ecuación 10 afirma que dos funciones de  $x$ , que son  $\ln cx$  y  $\ln x$  difieren entre sí por una constante igual a  $\ln c$ . Para demostrar que dos funciones difieren entre sí por una constante, es suficiente (según el teorema 4.1.5) demostrar que sus derivadas son iguales entre sí. Así, determinaremos la derivada de  $\ln cx$  con respecto a  $x$ . Empleando la regla de la cadena y recordando que  $c$  es una constante, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln cx &= \frac{1}{cx} \frac{d(cx)}{dx} = \frac{1}{cx} \cdot c \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{d}{dx} \ln cx = \frac{d}{dx} \ln x,$$

y en consecuencia

$$\ln cx = \ln x + k, \quad (11)$$

en la cual  $k$  es una constante. Para evaluar a  $k$  podemos hacer que  $x = 1$  en la ecuación 11, lo cual da  $k = \ln c$ . Sustituyendo este valor en lugar de  $k$  en la ecuación 11, obtenemos la ecuación 10, demostrando así el teorema.  $\square$

Nótese que hemos contestado la pregunta que surgió después de deducir la ecuación 4, que es ¿hay una función derivable que satisface a la ecuación 2? La respuesta es sí y una función de éstas es  $f(x) = \ln x$ .

Hay otros resultados útiles que se deducen rápidamente de la ecuación 10. Para cualquier  $x$  fija, sea  $c = x$  en la ecuación 9; entonces

$$\ln x^2 = \ln x + \ln x = 2 \ln x, \quad (12)$$

Igualmente, haciendo que  $c = x^2$  en la ecuación 10, y usando la ecuación 12, vemos que

$$\ln x^3 = \ln x + \ln x^2 = 3 \ln x. \quad (13)$$

Continuando de este modo, obtenemos

$$\ln x^n = n \ln x \quad (14)$$

para toda  $x > 0$  y para todo entero positivo  $n$ . Nótese que la ecuación 14 también es válida si  $n = 0$ .

Si hacemos que  $c = 1/x$  en la ecuación 10, entonces

$$\ln 1 = \ln x + \ln \frac{1}{x};$$

como  $\ln 1 = 0$ , se infiere que

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x. \quad (15)$$

Una versión más general de la ecuación 14 también es válida, a saber

$$\ln x^r = r \ln x \quad (16)$$

para toda  $x > 0$  y para todo número  $r$  racional. Podemos demostrar la ecuación 16 procediendo como en la demostración del teorema 8.2.1. Empleando la ecuación 8 para derivar cada lado de la ecuación 16, obtenemos

$$\frac{d}{dx} \ln x^r = \frac{rx^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x}$$

y

$$\frac{d}{dx} r \ln x = \frac{r}{x}.$$

Por consiguiente, de acuerdo al teorema 4.1.5,

$$\ln x^r = r \ln x + c, \quad (17)$$

en la cual  $c$  es una constante. Haciendo que  $x = 1$  en la ecuación 17, se ve que  $c = 0$  y así se demuestra la ecuación 16.

Estamos en posibilidad de demostrar la propiedad 6: la imagen de  $\ln$  es  $(-\infty, \infty)$ . Como  $\ln$  es continua y monótona, sólo necesitaremos demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty. \quad (18)$$

De acuerdo con la definición de límite, cuando  $x \rightarrow \infty$  que se dio en la sección 2.4, se demuestra la primera de las ecuaciones 18 mostrando que para cada número  $M > 0$  existe una  $x_0$  tal que  $\ln x > M$  siempre que  $x > x_0$ . Sin embargo, el hecho de que  $\ln x$  sea una función creciente nos asegura que si  $x > x_0$  entonces  $\ln x > \ln x_0$ . Por tanto, sabremos que  $\ln x > M$  para toda  $x > x_0$ , siempre que determinemos a  $x_0$  de tal modo que  $\ln x_0 > M$ . Dada una  $M$  arbitraria  $> 0$ , podemos encontrar una  $x_0$  de éstas en la forma siguiente. Si hacemos que  $x = 2$  en la ecuación 16, se obtiene

$$\ln 2^r = r \ln 2. \quad (19)$$

Entonces, como  $\ln 2 > 0$ , es posible seleccionar  $r$  lo suficientemente grande como para que  $r \ln 2 > M$ ; en realidad,  $r$  se puede seleccionar, por simplicidad, de modo que sea un entero. Empleando este valor de  $r$ , hagamos que  $x_0 = 2^r$ ; entonces, es claro que  $\ln x_0 > M$ .

Se comprueba la segunda de las ecuaciones 18 de un modo muy semejante, haciendo uso de la ecuación 15.

## Fórmulas de derivación e Integración

Vimos en la ecuación 7 que

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Tenemos así una función cuya derivada es  $x^{-1}$  para  $x > 0$ . ¿Podremos encontrar también una función cuya derivada sea  $x^{-1}$  para  $x < 0$ ? Es claro que  $\ln x$  no es esa función, porque  $\ln x$  no está definida para  $x < 0$ . Demostraremos que la función correcta es  $\ln(-x)$ , que sí existe para  $x < 0$ . Según la regla de la cadena, se determina la derivada de  $\ln(-x)$  como sigue:

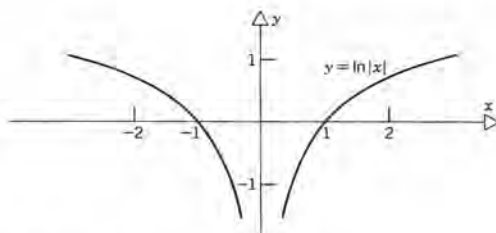
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(-x) &= \frac{1}{(-x)} \frac{d(-x)}{dx} \\ &= \frac{1}{(-x)} (-1) = \frac{1}{x}, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Combinando las ecuaciones 7 y 20 llegamos a la fórmula más compacta

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \quad (21)$$

La ecuación 21 es la fórmula básica de derivación para la función logaritmo natural. La gráfica de  $y = \ln|x|$  es simétrica con respecto al eje  $y$  y se muestra en la figura 8.2.3.



**Figura 8.2.3** Gráfica de  $y = \ln|x|$  para  $x \neq 0$ .

Se puede generalizar la ecuación 8 de igual manera. Si  $u$  es una función derivable, y si  $u(x)$  no es cero, entonces

$$\frac{d}{dx} \ln|u(x)| = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad u(x) \neq 0. \quad (22)$$

Si  $u(x)$  es cero en puntos aislados, entonces la ecuación 22 es válida, excepto en aquellos puntos donde  $u(x) = 0$ .

### EJEMPLO 1

Determinar la derivada de  $f(x) = \ln(x^2 + 9)$ .

En este caso,  $u(x) = x^2 + 9$ . De acuerdo con la ecuación 22 tenemos que

$$\frac{d}{dx} \ln(x^2 + 9) = \frac{1}{x^2 + 9} \frac{d}{dx} (x^2 + 9) = \frac{2x}{x^2 + 9}. \quad \blacksquare \quad (23)$$

### EJEMPLO 2

Determinar la derivada de  $f(x) = \ln|\sen x|$ .

Tenemos ahora que  $u(x) = \sen x$ . Nótese que se necesita el valor absoluto porque  $\sen x$  toma valores tanto positivos como negativos. Empleando la ecuación 22, obtenemos

$$\frac{d}{dx} \ln|\sen x| = \frac{\cos x}{\sen x} = \cot x. \quad (24)$$

El resultado es válido siempre que  $\sen x \neq 0$ , esto es para  $x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$  ■

### EJEMPLO 3

Determinar la derivada de  $f(x) = \ln(\ln x)$ .

El dominio de la función  $f$  es  $(1, \infty)$ . En este intervalo

$$\frac{d}{dx} \ln(\ln x) = \frac{1}{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x \ln x}. \blacksquare \quad (25)$$

Correspondiendo a la ecuación 21 tenemos la siguiente fórmula de antiderivación, o de integración, válida para valores tanto negativos como positivos de  $x$ :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \quad x \neq 0. \quad (26)$$

En forma más general, en relación con la ecuación 22, tenemos que

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + c, \quad u(x) \neq 0. \quad (27)$$

La ecuación 27 da una antiderivada para toda expresión que se pueda expresar como relación  $u'(x)/u(x)$  para alguna función  $u$  derivable. Desde luego, al usar la ecuación 26 para evaluar una integral, se debe estar seguro de que el intervalo de integración no incluya al origen. Análogamente, al usar la ecuación 27, se deben evitar los intervalos que contengan un punto para el cual  $u(x) = 0$ .

#### EJEMPLO 4

Evaluar

$$\int \frac{dx}{2x + 5}.$$

Haremos que  $u(x) = 2x + 5$ ; entonces  $u'(x) = 2$  y  $du = 2dx$ , o bien  $dx = du/2$ . En consecuencia

$$\int \frac{dx}{2x + 5} = \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln|2x + 5| + c. \quad (28)$$

El resultado es válido para cualquier intervalo que no contenga a  $x = -\frac{5}{2}$ . ■

#### EJEMPLO 5

Evaluar

$$\int \tan x \, dx.$$

Primero, es útil escribir  $\tan x = \sin x / \cos x$ . A continuación hagamos  $u(x) = \cos x$ , de tal modo que  $u'(x) = -\sin x$  y  $du = -\sin x$ . Así, obtenemos

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{du}{u}.$$

Por tanto,

$$\int \tan x \, dx = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

El resultado es válido en cualquier intervalo en el que  $\cos x$  no sea cero. ■

Para calcular las antiderivadas como las de los ejemplos 4 y 5, el paso más difícil es la selección de  $u(x)$ . A veces es bastante obvia la sustitución adecuada, pero a veces es más complicada. En general, se puede esperar poder desarrollar eficiencia en esas manipulaciones a través de la práctica. Los ejemplos siguientes consisten en la evaluación de integrales definidas, más que en la determinación de antiderivadas.

### EJEMPLO 6

Determinar el área  $A$  de la región acotada por el eje  $x$ , las rectas  $x = 1$  y  $x = 3$  y la curva  $y = x/(x^2 + 7)$ . Esta región se muestra en la figura 8.2.4.

La integral siguiente da el área  $A$ :

$$A = \int_1^3 \frac{x}{x^2 + 7} \, dx.$$

Para evaluar esta integral encontramos primero una antiderivada del integrando. Si hacemos  $u = x^2 + 7$ , entonces  $u' = 2x$ , y

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + 7} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln u(x) + c = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 7) + c. \end{aligned}$$

Entonces el valor de  $A$  está dado por

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{1}{2} \ln(x^2 + 7) \right|_1^3 \\ &= \frac{\ln 16 - \ln 8}{2} = \frac{\ln 2}{2} \approx 0.34658. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

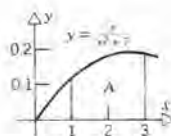


Figura 8.2.4

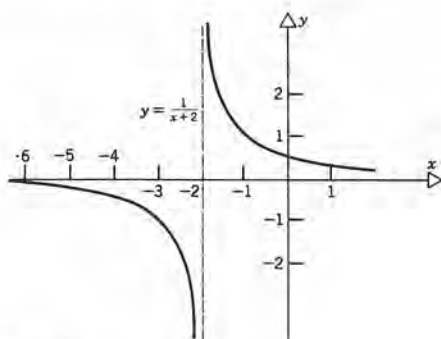


**EJEMPLO 7**

Calcular el valor de

$$I = \int_{-6}^{-3} \frac{dx}{x+2}.$$

En la figura 8.2.5 se muestra la gráfica del integrando.



**Figura 8.2.5**

Nótese que el integrando se hace no acotado cuando  $x \rightarrow -2$ , pero esto no constituye problema porque el intervalo de integración no contiene ese punto. Sin embargo, el hecho de que el integrando sea negativo en el intervalo de integración significa que debemos tener cuidado para retener las barras de valor absoluto en la antiderivada. Haciendo que  $u(x) = x + 2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \ln|x+2| \Big|_{-6}^{-3} = \ln|-1| - \ln|-4| \\ &= \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4 \cong -1.38629. \blacksquare \end{aligned}$$

**PROBLEMAS**

En los problemas 1 a 16, determinar la derivada de la función dada.

1.  $f(x) = \ln|x+4|$ ;  $x \neq -4$ .

2.  $f(x) = \ln|2x-3|$ ;  $x \neq \frac{3}{2}$ .

3.  $f(x) = \ln(x^4+1)$ .

4.  $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ .

5.  $f(x) = x \ln(x^2+9) + \frac{3}{x}$ .

6.  $f(x) = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ ;  $x \neq \pm 1$ .

7.  $f(x) = \ln \frac{2|x|}{x^2+1}$ ;  $x \neq 0$ .

8.  $f(x) = \sqrt{x^2+4} + \ln \sqrt{x^2+4}$ .

9.  $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$ ;  $x > 0$ .

10.  $f(x) = \ln|\cos x|$ ;  $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$

## 446 FUNCIONES ELEMENTALES TRASCENDENTES

11.  $f(x) = x \ln|x| - x$ ;  $x \neq 0$ .  
 12.  $f(x) = \ln[\sqrt{a^2 + x^2} + x]$ .  
 13.  $f(x) = \ln|\ln x|$ ;  $x > 0$  y  $x \neq 1$ .  
 14.  $f(x) = \cos x \ln|\sin x|$ ;  $x \neq 0, \pm\pi, \dots$ .  
 15.  $f(x) = \sin(\ln|x|)$ ;  $x \neq 0$ .  
 16.  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$ ;  $x > 1$ .

En los problemas 17 a 24 determinar la antiderivada que se indica.

17.  $\int \frac{dx}{x-3}$   
 18.  $\int \frac{dx}{2x+1}$   
 19.  $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7} dx$   
 20.  $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$   
 21.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$   
 22.  $\int \frac{(\ln|x|)^3}{x} dx$   
 23.  $\int \cot 2x dx$   
 24.  $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$

En los problemas 25 a 32, evaluar la integral dada.

25.  $\int_2^6 \frac{dx}{x-1}$   
 26.  $\int_0^4 \frac{dx}{3x+2}$   
 27.  $\int_2^4 \frac{4x-6}{x^2-3x+4} dx$   
 28.  $\int_{-3}^0 \frac{dx}{x-2}$   
 29.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{2x-5}$   
 30.  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$   
 31.  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot x dx$   
 32.  $\int_{-\pi/4}^{-\pi/6} \cot x dx$

En los problemas 33 a 36, determinar la  $n$ -ésima derivada de la función dada.

33.  $y = \ln|x|$ ,  $x \neq 0$ .  
 34.  $y = \ln|1+x|$ ,  $x \neq -1$ .  
 35.  $y = \ln|1-x|$ ,  $x \neq 1$ .  
 36.  $y = \ln|1-x^2|$ ,  $x \neq \pm 1$ .

En los problemas 37 a 40, determinar los valores máximo y mínimo (si existen) de la función dada en el intervalo dado.

37.  $f(x) = x - \ln x$  en  $(0, 2]$ .  
 38.  $f(x) = x - \ln x$  en  $[\frac{1}{2}, 2]$ .

39.  $f(x) = \ln \sin x$  en  $(0, \pi)$ .

40.  $f(x) = \frac{1}{x} + \ln \sqrt{x}$  en  $[1, 3]$ .

41. Se tiene la región acotada por las rectas  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 8$  y por la curva  $y = (1+x)^{-1/2}$ . Calcular el volumen del sólido que se forma al girar esta región alrededor del eje  $x$ .

42. Calcular el área de la región acotada por las rectas  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$  y por la curva  $y = x + x^{-1}$ .

43. Considere la integral del ejemplo 4 del texto:

$$I = \int_{-6}^{-3} \frac{dx}{x+2}.$$

Emplear la simetría de la gráfica de la figura 8.2.5 para reemplazar la integral por una equivalente cuyo integrando sea positivo.

44. Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Esto es, demostrar que para cualquier  $M > 0$  existe una  $x_0$  en el intervalo  $0 < x_0 < 1$  tal que si  $0 < x < x_0$ , entonces  $\ln x < -M$ .

45. Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

*Sugerencia:* escribir

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x},$$

e identificar el límite requerido en términos de la derivada de  $\ln x$  en  $x = 1$ .

46. (a) Emplear el teorema del valor medio para la función  $f(x) = \ln(1+x)$  para demostrar que

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

para toda  $x > -1$ . Es útil considerar por separado los casos en los que  $x > 0$  y  $x < 0$ .

(b) Emplear el resultado de la parte (a) para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

47. **Derivación logarítmica.** La derivación de productos, de cocientes y de potencias se puede facilitar si

se toman primero logaritmos, lo cual se llama derivación logarítmica. Sea

$$y = f(x) = g_1(x)g_2(x) \cdots g_n(x)$$

en la cual  $g_1, \dots, g_n$  son funciones derivables. Entonces

$$\ln|y| = \sum_{k=1}^n \ln|g_k(x)|,$$

siempre que ninguna  $g_k(x)$  sea cero. Demostrar que

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^n \frac{g'_k(x)}{g_k(x)} = \frac{g'_1(x)}{g_1(x)} + \cdots + \frac{g'_n(x)}{g_n(x)},$$

y que

$$\frac{dy}{dx} = g_1(x) \cdots g_n(x) \sum_{k=1}^n \frac{g'_k(x)}{g_k(x)}.$$

En los problemas 48 a 50 emplear la derivación logarítmica (véase problema 47) para determinar la derivada de la función dada.

48.  $f(x) = (x+1)(x-3)(x^2+4)$

49.  $f(x) = x(x^2+x+1)\sin 2x$

50.  $f(x) = (x-2)\sqrt{x^2+1}(x^2+9)x^3$

51. (a) Emplear el corolario 1 de la sección 6.3 para demostrar que

$$\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad x > 1.$$

(b) Emplear el resultado de la parte (a) para demostrar que

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}, \quad x > 1;$$

y a continuación demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

(c) Emplear el resultado de la parte (b) para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

*Sugerencia:* hacer que  $x = 1/y$ .

(d) Extender los resultados de las partes (b) y (c) para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\epsilon \ln x = 0$$

para toda  $\epsilon > 0$ . En otras palabras,  $|\ln x|$  crece más lentamente que cualquier potencia positiva de  $x$  cuando  $x \rightarrow \infty$  o cuando  $x \rightarrow 0^+$ .

*Sugerencia:* hacer que  $x = u^\epsilon$  en los límites establecidos en las partes (b) y (c).

## 8.3 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En la sección anterior demostramos que el logaritmo natural es una función monótona continua cuyo dominio es  $(0, \infty)$  y cuya imagen es  $(-\infty, \infty)$ . Por tanto tiene una función inversa monótona continua cuyo dominio es  $(-\infty, \infty)$  y cuya imagen es  $(0, \infty)$ . Representaremos esta función inversa mediante  $\exp$ , y la llamaremos **función exponencial**. Más adelante en esta sección se notará lo adecuado del nombre.

**DEFINICIÓN 8.3.1** La función exponencial  $\exp$  se define para todo número real  $x$  mediante

$$y = \exp x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y. \quad (1)$$



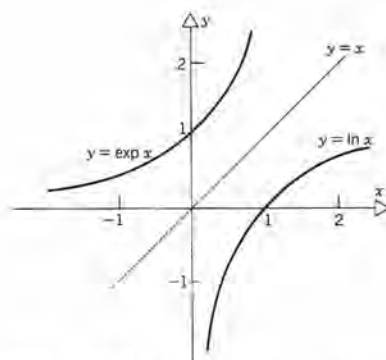
Así, para calcular el número  $y = \exp x$  para una  $x$  dada, debemos despejar a  $y$  de la ecuación

$$x = \ln y = \int_1^y \frac{dt}{t}. \quad (2)$$

En la práctica, los valores de la función exponencial se calculan mediante otros métodos que no describiremos. Las calculadoras de bolsillo tienen rutinas interconstruidas para producir en forma automática valores de  $\exp$ . En la tabla 8.2 se muestran unos cuantos valores representativos de  $\exp x$ . Es claro que  $\exp x$  crece en forma muy rápida cuando crece  $x$ . De hecho, es posible demostrar (problemas 47 y 48) que  $\exp x$  crece más rápido que cualquier potencia de  $x$  (sin importar lo grande que sea) cuando  $x \rightarrow \infty$ .

**Tabla 8.2** Algunos valores de la función exponencial

$x$	$\exp x$
-10	0.00005
-5	0.00674
-4	0.01832
-3	0.04979
-2	0.13534
-1	0.36788
-0.5	0.60653
0	1.0000
0.5	1.6487
1	2.7183
2	7.3891
3	20.086
4	54.598
5	148.41
10	22026.5



**Figura 8.3.1** Gráfica de  $y = \exp x$ .

La gráfica de  $y = \exp x$  se dibuja en la figura 8.3.1; como se describió al final de la sección 8.1, fue obtenida reflejando la gráfica de  $y = \ln x$  con respecto a la recta  $y = x$ . Nótese que la gráfica de  $y = \exp x$  es creciente y cóncava hacia arriba; además,  $\exp x \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y cuando  $x \rightarrow \infty$ . También,  $\exp 0 = 1$ . Estas propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades de la función logaritmo natural, que se describieron en la sección anterior.

Se obtiene la gráfica de  $y = \exp(-x)$  a partir de la de  $y = \exp x$  invirtiendo simplemente la dirección del eje  $x$  positivo, o bien, de manera alternativa, girando la

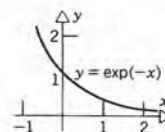
gráfica de  $y = \exp x$  alrededor del eje  $y$ . En la figura 8.3.2 se muestra la gráfica de  $y = \exp(-x)$ .

Como las funciones logaritmo natural y exponencial son inversas entre sí, se infiere de acuerdo con la ecuación 1 y en forma inmediata, que

$$x = \ln(\exp x) \quad \text{para toda } x \quad (3)$$

y que

$$y = \exp(\ln y), \quad \text{para } y > 0 \quad (4)$$



**Figura 8.3.2**  
Gráfica de  $y = \exp(-x)$ .

### Propiedades algebraicas de la función exponencial

La función exponencial tiene las propiedades siguientes, que a veces se llaman leyes de los exponentes:

$$\exp(u + v) = (\exp u)(\exp v), \quad (5)$$

$$\exp(-u) = \frac{1}{\exp u}, \quad (6)$$

$$\exp(u - v) = \frac{\exp u}{\exp v} \quad (7)$$

$$(\exp u)^r = \exp(ru), \quad r \text{ racional}, \quad (8)$$

en las cuales  $u$  y  $v$  indican números reales cualesquiera.

Para demostrar la ecuación 5 partimos de la propiedad correspondiente de la función logaritmo natural, esto es

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y. \quad (9)$$

Para números reales  $u$  y  $v$  cualesquiera, sean

$$x = \exp u, \quad y = \exp v; \quad (10)$$

nótese que  $x > 0$  y que  $y > 0$ . Entonces

$$u = \ln x, \quad v = \ln y. \quad (11)$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados de la ecuación 9, obtenemos

$$\exp[\ln(xy)] = \exp[\ln x + \ln y],$$

o bien, como  $\exp$  y  $\ln$  son funciones inversas entre sí,

$$xy = \exp[\ln x + \ln y]. \quad (12)$$

Empleando las ecuaciones 10 y 11 para expresar la ecuación 12 en términos de  $u$  y  $v$ , tenemos que

$$(\exp u)(\exp v) = \exp(u + v),$$

lo cual demuestra la ecuación 5.

A partir de la ecuación 5 se demuestran rápidamente las ecuaciones 6 a 8 (véase problema 58).

### Exponentes irracionales

Recuérdese que en la sección anterior demostramos que

$$\ln(x^r) = r \ln x \quad (13)$$

para toda  $x > 0$  y todo  $r$  racional. Aplicando la función exponencial a ambos lados de la ecuación 13 se obtiene

$$\exp[\ln(x^r)] = \exp(r \ln x)$$

o bien, según la ecuación 4,

$$x^r = \exp(r \ln x). \quad (14)$$

La ecuación 14 relaciona a la cantidad  $x^r$  para  $r$  racional, con las funciones logaritmo natural y exponencial. Sin embargo, el hecho crucial con respecto a la ecuación 14 es que el lado derecho de ella está bien definido para toda  $x > 0$  y para todo número real  $r$ , independientemente de que sea racional o no. Esto es, para una  $x > 0$  dada, hemos definido a  $\ln x$  en la sección 8.2 y podemos multiplicar entonces por cualquier número real  $r$  para obtener  $r \ln x$  y finalmente en esta sección hemos definido a  $\exp u$  para todo número real  $u$ . Así, el lado derecho de la ecuación 14 es una manera de *definir* a  $x^r$  cuando  $r$  es irracional.

**DEFINICIÓN 8.3.2** Para cualquier  $x$  positiva y cualquier número real  $r$ , sea racional o irracional,

$$x^r = \exp(r \ln x).$$

En la práctica, los errores de redondeo evitan el cálculo *exacto* de  $x^r$  según la definición 8.3.2. Desde un punto de vista teórico lo importante es que con la definición 8.3.2 es posible demostrar que todas las leyes conocidas de los exponentes y las operaciones algebraicas son válidas también para los exponentes irracionales.

### El número $e$

El número cuyo logaritmo natural es igual a uno es un número muy importante en matemáticas, quizá sólo inferior a  $\pi$  en cuanto a significado y frecuencia de su empleo.



Es lo suficientemente importante de manera que siempre se representa con el símbolo especial  $e$ . Así,  $e$  es el número tal que

$$\ln e = 1 \quad \text{o} \quad e = \exp 1. \quad (15)$$

De acuerdo con la ecuación 2, se infiere que  $e$  satisface la ecuación

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1. \quad (16)$$

Así, si representamos un barrido del área comprendida entre el eje  $t$  y la gráfica de  $y = 1/t$ , comenzando en  $t = 1$ , y prosiguiendo hacia la derecha, debemos entonces detenernos en  $t = e$  para tener un área de tamaño unitario (véase figura 8.3.3).

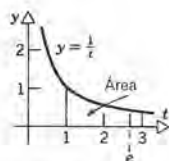
Hay varias maneras de calcular una buena aproximación a  $e$ . Por ejemplo, se puede aproximar la integral de la ecuación 16 mediante sumas adecuadas de Riemann, como se describe en el problema 56. Mediante estimaciones burdas de este tipo se puede demostrar que  $e$  está entre 2.5 y 3.

En el problema 49 demostraremos que  $e$  también está dado por la importante fórmula de límite

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k. \quad (17)$$

También se puede emplear la ecuación 17 para calcular valores aproximados de  $e$ ; algunos de esos valores se ven en la tabla 8.3. Esta tabla sugiere que  $e$  es un poco mayor que 2.7.

Hay otros modos más eficientes de calcular  $e$  que aparecerán más adelante, en especial como derivados de un estudio de las series infinitas (ejemplo 3 de la sección



**Figura 8.3.3**

El número  $e$  en términos de un área.

**Tabla 8.3** Aproximaciones a  $e$

$k$	$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$
1	2
2	2.25
4	2.4414
10	2.5937
25	2.6658
100	2.7048
1000	2.7169
$10^4$	2.71815
$10^5$	2.71827
$10^6$	2.71828

13.2). Por tanto, por el momento, tan sólo afirmaremos que se puede calcular  $e$  con exactitud y que su valor con una aproximación de cinco cifras decimales es

$$e = 2.71828 \dots \quad (18)$$

Recordemos ahora la ecuación 14:

$$x^r = \exp(r \ln x),$$

es una relación válida para toda  $x$  positiva y todo  $r$  real. Si hacemos que  $x = e$  en la ecuación 14, y empleamos la ecuación 15, obtendremos

$$e^r = \exp r. \quad (19)$$

Como  $r$  puede ser cualquier número real, de este modo hemos identificado el valor de la función exponencial en todos los puntos a medida que  $e$  se eleva al exponente correspondiente. Si, como es costumbre, empleamos la letra  $x$  para indicar la variable independiente, entonces la ecuación 19 adquiere la forma

$$\exp x = e^x. \quad (20)$$

De aquí en adelante usaremos normalmente la notación  $e^x$  en lugar de la notación equivalente  $\exp x$ ; sin embargo, esta última notación a veces es mejor cuando el exponente es una expresión complicada.

En vista de la ecuación 20, podemos reformular la ecuación 1 como

$$y = e^x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \ln y. \quad (21)$$

Así, se ve que el logaritmo natural es el logaritmo de base  $e$ . En términos de  $e$ , la expresión de la definición 8.3.2 se vuelve

$$x^r = e^{r \ln x}; \quad x > 0, \quad r \text{ real}. \quad (22)$$

También, las ecuaciones 5 a 8 se pueden reformular como

$$e^{u+v} = e^u e^v,$$

$$e^{-u} = \frac{1}{e^u},$$

$$e^{u-v} = \frac{e^u}{e^v},$$

$$(e^u)^r = e^{ru}.$$

### Fórmulas de derivación y de Integración de la función exponencial

Recuérdese que en la sección 8.2,  $d(\ln y)/dy = 1/y$  para  $y > 0$ . Por lo que, de acuerdo con el teorema 8.1.1, la inversa de la función logaritmo natural también es derivable.

En otras palabras,  $y = e^x$  es una función de  $x$  derivable. Para determinar la derivada de  $y = e^x$ , podemos derivar la ecuación  $x = \ln y$  en forma implícita con respecto a  $x$ . Al emplear la regla de la cadena obtenemos

$$1 = \frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx},$$

así que

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Por último, al sustituir  $y = e^x$  obtenemos la fórmula de derivación siguiente:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \quad (23)$$

En otras palabras, la derivada de la función exponencial es la propia función exponencial. Al derivar en forma repetida la ecuación 23, vemos que, para todo entero positivo  $n$ ,

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x. \quad (24)$$

Como  $e^x > 0$ , se deduce que la  $n$ -ésima derivada de  $y = e^x$  es positiva para cada valor de  $x$ . Para  $n = 1$  y  $n = 2$ , esto nos da una confirmación adicional de que la gráfica de  $y = e^x$  es creciente y cóncava hacia arriba.

La fórmula (23) de derivación se puede generalizar en forma inmediata mediante la regla de la cadena. Así, si  $u$  es una función derivable,

$$\frac{d}{dx} e^{u(x)} = e^{u(x)} u'(x). \quad (25)$$

Los ejemplos siguientes muestran el empleo de la ecuación 25.

### EJEMPLO 1

Determinar la derivada de  $f(x) = e^{-3x}$ .

En este caso,  $u(x) = -3x$  y  $u'(x) = -3$ , de manera que

$$\frac{d}{dx} e^{-3x} = -3e^{-3x}. \quad (26)$$

### EJEMPLO 2

Determinar la derivada de  $f(x) = e^{x^2}$ .



En este caso,  $u(x) = x^2$ , por lo que, según la ecuación (25),

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = e^{x^2} \frac{d}{dx} x^2 = 2xe^{x^2}. \blacksquare \quad (27)$$

### EJEMPLO 3

Determinar la derivada de  $f(x) = e^{\sin 2x}$ .

De acuerdo con la ecuación 25,

$$\frac{d}{dx} e^{\sin 2x} = e^{\sin 2x} \frac{d}{dx} \sin 2x = 2 (\cos 2x) e^{\sin 2x}. \blacksquare \quad (28)$$

Correspondiendo a la ecuación 23, tenemos la fórmula de integración

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad (29)$$

y correspondiendo a la ecuación 25, tenemos la fórmula más general

$$\int e^{u(x)} u'(x) dx = e^{u(x)} + c. \quad (30)$$

### EJEMPLO 4

Determinar la antiderivada

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Si hacemos que  $u(x) = \sqrt{x}$ , entonces  $u'(x) = 1/2\sqrt{x}$ . Por tanto,  $du = dx/2\sqrt{x}$ , ó  $2du = dx/\sqrt{x}$ . Entonces

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^u du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c. \blacksquare \quad (31)$$

### EJEMPLO 5

Determinar la antiderivada

$$\int e^{\cos(x/3)} \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx.$$

En este caso, hacemos que  $u(x) = \cos(x/3)$ ; entonces  $u'(x) = (-\frac{1}{3}) \operatorname{sen}(x/3)$  y  $du = -(\frac{1}{3}) \operatorname{sen}(x/3) dx$ . En consecuencia,

$$\int e^{\cos(x/3)} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right) dx = -3 \int e^u du = -3e^u + c = -3e^{\cos(x/3)} + c. \quad (32)$$

## EJEMPLO 6

Calcular el valor de

$$I = \int_0^2 x^2 e^{x^{3/2}} dx. \quad (33)$$

En este caso es natural seleccionar  $u(x) = x^3/2$ . Entonces  $u'(x) = 3x^2/2$  y  $x^2 dx = 2du/3$ . Además,  $x = 0$  y  $x = 2$  corresponden a  $u = 0$  y a  $u = 4$ , respectivamente. Así, la integral  $I$  se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int_0^4 e^u du \\ &= \frac{2}{3} e^u \Big|_0^4 = \frac{2}{3} (e^4 - 1) \approx 35.73. \end{aligned}$$

Nótese que si se cambia la integral en la ecuación 33 a la siguiente forma

$$J = \int_0^2 x e^{x^{3/2}} dx$$

entonces el problema se hace mucho más difícil. La sustitución  $u(x) = x^3/2$  ya no reduce la integral a una forma elemental. No se sugiere otra selección de  $u(x)$ ; en realidad,  $J$  no se puede determinar con métodos elementales analíticos. ■

## Extensión de la regla para potencias para exponentes irracionales

En la sección 3.1 dedujimos la fórmula de derivación  $D_x(x^r) = rx^{r-1}$  cuando  $r$  es racional. Podemos demostrar ahora que la misma fórmula es válida también cuando  $r$  es irracional. Recuértese que si  $r$  es cualquier número real, entonces  $x^r$  está dado por la ecuación 22:

$$x^r = e^{r \ln x}.$$

Al derivar esta ecuación se obtiene

$$\frac{d}{dx} x^r = \frac{d}{dx} e^{r \ln x}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{r \ln x} \frac{d}{dx} r \ln x \\
 &= x^r \cdot \frac{r}{x} \\
 &= r x^{r-1}.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Así, la regla para potencias también es válida para exponentes irracionales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} x^\pi &= \pi x^{\pi-1}, \\
 \frac{d}{dx} x^{\sqrt{2}} &= \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1},
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. La ecuación 34 establece también la fórmula de integración correspondiente

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1 \tag{35}$$

para valores irracionales del exponente  $r$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 16, determinar la derivada de la función dada.

$$1. f(x) = e^{3x} \qquad 2. f(x) = x^2 + e^{-x^2}$$

$$3. f(x) = x e^{-x} + \cos 2x$$

$$4. f(x) = \frac{e^{2x}}{x}, \quad x \neq 0$$

$$5. f(x) = \exp \sqrt{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$6. f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad 7. f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$8. f(x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$9. f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

$$10. f(x) = e^{e^x}$$

$$11. f(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0$$

$$12. f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$$13. f(x) = \frac{x}{2} e^{2/x}, \quad x \neq 0$$

$$14. f(x) = \cos(e^{x^2}) + 2 \ln(1 + x^2)$$

$$15. f(x) = e^{-x} \sin 2x \qquad 16. f(x) = \frac{x e^{2x}}{1 + x^2}$$

En los problemas 17 a 26 determinar la antiderivada dada.

$$17. \int e^{2x} dx$$

$$18. \int x e^{x^2} dx$$

$$19. \int x^2 e^{-x^3} dx$$

$$20. \int (\cos x) e^{\sec x} dx$$

$$21. \int e^x (1 + e^x)^3 dx$$

$$22. \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$



23.  $\int e^{-x} \cos(e^{-x}) dx$

24.  $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

25.  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$

*Sugerencia:* convertir el integrando al que aparece en el problema 24.

26.  $\int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx$

*Sugerencia:* multiplicar numerador y denominador por  $e^x$ .

En los problemas 27 a 34 evaluar la integral dada.

27.  $\int_0^3 e^{3x} dx$

28.  $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

29.  $\int_0^1 x e^{-2x^2} dx$

30.  $\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^{-2x} dx$

31.  $\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{2x} (e^{2x} + 4)^2 dx$

32.  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-x} (1 + e^{-x})^2 dx$

33.  $\int_0^{\pi/2} (\sin x) e^{\cos x} dx$

34.  $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

En los problemas 35 a 42, hacer un dibujo de la gráfica de la función dada.

35.  $f(x) = e^{-x^2}$

36.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

37.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

38.  $f(x) = x e^{-x}$

39.  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

40.  $f(x) = \exp \frac{1}{x}$

41.  $f(x) = \exp(-1/|x|)$

42.  $f(x) = \exp \frac{1}{x^2}$

43. Calcular el área de la región comprendida entre los ejes coordenados, la recta  $x = \ln 10$  y la gráfica de  $y = e^{-x}$ .

44. Calcular el volumen del sólido formado al hacer girar la región del problema 43 alrededor del eje  $x$ .

45. En el problema 11 de la sección 7.5 se demostró que si una determinada población tiene una función  $s(t)$  de supervivencia y una función  $r(t)$  de renovación, entonces el tamaño  $f(t)$  de la población en el tiempo  $t$  está dado por

$$f(t) = f(0) s(t) + \int_0^t s(t - \tau) r(\tau) d\tau.$$

Determinar  $f(t)$  si  $s(t) = e^{-kt}$  y  $r(t) = R$ , donde  $k$  y  $R$  son constantes positivas. Determinar también el valor del límite  $L$  de  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

46. Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x$ .

*Sugerencia:* identificar esta cantidad como derivada.

47. Hacer uso del hecho de que  $(\ln t/t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (problema 51(b) de la sección 8.2) para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} = 0, \quad \alpha > 0.$$

*Sugerencia:* hacer que  $t = e^{\alpha x}$ .

48. Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^M}{e^x} = 0,$$

en la cual  $M$  es un número positivo arbitrario. En otras palabras,  $e^x$  crece con mayor rapidez que cualquier potencia positiva de  $x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

*Sugerencia:* escribir  $x^M/e^x = [x/x^{1/M}]^M$  y consultar el problema 47.

\*49. En este problema demostraremos cómo deducir la fórmula

$$e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k. \quad (i)$$

(a) Hacer que  $k = 1/h$  y demostrar que la ecuación (i) es equivalente a

$$e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}. \quad (ii)$$

(b) Demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{\ln(1 + h)}{h} \right].$$

(c) ¿Por qué es cierto que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{\ln(1 + h)}{h} \right] \\ = \exp \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} \right]? \end{aligned}$$

En otras palabras, ¿por qué es válido tomar el límite dentro de la función exponencial?

## 458 FUNCIONES ELEMENTALES TRASCENDENTES

(d) Demostrar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1,$$

y así demostrar la ecuación (ii).

*Sugerencia:* véase problema 45 de la sección 8.2.

En los problemas 50 a 55, emplear la ecuación 17 o el método del problema 49 para evaluar el límite dado.

50.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$

51.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$ ,  $r$  número real

52.  $\lim_{h \rightarrow 0} (1 - rh)^{1/h}$ ,  $r$  número real

53.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k$

54.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^k$

55.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ ,  $r$  y  $t$  números reales

56. **Estimación numérica de  $e$ .** De la ecuación 16 del texto sabemos que  $e$  satisface la ecuación

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

(a) Demostrar que

$$\int_1^{2.5} \frac{dt}{t} \leq 0.996$$

calculando una suma superior para esta integral con un paso de tamaño  $h = 0.25$ . Demostrar, por consiguiente, que  $e > 2.5$ .

(b) Empleando  $h = 0.25$ , y encontrando una suma inferior, demostrar que

$$\int_1^3 \frac{dt}{t} \geq 1.019.$$

y demostrar por consiguiente que  $e < 3$ .

57. Estimar  $e$  con mayor precisión que en el problema 56 empleando la regla de Simpson para calcular  $\int_1^b (dt/t)$  para diversos valores de  $b$  entre 2.7 y 2.75.

58. **Propiedades de la función exponencial.** En este problema indicaremos las demostraciones de las ecuaciones 6, 7 y 8, empleando sólo la ecuación 5 y

el hecho de que  $\exp(0) = 1$ . En este problema  $u$  y  $v$  representan números reales arbitrarios.

(a) Haciendo que  $v = -u$  en la ecuación 5, demostrar que

$$\exp(-u) = \frac{1}{\exp u}.$$

(b) Escribir  $u - v = u + (-v)$  y con ello demostrar que

$$\exp(u - v) = \frac{\exp u}{\exp v}.$$

(c) Demostrar que

$$(\exp u)^p = \exp(pu)$$

para todo  $p$  entero positivo.

(d) Demostrar que

$$(\exp u)^{1/q} = \exp\left(\frac{u}{q}\right)$$

para todo  $q$  entero positivo.

*Sugerencia:*  $u = q(u/q)$ .

(e) Si  $r = p/q$  es cualquier número racional, demostrar que

$$(\exp u)^r = \exp ru.$$

Asegúrese de tomar en cuenta el caso  $r < 0$ .

### \* Ecuación funcional para la función exponencial

La ecuación

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad (i)$$

es un ejemplo de las llamadas ecuaciones funcionales; relaciona los valores de la función  $f$  en distintos puntos, en este caso los puntos  $x$ ,  $y$  y  $x + y$ . Recuerdese que encontramos una ecuación correspondiente en la sección 8.2 en relación con la función logaritmo. Como  $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$ , es plausible esperar que las soluciones de la ecuación (i) sean de tipo exponencial. En realidad, se puede establecer mucha información acerca de  $f$  con base en la ecuación (i). Los problemas 59 a 61 indican cómo se puede hacer lo anterior.

59. Sea  $f$  una función cuyo dominio es  $(-\infty, \infty)$  y que satisface la ecuación funcional

$$f(x + y) = f(x) f(y).$$

- (a) Haciendo que  $x = y = 0$ , demostrar que  $f(0) = 0$ , o bien  $f(0) = 1$ .
- (b) Si  $f(0) = 0$ , demostrar que  $f(x) = 0$  para toda  $x$ .
- (c) Si  $f(0) = 1$ , demostrar que  $f(x)$  nunca es cero.
- (d) Si  $f(a) \neq 0$  para determinada  $a \neq 0$ , demostrar que  $f(0) = 1$ , y por tanto que  $f(x)$  nunca es cero.
- (e) Si  $f(a) = 0$  para determinada  $a$ , demostrar que  $f(x) = 0$  para toda  $x$ .
- (f) Si  $f$  no es una función constante, demostrar que  $f(0) = 1$ .
60. Sea  $f$  una función no constante cuyo dominio es  $(-\infty, \infty)$  que satisface a

$$f(x + y) = f(x) f(y).$$

Demostrar que

$$f(r) = [f(1)]^r$$

para cualquier número racional  $r$ . Si  $f$  es continua y  $f(1) = e$ , entonces  $f(r) = e^r$  y  $f$  es la función exponencial  $\exp$ .

*Sugerencia:* usar los resultados del problema 59 para demostrar que  $f(1) \neq 0$ . A continuación usar un método semejante al del problema 58.

61. Sea  $f$  una función no constante cuyo dominio es  $(-\infty, \infty)$ , que satisface a

$$f(x + y) = f(x) f(y).$$

(a) Demostrar que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

(b) Si existe  $f'(0)$ , demostrar que  $f'(x)$  existe para toda  $x$  y que

$$f'(x) = kf(x),$$

en donde  $k = f'(0)$ .

(c) Si  $k = 1$ , entonces  $f'(x) = f(x)$  y de acuerdo con el problema 59(f), tenemos que  $f(0) = 1$ .

Obsérvese que esas condiciones se satisfacen si  $f(x) = e^x$ . En la sección 8.4 demostraremos que no hay otra función que las satisfaga.

## 8.4 ALGUNAS APLICACIONES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Es importante, en muchas aplicaciones, estudiar una cantidad  $Q$  que varía con una rapidez proporcional a sí misma. Por ejemplo, la masa de un cuerpo de material radiactivo disminuye con una rapidez proporcional a la masa del cuerpo en ese momento. También, en un estudio de una población aislada, como un cultivo de bacterias, con frecuencia se supone que la rapidez de aumento de la población es proporcional a la población misma.

En esos casos,  $Q'(t)$  es proporcional a  $Q(t)$  y por tanto  $Q$  satisface la ecuación

$$Q'(t) = rQ(t), \quad (1)$$

en la cual  $r$  es una constante de proporcionalidad. A una ecuación como la (1) en la cual aparece la derivada de la función desconocida, se le llama **ecuación diferencial**. Como sólo aparece en la ecuación 1 la primera derivada de  $Q$ , se dice que esta ecuación es una ecuación diferencial de primer orden. De acuerdo con la ecuación 1,  $r$  tiene la dimensión de  $(1/\text{tiempo})$ . Si  $r > 0$ , entonces  $Q'(t) > 0$ , y por tanto  $Q$  es creciente, como en la población del cultivo de bacterias. Análogamente, si  $r < 0$ , entonces  $Q$  decrece, como en el decaimiento radiactivo.



Se puede resolver la ecuación 1 de la siguiente manera. Suponiendo provisionalmente que  $Q(t)$  es positiva, dividimos ambos miembros de la ecuación 1 entre  $Q(t)$  de modo que

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = r. \quad (2)$$

Entonces, reconociendo que  $Q'(t)/Q(t)$  es la derivada de  $\ln Q(t)$ , podemos escribir la ecuación 2 en la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \ln Q(t) = r. \quad (3)$$

Por consiguiente, al integrar ambos lados de la ecuación 3 obtenemos

$$\ln Q(t) = rt + C,$$

en la cual  $C$  es una constante arbitraria de integración. En consecuencia,

$$\begin{aligned} Q(t) &= \exp(rt + C) = (\exp C)e^{rt} \\ &= ce^{rt}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $c = \exp C$ .

En realidad la expresión  $Q(t) = ce^{rt}$  contiene todas las soluciones de la ecuación 1 y se llama por lo mismo la **solución general**. Esto se puede demostrar mediante una pequeña ampliación del argumento anterior, para cubrir la posibilidad de que  $Q(t)$  pueda no ser positiva; pero después, en esta sección, también daremos una deducción distinta de este resultado.

Para determinar la constante  $c$  de integración en la ecuación 4, necesitamos conocer el valor de  $Q$  en determinado tiempo específico; por ejemplo, supóngase que

$$Q(0) = Q_0, \quad (5)$$

en la cual  $Q_0$  es un valor que se conoce. A la ecuación 5 se le conoce como una **condición inicial**. Entonces, sustituyendo a 0 en lugar de  $t$  y a  $Q_0$  en lugar de  $Q$  en la ecuación 4, vemos que

$$Q_0 = c. \quad (6)$$

Empleando este valor de  $c$  en la ecuación 4, obtenemos finalmente

$$Q(t) = Q_0 e^{rt}. \quad (7)$$

A la ecuación 7 se le llama la **solución particular** de la ecuación diferencial (1), que también satisface la condición inicial (5).

La ecuación diferencial (1) y la condición inicial (5) juntas, forman un **problema con valor inicial**. La única solución de este problema con valor inicial la da la ecuación

7. La función exponencial es importante por muchas razones, pero para los científicos aplicados una de las principales es su aparición en la solución (7) del problema con valor inicial (1), (5). Este problema es básico en el estudio de campos tan diversos como la dinámica de poblaciones, las reacciones químicas, el decaimiento radiactivo y las finanzas.

## EJEMPLO 1

El isótopo radiactivo plutonio-241 se desintegra de tal modo que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -0.0525Q, \quad (8)$$

en la cual  $Q$  se mide en miligramos y  $t$  en años. Si hoy se cuenta con 50 miligramos de plutonio 241, calcular cuánto quedará dentro de diez años.

De acuerdo con la ecuación 4, la solución de la ecuación 8 es

$$Q(t) = ce^{-0.0525t}, \quad (9)$$

en la cual  $c$  es una constante que se deberá calcular. Si  $t = 0$  representa el tiempo actual, entonces  $Q(t)$  también debe satisfacer la condición inicial

$$Q(0) = 50; \quad (10)$$

por tanto,  $c = 50$ , y

$$Q(t) = 50e^{-0.0525t}. \quad (11)$$

Por último, sustituyendo  $t = 10$  en la ecuación 11, obtenemos

$$\begin{aligned} Q(10) &= 50e^{-0.525} \\ &\cong 29.6 \text{ miligramos. } \blacksquare \end{aligned} \quad (12)$$

Es claro, según la ecuación 7, que la solución del problema con valor inicial (1), (5), depende de los dos parámetros  $Q_0$  y  $r$ , que son, respectivamente, el valor inicial de  $Q(t)$  y la constante que determina la rapidez de crecimiento o de decaimiento. Esta última cantidad puede ser difícil de medir en forma directa y en los problemas de decaimiento, con frecuencia, es conveniente introducir un parámetro  $\tau$ , llamado la **semivida** del material, el cual es mucho más fácil de medir. La semivida  $\tau$  se define como el intervalo de tiempo durante el cual se reduce a la mitad una cantidad dada del material. Es fácil determinar la relación entre  $\tau$  y  $k$  mediante la ecuación 7. Si  $Q_0$  es la cantidad del material presente cuando  $t = 0$ , y si  $\tau$  es la semivida, entonces  $Q(t)$  debe satisfacer

$$Q(\tau) = \frac{Q_0}{2}. \quad (13)$$

Así, de acuerdo con la ecuación 7, obtenemos

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{r\tau},$$

y en consecuencia

$$r\tau = -\ln 2. \quad (14)$$

Si se conocen  $r$  o  $\tau$ , se puede calcular el faltante mediante la ecuación 14. Por ejemplo, para el plutonio-241 (ejemplo 1)  $r = -0.0525$  por año, y por tanto, según la ecuación 12, la semivida es

$$\tau = (\ln 2)/0.0525 \cong 13.2 \text{ años.}$$

Si no se da ni  $\tau$  ni  $r$ , entonces para determinarlos se debe observar el valor de  $Q(t)$  en alguna segunda ocasión, además de los datos que se tomaron en el inicio. El siguiente ejemplo muestra este caso.

## EJEMPLO 2

El isótopo radiactivo torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad que hay presente. Si se reducen 100 miligramos de este elemento a 82.04 miligramos en una semana, calcular la constante  $r$  de decaimiento y la semivida  $\tau$ . También, calcular una ecuación que da la cantidad de torio 234 que se encuentra en cualquier momento.

Sea  $Q(t)$  la cantidad de torio 234 presente en cualquier instante  $t$ , donde  $Q$  se mide en miligramos y  $t$  en días. Entonces  $Q$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = rQ, \quad (15)$$

en la cual  $r$  es una constante negativa que se debe calcular. Buscamos la solución de la ecuación 15 que satisfaga también la condición inicial

$$Q(0) = 100 \quad (16)$$

así como la condición

$$Q(7) = 82.04. \quad (17)$$

Según la ecuación 7, la solución de las ecuaciones 15 y 16 es

$$Q(t) = 100e^{rt}. \quad (18)$$

Para satisfacer la ecuación 17 hacemos que  $t = 7$  y que  $Q = 82.04$  en la ecuación 18; esto da



$$82.04 = 100e^{7r},$$

y por consiguiente,

$$r = \frac{\ln 0.8204}{7} \cong -0.02828 \text{ (días)}^{-1}. \quad (19)$$

Con ello, hemos calculado la constante de decaimiento  $r$ . La vida media  $\tau$  se calcula mediante la ecuación 14:

$$\tau = -\frac{\ln 2}{r} \cong 24.5 \text{ días}. \quad (20)$$

Sustituyendo el valor de  $r$  dado por la ecuación 19, en la ecuación 18, obtenemos

$$Q(t) \cong 100e^{-0.02828t}, \quad (21)$$

que da el valor de  $Q(t)$  en cualquier momento. ■

Mostraremos en una forma distinta que todas las soluciones de la ecuación 1 están comprendidas en la ecuación 4. Sea  $f$  cualquier función que satisface la ecuación 1, esto es,

$$f'(t) = rf(t), \quad (22)$$

pero no estamos suponiendo que  $f(t)$  sea la de la ecuación 4, ni tampoco suponemos cosa alguna en cuanto al signo de  $f$ , como lo hicimos antes. Para determinar  $f$  es conveniente introducir la función  $g$  dada por

$$g(t) = f(t)e^{-rt}. \quad (23)$$

Determinaremos a  $g$  encontrando primero  $g'(t)$ . Con la regla para el producto para las derivadas tenemos que

$$g'(t) = [f'(t) - rf(t)]e^{-rt} = 0$$

según la ecuación 22. Por tanto, de acuerdo con el teorema 4.1.4,  $g$  es una función constante. Representamos mediante  $c$  a esta constante y obtenemos  $g(t) = c$ , o sea

$$f(t) = ce^{rt}. \quad (24)$$

Así, si  $f$  satisface la ecuación 22, debe estar dada por la ecuación 24, que era lo que se tenía que demostrar.

### EJEMPLO 3

La población  $Q(t)$  de determinada especie de insectos en una localidad crece con una rapidez proporcional a dicha población. A la población también la afecta una emigra-

ción neta hacia el exterior con una rapidez  $k$ . Si la población es  $Q_0$  en el tiempo  $t = 0$ , determinar una expresión que dé la población en cualquier momento  $t$  posterior.

La población  $Q(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$Q' = rQ - k \quad (25)$$

y la condición inicial

$$Q(0) = Q_0. \quad (26)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación 25 expresa la rapidez de crecimiento de la población y el segundo término describe el efecto de la emigración. Suponemos que tanto  $r$  como  $k$  son constantes positivas dadas, que se determinaron por observaciones anteriores de la especie.

Podemos obtener la solución del problema (25) y (26) con valor inicial del mismo modo que resolvimos el problema (1) y (5). Sin embargo, usaremos otro método, el sugerido por el argumento que comienza con la ecuación 22. Primero multiplicamos la ecuación 25 por  $e^{-rt}$  y a continuación reformulamos el resultado como sigue:

$$e^{-rt}(Q' - rQ) = -ke^{-rt}. \quad (27)$$

El lado izquierdo de la ecuación 27 es la derivada de  $Qe^{-rt}$ , y entonces

$$\frac{d}{dt}(Qe^{-rt}) = -ke^{-rt}.$$

Y por tanto

$$Qe^{-rt} = \frac{k}{r}e^{-rt} + c.$$

De aquí que

$$Q = \frac{k}{r} + ce^{rt} \quad (28)$$

sea la solución general de la ecuación 25. Para determinar la constante  $c$  de integración empleamos la condición inicial (26). Entonces

$$Q_0 = \frac{k}{r} + c. \quad (29)$$

Así que

$$Q = \frac{k}{r} + \left(Q_0 - \frac{k}{r}\right)e^{rt} = \frac{1}{r}[k + (Q_0r - k)e^{rt}] \quad (30)$$

es la solución del problema con valor inicial (25), (26).

El comportamiento de la población  $Q$  cuando  $t$  crece depende del signo de  $Q_0 r - k$ . Si  $k < Q_0 r$ , entonces la pérdida de población por emigración es menor que el crecimiento natural de la población, y entonces  $Q(t)$  crece con el tiempo. Por otro lado, si  $k > Q_0 r$ , entonces domina la rapidez de emigración y la población disminuye. De hecho, de acuerdo con la ecuación 30, la población llega a cero en el tiempo  $(1/r) \ln[k/(k - Q_0 r)]$ . Sin embargo, se debe ver con escepticismo esta conclusión, ya que las condiciones del problema posiblemente no se apliquen cuando la población  $Q$  es pequeña. ■

### EJEMPLO 4

Suponer que la población en los Estados Unidos crece con una rapidez proporcional a la población actual.

- (a) Según las cifras oficiales del censo de los Estados Unidos, en 1900 la población era de 75.99 millones, y de 131.67 millones en 1940. Calcular la tasa de crecimiento anual durante este periodo.

Sea  $P(t)$  la población en el tiempo  $t$ , donde  $P$  está en millones,  $t$  en años y  $t = 0$  en 1900. Entonces  $P$  satisface el problema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = rP, \quad P(0) = 75.99, \quad (31)$$

y por consiguiente

$$P(t) = 75.99e^{rt}. \quad (32)$$

La rapidez de crecimiento  $r$  se calcula empleando la población de 1940, esto es, cuando  $t = 40$ :

$$131.67 = 75.99e^{40r}. \quad (33)$$

Esto da

$$r = \frac{1}{40} \ln \frac{131.67}{75.99} \cong 0.01374. \quad (34)$$

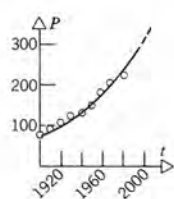
Por consiguiente, la tasa de crecimiento promedio fue de aproximadamente 1.37 por ciento por año durante el periodo de 1900 a 1940.

- (b) Con la tasa de crecimiento que se calculó en la parte (a), predecir la población en 1980 y en 2000.

Esto se lleva a cabo evaluando  $P(80)$  y  $P(100)$  con la ecuación 32, empleando la  $r$  que da la ecuación 34. Tenemos que

$$P(80) = 75.99e^{(0.01374)(80)} \cong 228.10 \text{ millones} \quad (35)$$





y

$$P(100) = 75.99e^{(0.01374)(80)} \cong 300.25 \text{ millones} \quad (36)$$

Según el censo oficial, la población real en 1980 fue 226.50 millones, lo cual es distinto del resultado de la ecuación 35 en un 0.71 por ciento.

La figura 8.4.1 muestra la relación entre la población y el tiempo de acuerdo con la ecuación 32. Los círculos pequeños muestran la población real de acuerdo con el censo estadounidense. Obsérvese que la rapidez de crecimiento, aparentemente baja, de 1.37 por ciento, hace que la población se duplique en aproximadamente 50 años. Si continúa esta rapidez de crecimiento todo el siglo veintiuno, para el año 2100 la población de Estados Unidos será de unos 1,200 millones. Todos éstos son los efectos del crecimiento exponencial. ■

**Figura 8.4.1**

Dependencia de la población de los Estados Unidos con respecto al tiempo. Los círculos corresponden a los datos de un censo. La curva es una aproximación exponencial.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10, resolver el problema con valor inicial que se plantea.

1.  $\frac{dQ}{dt} = 2Q, \quad Q(0) = 4$

2.  $\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{3}, \quad Q(0) = 5$

3.  $\frac{du}{dt} + 3u = 0, \quad u(2) = -1$

4.  $\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2} = 0, \quad x(-1) = 3$

5.  $\frac{dQ}{dt} - 2Q = 7, \quad Q(0) = 3$

6.  $\frac{dQ}{dt} + 3Q = 5e^{-t}, \quad Q(0) = 1$

7.  $\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}u = 2te^{u/2}, \quad u(0) = -2$

8.  $\frac{du}{dt} + u = e^{-t} \sin 2t, \quad u(0) = 4$

9.  $\frac{dQ}{dt} = rQ, \quad Q(t_0) = Q_0$

10.  $\frac{dQ}{dt} = rQ + k, \quad Q(t_0) = Q_0$

11. Calcular la semivida del einsteinio 253, si el elemento pierde un tercio de su masa en 11.7 días.

12. El radio 226 tiene una semivida de 1620 años. Calcular el lapso durante el cual una determinada cantidad de este elemento se reduce a las tres cuartas partes.

13. Suponer que se tienen inicialmente 100 mg de torio 234 en un recipiente cerrado y que se agrega torio 234 a una razón constante de 1 mg/día, al recipiente.

(a) Determinar la cantidad  $Q(t)$  de torio 234 que hay en el recipiente en cualquier momento. Recuérdese que la rapidez de decaimiento de este elemento se calculó en el ejemplo 2.

(b) Calcular la cantidad límite  $Q_l$  de torio 234 que habrá en el recipiente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

(c) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cantidad de torio 234 en el recipiente se reduzca hasta 0.5 mg más que el valor límite  $Q_l$ ?

14. Suponer que al principio hay 100 mg de torio 234 en un recipiente y que se agrega torio 234 a una tasa de  $k$  mg/día. Calcular  $k$  para que se mantenga un nivel constante de 100 mg de torio 234 en el recipiente. Emplear la rapidez de decaimiento del torio 234 que se calculó en el ejemplo 2.

15. Se observa que una población aislada de insectos aumenta con una rapidez proporcional a la población actual.

(a) Si al principio hay  $10^4$  insectos y dos semanas después hay  $2 \times 10^4$ , determinar una ecuación para

el número de insectos  $P(t)$  en cualquier momento  $t$ .

- (b) ¿Cuántos insectos habrá en seis meses (26 semanas)?
- (c) ¿Cuál es el comportamiento de  $P(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ?  
¿Parece realista el resultado?
- (d) Sugerir algunos factores adicionales que puedan llegar a ser importantes en el estudio de la población de estos insectos para valores grandes de  $t$ .
16. En la década de 1970 a 1980, la población de los Estados Unidos aumentó a una tasa anual promedio de 1.081 por ciento; el censo oficial informó de una población de 226.5 millones en 1980. Calcular la población en el año 2000 si la tasa anual de crecimiento de la década de 1970 se mantiene hasta el año 2000.
17. Según la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura  $u$  de un cuerpo varía con una rapidez proporcional a la diferencia entre  $u$  y la temperatura ambiente  $T$ . Esto es

$$\frac{du}{dt} = k(u - T), \quad (i)$$

en la cual  $k$  es la constante de proporcionalidad. Nótese que  $k$  siempre es negativa, ya que  $u$  tiende a disminuir si  $u > T$ .

- (a) Demostrar que la función

$$u(t) = T + ce^{kt}, \quad (ii)$$

en la cual  $c$  es una constante arbitraria, satisface a la ecuación (i).

- (b) Determinar  $c$  si  $u(t_0) = u_0$ .
- (c) Determinar  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ . ¿Coincide la respuesta con lo que se podría esperar en forma intuitiva?
18. Suponer que una taza de café tiene una temperatura de 190 °F cuando se acaba de llenar y que se enfría conforme a la ley de Newton del enfriamiento (véase problema 17) en una habitación cuya temperatura es de 70 °F. Después de 4 minutos se observa que la temperatura del café es de 160 °F. ¿Cuánto tiempo se tardará el café en alcanzar una temperatura de 130 °F?

mente pagan los intereses en forma trimestral, mensual o quizá diaria. Sin embargo el resultado es casi el mismo en periodos hasta de varios años, si suponemos que el interés se paga y se compone en forma continua. Entonces

$$dS/dt = rS.$$

Si suponemos también que se depositan o se retiran los fondos a una tasa constante  $k$ , entonces

$$dS/dt = rS + k,$$

en la cual  $k > 0$  corresponde a depósitos, y  $k < 0$  a retiros.

19. Suponiendo que se deposita una cantidad  $S_0$  a una tasa de interés  $r$  compuesto en forma continua:
- (a) Determinar el tiempo  $T$  como una función de  $r$ , que se necesita para que la suma original duplique su valor.
- (b) Determinar la tasa de interés que se debe negociar para que la inversión se duplique en ocho años.
20. Un joven sin capital inicial invierte  $k$  dólares anuales a una tasa  $r$  de interés. Suponer que se hacen inversiones y que el interés se compone en forma continua.
- (a) Determinar la suma  $S(t)$  acumulada en el tiempo  $t$ .
- (b) Si  $r = 7$  por ciento, calcular  $k$  de tal modo que se disponga de \$100,000 dentro de diez años.
- 21 (a) Cuando se retira, un profesor tiene \$120,000 en un banco que le paga interés a una tasa  $r$ . El profesor desea retirar \$1,000 por día para sus gastos de manutención. Suponer que los pagos de interés y los retiros se hacen en forma continua. Calcular el periodo  $T$  durante el cual el profesor puede efectuar retiros en esa forma antes de terminar con su cuenta bancaria.
- (b) Con las condiciones de la parte (a), calcular  $T$  si  $r = 7$  por ciento y cuando  $r = 9$  por ciento.

\*22. Otro método para deducir la función exponencial. En lugar de definir la función exponencial como la inversa de la función logaritmo natural (que fue el método que se usó en la sección 8.3), es posible definirla como la solución de determinado problema con valor inicial. En particular, supóngase que la función  $E$  es derivable y que satisface el problema con valor inicial

$$E'(x) = E(x), \quad E(0) = 1. \quad (i)$$

### Interés compuesto

Supóngase que una suma  $S(t)$  de dinero se deposita en un banco que paga interés a una tasa  $r$ . Los bancos normal-

Es posible entonces demostrar que la función  $E$  tiene las propiedades que antes se asociaron con la función



exponencial  $e^x$ . En este problema indicaremos cómo se principia la demostración.

(a) Empleando la regla de la cadena, demostrar que

$$\frac{d}{dx} E(-x) = -E(-x) \quad (ii)$$

y que

$$\frac{d}{dx} E(x + c) = E(x + c), \quad (iii)$$

donde  $c$  es una constante.

(b) Sea

$$u(x) = E(-x)E(x + c). \quad (iv)$$

Mostrar que, para cada  $x$ ,

$$u'(x) = 0$$

y por tanto  $u(x)$  es una constante.

(c) Demostrar que  $u(x) = E(c)$  para toda  $x$ ; emplear entonces la ecuación (iv) para demostrar que

$$E(c) = E(-x)E(x + c). \quad (v)$$

(d) Hacer que  $c = 0$  en la ecuación (v) y con ello demostrar que

$$E(x)E(-x) = 1. \quad (vi)$$

Así, la función  $E$  tiene una de las propiedades importantes de la función exponencial, que es  $e^x e^{-x} = 1$ .

(e) Empleando las ecuaciones (v) y (vi), demostrar que

$$E(x + c) = E(x)E(c). \quad (vii)$$

Así vemos que  $E$  tiene otra propiedad fundamental de la función exponencial, que es  $e^{x+c} = e^x e^c$ . Una vez habiendo establecido la ecuación (vii), se puede proceder a deducir otras propiedades de  $E(x)$  como en los problemas 59 a 61 de la sección 8.3.

## 8.5 LOGARITMOS Y EXPONENCIALES DE OTRAS BASES

El estudio que se hizo en las secciones 8.2 y 8.3 acerca de los logaritmos y las exponenciales de base  $e$  se puede ampliar con facilidad a otras bases también. Veamos primero la expresión  $a^x$ , siendo  $a$  y  $x$  números reales y  $a > 0$ . En la sección 8.3 adoptamos la definición

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad (1)$$

que se reduce a la expresión algebraica normal en la que intervienen potencias y raíces cuando  $x$  es racional. Como la función exponencial siempre es positiva, se infiere que  $a^x > 0$  para todos los valores de  $x$ .

De acuerdo con la definición de la ecuación 1 y con las propiedades de la función exponencial, todas las leyes usuales de los exponentes son válidas para  $a^x$ ; en especial

$$a^0 = 1, \quad (2a)$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad (2b)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (2c)$$

$$(a^x)^r = a^{rx}; \quad r = \text{cualquier número real.} \quad (2d)$$



Se puede determinar la derivada de  $a^x$  mediante la ecuación 1:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx} e^{x \ln a} \\ &= e^{x \ln a} \frac{d}{dx} (x \ln a) \\ &= e^{x \ln a} \ln a \\ &= a^x \ln a.\end{aligned}\quad (3)$$

La segunda derivada es

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} a^x &= \frac{d}{dx} a^x \ln a \\ &= a^x (\ln a)^2,\end{aligned}\quad (4)$$

y así sucesivamente para las derivadas de orden superior. Se pueden generalizar las ecuaciones 3 mediante la regla de la cadena; esto es, para toda función  $u$  derivable,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} a^{u(x)} &= \frac{d}{dx} e^{u(x) \ln a} \\ &= e^{u(x) \ln a} \frac{d}{dx} [u(x) \ln a] \\ &= a^{u(x)} u'(x) \ln a.\end{aligned}\quad (5)$$

Obsérvese que en realidad no es necesario aprender de memoria las fórmulas (3) y (5) de derivación. Tan sólo basta recordar la ecuación 1, siempre que también se sepa derivar la función exponencial.

### EJEMPLO 1

Determinar la derivada de  $2^x$ .

De acuerdo con la ecuación 1,

$$2^x = e^{x \ln 2}.$$

En consecuencia

$$\frac{d}{dx} 2^x = e^{x \ln 2} \ln 2 = 2^x \ln 2. \quad \blacksquare \quad (6)$$

### EJEMPLO 2

Si  $y = 5^{x^2/2}$ , determinar  $dy/dx$ .

Primero escribiremos a  $y$  en la forma

$$y = \exp\left[\left(\frac{x^2}{2}\right) \ln 5\right].$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \exp\left[\left(\frac{x^2}{2}\right) \ln 5\right] x \ln 5 = 5^{x^2/2} x \ln 5. \blacksquare \quad (7)$$

### EJEMPLO 3

Si  $f(x) = 10^{\cos x}$ , determinar  $f'(x)$ .

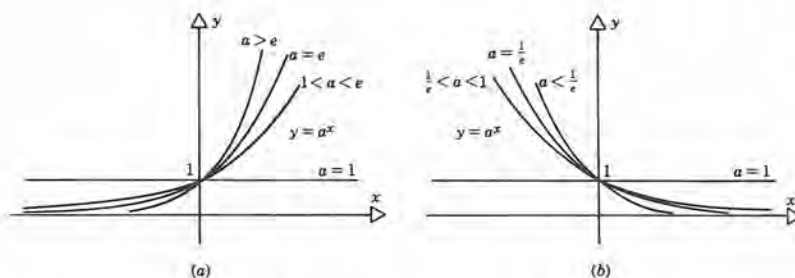
Expresando  $f(x)$  en términos de  $\exp$ , tenemos que

$$f(x) = 10^{\cos x} = \exp[(\cos x) \ln 10].$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp[(\cos x) \ln 10](-\sin x) \ln 10 \\ &= -\ln 10(\sin x)10^{\cos x}. \blacksquare \end{aligned} \quad (8)$$

Se puede obtener rápidamente un dibujo cualitativo de  $y = a^x$  basándonos en las ecuaciones 1, 3 y 4. Es útil hacer la distinción entre los tres casos  $a = 1$ ,  $a > 1$  y  $a < 1$ . Si  $a = 1$ , entonces  $a^x = 1$  para toda  $x$  y la gráfica simplemente es la recta  $y = 1$ . Si  $a > 1$ , entonces  $\ln a > 0$  y la gráfica de  $y = a^x$  se asemeja a la de  $y = e^x$  porque es positiva, creciente, cóncava hacia arriba, e interseca al eje  $y$  en el punto  $(0, 1)$ ; además  $y \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y  $y \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . La figura 8.5.1a muestra la gráfica de  $y = a^x$  para diversos valores de  $a \geq 1$ . Por otro lado, si  $0 < a < 1$ , entonces  $\ln a < 0$  y la gráfica de  $y = a^x$  es semejante a la de  $y = e^{-x}$ . En este caso la gráfica es positiva de nuevo, cóncava hacia arriba y pasa por el punto  $(0, 1)$ . Sin embargo, ahora  $y = a^x$  es una función decreciente; además,  $y \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y  $y \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . En la figura 8.5.1b se muestra la gráfica de  $y = a^x$  para varios valores de  $a$  en  $0 < a \leq 1$ .



**Figura 8.5.1** (a) Gráficas de  $y = a^x$ , para  $a \geq 1$ . (b) Gráficas de  $y = a^x$ , para  $0 < a \leq 1$ .

Anteriormente demostramos cómo derivar la función  $a^x$  escribiéndola primero como una exponencial de base  $e$ . A continuación mencionaremos un procedimiento ligeramente distinto, al cual se le llama **derivación logarítmica**. Partiendo de la ecuación

$$y = a^x \quad (9)$$

tomamos el logaritmo natural de cada lado y obtenemos

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a. \quad (10)$$

A continuación derivamos en forma implícita la ecuación 10 con respecto a  $x$ , teniendo en mente que  $y$  es una función de  $x$  y por tanto la derivada de  $\ln y$  debe determinarse mediante la regla de la cadena. Tenemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dy}(\ln y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x \ln a)$$

o bien

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln a. \quad (11)$$

Por lo que

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a. \quad (12)$$

Este resultado, naturalmente, concuerda con la ecuación 3.

El procedimiento que se usó para definir a  $a^x$  y calcular su derivada se puede ampliar a funciones más generales. Por ejemplo, tenemos la función  $f(x) = x^x$ . Podemos evaluar esta función expresándola en términos de las funciones logaritmo natural y exponencial, esto es

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}; \quad (13)$$

esta última ecuación se puede evaluar para toda  $x > 0$ , que es el dominio de  $f$ . Para derivar  $f$  usamos también la ecuación 13:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^x) &= \frac{d}{dx} e^{x \ln x} \\ &= e^{x \ln x} \frac{d}{dx}(x \ln x) \\ &= x^x (\ln x + 1). \end{aligned} \quad (14)$$

El mismo resultado se puede obtener también tomando primero el logaritmo de cada lado de  $y = x^x$  y derivando a continuación en forma implícita.



De modo semejante podemos definir la expresión  $u(x)^{v(x)}$ , siempre que  $u(x) > 0$ . Tenemos entonces

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}. \quad (15)$$

Si  $u$  y  $v$  son dos funciones derivables, entonces la derivada de  $u(x)^{v(x)}$  se puede determinar a partir de la ecuación 15:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u(x)^{v(x)} &= \frac{d}{dx} e^{v(x) \ln u(x)} \\ &= e^{v(x) \ln u(x)} \frac{d}{dx} [v(x) \ln u(x)] \\ &= u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x) u'(x)}{u(x)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

De nuevo, no se necesita memorizar la ecuación 16. Lo que es importante recordar es que la derivada de cualquier función del tipo exponencial se puede determinar expresando primero la función en términos de la función exponencial de base  $e$ , y a continuación derivándola. También se puede emplear la derivación logarítmica.

#### EJEMPLO 4

Determinar la derivada de

$$f(x) = (4 + x^2)^{\cos 2x}.$$

Primero reformulamos  $f(x)$  como sigue:

$$f(x) = \exp[(\cos 2x) \ln(4 + x^2)].$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp[(\cos 2x) \ln(4 + x^2)] \frac{d}{dx} [(\cos 2x) \ln(4 + x^2)] \\ &= \exp[(\cos 2x) \ln(4 + x^2)] \left[ -2(\sin 2x) \ln(4 + x^2) + \frac{2x \cos 2x}{4 + x^2} \right] \\ &= (4 + x^2)^{\cos 2x} \left[ -2(\sin 2x) \ln(4 + x^2) + \frac{2x \cos 2x}{4 + x^2} \right]. \blacksquare \end{aligned}$$

Con cada fórmula de derivación se tiene una fórmula asociada de integración. Así, en correspondencia a las ecuaciones 3 y 5 tenemos

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1 \quad (17)$$

y

$$\int a^{u(x)} u'(x) dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + c, \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1. \quad (18)$$

Sin embargo, estos resultados no son muy útiles, porque no nos permiten determinar antiderivadas que no hubiéramos determinado antes. Por ejemplo, la ecuación 17 se podría haber deducido empleando la fórmula de integración para  $e^x$  como sigue:

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + c = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

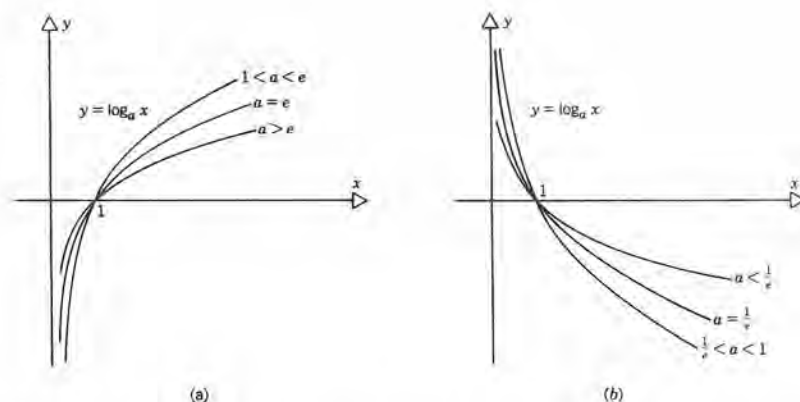
e igualmente para la ecuación 18.

Hemos visto que para toda  $a$  positiva, excepto  $a = 1$ , la función exponencial de base  $a$  es monótona, su dominio es  $(-\infty, \infty)$ , y su imagen es  $(0, \infty)$ . En consecuencia, tiene una función inversa cuyo dominio es  $(0, \infty)$  y cuya imagen es  $(-\infty, \infty)$ . Es natural llamar a esta función inversa el logaritmo de base  $a$ , y la representaremos mediante  $\log_a x$ . Así, para  $x > 0$ ,

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y. \quad (19)$$

Se puede dibujar la gráfica de  $y = \log_a x$  reflejando la gráfica de  $y = a^x$  con respecto a la recta  $y = x$ . Véanse las figuras 8.5.2a y 8.5.2b para los casos  $a > 1$  y  $0 < a < 1$ , respectivamente. Nótese que si  $a > 1$ , entonces  $y \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , y que  $y \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow 0+$ . Sin embargo, estos límites se invierten si  $0 < a < 1$ .

Los logaritmos de otras bases obedecen las mismas reglas básicas que las de los logaritmos naturales. Por ejemplo,



**Figura 8.5.2** (a) Gráficas de  $y = \log_a x$ , para  $a > 1$ . (b) Gráficas de  $y = \log_a x$ , para  $0 < a < 1$ .

$$\log_a 1 = 0 \quad (20a)$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (20b)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x \quad (20c)$$

$$\log_a(x^r) = r \log_a x; \quad r = \text{cualquier número real} \quad (20d)$$

Las demostraciones de esas reglas son una consecuencia inmediata de la definición de  $\log_a x$  y de las reglas correspondientes a la función exponencial.

También existe una estrecha relación entre los logaritmos naturales y los logaritmos de otras bases. Para deducir esta relación tenemos que

$$y = \log_a x; \quad (21)$$

entonces

$$x = a^y. \quad (22)$$

Tomando el logaritmo natural de cada lado de la ecuación 22 se obtiene

$$\ln x = \ln(a^y) = y \ln a.$$

Finalmente, despejando a  $y$  y empleando la ecuación 21, vemos que

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (23)$$

Si hacemos que  $x = e$  en la ecuación 23 obtenemos el útil corolario

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}. \quad (24)$$

A continuación veremos el cálculo de la derivada de la función logaritmo de base  $a$ . Una consecuencia inmediata de la ecuación 23 es que

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0. \quad (25)$$

Como en el caso del logaritmo natural, podemos considerar también la derivada de  $\log_a(-x)$  para  $x < 0$ . En lugar de la ecuación 23 tenemos ahora

$$\log_a(-x) = \frac{\ln(-x)}{\ln a}, \quad x < 0, \quad (26)$$

así, empleando la regla de la cadena, encontramos que



$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log_a(-x) &= \frac{1}{(-x) \ln a} \frac{d}{dx}(-x) \\ &= \frac{1}{x \ln a}, \quad x < 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Si combinamos las ecuaciones 25 y 27 en un solo enunciado obtenemos

$$\frac{d}{dx} \log_a|x| = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0. \quad (28)$$

Como siempre, se puede recurrir a la regla de la cadena para generalizar la ecuación 28:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \log_a|u(x)| &= \frac{1}{u(x) \ln a} \frac{d}{dx} u(x) \\ &= \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}, \quad u(x) \neq 0\end{aligned}\quad (29)$$

para cualquier función  $u$  derivable y no cero.

### EJEMPLO 5

Si  $y = \log_{10}(x^2 + 1)$ , determinar  $dy/dx$ .

Haremos uso de la ecuación 29 y de  $u(x) = x^2 + 1$ . Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{(x^2 + 1) \ln 10}. \quad \blacksquare \quad (30)$$

### EJEMPLO 6

Si  $f(x) = \log_{10}|\sin x|$ , determinar  $f'(x)$ .

En este caso,  $u(x) = \sin x$ . Por tanto, según la ecuación 29,

$$f'(x) = \frac{\cos x}{(\sin x) \ln 10}; \quad x \neq 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots \quad \blacksquare \quad (31)$$

Correspondiendo a las ecuaciones 28 y 29 tenemos las fórmulas de integración

$$\int \frac{dx}{x} = (\log_a|x|)(\ln a) + c \quad (32)$$

y

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = (\log_a |u(x)|)(\ln a) + c. \quad (33)$$

Sin embargo, estos resultados no son de utilidad porque tan sólo nos dan antiderivadas más complicadas que las que obtuvimos para  $1/x$  y  $u'(x)/u(x)$ , respectivamente.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20 determinar la derivada de la función dada.

1.  $y = 5^x$
2.  $y = 2^{x^2}$
3.  $y = 10^{\ln x}, \quad x > 0$
4.  $y = x^3 3^x$
5.  $y = x^{-2} + 2^{-x}, \quad x \neq 0$
6.  $y = \pi^{\sin x}$
7.  $y = 4^{\log_2 x}, \quad x > 0$
8.  $y = e^{-x} + \log_2 |x|, \quad x \neq 0$
9.  $y = \log_{10}(x^2 + x + 1)$
10.  $y = 2x^2 + x \log_{10} e^x$
11.  $y = \log_5(25^{x^2})$
12.  $y = \log_2 \left| \frac{1}{x} \right|, \quad x \neq 0$
13.  $y = \log_{10}(x^2 + 1)^2$
14.  $y = \sin(\log_{10} x^2)$
15.  $y = x^{\sqrt{x}}, \quad x > 0$
16.  $y = (\sqrt{x})^x, \quad x > 0$
17.  $y = x^{\sin x}, \quad x > 0$
18.  $y = x^{x^x}, \quad x > 0$
19.  $y = x^{1+x^2}, \quad x > 0$
20.  $y = \log_e 10, \quad x > 0$

En los problemas 21 a 26 determinar la antiderivada que se pide.

21.  $\int 3^x dx$
22.  $\int 2^{-x} dx$
23.  $\int 4^{2x} dx$
24.  $\int x \pi^{x^2} dx$
25.  $\int \sin x \cos x 10^{\cos 2x} dx$
26.  $\int 2^x 2^{2x} dx$

En los problemas 27 a 32 evaluar la integral que se da.

27.  $\int_1^4 2^x dx$
28.  $\int_0^1 3^{-x} dx$

$$29. \int_{-1}^1 10^{2x} dx$$

$$30. \int_0^1 x 2^{x^2+1} dx$$

$$31. \int_0^3 5^{x/5} dx$$

$$32. \int_1^3 \frac{2^{\ln x}}{x \ln 2} dx$$

33. Si se escribe  $a^x = e^{x \ln a}$  y se usan las propiedades de la función exponencial de base  $e$ , demostrar que

$$(a) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(b) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$(c) (a^x)^r = a^{rx}; \quad r \text{ real}$$

34. Si  $x > 0$  y  $y > 0$ , demostrar que el logaritmo de base  $a$  tiene las propiedades siguientes; suponer que  $a > 0$  y que  $a \neq 1$ .

$$(a) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$(b) \log_a \left( \frac{1}{x} \right) = -\log_a x$$

$$(c) \log_a(x^r) = r \log_a x; \quad r \text{ real}$$

*Sugerencia:* emplear las leyes de los exponentes de base  $a$  que se dieron en el problema 33.

35. Sean  $a$  y  $b$  números positivos y  $a \neq 1$  y  $b \neq 1$ . Suponer también que  $x \neq 0$ . Demostrar que

$$(\ln a) \log_b |x| = (\ln b) \log_a |x|.$$

36. Deducir la ecuación de (a) la recta tangente y (b) la recta normal a la gráfica  $y = 2^x$  en el punto en el que  $x = 2$ .
37. Calcular el área de la región acotada por los ejes coordenados, la recta  $x = 1$  y la gráfica de  $y = 5^{-x}$ .
38. Calcular el volumen del sólido que se forma al girar la región del problema 37 alrededor del eje  $x$ .

En los problemas 39 a 42 determinar la inversa de la función dada y determinar su dominio.

39.  $f(y) = 2^{y+3}$

40.  $f(y) = \log_2[1 - \sqrt{4 - y^2}]$ ;  $\sqrt{3} < y \leq 2$

41.  $f(y) = \log_a\left(\frac{y-1}{2}\right)$ ;  $y > 1$

42.  $f(y) = \frac{1}{2}(a^y + a^{-y})$ ;  $a > 1$ ,  $y \geq 0$

43. Demostrar que para  $a > 1$  cada una de las ecuaciones siguientes tiene una solución única.

(a)  $x + a^x = 0$

(b)  $x + \log_a x = 0$

44. Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ . *Sugerencia:* véase problema 51(c) de la sección 8.2.

## 8.6 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

En esta sección investigaremos la posibilidad de definir una inversa para cada una de las seis funciones trigonométricas. Para hacerlo, se debe tener algo de cuidado e imponer determinadas restricciones. Es de interés especial el hecho de que las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son funciones *algebraicas* relativamente sencillas. En consecuencia, las fórmulas de integración de esas funciones algebraicas involucran necesariamente a las funciones trigonométricas inversas; es una de las razones principales de presentar estas funciones en el cálculo elemental. La inversa del seno y la inversa de la tangente son de la mayor importancia y se estudiarán con cierto detalle. Las otras cuatro funciones trigonométricas inversas son de menor importancia y se tramitarán con mayor rapidez. Como siempre, todos los ángulos se miden en radianes.

### Función Inversa de la función seno

En el dominio  $(-\infty, \infty)$  la función seno es oscilatoria y hay muchos puntos en ese dominio que se asocian con cada punto de su imagen. De hecho, para cada  $y$  en  $[-1, 1]$ , hay un número infinito de  $x$  en  $(-\infty, \infty)$  para el cual  $y = \sin x$  (véase figura 8.6.1). Por tanto, la función seno en el dominio  $(-\infty, \infty)$  no tiene inversa.

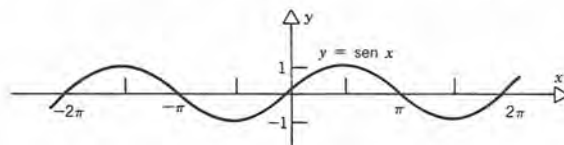


Figura 8.6.1 Gráfica de  $y = \sin x$  en  $(-\infty, \infty)$ .

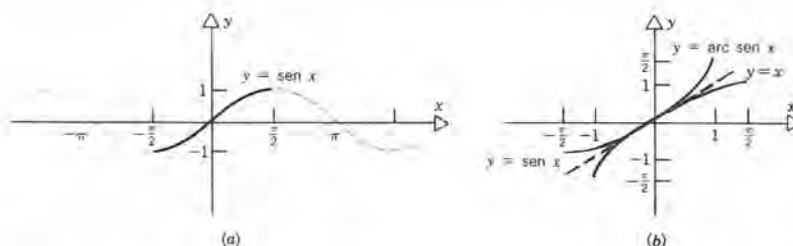
Para obtener una función que sí tenga inversa, restringiremos al dominio de la función seno a determinado intervalo en el que el seno sea monótono. Al mismo tiempo deseamos seleccionar un intervalo que esté asociado con toda la imagen  $[-1, 1]$ .



Naturalmente, hay muchos intervalos posibles, como por ejemplo  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $[\pi/2, 3\pi/2]$ ,  $[-3\pi/2, -\pi/2]$ , y así sucesivamente. Se acostumbra seleccionar el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ ; por tanto consideremos la función  $f$  dada por

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \text{ en } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (1)$$

La gráfica de  $y = f(x)$  aparece como una línea llena en la figura 8.6.2a, mientras que la de  $y = \operatorname{sen} x$  para  $x$  en  $(-\infty, \infty)$  está representada por la línea de puntos. Es claro



**Figura 8.6.2** (a) Gráfica de  $y = \operatorname{sen} x$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$ . (b) Gráfica de  $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ .

que si  $f$  crece en forma monótona en su dominio, entonces tiene una inversa. A la función inversa  $f^{-1}$  se le llama **función inversa de la función seno**, y se le representa por  $\operatorname{sen}^{-1}$  o por  $\operatorname{arc} \operatorname{sen}$ . En este libro emplearemos  $\operatorname{arc} \operatorname{sen}$  para representar a la función inversa de la función seno. El dominio de  $\operatorname{arc} \operatorname{sen}$  es  $[-1, 1]$  y su imagen es  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Por tanto

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x, \quad x \in [-1, 1] \quad (2)$$

quiere decir que

$$x = \operatorname{sen} y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3)$$

Con frecuencia ayuda el identificar a  $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$  como el ángulo cuyo seno es  $x$ . En la figura 8.6.2b se muestra la gráfica de la función  $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ . Se obtuvo reflejando la gráfica de  $y = f(x)$ , dada por la ecuación 1, con respecto a la recta  $y = x$ .

Se debe tener cuidado en observar que cuando se habla de la función seno y de su inversa, se sobreentiende que el dominio del seno es  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Sin embargo, cuando no interviene la inversa de la función seno, entonces el dominio del seno es comúnmente  $(-\infty, \infty)$ .

### EJEMPLO 1

Calcular  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{2}$  y  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} (-\sqrt{3}/2)$ .

Si  $y = \arcsen \frac{1}{2}$ , entonces  $\sen y = \frac{1}{2}$  y  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Por tanto, tenemos que  $y = \pi/6$ . Análogamente, si  $y = \arcsen (-\sqrt{3}/2)$ , entonces  $\sen y = -\sqrt{3}/2$ , y  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Así llegamos a la conclusión de que  $y = -\pi/3$ . ■

## EJEMPLO 2

Determinar  $\sen(\arcsen x)$ .

Para determinarlo debemos restringir a  $x$  a  $[-1, 1]$ . Entonces, para toda  $x$  en  $[-1, 1]$ ,  $\arcsen x = y$ . Así,  $x = \sen y$ , y  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Por consiguiente

$$\sen(\arcsen x) = \sen y = x, \quad x \in [-1, 1]. \quad (4)$$

En otras palabras, la ecuación 4 es válida para toda  $x$  en el dominio de  $\arcsen x$ . ■

## EJEMPLO 3

Determinar  $\arcsen(\sen 3\pi/2)$ .

Como  $\sen 3\pi/2 = -1$  y  $\arcsen(-1) = -\pi/2$ , tenemos que

$$\arcsen\left(\sen \frac{3\pi}{2}\right) = \arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Así, vemos que

$$\arcsen(\sen x) \neq x \quad (5)$$

a menos que  $x$  esté en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ , esto es, en la imagen de  $\arcsen$ . Para valores de  $x$  fuera de este intervalo se pueden calcular ambos lados de la ecuación 5, pero no son iguales. ■

Abordaremos ahora el asunto de derivar a la inversa de la función seno. La función  $x = \sen y$  es derivable, por lo que, de acuerdo con el teorema 8.11, la función inversa  $y = \arcsen x$  también es derivable, excepto en los puntos en los que  $dx/dy = \cos y$  es cero. Para determinar la derivada de  $y = \arcsen x$  podemos derivar  $x = \sen y$  en forma implícita. Esto da

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sen y). \quad (6)$$

Empleando la regla de la cadena en el lado derecho, obtenemos

$$1 = (\cos y) \frac{dy}{dx},$$

y de aquí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}, \quad (7)$$

Nótese que también se puede obtener la ecuación 7 mediante la regla para derivar funciones inversas (ecuación 18 de la sección 8.1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}, \quad (8)$$

en donde, en este caso,  $dx/dy = \cos y$ . La ecuación 7 sólo es válida para  $y$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$ , porque el coseno se anula en los extremos del intervalo. Para expresar el lado derecho de la ecuación 7 en términos de  $x$ , recuérdese que  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$  y por tanto  $\cos y = \pm(1 - \sin^2 y)^{1/2}$ . Se debe emplear la raíz cuadrada no negativa porque  $\cos y \geq 0$  cuando  $y$  está en  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Tenemos entonces, de la ecuación 7, que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En otras palabras, hemos obtenido la fórmula de derivación

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad (9)$$

La derivada no existe en  $x = \pm 1$ ; esto corresponde al hecho de que la recta tangente a la gráfica de  $y = \arcsin x$  en la figura 8.5.2b es paralela al eje  $y$  en esos puntos.

Se puede generalizar la ecuación 9 combinándola con la regla de la cadena. Así, si  $u$  es una función derivable y  $|u(x)| < 1$ , entonces

$$\frac{d}{dx} \arcsin u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2(x)}} \frac{d}{dx} u(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}, \quad |u(x)| < 1. \quad (10)$$

### EJEMPLO 4

Si  $y = \arcsin(x^2)$ , determinar  $dy/dx$ .

Si hacemos que  $u(x) = x^2$ , se sigue de la ecuación 10 que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \arcsin(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad -1 < x < 1. \quad (11)$$

### EJEMPLO 5

Si  $y = \arcsin(x/a)$ , donde  $a > 0$ , determinar  $dy/dx$ .

En este caso,  $u(x) = x/a$  y entonces según la ecuación 10,



$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1/a}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad -a < x < a. \quad (12)\end{aligned}$$

### EJEMPLO 6

Si  $f(x) = \arcsin(1/x)$ , determinar  $f'(x)$ .

Tenemos que  $u(x) = 1/x$ , y así

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-1/x^2}{\sqrt{1 - (1/x)^2}} = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}/\sqrt{x^2}} \\ &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1. \quad (13)\end{aligned}$$

Nótese que empleamos el hecho de que  $\sqrt{x^2} = |x|$ . ■

Las ecuaciones 9 y 10 dan lugar en forma inmediata a las fórmulas de integración correspondientes, a saber

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c, \quad |x| < 1, \quad (14)$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} dx = \arcsin u(x) + c, \quad |u(x)| < 1. \quad (15)$$

Al emplear la ecuación 14 para evaluar integrales, debemos asegurarnos de que el intervalo de integración esté dentro del intervalo abierto  $(-1, 1)$ ; análogamente, al emplear la ecuación 15 debemos asegurarnos de que  $|u(x)| < 1$  en todo el intervalo de integración.

Si se lee hacia atrás el resultado del ejemplo 5, da un caso especial importante de la ecuación 15, que es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c; \quad |x| < a \text{ y } a > 0. \quad (16)$$

### EJEMPLO 7

Determinar la antiderivada

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}. \quad (17)$$

Podemos poner esta integral en la forma (16) sacando al 4 como factor común fuera del radical, esto es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)-x^2}}. \quad (18)$$

Entonces, haciendo que  $a = \frac{3}{2}$ , podemos emplear la ecuación 16 para obtener

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x}{3}\right) + c. \quad (19)$$

La ecuación 19 es válida para  $2x/3 \in (-1, 1)$  o para  $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ . ■

### Función inversa de la función coseno

De un modo muy semejante podemos definir una inversa de la función coseno, al menos en un sentido restringido. Para que exista una inversa del coseno, restringimos el dominio a un intervalo en el que la función coseno sea monótona y tome todos los valores de su imagen  $[-1, 1]$ . Es usual que este intervalo sea  $[0, \pi]$ . Por tanto, veremos la función dada por

$$y = \cos x, \quad x \in [0, \pi] \quad (20)$$

cuya imagen es, claramente,  $[-1, 1]$ . En la figura 8.6.3a se muestra la gráfica de la ecuación 20 mediante la curva llena y la de  $y = \cos x$  para  $x$  en  $(-\infty, \infty)$  mediante la curva punteada. La restricción de la función coseno de la ecuación 20 tiene una inversa que se llama **función inversa de la función coseno**, y que se representa mediante  $\arccos$ . El dominio de  $\arccos$  es  $[-1, 1]$  y su imagen es  $[0, \pi]$ . Por tanto

$$y = \arccos x, \quad x \in [-1, 1] \quad (21)$$

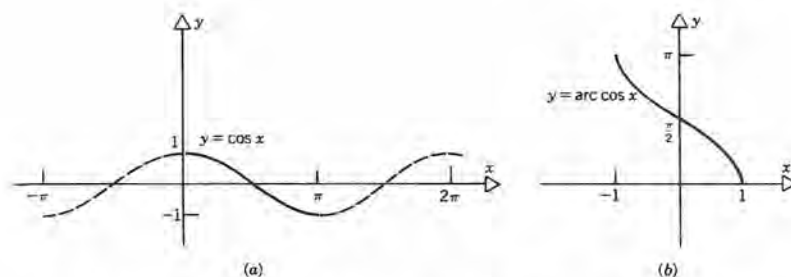
significa que

$$x = \cos y, \quad y \in [0, \pi]. \quad (22)$$

En la figura 8.6.3b se muestra la gráfica de  $y = \arccos x$ .

La derivada de la inversa de la función coseno se puede determinar de modo muy semejante a la de la inversa del seno inversa, ya sea derivando en forma implícita la ecuación 22, con respecto a  $x$ , o bien empleando la ecuación 8. Vemos que

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad (23)$$



**Figura 8.6.3** (a) Gráfica de  $y = \cos x$  en  $[0, \pi]$ . (b) Gráfica de  $y = \arccos x$ .

Por lo que la fórmula correspondiente de integración es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + c, \quad |x| < 1. \quad (24)$$

La ecuación 24 duplica esencialmente el resultado de la ecuación 14. En general emplearemos a la inversa de la función seno para fines de integración; por consiguiente no nos detendremos más en el estudio de la inversa de la función coseno.

A continuación deduciremos una relación sencilla entre las funciones  $\arcsin$  y  $\arccos$ . De acuerdo con las ecuaciones 9 y 23 tenemos que

$$\frac{d}{dx} \arcsin x + \frac{d}{dx} \arccos x = \frac{d}{dx} (\arcsin x + \arccos x) = 0.$$

Por tanto, según el teorema 4.1.4,

$$\arcsin x + \arccos x = C, \quad (25)$$

en la cual  $C$  es una constante. Para evaluar a  $C$  podemos sustituir cualquier valor adecuado de  $x$  en  $(-1, 1)$  en la ecuación 25. Empleando  $x = 0$ , vemos que

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = C.$$

Por tanto,  $C = \pi/2$  y la ecuación 25 se transforma en

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \quad (26)$$

La deducción que acabamos de ver es válida para la ecuación 26 para cuando  $x$  está en el intervalo  $(-1, 1)$ , en donde  $\arcsin$  y  $\arccos$  son derivables. Sin embargo, haciendo a su vez que  $x = 1$  y  $x = -1$ , vemos que la ecuación 26 también es válida en esos puntos. Por tanto la ecuación 26 es válida en el intervalo  $[-1, 1]$ , en el cual están



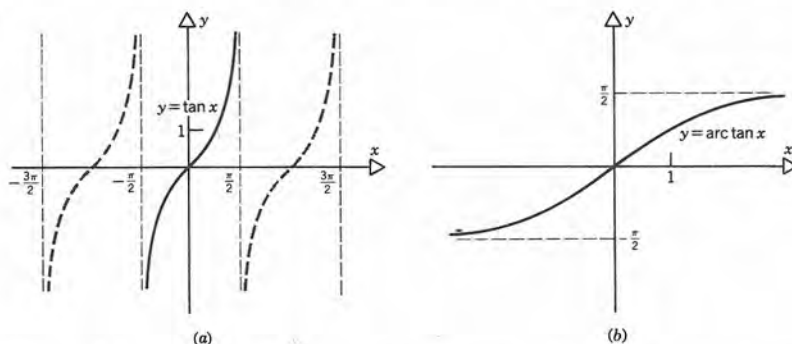
definidas arc sen y arc cos. En otras palabras, la ecuación 26 afirma sencillamente el hecho familiar de que el ángulo cuyo seno es  $x$  es el complemento del ángulo cuyo coseno es  $x$ .

### Función Inversa de la función tangente

En su dominio completo, la función tangente toma todos los valores en  $(-\infty, \infty)$  una infinidad de veces, como se puede ver en la figura 8.6.4a; en consecuencia, la función tangente no tiene inversa, a menos que se restrinja su dominio de manera adecuada. Para obtener una inversa conviene restringir el dominio de la función tangente a  $(-\pi/2, \pi/2)$ . En este intervalo la tangente es monótona y toma todos los valores en  $(-\infty, \infty)$  exactamente una vez. En la figura 8.6.4a se muestra una gráfica de

$$y = \tan x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (27)$$

con la curva llena. El intervalo es abierto porque  $\tan x$  no está definida en  $x = \pm\pi/2$ . La curva punteada de la figura 8.6.4b es la gráfica de  $y = \tan x$  para  $x$  en  $(-\infty, \infty)$ . La



**Figura 8.6.4** (a) Gráfica de  $y = \tan x$  en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . (b) Gráfica de  $y = \arctan x$ .

función dada por la ecuación 27 sí tiene una inversa que se llama **función inversa de la función tangente** y se representa mediante  $\arctan$ . El dominio de  $\arctan$  es  $(-\infty, \infty)$  y su imagen es  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Así,

$$y = \arctan x, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (28)$$

quiere decir que

$$x = \tan y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (29)$$

En la figura 8.6.4b se ve la gráfica de  $y = \arctan x$ .

La derivada de  $\arctan x$  existe para toda  $x$ , según el teorema 8.1.1. Se puede determinar al derivar implícitamente la ecuación 29 con respecto a  $x$ , o bien empleando la ecuación 8. Con ello se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{dy} (\tan y) \frac{dy}{dx} \\ &= (\sec^2 y) \frac{dy}{dx}. \end{aligned} \quad (30)$$

Sin embargo,

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2,$$

y por tanto, según la ecuación 30, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (31)$$

La ecuación 31 se puede generalizar combinándola con la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} \arctan u(x) = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}, \quad (32)$$

en la cual  $u$  es cualquier función derivable.

### EJEMPLO 8

Si  $y = \arctan(3x^2)$ , determinar  $dy/dx$ .

Hacemos que  $u(x) = 3x^2$ ; entonces, según la ecuación 32, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \arctan(3x^2) = \frac{6x}{1 + 9x^4}. \quad \blacksquare \quad (33)$$

### EJEMPLO 9

Para  $y = \arctan(x/a)$ , determinar  $dy/dx$ .

En este caso,  $u(x) = x/a$ . Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1/a}{1 + (x/a)^2} = \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad a \neq 0. \quad \blacksquare \quad (34)$$

Tenemos las siguientes fórmulas de integración, que corresponden a las ecuaciones 31 y 32:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c, \quad (35)$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} dx = \arctan u(x) + c. \quad (36)$$

Estos resultados, junto con las ecuaciones 14 y 15 en las que interviene arc sen, pertenecen a las fórmulas básicas de integración. A partir de la ecuación 34 obtenemos la importante variación de la ecuación 35

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \left( \frac{x}{a} \right) + c, \quad a \neq 0. \quad (37)$$

Como en el caso de la fórmula de integración de la inversa del seno, se necesita a veces algunas manipulaciones antes de poder usar las ecuaciones 36 o 37.

### Función inversa de la función cotangente

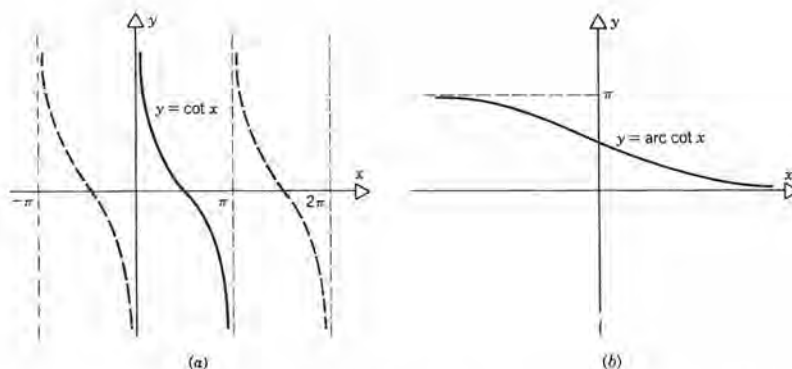
La **función inversa de la función cotangente**, representada mediante arc cot se define de tal manera que

$$y = \arccot x, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (38)$$

quiere decir que

$$x = \cot y, \quad y \in (0, \pi). \quad (39)$$

Así, arc cot es la función inversa de la función cotangente en el dominio  $(0, \pi)$ . En la figura 8.6.5a y 8.6.5b se muestran las gráficas de esas funciones.



**Figura 8.6.5** (a) Gráfica de  $y = \cot x$  en  $(0, \pi)$ . (b) Gráfica de  $y = \arccot x$ .



La derivada de la inversa de la función cotangente se puede determinar esencialmente del mismo modo que la derivada de  $\arctan$ . Al derivar implícitamente la ecuación 39 se obtiene

$$\frac{d}{dx} \arccot x = -\frac{1}{1+x^2}; \quad (40)$$

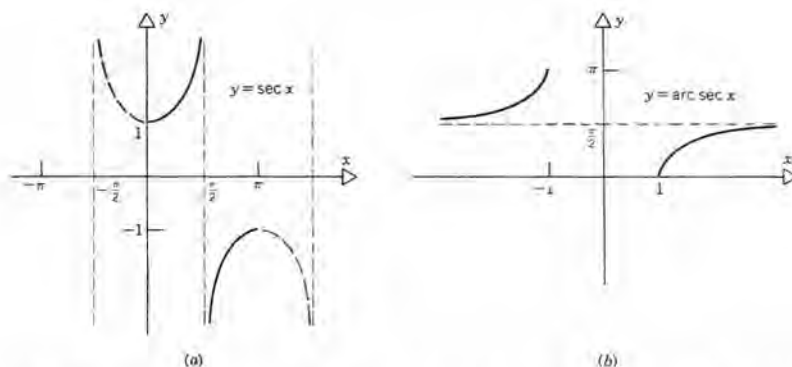
la fórmula de integración correspondiente duplica la ecuación 35 y no se usará.

### Función inversa de la función secante

Para definir a la inversa de la secante veamos primero la función

$$y = \sec x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (41)$$

cuya gráfica se indica con la parte llena de la curva de la figura 8.6.6a. Nótese que al restringir el dominio de esta función no se incluye el punto  $\pi/2$ . **Función inversa de**



**Figura 8.6.6** (a) Gráfica de  $y = \sec x$  en  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ . (b) Gráfica de  $y = \arccos x$ .

la función secante, representada por  $\arccos$ , es la inversa de la función dada por la ecuación 41. Así

$$y = \arccos x, \quad |x| \geq 1 \quad (42)$$

quiere decir que

$$x = \sec y, \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad (43)$$

El dominio de  $\arccos$  consta de los dos intervalos  $(-\infty, -1]$  y  $[1, \infty)$  y su imagen se

compone de los dos intervalos  $[0, \pi/2]$  y  $(\pi/2, \pi]$ . En la figura 8.6.6b se muestra la gráfica de  $y = \arcsin x$ .

Se puede determinar la derivada de  $\arcsin x$  derivando la ecuación 43 en la forma ya familiar y se obtiene

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1. \quad (44)$$

La fórmula de integración correspondiente es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c, \quad |x| < 1. \quad (45)$$

Estos resultados tienen menor importancia que los correspondientes para las funciones  $\arcsin$  y  $\arctan$ .

### Función Inversa de la función cosecante

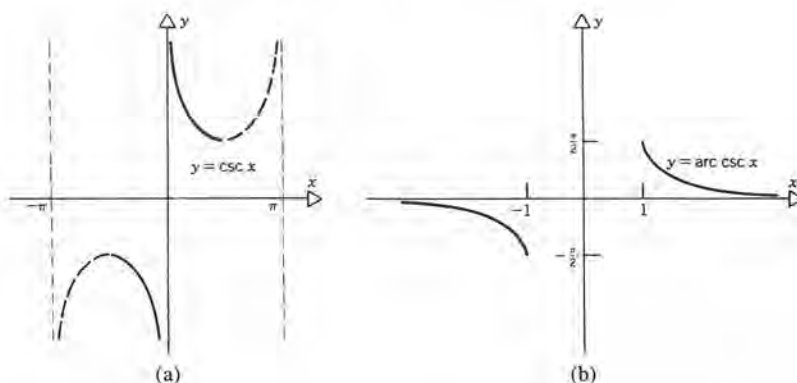
La **función inversa de la función cosecante**, que se representa mediante  $\arcsin x$  se define de modo que

$$y = \arcsin x, \quad |x| \leq 1 \quad (46)$$

quiere decir que

$$x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (47)$$

Así, la función  $\arcsin$  es la inversa de la función cosecante en el dominio  $[-\pi/2, \pi/2]$  habiendo eliminado de él al origen (véase figura 8.6.7a y 8.6.7b).



**Figura 8.6.7** (a) Gráfica de  $y = \csc x$  en  $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ . (b) Gráfica de  $y = \arcsin x$ .

Se puede determinar la derivada de  $\arccsc x$  al derivar la ecuación 47; vemos que

$$\frac{d}{dx} \arccsc x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1. \quad (48)$$

La fórmula correspondiente de integración repite la del  $\arcsec$  y tiene poco interés para nosotros.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 12, calcular el valor de la cantidad dada.

1.  $\arctan(1)$
2.  $\arcsin(-\frac{1}{2})$
3.  $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}})$
4.  $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$
5.  $\arcsin(-1)$
6.  $\operatorname{arccot}(\sqrt{3})$
7.  $\arcsin(\cos \frac{\pi}{3})$
8.  $\arctan(\sin \frac{\pi}{2})$
9.  $\cos(\arcsin \frac{1}{2})$
10.  $\sin(\arctan \sqrt{3})$
11.  $\cos(\arctan x)$
12.  $\sin(\arccos x)$

En los problemas 13 a 18 deducir la identidad que se presenta.

13.  $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); |x|, |y| \leq 1$
14.  $\frac{\arccos x + \arccos y}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}); |x|, |y| \leq 1$
15.  $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
16.  $\operatorname{arccot} x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$
17.  $\arcsin \frac{1}{x} = \arccsc x, \quad |x| \geq 1$
18.  $\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$

En los problemas 19 a 34 determinar la derivada de la función dada.

19.  $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^3}{3}\right)$
20.  $f(x) = \arctan(2x)$

21.  $f(x) = \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$
22.  $f(x) = e^{x^2} + x \arcsin(x^2)$
23.  $f(x) = \arccos(1-x^2)$
24.  $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
25.  $f(x) = \arccsc(x^2)$
26.  $f(x) = e^x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
27.  $f(x) = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$
28.  $f(x) = \sin(\arctan x)$
29.  $f(x) = \arctan(2 \tan x)$
30.  $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$
31.  $f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\right)$
32.  $f(x) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$
33.  $f(x) = \ln[\arctan(2x)]$
34.  $f(x) = \sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$

En los problemas 35 a 46 determinar la antiderivada que se indica.

35.  $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
36.  $\int \frac{dx}{16+x^2}$
37.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
38.  $\int \frac{dx}{1+4x^2}$
39.  $\int \frac{dx}{4+9x^2}$
40.  $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$



## 490 FUNCIONES ELEMENTALES TRASCENDENTES

41.  $\int \frac{dx}{|x| \sqrt{x^2 - 4}}$       42.  $\int \frac{dx}{1 + (x - 2)^2}$
43.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x + 1)^2}}$       44.  $\int \frac{\cos x}{4 + \sin^2 x} dx$
45.  $\int \frac{[\arcsen(x)]^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |x| < 1$
46.  $\int \frac{\arctan(2x)}{1 + 4x^2} dx$

En los problemas 47 a 50, deducir la fórmula de derivación dada.

47.  $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1$
48.  $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1 + x^2}$
49.  $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1$
50.  $\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}, \quad |x| > 1$

51. Sea  $f(x) = \arcsen(\cos x)$  para  $-\infty < x < \infty$ .

(a) Demostrar que

$$f'(x) = -\frac{\sen x}{|\sen x|}, \quad x \neq 0, \pm\pi, \dots$$

(b) Dibujar la gráfica de  $y = f'(x)$ .

(c) Dibujar la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Es  $f$  función continua?

52. (a) Determinar el área comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de  $y = (1 + x^2)^{-1}$  desde  $x = 0$  hasta  $x = R$  (véase figura 8.6.8).

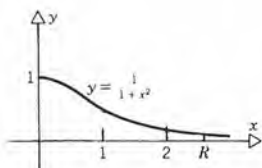


Figura 8.6.8

(b) Emplear el resultado de la parte (a) y determinar el límite cuando  $R \rightarrow \infty$ . Esto es un ejemplo de una región que se extiende al infinito, pero cuya área es finita.

53. (a) Calcular el área comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de  $y = (1 - x^2)^{-1/2}$  desde  $x = 0$  hasta  $x = \alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$  (véase figura 8.6.9).

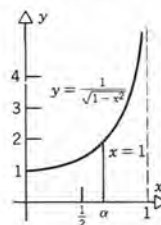


Figura 8.6.9

(b) Emplear el resultado de la parte (a) para encontrar el límite cuando  $\alpha \rightarrow 1$  por la izquierda. Nótese que aun cuando el integrando se hace no acotado cuando  $x \rightarrow 1$ , el área bajo la gráfica permanece finita cuando  $\alpha \rightarrow 1$ .

54. Calcular el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la parte de la gráfica de  $y = 1/\sqrt{4 + x^2}$  comprendida entre  $x = 2$  y  $x = 6$  alrededor del eje  $x$ .

55. Se cuelga un óleo de tal modo que la parte superior está a  $b$  ft sobre la visual mientras que la parte inferior queda a  $a$  ft también sobre la visual. ¿A qué distancia del cuadro se debe parar la persona para hacer máximo el ángulo subtendido por el cuadro en el ojo del observador?

56. Considerar la función  $f$  dada por

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad -1 < x < 1. \quad (i)$$

Desde luego, reconocemos que esta función es la inversa de la función seno. Sin embargo, no tomando este hecho en cuenta, podemos comenzar simplemente con la función dada por la ecuación (i) para finalmente definir las funciones trigonométricas y deducir todas sus propiedades. Este desarrollo evita el empleo de definiciones y argumentos geométricos. El tratamiento es paralelo a la descripción de los logaritmos y de las exponenciales que se presentó antes en este capítulo. No presentaremos esta deducción en detalle, pero en este problema indicaremos algunos de los pasos iniciales.

(a) Demostrar que

$$f(0) = 0,$$

$$f(-x) = -f(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$f$  es función creciente en  $(-1, 1)$ .

- (b) Haciendo que  $y = f(x)$ , demostrar que  $f$  tiene una inversa. Indicaremos esta función inversa mediante  $x = s(y)$  y la llamaremos función seno. Demostrar que  $s$  es derivable y que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \sqrt{1-x^2},$$

o que

$$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1-s^2(y)}.$$

- (c) Definir la función  $c(y)$  mediante la ecuación

$$c(y) = s'(y)$$

y llamarla función coseno. Demostrar que la función  $c$  es derivable y que

$$c'(y) = -s(y),$$

También, demostrar que

$$c^2(y) + s^2(y) = 1.$$

Se pueden deducir también más propiedades de las funciones  $s$  y  $c$ . Llamamos la atención hacia el hecho de que esas funciones son las mismas que las funciones seno y coseno definidas en forma geométrica.

## 8.7 LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

La experiencia ha demostrado que determinadas combinaciones de la función exponencial se presentan con la suficiente frecuencia en las aplicaciones como para garantizar una identificación y un estudio aparte de sus propiedades. Esas funciones se conocen como **funciones hiperbólicas**, porque se relacionan en forma geométrica con una hipérbola casi del mismo modo que las funciones trigonométricas se asocian con el círculo. En el problema 39 se subraya la relación. Las funciones seno y coseno hiperbólicos, que se representan mediante  $\sinh$  y  $\cosh$ , respectivamente, se definen para todos los valores de  $x$  mediante las fórmulas

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Si recordamos las propiedades de la función exponencial que se desarrollaron en la sección 8.3 y empleamos las ecuaciones 1 y 2, podemos deducir en forma inmediata las siguientes propiedades de  $\sinh$  y  $\cosh$ :

$$\sinh 0 = 0 \quad (3)$$

$$\cosh 0 = 1 \quad (4)$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad (\sinh \text{ es impar}) \quad (5)$$

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad (\cosh \text{ es par}) \quad (6)$$

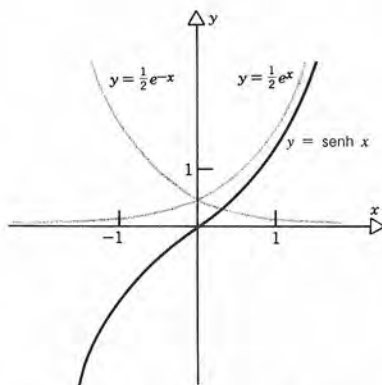
$$\sinh x \cong \frac{1}{2}e^x \quad \text{para } x \text{ grande positiva} \quad (7)$$

$$\cosh x \cong \frac{1}{2}e^x \quad \text{para } x \text{ grande positiva} \quad (8)$$

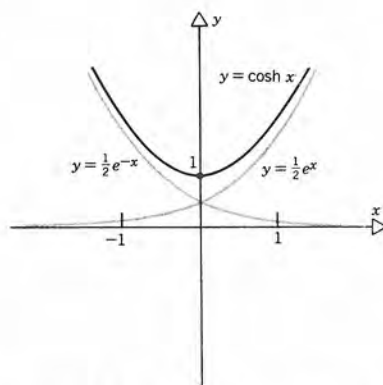
$$\sinh x \cong -\frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{para } x \text{ grande negativa} \quad (9)$$

$$\cosh x \cong \frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{para } x \text{ grande negativa} \quad (10)$$

Además, el dominio de  $\sinh$  es  $(-\infty, \infty)$  y el de  $\cosh$  es  $[1, \infty)$ . En las figuras 8.7.1 y 8.7.2 se muestran las gráficas de  $y = \sinh x$  y de  $y = \cosh x$ , respectivamente.



**Figura 8.7.1** Gráfica de  $y = \sinh x$ .



**Figura 8.7.2** Gráfica de  $y = \cosh x$ .

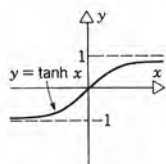
Las otras cuatro funciones hiperbólicas se definen en términos de  $\sinh$  y  $\cosh$  por analogía con las funciones trigonométricas:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (11)$$

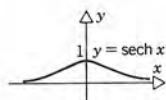
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (12)$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \neq 0, \quad (13)$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}, \quad x \neq 0. \quad (14)$$



**Figura 8.7.3**  
Gráfica de  $y = \tanh x$ .



**Figura 8.7.4**  
Gráfica de  $y = \operatorname{sech} x$ .

En las figuras 8.7.3 a 8.7.6 se presentan las gráficas de esas funciones.

Se pueden calcular los valores de las funciones hiperbólicas a partir de la función exponencial empleando las ecuaciones 1, 2, 11, 12, 13 y 14. Así, las funciones hiperbólicas se consideran como conocidas en el mismo sentido en el que se considera que las funciones exponencial y trigonométricas son funciones conocidas.

Las funciones hiperbólicas se relacionan mediante muchas identidades que se asemejan mucho a aquellas en las que intervienen las funciones trigonométricas. Por ejemplo, empleando las definiciones de  $\sinh$  y  $\cosh$  no es difícil demostrar que



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (15)$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (16)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (17)$$

Por ejemplo, para comprobar la ecuación 15, tenemos

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Se pueden comprobar las ecuaciones 16 y 17 de modo semejante.

### EJEMPLO 1

Demostrar que

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

y que

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad (19a)$$

$$= 2 \cosh^2 x - 1 \quad (19b)$$

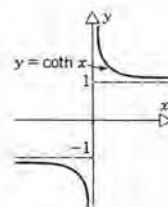
$$= 2 \sinh^2 x + 1. \quad (19c)$$

La ecuación 18 es consecuencia de la ecuación 16, haciendo que  $y = x$  y empleando el signo más en ambos lados de la ecuación. La ecuación 19a es consecuencia de la ecuación 17 del mismo modo. Las ecuaciones 19b y 19c se obtienen a partir de la ecuación 19a empleando la ecuación 15. ■

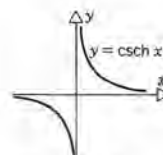
Una buena regla empírica es que cada identidad trigonométrica tiene su contrapartida en las funciones hiperbólicas, quizá con una combinación diferente de signos algebraicos. En libros de tablas matemáticas se encuentran listas de esas identidades. Sin embargo, las identidades más útiles son las que dan las ecuaciones 15 a 19c.

Como las funciones hiperbólicas constan de sumas, de restas o de cocientes de las funciones exponenciales  $e^x$  y  $e^{-x}$ , entonces cada una de las funciones hiperbólicas es derivable, excepto  $\coth x$  y  $\operatorname{csch} x$ , que no son derivables en  $x = 0$ . Según las ecuaciones 1 y 2,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x - e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \cosh x. \end{aligned} \quad (20)$$



**Figura 8.7.5**  
Gráfica de  $y = \coth x$ .



**Figura 8.7.6**  
(18) Gráfica de  $y = \operatorname{csch} x$ .

Similarmente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cosh x &= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \sinh x.\end{aligned}\tag{21}$$

Así, las derivadas de  $\sinh$  y de  $\cosh$  siguen el mismo comportamiento que las de  $\sin$  y de  $\cos$ , pero sin que aparezca un signo menos. Además, si  $u$  es cualquier función derivable, entonces, con la regla de la cadena, se obtienen las siguientes generalizaciones de las ecuaciones 20 y 21:

$$\frac{d}{dx} \sinh u(x) = u'(x) \cosh u(x),\tag{22}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh u(x) = u'(x) \sinh u(x).\tag{23}$$

## EJEMPLO 2

Determinar

$$\frac{d}{dx} \sinh \sqrt{x^2 + 1}.$$

Empleando la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sinh \sqrt{x^2 + 1} &= (\cosh \sqrt{x^2 + 1}) \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + 1} \\ &= (\cosh \sqrt{x^2 + 1}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \blacksquare\end{aligned}$$

Las fórmulas de integración que corresponden a las ecuaciones 20 a 23 son

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + c, \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + c\tag{24}$$

y

$$\begin{aligned}\int u'(x) \sinh u(x) \, dx &= \cosh u(x) + c, \\ \int u'(x) \cosh u(x) \, dx &= \sinh u(x) + c.\end{aligned}\tag{25}$$

Se pueden derivar las demás funciones hiperbólicas aplicando la regla para el cociente a las ecuaciones 11 a 14, y empleando las ecuaciones 20 y 21. Los resultados son

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x, \quad \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c, \quad (26)$$

$$\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x,$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c, \quad x \neq 0, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x,$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c, \quad x \neq 0. \quad (29)$$

Naturalmente, las ecuaciones 26 a 29 también se pueden generalizar en la forma ya familiar mediante el empleo de la regla de la cadena. No anotaremos esas fórmulas más generales de derivación e integración.

## Las funciones hiperbólicas inversas

Casi de la misma forma que para las funciones trigonométricas, podemos definir una inversa para cada una de las seis funciones hiperbólicas que se describieron antes. Como en el caso de las funciones trigonométricas, vale la pena tener en cuenta a las funciones hiperbólicas inversas debido principalmente a que sus derivadas son funciones algebraicas relativamente sencillas. Por tanto, las antiderivadas de esas funciones algebraicas se pueden expresar en términos de las funciones hiperbólicas inversas.

En algunos casos será necesario restringir el dominio de una función hiperbólica antes de definir su inversa. Sin embargo, como se muestra en la figura 8.7.1, la función seno hiperbólico es monótona en  $(-\infty, \infty)$  y por tanto no se necesita restringir su dominio para construir su inversa. La función inversa del seno hiperbólico se indica con  $\operatorname{arc} \sinh x$  y

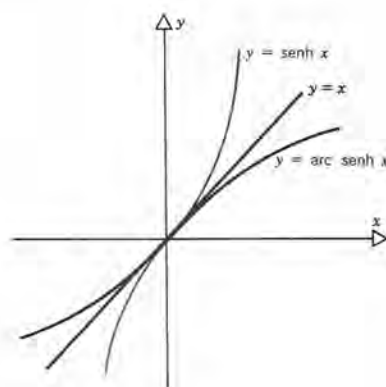
$$y = \operatorname{arc} \sinh x, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (30)$$

quiere decir que

$$x = \sinh y, \quad y \in (-\infty, \infty) \quad (31)$$

En la figura 8.7.7 se muestra la gráfica de  $y = \operatorname{arc} \sinh x$ ; se obtiene reflejando la gráfica



**Figura 8.7.7** Gráfica de  $y = \text{arc sinh } x$ .

de  $y = \sinh x$  con respecto a la recta  $y = x$ . Tanto el dominio como la imagen de  $\text{arc sinh}$  son  $(-\infty, \infty)$ .

La función  $\text{arc sinh}$  es derivable en cualquier punto (según el teorema 8.1.1) porque  $\sinh$  es derivable en cualquier punto y su derivada nunca es cero. Para determinar la derivada de  $\text{arc sinh } x$  procederemos como sigue. De las ecuaciones 30 y 31 y con la regla para derivar funciones inversas tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{(d/dy)(\sinh y)} = \frac{1}{\cosh y}. \quad (32)$$

De acuerdo con la ecuación 15,

$$\begin{aligned} \cosh y &= \sqrt{1 + \sinh^2 y} \\ &= \sqrt{1 + x^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Nótese que hemos empleado la raíz cuadrada positiva porque  $\cosh y > 0$  para toda  $y$ . Al combinar las ecuaciones 32 y 33, obtenemos la fórmula de derivación

$$\frac{d}{dx} \text{arc sinh } x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (34)$$

Más generalmente, si  $u$  es cualquier función derivable, entonces

$$\frac{d}{dx} \text{arc sinh } u(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u^2(x)}}. \quad (35)$$

Las fórmulas correspondientes de integración son

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \text{arc sinh } x + c, \quad (36)$$

y

$$\int \frac{u'(x) dx}{\sqrt{1 + u^2(x)}} = \operatorname{arc} \sinh u(x) + c. \quad (37)$$

En especial, si  $u(x) = x/a$ , donde  $a$  es una constante distinta de cero, entonces las ecuaciones 35 y 37 dan las útiles fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sinh \left( \frac{x}{a} \right) &= \frac{1/a}{\sqrt{1 + (x/a)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \end{aligned} \quad (38)$$

y

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{arc} \sinh \left( \frac{x}{a} \right) + c. \quad (39)$$

Podemos proseguir casi del mismo modo para estudiar las inversas de las demás funciones hiperbólicas, pero nos restringiremos a mencionar sólo la inversa del coseno hiperbólico. Véase algo de información acerca de la tangente hiperbólica en el problema 37.

Si el dominio no se restringe, entonces  $y = \cosh x$  no tiene inversa, porque para cada valor de  $y > 1$  hay dos valores posibles de  $x$  (véase figura 8.7.2). Sin embargo, si se restringe el dominio al intervalo  $[0, \infty)$ , entonces obtenemos la gráfica que se ve en la figura 8.7.8a. Esta restricción de la función coseno hiperbólico tiene una inversa. La función inversa se representa con  $\operatorname{arc} \cosh$  y tiene el dominio  $[1, \infty)$  y la imagen  $[0, \infty)$ . Así,

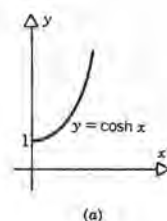
$$y = \operatorname{arc} \cosh x, \quad x \in [1, \infty) \quad (40)$$

significa que

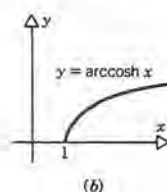
$$x = \cosh y, \quad y \in [0, \infty). \quad (41)$$

La gráfica de la ecuación 40 se ve en la figura 8.7.8b. Al derivar la ecuación 40 según la regla de la función inversa, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cosh x &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{(d/dy)(\cosh y)} \\ &= \frac{1}{\sinh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1. \end{aligned} \quad (42)$$



(a)



(b)

**Figura 8.7.8**

(a) Gráfica de  $y = \cosh x$  en  $[0, \infty)$ .

(b) Gráfica de  $y = \operatorname{arc} \cosh x$ .

Nótese que se usa la raíz cuadrada positiva porque  $\sinh y > 0$  para  $y > 0$ . Más generalmente, si  $u$  es cualquier función derivable y  $u(x) > 1$ , entonces tenemos que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cosh u(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}}, \quad u(x) > 1. \quad (43)$$

Las fórmulas correspondientes de integración son

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc} \cosh x + c, \quad x > 1 \quad (44)$$

y

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) - 1}} dx = \operatorname{arc} \cosh u(x) + c, \quad u(x) > 1. \quad (45)$$

Un caso importante especial de la ecuación 45, semejante a la ecuación 39, es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arc} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + c, \quad x > a. \quad (46)$$

### EJEMPLO 3

Evaluar la integral

$$\int_6^{12} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

El integrando tiene la forma que aparece en la ecuación 46 con  $a = 3$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_6^{12} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} &= \operatorname{arc} \cosh\left(\frac{x}{3}\right) \Big|_6^{12} \\ &= \operatorname{arc} \cosh 4 - \operatorname{arc} \cosh 2 \cong 0.7465. \blacksquare \end{aligned}$$

Terminaremos esta sección haciendo notar que la función inversa del seno hiperbólico se puede expresar en términos de la función logaritmo natural. Esto quizá no sorprenda porque el seno hiperbólico fue definido en términos de la función exponencial y la inversa de la función exponencial es el logaritmo. Para demostrar cómo se relacionan  $\operatorname{arc} \sinh x$  y  $\ln x$ , partiremos de la ecuación

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad (47)$$



de modo que  $y = \operatorname{arc} \sinh x$ . A continuación despejaremos a  $y$  en términos de  $x$ . De acuerdo con la ecuación 47 tenemos que

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0,$$

o bien el multiplicar por  $e^y$ ,

$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0. \quad (48)$$

La ecuación 48 es cuadrática en  $e^y$  y por tanto

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \quad (49)$$

Se debe seleccionar el signo más en la ecuación 49, porque  $e^y$  siempre es positiva. Por último, tomando el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación 49, obtenemos

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad (50)$$

Por lo que

$$\operatorname{arc} \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad -\infty < x < \infty. \quad (51)$$

De una manera semejante se pueden expresar también las demás funciones hiperbólicas inversas en términos de logaritmos.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 deducir la identidad dada.

- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}};$   
usar signo  $+$  para  $x > 0$ ,  
signo  $-$  para  $x < 0$ .
- $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$
- $\operatorname{arc} \cosh x = \ln[x + \sqrt{x^2 - 1}], \quad x \geq 1.$   
¿Por qué es  $\ln[x - \sqrt{x^2 - 1}]$  incorrecto?
- $\sinh(\operatorname{arc} \cosh x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad x \geq 1$

En los problemas 7 a 16 determinar la derivada de la función dada.

- $f(x) = \sinh 3x$
- $f(x) = \cosh 2x - 2 \cos x$
- $f(x) = x \cosh x$
- $f(x) = \cosh(e^x)$
- $f(x) = (\sinh x)e^{\cosh x}$
- $f(x) = \sinh^2 2x$
- $f(x) = \frac{\cosh x}{4 + \sinh^2 x}$
- $f(x) = \sqrt{\cosh x + \sinh x}$
- $f(x) = \operatorname{arc} \sinh\left(\frac{x}{2}\right)$
- $f(x) = \operatorname{arc} \cosh 3x$

En los problemas 17 a 26 determinar la antiderivada que se indica.

500 FUNCIONES ELEMENTALES TRASCENDENTES

17.  $\int \sinh 2x \, dx$       18.  $\int \cosh \frac{x}{3} \, dx$   
 19.  $\int \sinh^2 x \cosh x \, dx$       20.  $\int \tanh x \, dx$   
 21.  $\int \coth 2x \, dx$       22.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$   
 23.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}}$       24.  $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 4}}$   
 25.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$       26.  $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 + 25}}$

En los problemas 27 a 32 evaluar la integral dada.

27.  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \cosh x \, dx$       28.  $\int_{\ln 4}^{\ln 16} \sinh \frac{x}{2} \, dx$   
 29.  $\int_{\ln 8}^{\ln 64} \coth \frac{x}{3} \, dx$       30.  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$   
 31.  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 1}}$       32.  $\int_0^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{16x^2 + 9}}$

En los problemas 33 a 36, deducir la fórmula de derivación dada.

33.  $\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$   
 34.  $\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x, \quad x \neq 0$   
 35.  $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$   
 36.  $\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x, \quad x \neq 0$   
 37. (a) Definir la función  $\operatorname{arc} \tanh x$ . ¿Cuáles son su dominio y su imagen? Demostrar que

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \tanh x = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1.$$

Hacer un dibujo de la gráfica de  $y = \operatorname{arc} \tanh x$ .

(b) Determinar

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]$$

(c) Demostrar que

$$\operatorname{arc} \tanh x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1.$$

38. Evaluar

$$\int_{-10}^{-5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

*Sugerencia:* Hacer  $x = -u$ .

\*39. En este problema exploraremos la relación que existe entre las funciones hiperbólicas y las hipérbolas. Se tiene la ecuación  $x^2 - y^2 = 1$ , cuya gráfica es la hipérbola que se ve en la figura 8.7.9a.

(a) Demostrar que  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$  para  $-\infty < t < \infty$  es una representación paramétrica de la rama derecha de la hipérbola. Deseamos dar una representación geométrica al parámetro  $t$ .

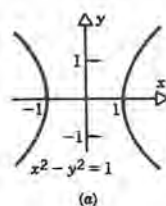
(b) Para un valor fijo de  $t > 0$  el punto  $P$  correspondiente cuyas coordenadas son  $(\cosh t, \sinh t)$  pertenece a la parte de la hipérbola que está en el primer cuadrante (véase figura 8.7.9b). Demostrar que el área  $A(t)$  de la región sombreada  $OPQ$  de la figura 8.7.9b está dada por

$$A(t) = \frac{1}{2} \sinh t \cosh t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2 - 1} \, dx.$$

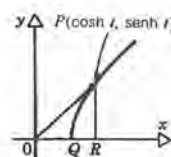
*Sugerencia:* obsérvese que  $\frac{1}{2} \sinh t \cosh t$  es el área del triángulo  $OPR$ .

(c) Consultar el problema 40(a) de la sección 6.4 y demostrar que, para cada  $t$ ,

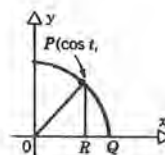
$$A'(t) = \frac{1}{2}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 8.7.9

(d) Del resultado de la parte (c) se sigue que  $A(t) = (t/2) + c$ , donde  $c$  es una constante. Demostrar que, de hecho,  $A(t) = t/2$ . Así, el parámetro  $t$  es dos veces el área acotada por el eje  $x$ , la hipérbola y el segmento de recta  $OP$ .

(e) A partir de la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  del círculo unitario y de su representación paramétrica  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  (véase figura 8.7.9c), llevar a cabo un análisis semejante al que se hace en las

partes (b) a (d) y demostrar que  $t$  tiene una interpretación análoga en este caso. Así, en este sentido, las funciones hiperbólicas se relacionan con una hipérbola del mismo modo que las funciones trigonométricas se relacionan con un círculo.

(f) Demostrar que en el caso del círculo,  $t$  se puede interpretar también como la longitud del arco  $QP$ . ¿Es válida esta interpretación también para el caso de la hipérbola?

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 4 determinar  $(f^{-1})'(x)$ , suponiendo que exista. También, determinar  $f(x)$  y  $f^{-1}(x)$ .

- $2ff' = 1$ ,  $f(0) = 0$
- $f' = f$ ,  $f(0) = 1$
- $f' - f^2 = 1$ ,  $f(0) = 0$
- $(f')^2 - f^2 = -1$ ,  $f(0) = 0$

En los problemas 5 a 8, localizar el mayor intervalo de la forma  $\alpha \leq x < \infty$  para el cual la función dada tiene una inversa. También determinar  $f^{-1}(x)$ .

- $y = x^2$
- $y = 2x^2 + x + 1$
- $y = ax^2 + bx + c$
- $y = x^4 + 1$

En los problemas 9 a 12, determinar la inversa de la función dada, o si es el caso, demostrar que la función no tiene inversa.

- $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $-\infty < x < \infty$
- $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$ ,  $-\infty < x < \infty$
- $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ,  $x \neq 0$
- $f(x) = \ln \sqrt{1+x}$   
 $-\ln \sqrt{1-x}$ ,  $-1 < x < 1$

En los problemas 13 a 22, determinar la derivada  $y'$  de la función dada.

- $y = 2^{\ln(x^2)}$
- $y = \ln 2^{x^2}$

$$15. y = \arcsen(e^{-x}) \quad 16. y = \ln\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$$

$$17. y = \log_a e^x$$

$$18. y = \sinh(\log_{10} \cosh 2^x)$$

$$19. y = \operatorname{arc} \sinh(\ln \sinh x) \quad 20. y = \log_3 \operatorname{arc} \tan x$$

$$21. y = \operatorname{arc} \tan(\sinh x)$$

$$22. y = \exp(\log_{10} \sinh x)$$

En los problemas 23 a 34 evaluar la integral dada.

$$23. \int (ax+b)e^{(ax+b)^2} dx \quad 24. \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$25. \int (1 + \tan^2 x) 2^{\tan x} dx$$

$$26. \int (e^x - e^{-x}) 2^{e^x + e^{-x}} dx$$

$$27. \int (\cos x) \pi^{\sin x} dx$$

$$28. \int_0^1 (2^x \ln 2 + 3^x \ln 3) e^{2^x + 3^x} dx$$

$$29. \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) 2^{\sin(\pi/x)} dx \quad 30. \int_0^{\ln 4} 2^{\log_4 e^x} dx$$

$$31. \int \frac{dx}{|x-4| \sqrt{(x-4)^2 - 4}} \quad 32. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$33. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$



## 502 FUNCIONES ELEMENTALES TRASCENDENTES

$$34. \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$$

En los problemas 35 a 40 evaluar el límite dado.

$$35. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\ln x)}{\ln x}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(\alpha/\ln x)}, \quad \alpha > 0$$

$$37. \lim_{t \rightarrow 1} (1/t^M) e^{-(1/t)}, \quad M > 0$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\pi x} - 1}{x}, \quad n > 0$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x}{x}$$

41. (a) Empleando el teorema del valor medio para integrales (teorema 6.3.5), demostrar que para  $x > 0$ ,

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x.$$

(b) ¿Cuál es el resultado correspondiente cuando  $x > 0$ ?

42. Emplear el resultado del problema 41 para demostrar que

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) < \int_0^x \arctan t \, dt < \frac{x^2}{2}.$$

43. Determinar todos los valores de  $x$  tales que

$$(\ln x)^2 - \ln(x^2) = 0.$$

44. Determinar todos los valores de  $x$  tales que

$$(\ln x)^2 + \ln \frac{1}{x^2} + 1 = 0.$$

45. Emplear el método de Newton para despejar la raíz  $x = r$  de

$$\sinh^2 x - 2 \sqrt{\cosh^2 x - 1} + 1 = 0,$$

empleando  $x_0 = 1$  como tentativa inicial. ¿Converge el método de Newton al valor correcto de  $r$  si  $x_0 = 0$  se usa como valor tentativo inicial? Explicar los resultados.

46. Emplear el método de Newton para resolver

$$e^{(4/3)x} - 2e^{(2/3)x} + 1 = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

47. Emplear el resultado del problema 35 de la sección 8.5 para determinar la relación entre  $\ln 10$  y  $\log_{10} e$ .

Para la función dada en los problemas 48 a 53, determinar todos los puntos críticos, los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, y todos los máximos y mínimos locales y globales. Hacer un dibujo de la gráfica de la función.

$$48. f(x) = x \ln x - x, \quad x > 0$$

$$49. f(x) = e^{(\ln x)^2}, \quad x > 0$$

$$50. f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$51. f(x) = e^{\sin x}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$52. f(x) = \arctan(\sinh x)$$

$$53. f(x) = \sinh x + \cosh x$$

# CÁLCULO

## Capítulo 9

### Métodos de integración

La formulación matemática de muchos problemas que aparecen en las ciencias físicas, naturales y sociales conduce finalmente al problema de evaluar ya sea una integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

o bien una integral indefinida (antiderivada)

$$\int f(x) dx.$$

Según el teorema 6.4.3 (el teorema fundamental del cálculo), un modo de evaluar una integral definida es reconocer una antiderivada del integrando. A veces es posible hacerlo inmediatamente, pero con frecuencia se necesita un poco de manipulación preliminar. En este capítulo describiremos varios métodos que con frecuencia son de utilidad para determinar antiderivadas, o al menos para convertir integrales a formas más sencillas.

Una herramienta importante al manejar integrales definidas e indefinidas es una tabla razonablemente extensa de integrales. La tabla 9.1 contiene una lista de algunas fórmulas de integración que ya se han deducido en este libro. Las primeras siete son indispensables y el empleo frecuente de ellas las debe hacer fáciles de recordar cuando sea necesario. Los otros elementos de la tabla 9.1 también son importantes, pero no se presentan con tanta frecuencia. La tabla más detallada que

**Tabla 9.1** Algunas fórmulas elementales de integración

1.  $\int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1$
2.  $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$
3.  $\int \sin u du = -\cos u + c$
4.  $\int \cos u du = \sin u + c$
5.  $\int e^u du = e^u + c$
6.  $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c$
7.  $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c$
8.  $\int \sinh u du = \cosh u + c$
9.  $\int \cosh u du = \sinh u + c$
10.  $\int \sec^2 u du = \tan u + c$
11.  $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$
12.  $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arcsinh} u + c$
13.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcosh} u + c$

Nota: En cada fórmula  $u$  es función de  $x$  derivable.

aparece en las cubiertas interiores del libro es más que adecuada para un curso de cálculo y constituye una referencia para posibles empleos posteriores. Se pueden conseguir también conjuntos mucho más extensos de fórmulas de integración en diversos manuales de matemáticas.

En años recientes se han desarrollado varios paquetes de programas de cómputo para la computación simbólica que incluyen rutinas de integración. Los mejores determinan la integral indefinida de cualquier función cuya integral pueda expresarse en términos de las funciones elementales: algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, o bien indican que no existe alguna de las funciones de esos tipos. Estos programas son capaces de dar las integrales indefinidas de las funciones elementales que aparecen en una tabla estándar de integrales y de evaluar muchas integrales que no están en sus tablas. Son una ayuda tremenda para las personas que deben trabajar con frecuencia con integraciones complicadas.



A pesar de la disponibilidad de tablas de integrales y de paquetes de cómputo de integración simbólica, de todos modos vale la pena tener cierta destreza en las técnicas de integración más importantes. Para integrales relativamente sencillas podrá convenir y ser más rápido evaluar a mano el integrando mediante uno de los métodos de este capítulo, que buscar en una extensa tabla, o ir a la computadora y pedir los programas necesarios.

## 9.1 MÁS SOBRE EL TEMA DE SUSTITUCIÓN

En la sección 6.5 hicimos notar que a veces se pueden facilitar mucho las tareas de determinar una antiderivada, o de evaluar una integral definida, mediante una sustitución adecuada o un cambio de variable de la integración. Por ejemplo, supóngase que deseamos determinar

$$\int g(x) dx.$$

Según la descripción de la sección 6.5, podemos hacer  $u = u(x)$ , determinar  $du = u'(x) dx$  y tratar de escribir

$$g(x) dx = f[u(x)]u'(x) dx = f(u) du, \quad (1)$$

en la cual  $f$  tiene una antiderivada identificable. Si  $F$  es una antiderivada de  $f$ , entonces

$$\int g(x) dx = \int f(u) du = F(u) + k = F[u(x)] + k, \quad (2)$$

en la cual  $k$  es una constante arbitraria. Además, según el teorema 6.5.1,

$$\int_a^b g(x) dx = \int_c^d f(u) du = F(d) - F(c), \quad (3)$$

siempre que  $c = u(a)$ ,  $d = u(b)$  y que la ecuación (1) sea válida.

En la sección 6.5 estuvo algo restringido el empleo de las sustituciones, porque habíamos desarrollado, por entonces, relativamente pocas fórmulas de derivación y de integración. Ahora que tenemos mucho más fórmulas disponibles, es adecuado tratar algunos ejemplos más de sustituciones como medio de evaluar o de simplificar las integrales. Como hemos indicado antes, con frecuencia se sugiere una buena sustitución cuando el integrando tiene determinadas características. También ayuda el ser capaz de reconocer integrales que tengan soluciones elementales. Por esto, se aconseja mucho conocer al menos las fórmulas de integración de la tabla 9.1.

### EJEMPLO 1

Determinar

$$\int \tan ax \, dx, \quad (4)$$

donde  $a$  es una constante positiva.

Como esta integral no aparece en la tabla 9.1, primero debemos reformular el integrando para obtener una forma más cómoda. Como primer paso expresamos la tangente en términos de seno y coseno, esto es

$$\int \tan ax \, dx = \int \frac{\sen ax}{\cos ax} \, dx. \quad (5)$$

A continuación vemos que en el lado derecho de la ecuación 5 el numerador está relacionado con la derivada del denominador. Esto nos sugiere tratar de hacer una sustitución que nos permita emplear la fórmula 2 de la tabla 9.1. De acuerdo con ello, hacemos que  $u = \cos ax$ , y entonces  $du = -a \sen ax \, dx$ , y  $\sen ax \, dx = -du/a$ . Entonces el integrando se transforma en

$$\begin{aligned} \int \frac{\sen ax}{\cos ax} \, dx &= \int \frac{1}{u} \left( \frac{-du}{a} \right) = -\frac{1}{a} \int \frac{du}{u} \\ &= -\frac{1}{a} \ln|u| + c. \end{aligned}$$

Así

$$\int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| + c. \quad (6)$$

## EJEMPLO 2

Determinar

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 26}. \quad (7)$$

Al revisar la tabla 9.1 no encontramos ninguna integral que tenga esta forma; la más parecida es la fórmula 7, para la integral de  $(1 + u^2)^{-1}$ . Podemos reducir el integrando de la ecuación 7 a esa forma, completando el cuadrado y después empleando una sustitución. Observemos primero que

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 26 &= 2[x^2 - 4x + 13] = 2[x^2 - 4x + 4 + 9] \\ &= 2[(x - 2)^2 + 9] = 18 \left[ 1 + \left( \frac{x - 2}{3} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 26} = \frac{1}{18} \int \frac{dx}{[(x - 2)/3]^2 + 1}.$$

Ahora haremos que  $u = (x - 2)/3$ , por lo que  $du = dx/3$ , y  $dx = 3du$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 26} &= \frac{1}{6} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{6} \arctan u + c \\ &= \frac{1}{6} \arctan \frac{x - 2}{3} + c. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8)$$

Siguiendo el procedimiento del ejemplo 2 y empleando las integrales 6, 7, 12 y 13 de la tabla 9.1 podemos evaluar todas las integrales de las formas

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2 + \beta x + \delta} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \delta}} \quad (9)$$

excepto las que se reducen a

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}. \quad (10)$$

Las integrales que se pueden reducir a la forma (10) se pueden manejar mediante el método de fracciones parciales que describimos en la sección 9.6.

### EJEMPLO 3

Determinar

$$\int_0^1 \frac{5e^{2x}}{(1 + e^{2x})^{1/3}} dx. \quad (11)$$

Este ejemplo muestra el caso en el que una expresión está elevada a una potencia, especialmente a una potencia fraccionaria. En tales casos a veces ayuda emplear esta expresión como la base de una sustitución. Así, haremos que  $u = 1 + e^{2x}$ , de modo que  $du = 2e^{2x}$ , y  $5e^{2x}dx = 5 du/2$ . Además,  $u = 2$  cuando  $x = 0$  y  $u = 1 + e^2$  cuando  $x = 1$ . En consecuencia, según el teorema 6.5.1, la integral (11) se transforma en

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{5e^{2x}}{(1 + e^{2x})^{1/3}} dx &= \frac{5}{2} \int_2^{1+e^2} \frac{du}{u^{1/3}} = \frac{5}{2} \int_2^{1+e^2} u^{-1/3} du \\ &= \frac{15}{4} u^{2/3} \Big|_2^{1+e^2} \\ &= \frac{15}{4} [(1 + e^2)^{2/3} - (2)^{2/3}] \cong 9.53. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (12)$$



**EJEMPLO 4**

Determinar

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}. \quad (13)$$

Este ejemplo es algo semejante al ejemplo 2. El elemento de la tabla 9.1 que más se asemeja a la integral (13) es la fórmula 6. Como en el ejemplo 2, se llevará a cabo una manipulación preliminar seguida de una sustitución para reducir la integral de la ecuación 13 a la forma que se desea. Primero obsérvese que

$$\begin{aligned} 3 + 2x - x^2 &= 3 - (x^2 - 2x) \\ &= 3 - (x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= 4 - (x - 1)^2 = 4 \left[ 1 - \left( \frac{x - 1}{2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Así,

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1 - [(x - 1)/2]^2}}.$$

A continuación hacemos el cambio de variable  $u = (x - 1)/2$ , por lo que  $du = dx/2$  y  $du = 2du$ . Además, si  $x = 1$ , entonces  $u = 0$  y si  $x = 2$ , entonces  $u = \frac{1}{2}$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} &= \int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \\ &= \arcsen u \Big|_0^{1/2} = \arcsen \frac{1}{2} - \arcsen 0 \\ &= \frac{\pi}{6}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (14)$$

En cada uno de estos ejemplos hemos mostrado una sustitución adecuada. Sin embargo, en la práctica, y en especial con los integrandos algo complicados, no es raro que una sustitución no pueda simplificar mucho una integral. Sin embargo, si permanece uno alerta, hasta puede ayudar una sustitución aparentemente sin éxito, ya sea sugiriendo una mejor sustitución, o quizá otro método distinto de proceder. No hay que vacilar para probar una sustitución tan sólo porque no se pueda prever si tendrá éxito.

Además, téngase en mente que siempre se puede comprobar la respuesta que se obtuvo evaluando una integral indefinida. Tan sólo se deriva el resultado y se asegura que la derivada concuerde con el integrando original.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6, emplear la sustitución dada para evaluar la integral indefinida.

$$1. \int \frac{3x}{1+4x^2} dx, \quad u = 1 + 4x^2$$

$$2. \int \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad u = \sqrt{x}$$

$$3. \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx, \quad u = e^x$$

$$4. \int \frac{s}{\sqrt{3-4s^2}} ds, \quad u = 3 - 4s^2$$

$$5. \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx, \quad u = \ln x$$

$$6. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad u = 1 + \sqrt{x}$$

En los problemas 7 a 26 seleccionar una sustitución adecuada para evaluar la integral indefinida o definida que se da.

$$7. \int \cot x \, dx$$

$$8. \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$$

$$9. \int \frac{2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$10. \int_0^1 \cos \frac{\pi}{4}(x+3) dx$$

$$11. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}} dx$$

$$12. \int_0^2 3xe^{-x^2} dx$$

$$13. \int_1^3 \frac{x \, dx}{1+x}$$

$$14. \int \frac{s^3 \, ds}{2+3s^4}$$

$$15. \int \cosh \frac{x}{2} \sinh^4 \frac{x}{2} dx$$

$$16. \int_1^c \frac{\ln x^3}{x} dx, \quad c > 1$$

$$17. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

$$18. \int \frac{a \sin x}{b + k \cos x} dx, \quad a, b, k \neq 0$$

$$19. \int x^2(7+2x^3)^{1/3} dx$$

$$20. \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$21. \int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$$

$$22. \int \frac{x \, dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$23. \int \tanh 2x \, dx$$

$$24. \int e^x e^{e^x} dx$$

$$25. \int_0^2 x^3 \sqrt{x^2+4} \, dx$$

$$26. \int_4^7 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$$

En los problemas 27 a 34 determinar la integral dada.

$$27. \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

$$28. \int \frac{dx}{2x^2-12x+36}$$

$$29. \int \frac{4x+18}{x^2+4x+29} dx$$

$$30. \int \frac{3}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx$$

$$31. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+16x+17}}$$

$$32. \int \frac{dx}{x^2-8x+21}$$

$$33. \int_1^4 \frac{3 \, dx}{2x^2+8x+26}$$

$$34. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

\*35. Si  $f$  es una función continua, demostrar que

$$\int_0^\pi \phi f(\sin \phi) \, d\phi = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin \phi) \, d\phi.$$

Sugerencia: intentar el cambio de variable  $\phi = \pi - \theta$ .

## 9.2 INTEGRACIÓN POR PARTES

Una de las técnicas más importantes y útiles es la **integración por partes**. Esta técnica se basa en la fórmula de la derivada de un producto: si  $u$  y  $v$  son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (1)$$

Integrando la ecuación 1, y omitiendo la constante de integración, obtenemos

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx. \quad (2)$$

Se puede volver a escribir la ecuación 2 en la siguiente forma:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx \quad (3a)$$

o bien

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (3b)$$

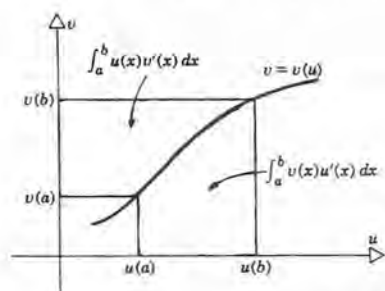
Las fórmulas para las integrales definidas que corresponden a las ecuaciones 3 son

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx \quad (4a)$$

o bien

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x) dx. \quad (4b)$$

En la figura 9.2.1 se muestra la interpretación geométrica de la ecuación 4(b).



**Figura 9.2.1**

También es posible expresar la relación de las ecuaciones 3 en términos de  $u$  y  $v$ . Como  $du = u'(x) dx$  y  $dv = v'(x) dx$ , entonces de acuerdo con las ecuaciones 3(a) o 3(b),

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5)$$

Ésta es la fórmula de la integración por partes que normalmente se recuerda. La importancia de las ecuaciones 3, 4 o 5 es que nos permiten expresar una integral en términos de otra. Es sorprendente la frecuencia con la que es posible arreglar que la



segunda integral sea más sencilla que la primera. En realidad, es parte del *folklore* de las matemáticas decir que si se tienen dudas, o que fallan otros métodos, se pruebe la integración por partes. A continuación mostraremos esta técnica mediante algunos ejemplos.

### EJEMPLO 1

Determinar

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx. \quad (6)$$

Para emplear la integración por partes debemos descomponer el integrando para seleccionar  $u$  y  $dv$ . En este problema hay dos selecciones naturales que podríamos hacer, que son  $u = x$ ,  $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ , o bien  $u = \operatorname{sen} x$ ,  $dv = x \, dx$ . Si hacemos que  $u = x$  y  $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ , entonces  $du = dx$  y  $v = -\cos x$ . Por consiguiente, conforme a la ecuación 5 obtenemos

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x \, dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_v - \int \underbrace{(-\cos x)}_v \underbrace{dx}_{du} = -x \cos x + \int \cos x \, dx,$$

de donde en forma inmediata se tiene que

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + c. \quad (7)$$

Por otro lado, si seleccionamos inicialmente  $u = \operatorname{sen} x$  y  $dv = x \, dx$ , entonces  $du = \cos x \, dx$  y  $v = x^2/2$ . En ese caso la ecuación 5 da

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

El resultado es correcto, pero no ayuda porque expresa a la integral original en términos de otra que es más complicada, y no más sencilla, que es de lo que se trata. ■

En el ejemplo 1 había dos posibilidades obvias para  $u$  y  $dv$ , una de las cuales es eficaz y la otra no. ¿Podemos ver antes cuál selección de  $u$  y  $dv$  es preferible? Obsérvese que el empleo de la integración por partes nos pide diferenciar el factor que hemos llamado  $u$  e integrar el factor que hemos llamado  $dv$ . En el ejemplo 1 no importa la diferencia que hay entre diferenciar o integrar a  $\operatorname{sen} x$ ; obtenemos ya sea  $\cos x$  o  $-\cos x$  en cualquier caso. Sin embargo, si se diferencia  $x$  se obtiene el resultado  $dx$ , que es más sencillo que el resultado  $x^2/2$ , obtenido al integrar a  $x$ . Es así que debíamos seleccionar  $u = x$  y  $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ , de tal modo que diferenciemos a  $x$  e integremos a  $\operatorname{sen} x$  más que proceder de la otra manera. Con frecuencia ayudan consideraciones como la anterior para seleccionar a  $u$  y  $dv$ .

Nótese también que al determinar a  $v$  a partir de  $dv$  omitimos normalmente la constante de integración. Esto se debe a que en general nos interesa obtener la forma más sencilla posible para  $v$ , y no la más general. Sin embargo, a veces se podrá desear asignar un valor no cero a la constante de integración (véanse problemas 41 a 43).

## EJEMPLO 2

Determinar

$$\int x e^{ax} dx. \quad (8)$$

Como en el ejemplo 1, es mejor diferenciar a  $x$ , y no integrarlo. Así, para la integral (8) seleccionaremos a  $u = x$  y a  $dv = e^{ax} dx$ ; entonces  $du = dx$  y  $v = (1/a) e^{ax}$ . Por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_u \underbrace{e^{ax} dx}_{dv} &= \underbrace{x}_u \underbrace{\left(\frac{1}{a} e^{ax}\right)}_v - \int \underbrace{\frac{1}{a} e^{ax}}_v \underbrace{dx}_{du} \\ &= \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + c, \end{aligned}$$

o bien

$$\int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} e^{ax}(ax - 1) + c. \quad (9)$$

## EJEMPLO 3

Determinar

$$\int x^n e^{ax} dx, \quad n \text{ entero positivo} \quad (10)$$

De acuerdo con nuestra experiencia en el ejemplo 2, probaremos con  $u = x^n$ ,  $dv = e^{ax} dx$ ; así,  $du = nx^{n-1} dx$ ,  $v = (1/a)e^{ax}$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int x^n e^{ax} dx &= x^n \frac{1}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} nx^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Se puede determinar la integral del lado derecho de la ecuación 11 reemplazando a  $n$  por  $n - 1$  en la fórmula que acabamos de deducir. La ecuación 11 es un ejemplo de una **fórmula de reducción**. La integral original se determina mediante el empleo repetido de la fórmula de reducción. Por ejemplo, para  $n = 3$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{ax} dx &= \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \frac{3}{a} \int x^2 e^{ax} dx \\&= \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \frac{3}{a} \left[ \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \int x e^{ax} dx \right] \\&= \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \frac{3}{a^2} x^2 e^{ax} + \frac{6}{a^2} \left[ \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} \right] + c \\&= \frac{1}{a} x^3 e^{ax} - \frac{3}{a^2} x^2 e^{ax} + \frac{6}{a^3} x e^{ax} - \frac{6}{a^4} e^{ax} + c. \blacksquare\end{aligned}\quad (12)$$

#### EJEMPLO 4

Determinar

$$\int_0^{1/2} \arcsen x \, dx. \quad (13)$$

Esta vez el integrando es una función para la que no reconocemos antiderivada alguna, pero para la cual sí conocemos la derivada. Por tanto, haremos que  $u = \arcsen x$ ,  $dv = dx$ . Entonces  $du = (1 - x^2)^{-1/2} dx$ ,  $v = x$ . Por consiguiente

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \arcsen x \, dx &= (\arcsen x)x \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.\end{aligned}$$

La última integral se puede evaluar efectuando el cambio de variable  $w = 1 - x^2$ , o por inspección. El resultado es

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \arcsen x \, dx &= \frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\&\cong 0.1278. \blacksquare\end{aligned}\quad (14)$$

#### EJEMPLO 5

Determinar



$$\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx. \quad (15)$$

En este caso no hay diferencia entre escoger que  $u$  sea  $e^{-x}$  o que sea  $\operatorname{sen} 2x$ , porque en ambos casos la selección funciona bastante bien. Supongamos que hacemos que  $u = e^{-x}$  y que  $dv = \operatorname{sen} 2x \, dx$ . Entonces  $du = -e^{-x} \, dx$  y  $v = -(\cos 2x)/2$ . Por tanto

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x \, dx. \quad (16)$$

Obsérvese que la integral que queda del lado derecho de la ecuación 16 es diferente de la de la ecuación 15, pero su dificultad es parecida y, por tanto, parece que la integración por partes no nos ayudó en este caso. Sin embargo, probaremos el proceso una vez más, haciendo que  $u = e^{-x}$  y que  $dv = \cos 2x \, dx$ ; entonces  $du = -e^{-x} \, dx$  y  $v = (\operatorname{sen} 2x)/2$ . Empleando la fórmula (5) de la integración por partes en la última integral de la ecuación 16, obtenemos

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx &= -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{4} e^{-x} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4} \int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx. \end{aligned} \quad (17)$$

La integral que queda del lado derecho de la ecuación 17 es la misma que la del lado izquierdo; por lo que podemos despejarla de la ecuación 17 para obtener el resultado que se desea:

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{2e^{-x} \cos 2x + e^{-x} \operatorname{sen} 2x}{5} + c; \quad (18)$$

nótese que hemos agregado una constante arbitraria de integración en la ecuación 18. ■

El procedimiento del ejemplo 5 se puede emplear para evaluar cualquier integral de la forma

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx \quad \text{o} \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx, \quad (19)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Si bien se puede seleccionar en forma inicial que  $u$  sea la exponencial o el factor trigonométrico del integrando, es esencial, como en el ejemplo 5, que se haga también la misma selección cuando se use la integración por partes la segunda vez; si no es así, no se obtendrá resultado útil.

## EJEMPLO 6

Determinar

$$\int x^3 e^{-x^2} dx. \quad (20)$$

Para este ejemplo no es obvia la selección de  $u$  y  $dv$ , al menos de inmediato. Una primera selección obvia es  $u = x^3$  y  $dv = e^{-x} dx$ , de modo que  $du = 3x^2 dx$  y entonces  $u = 3x^2 dx$ , pero no podemos calcular  $v$ . Si recordamos que  $d(e^{-x^2})/dx = 2xe^{-x^2}$ , esto sugiere la agrupación

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 (xe^{-x^2}) dx.$$

Podemos ahora hacer que  $u = x^2$ ,  $dv = xe^{-x^2}$ , de manera que  $du = 2x dx$ ,  $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-x^2} dx &= x^2 \left( -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) - \int \left( -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + c \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + c. \blacksquare \end{aligned} \quad (21)$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 24 determinar la integral definida o indefinida dada.

1.  $\int x \cos x \, dx$

2.  $\int x e^{2x} \, dx$

15.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \, dx$

16.  $\int x(\ln x)^3 \, dx$

3.  $\int x^2 \sin \pi x \, dx$

4.  $\int e^{2x} \cos x \, dx$

17.  $\int x 2^x \, dx$

18.  $\int x^2 \ln x \, dx$

5.  $\int_0^{1/2} x \sin \pi x \, dx$

6.  $\int_0^1 x e^{-x} \, dx$

19.  $\int_1^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

20.  $\int x(x+10)^{50} \, dx$

7.  $\int_0^{\pi/2} e^x \sin 2x \, dx$

8.  $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$

21.  $\int_0^1 x \ln(9+x^2) \, dx$

22.  $\int \cos \sqrt{x} \, dx$

9.  $\int_0^2 x^2 e^{-x} \, dx$

10.  $\int \ln x \, dx$

23.  $\int x^3(x^3-1)^{1/2} \, dx$

24.  $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

11.  $\int \arctan x \, dx$

12.  $\int x \ln x \, dx$

En los problemas 25 a 34 deducir la fórmula dada de integración.

13.  $\int \sin(\ln x) \, dx$

14.  $\int (\ln x)^2 \, dx$

25.  $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + c$

## 516 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

$$26. \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + c$$

$$27. \int x^p \ln x \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln x - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} + c, \quad p \neq -1$$

$$28. \int x^p (\ln x)^2 \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} (\ln x)^2 - \frac{2x^{p+1}}{(p+1)^2} \ln x + \frac{2x^{p+1}}{(p+1)^3} + c, \quad p \neq -1$$

$$29. \int x^m \sin ax \, dx = -\frac{x^m \cos ax}{a} + \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cos ax \, dx$$

$$30. \int x^m \cos ax \, dx = \frac{x^m \sin ax}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \sin ax \, dx$$

$$31. \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

$$32. \int \sin^n ax \, dx = \frac{-\cos ax \sin^{n-1} ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax \, dx$$

$$33. \int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$$

$$34. \int (a^2 - x^2)^n \, dx = x(a^2 - x^2)^n + 2n \int x^2(a^2 - x^2)^{n-1} \, dx$$

35. Emplear los resultados de los problemas 29 y 30 para demostrar que

$$\int x^2 \sin 3x \, dx = -\frac{x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2x \sin 3x}{9} + \frac{2 \cos 3x}{27} + c$$

36. Emplear el resultado del problema 31 para demostrar que

$$\int x^4 e^{2x} \, dx = \left( \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4} \right) e^{2x} + c.$$

37. Emplear los resultados de los problemas 29 y 30 para demostrar que

$$\int_0^\pi x^3 \sin x \, dx = \pi^3 - 6\pi.$$

38. Evaluar  $\int x^3(1-x^2)^n dx$ , en la cual  $n$  es un entero positivo arbitrario.

39. Emplear el resultado del problema 32 para demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

40. Si  $f''$  y  $g''$  son continuas, y si  $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ , demostrar que

$$\int_a^b f(x)g''(x) \, dx = \int_a^b f''(x)g(x) \, dx.$$

Los problemas 41 a 43 muestran que a veces mediante una selección adecuada de la constante de integración para seleccionar a  $v$  se pueden simplificar los cálculos o se puede deducir alguna fórmula menos compleja.

41. Considerar

$$\int \ln(x+1) \, dx.$$

(a) Evaluar esta integral seleccionando  $u = \ln(x+1)$ ,  $dv = dx$  y  $v = x$ .

(b) Determinar esa integral seleccionando  $u = \ln(x+1)$ ,  $dv = dx$  siendo  $v = x+1$ , que difiere de la  $v$  de la parte (a) por una constante. También, obsérvese que se puede simplificar el problema introduciendo primero el cambio de variable  $s = x+1$  y a continuación aplicando la integración por partes.

42. Demostrar que

$$\int x \arctan x \, dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x + c.$$

Si  $dv = x \, dx$ , entonces  $v = x^2/2 + C$ . Mediante una selección adecuada de  $C$  el cálculo se hace especialmente sencillo. Nótese que si se toma a  $C$  como cero, entonces el cálculo todavía se puede llevar a cabo observando que

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$



\*43. Partiendo de la identidad

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt,$$

deducir las siguientes generalizaciones del teorema del valor medio:

$$(a) f(b) - f(a)$$

$$= f'(a)(b - a) - \int_a^b f''(t)(t - b) dt,$$

$$(b) f(b) - f(a) = f'(a)(b - a)$$

$$+ \frac{f''(a)}{2}(b - a)^2 + \int_a^b \frac{f'''(t)}{2}(t - b)^2 dt.$$

\*44. Si  $y = f(x)$  tiene la función inversa  $x = f^{-1}(y)$ , demostrar que

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y) dy = bf(b) - af(a).$$

Esta relación nos permite seleccionar cualquiera de las dos integrales que sea más fácil de evaluar.

45. Supóngase que deseamos calcular la integral indefinida de  $e^{2x}(2 \sin 3x + 6 \cos 3x)$ . Al reflexionar acerca de cuál tipo de funciones tienen derivadas  $e^{2x} \sin 3x$  y  $e^{2x} \cos 3x$ , es razonable suponer que

$$\begin{aligned} \int e^{2x}(2 \sin 3x + 6 \cos 3x) dx \\ = Ae^{2x} \sin 3x + Be^{2x} \cos 3x + c, \end{aligned}$$

en la cual las constantes  $A$  y  $B$  se deben determinar y  $c$  es una constante arbitraria. Al derivar ambos lados de esta ecuación, demostrar que  $A = \frac{22}{13}$  y  $B = \frac{6}{13}$ .

## 9.3 INTEGRALES DONDE INTERVIENEN SENOS Y COSENOS

En esta sección estudiaremos técnicas para evaluar las integrales de algunas combinaciones de senos y cosenos.

**$\int \sin^m x \cos^n x dx$ , donde  $m$  o  $n$  es entero positivo impar**

Supongamos que  $n$  es un entero positivo impar. Si  $n = 1$ , tenemos que

$$\int \sin^m x \cos x dx. \quad (1)$$

Se puede evaluar esta integral haciendo que  $u = \sin x$ , por lo que  $du = \cos x dx$ , y

$$\int \sin^m x \cos x dx = \int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + c, \quad m \neq -1. \quad (2)$$

Nótese que si  $m = -1$ , entonces el integrando es  $\cot x$  y la integral se debe determinar mediante otro método.

Para  $n = 3$ , reformulamos primero el integrando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^3 x dx &= \int \sin^m x \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x) \cos x dx. \end{aligned}$$

A continuación hacemos que  $u = \sin x$ , de manera que  $du = \cos x dx$  y

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^m x \cos^3 x \, dx &= \int u^m (1 - u^2) \, du \\
 &= \frac{u^{m+1}}{m+1} - \frac{u^{m+3}}{m+3} + c \\
 &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} - \frac{\operatorname{sen}^{m+3} x}{m+3} + c, \quad m \neq -1, -3. \quad (3)
 \end{aligned}$$

De nuevo, si  $m = -1$  ó  $m = -3$ , la integral se debe manejar de modo distinto.

En general, cuando  $n$  es un entero positivo impar, podemos escribir  $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$ , donde  $n-1$  es un entero par o cero. Podemos entonces hacer que  $n-1 = 2k$ , donde  $k$  es un entero positivo o cero. Por tanto

$$\begin{aligned}
 \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx &= \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-1} x \cos x \, dx \\
 &= \int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k} x \cos x \, dx \\
 &= \int \operatorname{sen}^m x (\cos^2 x)^k \cos x \, dx \\
 &= \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx.
 \end{aligned}$$

A continuación, hacemos que  $u = \operatorname{sen} x$ , por lo que  $du = \cos x \, dx$ . Entonces

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = \int u^m (1 - u^2)^k \, du. \quad (4)$$

La integral del lado derecho de la ecuación 4 se puede evaluar con facilidad para valores específicos de  $m$  y  $k = (n-1)/2$  mediante el teorema del binomio, desarrollando  $(1 - u^2)^k$ . Obsérvese que  $m$  no necesita ser un entero positivo.

Si  $m$  es un entero positivo y  $n$  no lo es, entonces el procedimiento es el mismo que acabamos de describir y los papeles de  $\operatorname{sen}$  y de  $\cos$  se intercambian. Esto se muestra en el ejemplo 1. Si tanto  $m$  como  $n$  son enteros impares positivos, podemos proceder en cualquiera de las maneras descritas.

## EJEMPLO 1

Determinar

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx.$$

Para esta integral,  $m = 3$  y  $n = 0$ . Primero escribiremos

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx,$$

A continuación hacemos que  $u = \cos x$  y por tanto  $du = -\sin x \, dx$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int (1 - u^2)(-du) \\ &= -\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + c \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c. \blacksquare \end{aligned} \quad (5)$$

## EJEMPLO 2

Determinar

$$\int \sin^{1/2} x \cos^3 x \, dx.$$

Para esta integral,  $m = \frac{1}{2}$  y  $n = 3$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \int \sin^{1/2} x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^{1/2} x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^{1/2} x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx. \end{aligned}$$

A continuación hacemos que  $u = \sin x$  por lo que  $du = \cos x \, dx$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int \sin^{1/2} x \cos^3 x \, dx &= \int u^{1/2} (1 - u^2) \, du \\ &= \int (u^{1/2} - u^{5/2}) \, du \\ &= \frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{7/2}}{7/2} + c \\ &= \frac{2}{3} \sin^{3/2} x - \frac{2}{7} \sin^{7/2} x + c. \blacksquare \end{aligned} \quad (6)$$

**$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos o cero**

En este caso se puede simplificar el integrando si se emplean las identidades trigonométricas para la mitad del ángulo:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad (7)$$

Por ejemplo,

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c, \quad (8)$$



$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c. \quad (9)$$

Se podría necesitar el empleo de las identidades 7 varias veces. El procedimiento se muestra en los dos ejemplos siguientes.

### EJEMPLO 3

Determinar

$$\int \cos^4 x \, dx.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx \\ &= \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx. \end{aligned}$$

Sabemos cómo integrar los dos primeros términos. Para el término  $\cos^2 2x$  empleamos de nuevo la fórmula para la mitad del ángulo para obtener

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right] + c \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (10)$$

### EJEMPLO 4

Determinar

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

Tenemos

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) dx.
\end{aligned}$$

Para el término  $\cos^2 2x$  de nuevo usaremos la fórmula para la mitad del ángulo; para el término  $\cos^3 2x$  procederemos como en el ejemplo 2, porque tenemos una potencia impar del coseno. De este modo tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{8} \int \left[ 1 - \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right] dx \\
&\quad + \frac{1}{8} \int (\cos^2 2x) \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{2} - \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx.
\end{aligned}$$

En la última integral hacemos la sustitución  $u = \sin 2x$ ,  $du = 2 \cos 2x dx$ . Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{8} \left( \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} \right) + \frac{1}{8} \int (1 - u^2) \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \left( u - \frac{u^3}{3} \right) + c \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x \\
&\quad + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c \\
&= \frac{1}{16} \left( x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \right) + c. \quad \blacksquare \quad (11)
\end{aligned}$$

La tabla 9.2 resume los resultados que se han obtenido hasta ahora en esta sección.

### Integrales de productos de senos o cosenos de ángulos distintos

Una integral que tenga una de las siguientes formas

**Tabla 9.2** Evaluación de  $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ 

Integrando	Estrategia	Identidad adecuada
$m$ entero impar positivo; $n$ arbitrario	Hacer $u = \cos x$ $du = -\sin x \, dx$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$n$ entero impar positivo; $m$ arbitrario	Hacer $u = \sin x$ $du = \cos x \, dx$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$m$ y $n$ enteros pares no negativos	Reducir exponentes	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx, \int \sin ax \sin bx \, dx, \int \cos ax \cos bx \, dx,$$

se puede determinar con facilidad empleando una de las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a - b)x + \sin(a + b)x], \quad (12a)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a - b)x - \cos(a + b)x], \quad (12b)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a - b)x + \cos(a + b)x], \quad (12c)$$

Estas identidades se pueden deducir con facilidad mediante las combinaciones adecuadas de las fórmulas para la suma y la diferencia del coseno y del seno:

$$\cos(a \pm b)x = \cos ax \cos bx \mp \sin ax \sin bx, \quad (13a)$$

$$\sin(a \pm b)x = \sin ax \cos bx \pm \cos ax \sin bx. \quad (13b)$$

Por ejemplo, si sumamos las fórmulas de  $\cos(a \pm b)x$  se obtiene la fórmula 12c.

### EJEMPLO 5

Determinar

$$\int \cos x \cos 2x \, dx \quad \text{y} \quad \int \sin 3x \cos 2x \, dx.$$

Al emplear la fórmula (12c) con  $a = 1$  y  $b = 2$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos 2x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\cos(-x) + \cos 3x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 3x) \, dx \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{6} \operatorname{sen} 3x + c. \quad (14)$$

Igualmente, al emplear la fórmula (12a) con  $a = 3$  y  $b = 2$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx &= \int \frac{1}{2} [\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x] \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + c. \blacksquare \quad (15) \end{aligned}$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 24 determinar la integral indefinida o definida que se indica.

1.  $\int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta \, d\theta$
2.  $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$
3.  $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$
4.  $\int \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$
5.  $\int \cos^{1/3} x \operatorname{sen}^3 x \, dx$
6.  $\int \cos^5 x \, dx$
7.  $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \, dx$
8.  $\int \operatorname{sen}^6 x \, dx$
9.  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \operatorname{sen}^3 x \, dx$
10.  $\int_0^{\pi} \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx$
11.  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} \, dx$
12.  $\int \cos^{-4} x \operatorname{sen}^3 x \, dx$
13.  $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 x \, dx$
14.  $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^5 3x \, dx$
15.  $\int \operatorname{sen}^{-2} x \cos^3 x \, dx$
16.  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 4x \cos 2x \, dx$
17.  $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x \, dx$
18.  $\int_0^{1/2} \cos \pi x \cos \frac{\pi}{2} x \, dx$
19.  $\int (\cos 4x - \cos 2x)^2 \, dx$
20.  $\int \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x \, dx$

$$21. \int \cos 3x \operatorname{sen} 2x \, dx \quad 22. \int \cos 3x \cos 5x \, dx$$

$$23. \int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6x \, dx$$

$$24. \int \operatorname{sen} x \cos 3x \operatorname{sen} 5x \, dx$$

25. Evaluar  $\int x^3(1 - x^2)^n dx$  en la que  $n$  es un entero positivo arbitrario. Emplear la sustitución  $x = \operatorname{sen} u$ . Comparar el resultado con el del problema 38 en la sección 9.2.

26. Determinar el volumen del sólido que se forma al girar el área entre la curva  $y = \operatorname{sen} x$  y el eje  $x$  para  $0 \leq x \leq \pi$ , alrededor del eje  $x$ .

27. Determinar el volumen del sólido que se forma al girar el área comprendida entre las curvas  $y = \cos x$  y  $y = \operatorname{sen} x$  para  $0 \leq x \leq \pi/4$  alrededor del eje  $x$ .

### Algunas propiedades de la cicloide

Las ecuaciones paramétricas de la cicloide (véase ejemplo 6 de la sección 5.5) son:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta).$$

28. Determinar el área de la región comprendida entre el eje  $x$  y un arco de la cicloide.
29. Determinar el volumen del sólido que se forma al hacer girar la región del problema 28 alrededor del eje  $x$ .
30. Determinar la longitud de un arco de la cicloide.
31. Determinar el área de la superficie del sólido que se describe en el problema 29.

32. Deducir las siguientes fórmulas de integración:

$$(a) \int \sin ax \cos bx \, dx = \frac{\cos(b-a)x}{2(b-a)} - \frac{\cos(b+a)x}{2(b+a)}, \quad b^2 \neq a^2.$$

$$(b) \int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad b^2 \neq a^2.$$

$$(c) \int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}, \quad b^2 \neq a^2.$$

33. Deducir las siguientes fórmulas de integración, donde  $m$  y  $n$  son enteros cualesquiera, pero diferentes de cero.

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0.$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

Estas relaciones se conocen como las propiedades de ortogonalidad de los senos y de los cosenos. Son importantes en el análisis de Fourier, en el que se estudia la posibilidad de expresar a una función periódica arbitraria como una suma de senos y de cosenos.

## 9.4 INTEGRALES DONDE INTERVIENEN OTRAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se pueden emplear técnicas semejantes a las que se usaron en la sección 9.3 para evaluar las integrales de otras funciones trigonométricas. En particular, para integrandos donde interviene  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  con frecuencia es conveniente emplear las identidades

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1 \quad \text{y} \quad \csc^2 x - \cot^2 x = 1 \quad (1)$$

y recordar las fórmulas de derivación

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \sec^2 x, & (\sec x)' &= \sec x \tan x, \\ (\cot x)' &= -\csc^2 x, & (\csc x)' &= -\csc x \cot x. \end{aligned} \quad (2)$$

**$\int \tan^n x \, dx$  y  $\int \cot^n x \, dx$ , donde  $n$  es un entero positivo**

Sólo estudiaremos  $\int \tan^n x \, dx$ ; la determinación de  $\int \cot^n x \, dx$  es semejante. Para  $n = 1$  sabemos (ejemplo 1, sección 9.1) que  $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$ . Así suponemos que  $n \geq 2$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int \tan^n x \, dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x \, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, dx - \int \tan^{n-2} x \, dx. \end{aligned}$$

En la primera integral hacemos que  $u = \tan x$ , por lo que  $du = \sec^2 x \, dx$  y con ello obtenemos

$$\begin{aligned}\int \tan^n x \, dx &= \int u^{n-2} \, du - \int \tan^{n-2} x \, dx \\ &= \frac{u^{n-1}}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx\end{aligned}$$

o sea

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2. \quad (3)$$

Mediante la aplicación repetida de la fórmula de reducción (3) se obtiene al final la integral  $\int \tan x \, dx$  si  $n$  es impar, o bien la integral  $\int \tan^0 x \, dx = \int dx$  si  $n$  es par. Así se puede evaluar la integral  $\int \tan^n x \, dx$  para cualquier entero positivo  $n$ .

La fórmula de reducción correspondiente para  $\cot^n x$ , que se deja como ejercicio, es

$$\int \cot^n x \, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2. \quad (4)$$

En lugar de memorizar las fórmulas de reducción (3) y (4), se aconseja al lector recordar *el método* para integrar potencias enteras de  $\tan x$  y  $\cot x$ .

### EJEMPLO 1

Determinar

$$\int \tan^3 x \, dx.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \, dx &= \int \tan x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x \, dx - \int \tan x \, dx.\end{aligned}$$

En la primera integral hacemos que  $u = \tan x$  y por tanto  $du = \sec^2 x \, dx$ . Conocemos la respuesta en el caso de la segunda integral. Así, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \, dx &= \int u \, du + \ln|\cos x| \\ &= \frac{1}{2} u^2 + \ln|\cos x| + c \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + c. \quad \blacksquare\end{aligned} \quad (5)$$



**$\int \sec^n x \, dx$  y  $\int \csc^n x \, dx$ , donde  $n$  es un entero positivo**

Sólo estudiaremos la determinación de  $\int \sec^n x \, dx$ ; la de  $\int \csc^n x \, dx$  es semejante. Primero, debemos cuidar el caso de  $n = 1$ , esto es, debemos determinar  $\int \sec x \, dx$ . Parece no haber un método obvio\* para evaluar esta integral; los diversos modos de deducir el resultado dependen de determinado procedimiento matemático que al principio podrá parecer oscuro. Una manera de proceder consiste en multiplicar y dividir el integrando por  $\sec x + \tan x$ . Con esto se obtiene

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx \\ &= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} \, dx.\end{aligned}$$

A continuación hacemos que  $u = \sec x + \tan x$ , por lo que  $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx$ . Entonces

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + c.\end{aligned}\tag{6}$$

Para  $n > 1$  veremos los casos en que  $n$  es par e impar por separado. Si  $n$  es par, sea  $n = 2k$  y se tiene que  $\sec^n x \, dx = \sec^{2k-2} x \sec^2 x \, dx$ ; con esto se obtiene

$$\begin{aligned}\int \sec^n x \, dx &= \int \sec^{2k-2} x \sec^2 x \, dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^{(2k-2)/2} \sec^2 x \, dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx.\end{aligned}$$

Nótese que como  $n$  es par y  $n > 1$ , se sigue que  $k - 1$  es cero o un entero positivo. Si hacemos que  $u = \tan x$ , entonces  $du = \sec^2 x \, dx$ , y obtenemos

$$\int \sec^n x \, dx = \int (1 + u^2)^{k-1} \, du,\tag{7}$$

que se puede integrar con facilidad para un valor dado de  $k$  mediante el teorema del binomio.

Cuando  $n$  es número impar mayor que uno, empleamos la integración por partes para obtener una fórmula de reducción:

---

\* Una narración de la historia de  $\int \sec x \, dx$  y de su relación con la navegación y la cartografía la presentan V. Frederick Rickey y Philip Tuchinsky en "An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant" (Aplicación de la geografía a las matemáticas; historia de la integral de la secante), *Mathematics Magazine*, 53, 1980, Págs. 162-166.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^n x \, dx &= \int \underbrace{\sec^{n-2} x}_u \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{dv} \\
 &= \sec^{n-2} x \tan x - \int (n-2) \sec^{n-3} x \sec x \tan x \tan x \, dx \\
 &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x \, dx.
 \end{aligned}$$

En la última integral escribimos  $\tan^2 x$  en términos de  $\sec^2 x$  y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int \sec^n x \, dx &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
 &= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x \, dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx.
 \end{aligned}$$

Al despejar  $\int \sec^n x \, dx$  de esta ecuación, obtenemos la fórmula

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx, \quad n > 1. \quad (8)$$

La fórmula de reducción (8) es válida para cualquier entero  $n > 1$ ; sin embargo, si  $n$  es par, probablemente sea más fácil emplear la fórmula (7).

Los resultados correspondientes para  $\int \csc^n x \, dx$  son

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c, \quad (9)$$

y

$$\int \csc^n x \, dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x \, dx. \quad (10)$$

Nuevamente, es mejor estudiar el método que memorizar las fórmulas (8) y (10).

## EJEMPLO 2

Determinar

$$\int \sec^4 x \, dx.$$

Mostraremos el empleo de la ecuación 7 para  $n = 4$ . El resultado es

$$\begin{aligned}
 \int \sec^4 x \, dx &= \int (1 + u^2) \, du, \quad u = \tan x \\
 &= u + \frac{1}{3} u^3 + c \\
 &= \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + c. \blacksquare
 \end{aligned} \quad (11)$$

### $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ y $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$

De nuevo, sólo consideraremos la primera integral; el caso es semejante para la segunda. Debemos distinguir varios casos que dependen de los valores de  $m$  y  $n$ . Describiremos el procedimiento que se va a usar y lo ejemplificaremos, pero no deduciremos las fórmulas generales.

$n$  es un entero par,  $m$  es arbitraria y no necesariamente un entero. En este caso asociamos una  $\sec^2 x$  con  $dx$ , expresamos el resto del integrando en términos de  $\tan x$  y hacemos que  $u = \tan x$ . Así

$$\begin{aligned} \int \tan^m x \sec^n x \, dx &= \int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^m x (1 + \tan^2 x)^{(n-2)/2} \sec^2 x \, dx \\ &= \int u^m (1 + u^2)^{(n-2)/2} du, \quad u = \tan x, \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $(n - 2)/2$  es cero o un entero positivo.

### EJEMPLO 3

Determinar  $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$ .

Primeramente escribimos

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx. \end{aligned}$$

A continuación hacemos que  $u = \tan x$ , con lo cual  $du = \sec^2 x \, dx$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec^4 x \, dx &= \int u^2 (1 + u^2) \, du \\ &= \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + c \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + c. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (13)$$

$m$  es un entero impar,  $n$  es arbitraria y no necesariamente es un entero. En este caso asociamos a  $\tan x \sec x$  con  $dx$ , expresamos el resto del integrando en términos de  $\sec x$  y hacemos que  $u = \sec x$ . Entonces

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx = \int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x (\tan x \sec x) \, dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int (\sec^2 x - 1)^{(m-1)/2} \sec^{n-1} x (\tan x \sec x) dx \\
&= \int (u^2 - 1)^{(m-1)/2} u^{n-1} du, \quad u = \sec x, \quad (14)
\end{aligned}$$

en la cual  $m - 1$  y  $n - 1$  son enteros positivos o cero.

#### EJEMPLO 4

Determinar  $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$ .

Primero reformulamos la integral:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x (\tan x \sec x) dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x (\tan x \sec x) dx.
\end{aligned}$$

A continuación hacemos que  $u = \sec x$  y por tanto  $du = \tan x \sec x dx$ . Encontramos que

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^3 x dx &= \int (u^2 - 1)^2 u^2 du \\
&= \int (u^6 - 2u^4 + u^2) du \\
&= \frac{1}{7} u^7 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + c \\
&= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + c. \quad (15)
\end{aligned}$$

*n es impar y m es par.* Expresamos al integrando completamente en términos de  $\sec x$  y empleamos la fórmula de reducción (8). Tenemos que

$$\int \tan^m x \sec^n x dx = \int (\sec^2 x - 1)^{m/2} \sec^n x dx. \quad (16)$$

Como  $m/2$  es un entero, el integrando es un polinomio en  $\sec x$ ; se puede determinar mediante métodos que se describieron antes.

#### EJEMPLO 5

Determinar  $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$ .

Primero escribimos

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x \, dx \\ &= \int (\sec^5 x - \sec^3 x) \, dx.\end{aligned}$$

A continuación empleamos la fórmula de reducción (8) para obtener

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^3 x \, dx &= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4} \int \sec^3 x \, dx - \int \sec^3 x \, dx \\ &= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{1}{4} \left[ \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx \right] \\ &= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{\sec x \tan x}{8} - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \tan x| + c. \blacksquare\end{aligned}\tag{17}$$

En la tabla 9.3 se resumen algunos de los resultados que se han obtenido en esta sección.

**Tabla 9.3** Evaluación de  $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

Integrando	Estrategia	Identidad adecuada
$n$ entero par positivo; $m$ arbitrario	Agrupar $\sec^2 x$ con $dx$ ; Hacer $u = \tan x$ $du = \sec^2 x \, dx$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$m$ entero impar positivo $n$ arbitrario	Agrupar $\sec x \tan x$ con $dx$ ; hacer $u = \sec x$ $du = \sec x \tan x \, dx$	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
$m$ entero par no negativo $n$ entero impar positivo	Expresar el integrando por completo en términos de $\sec x$ ; emplear la fórmula de reducción (8)	$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 18 determinar la integral dada.

- $\int \sec ax \, dx$
- $\int \tan^2 (3x - 2) \, dx$
- $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$
- $\int \sec^3 2x \, dx$
- $\int \tan^4 x \, dx$
- $\int \tan^4 x \sec x \, dx$
- $\int \tan^3 2x \sec^3 2x \, dx$
- $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$
- $\int \tan x \sec^5 x \, dx$
- $\int \tan^3 \pi x \sec^2 \pi x \, dx$

- $\int \cot^5 x \csc^3 x \, dx$
- $\int \cot^2 x \csc^4 x \, dx$
- $\int \cot^2 x \csc x \, dx$
- $\int \cot^4 x \csc^4 x \, dx$
- $\int \tan^{1/2} x \sec^4 x \, dx$
- $\int \tan^{-2} x \sec^6 x \, dx$
- $\int \tan^3 x \sec^{1/2} x \, dx$
- $\int \tan^5 x \sec^{-3} x \, dx$
- A partir de la relación  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ , demostrar que

$$\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x},$$

y por tanto que

$$\sec x = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Emplear el último resultado para evaluar  $\int \sec x \, dx$ .

20. (a) Demostrar que

$$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

de manera semejante a la deducción de la ecuación 6 del texto.

(b) Determinar  $\int \csc x \, dx$  de manera semejante a la del problema 19.

21. Deducir la fórmula de reducción

$$\begin{aligned} \int \cot^n x \, dx \\ = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

En los problemas 22 a 25, emplear la fórmula de reducción del problema 21 para determinar la integral dada.

$$22. \int \cot^2 x \, dx$$

$$23. \int \cot^3 x \, dx$$

$$24. \int \cot^4 x \, dx$$

$$25. \int \cot^5 x \, dx$$

26. Demostrar que

$$\begin{aligned} \int \csc^n x \, dx \\ = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x \, dx + c. \end{aligned}$$

En los problemas 27 a 29, emplear las fórmulas de los problemas 20 a 26 para evaluar la integral dada.

$$27. \int \csc^3 x \, dx$$

$$28. \int \csc^4 x \, dx$$

$$29. \int \csc^5 x \, dx$$

En los problemas 30 y 31 emplear la fórmula para la mitad del ángulo y evaluar la integral respectiva.

$$30. \int \frac{d\theta}{1 + \cos \theta}$$

$$31. \int \frac{d\theta}{1 - \cos \theta}$$

## 9.5 SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si el integrando contiene  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + x^2}$ , o  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , donde  $a > 0$ , con frecuencia es útil llevar a cabo una sustitución trigonométrica. Describiremos estos tres casos.

### Integrales que contienen $\sqrt{a^2 - x^2}$

Como ejemplos de estas integrales tenemos las siguientes:

$$\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2 \, dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Está implícito en el radical  $\sqrt{a^2 - x^2}$  que  $-a \leq x \leq a$  o en algunos casos que  $-a < x < a$ , como en la segunda integral de la ecuación 1. Desde luego, se puede restringir a  $x$  a un intervalo más pequeño, pero en todo caso  $|x|$  no puede ser mayor que  $a$ , porque entonces  $\sqrt{a^2 - x^2}$  sería imaginaria.

El principal obstáculo para evaluar integrales como las de la ecuación 1 es la presencia del radical  $\sqrt{a^2 - x^2}$  en el integrando. De acuerdo con ello, buscaremos una



sustitución que simplifique al radical y que por tanto haga más fácil su evaluación. Una sustitución posible la sugiere la relación  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ , de la cual se concluye que  $a^2 \cos^2\theta = a^2 - a^2 \sin^2\theta$ . Por lo que intentaremos la sustitución

$$x = a \sin \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

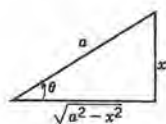
(véase figura 9.5.1). Entonces

$$dx = a \cos \theta \, d\theta \quad (3)$$

y

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= a|\cos \theta| = a \cos \theta, \end{aligned} \quad (4)$$

en la cual podemos eliminar las barras de valor absoluto de  $\cos \theta$ , porque  $\cos \theta \geq 0$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Los ejemplos que siguen muestran la eficacia de esta sustitución.



**Figura 9.5.1**

La sustitución

$x = a \sin \theta$ .

### EJEMPLO 1

Determinar

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4 - x^2}}. \quad (5)$$

Hacemos que  $x = 2 \sin \theta$ , por lo que  $dx = 2 \cos \theta \, d\theta$ , y  $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos \theta$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4 - x^2}} &= \int \frac{(2 \sin \theta)^2 2 \cos \theta \, d\theta}{2 \cos \theta} \\ &= 4 \int \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= 4 \int \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= 4 \left( \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) + c \\ &= 2\theta - 2 \sin \theta \cos \theta + c. \end{aligned}$$

A continuación observemos que  $\sin \theta = x/2$  y que  $\cos \theta = (\sqrt{4 - x^2})/2$ . Por consiguiente

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + c. \quad (6)$$

**EJEMPLO 2**

Calcular

$$\int_0^{3/2} \sqrt{9 - x^2} dx. \quad (7)$$

En este caso, hagamos  $x = 3 \sin \theta$ ; entonces  $dx = 3 \cos \theta d\theta$  y  $\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$ . Además,  $x = 0$  corresponde a  $\theta = 0$  y  $x = \frac{3}{2}$  corresponde a  $\theta = \pi/6$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_0^{3/2} \sqrt{9 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/6} (3 \cos \theta)(3 \cos \theta d\theta) \\ &= 9 \int_0^{\pi/6} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/6} \\ &= \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8} \approx 4.3048. \blacksquare \end{aligned} \quad (8)$$

**Integrales que contienen  $\sqrt{a^2 + x^2}$** 

Como ejemplos de estas integrales mostramos las siguientes:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx. \quad (9)$$

No hay restricción al valor de  $x$ . Para simplificar el radical en este caso, hacemos

$$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

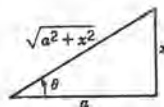
(véase figura 9.5.2). Entonces

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta \quad (11)$$

y

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a|\sec \theta| = a \sec \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Nótese que  $a \sec \theta > 0$  para  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Esto es consistente con el hecho de que  $\sqrt{a^2 + x^2} > 0$ .



**Figura 9.5.2**  
La sustitución  
 $x = a \tan \theta$ .

**EJEMPLO 3**

Determinar

$$\int \sqrt{x^2 + 16} \, dx. \quad (13)$$

Hacemos que  $x = 4 \tan \theta$  con lo que  $dx = 4 \sec^2 \theta \, d\theta$ , y  $\sqrt{x^2 + 16} = 4 \sec \theta$ . Por tanto

$$\int \sqrt{x^2 + 16} \, dx = \int (4 \sec \theta) 4 \sec^2 \theta \, d\theta = 16 \int \sec^3 \theta \, d\theta.$$

Para determinar esta última integral emplearemos la fórmula de reducción de la ecuación 8 en la sección 9.4:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \theta \, d\theta &= \frac{\sec \theta \tan \theta}{2} + \frac{1}{2} \int \sec \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\int \sqrt{x^2 + 16} \, dx = 8 \sec \theta \tan \theta + 8 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c. \quad (14)$$

Para expresar el resultado en términos de  $x$ , vemos que  $\tan \theta = x/4$  y que  $\sec \theta = (\sqrt{x^2 + 16})/4$ . Así

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 16} \, dx &= 8 \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} \frac{x}{4} + 8 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{4} + \frac{x}{4} \right| + c \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 16} + 8 \ln |\sqrt{x^2 + 16} + x| - 8 \ln 4 + c. \end{aligned}$$

Por último, nótese que la constante  $-8 \ln 4$  se puede incluir como parte de una constante arbitraria de integración. Así,

$$\int \sqrt{x^2 + 16} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 16} + 8 \ln |x + \sqrt{x^2 + 16}| + c. \quad \blacksquare \quad (15)$$

**Integrales que contienen  $\sqrt{x^2 - a^2}$** 

Como ejemplos de estas integrales tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{y} \quad \int \frac{x^2}{(x^2 - a^2)^{3/2}} \, dx. \quad (16)$$

Este caso es algo más complicado que los dos anteriores, porque debemos distinguir si  $x \geq a$ , o  $x \leq -a$ . Sin embargo, si  $x \leq -a$ , podemos hacer la sustitución  $u = -x$  y obtener una integral en la que  $u \geq a$ . Con ello sólo necesitaremos examinar el caso de  $x \geq a$ .



**EJEMPLO 4**

Transformar la integral

$$\int_{-8}^{-6} \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

en una para la cual los límites de integración sean positivos.

Si hacemos que  $u = -x$ , entonces tendremos

$$\int_{-8}^{-6} \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx = \int_8^6 \frac{-u^3 + 2}{\sqrt{u^2 - 4}} (-du) = \int_6^8 \frac{-u^3 + 2}{\sqrt{u^2 - 4}} du. \blacksquare$$

A continuación regresamos al caso general. Si  $x \geq a$ , entonces hacemos que

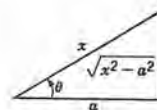
$$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (17)$$

(véase figura 9.5.3). Entonces

$$dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta \quad (18)$$

y

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = a \tan \theta. \quad (19)$$



**Figura 9.5.3**  
La sustitución  
 $x = a \sec \theta$ .

**EJEMPLO 5**

Determinar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (20)$$

Si  $x > a$ , entonces hacemos que  $x = a \sec \theta$ , para  $0 < \theta < \pi/2$ . Por tanto  $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$  y  $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$ . En consecuencia

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec \theta \tan \theta d\theta}{a \tan \theta} = \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln|\sec \theta + \tan \theta| + c = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + c \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a + c. \end{aligned}$$

Se puede incluir la constante  $-\ln a$  en la constante arbitraria de integración, y por tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c, \quad x > a. \blacksquare \quad (21)$$

La tabla 9.4 resume los resultados de esta sección.

**Tabla 9.4** Evaluación de integrales que contienen  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $\sqrt{a^2 + x^2}$  y  $\sqrt{x^2 - a^2}$

El integrando contiene	Sustitución	Identidad adecuada
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$ $dx = a \cos \theta d\theta$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$ $dx = a \sec^2 \theta d\theta$	$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$ , $x \geq a > 0$	$x = a \sec \theta$ $dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ Si $x \leq -a < 0$ , primero hacer $x = -u$ después $u = a \sec \theta$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20 determinar la integral indefinida o definida que se da.

1.  $\int \sqrt{1 - x^2} dx$

2.  $\int \frac{2x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

3.  $\int \frac{dx}{(2x^2 + 5)^{3/2}}$

4.  $\int_0^2 \frac{3x^2}{(9 - x^2)^{3/2}} dx$

5.  $\int \frac{dx}{(x^2 - 4)^{3/2}}$ ,  $x < -2$

6.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}} dx$

7.  $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx$

8.  $\int \sqrt{x^2 - 4} dx$ ,  $x < -2$

9.  $\int \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$ ,  $x > 3$

10.  $\int \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x^2} dx$

11.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{3 + x^2}}$

12.  $\int \frac{x^2 + 2x + 5}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

13.  $\int_2^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

14.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

15.  $\int_{-5}^{-3} \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$

16.  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$

17.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} dx$ ,  $x > \sqrt{3}$

18.  $\int \frac{dx}{(1 - 4x^2)^{3/2}}$

19.  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$

20.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - x^2}}$

En los problemas 21 a 32, deducir la fórmula de integración dada.

21.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$   
 $= \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} + c$

22.  $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + c$

23.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a} + c$

24.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + c$

$$25. \int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c$$

$$26. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$$

$$27. \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + c$$

$$28. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c$$

$$29. \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x} \right| + c$$

$$30. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{x}{a} + c, \quad x > a$$

$$31. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c, \quad x > a$$

$$32. \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + c, \quad x > a$$

33. Determinar el área de la región encerrada por la elipse  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ .

34. Determinar el área de la región comprendida entre las dos ramas de la hipérbola  $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$  y entre las dos rectas  $y = \pm b$ .

## 9.6 FRACCIONES PARCIALES

En esta sección describiremos un método para evaluar la integral de una función racional: el cociente de dos polinomios. El método emplea un procedimiento algebraico que se llama desarrollo en fracciones parciales para reformular la función racional en una forma más adecuada para la integración. Por ejemplo, si se nos presenta la función

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}, \quad (1)$$

es sencillo determinar su integral indefinida

$$\int f(x) dx = 3 \ln|x| + \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + c.$$

Por otro lado, si escribimos las fracciones de la ecuación 1 con un denominador común, tendríamos

$$f(x) = \frac{3(x-1)(x+2) + x(x+2) - 2x(x-1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{2x^2 + 7x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}. \quad (2)$$

Cuando  $f(x)$  tiene la forma (2), su integral no es fácilmente evidente. Dado un cociente de dos polinomios como la ecuación 2, nos gustaría invertir el procedimiento anterior para reformular el cociente en una forma semejante a la de la ecuación 1.

Supongamos que

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (3)$$



es una función racional, en la que  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios con coeficientes reales y sin factores comunes. Es suficiente tener en cuenta las llamadas funciones racionales *propias*, en las cuales el grado del denominador  $Q(x)$  es mayor que el del numerador  $P(x)$ . Si éste no es el caso, llevamos a cabo la división de  $P(x)$  entre  $Q(x)$  para obtener un cociente (el cual es un polinomio, y por tanto fácil de integrar) más un residuo que es una función racional propia. Por ejemplo,

$$\frac{6x^4 + 3x^3 - 2x + 1}{x^3 - 3x + 2} = 6x + 3 + \frac{18x^2 - 5x - 5}{x^3 - 3x + 2}.$$

A continuación le aplicamos el procedimiento al residuo.

También, suponemos que el coeficiente de la mayor potencia en  $Q(x)$  es uno. Si no es así, simplemente se factoriza ese coeficiente de la expresión completa. Por ejemplo,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x - 5}{3x^2 + (9/2)x - 3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x - 5}{x^2 + (3/2)x - 1}.$$

El primer paso para determinar el desarrollo que se desea consiste en factorizar a  $Q(x)$ . Se sabe del álgebra que *todo polinomio con coeficientes reales se puede expresar de modo único como un producto de factores cuadráticos reales e irreducibles*. Un factor lineal tiene la forma  $x - a$ , donde  $a$  es real, y corresponde al cero real  $x = a$  de  $Q$ . Este factor puede presentarse más de una vez; si se presenta  $r$  veces, entonces  $(x - a)^r$  es un factor de  $Q$ . Un factor cuadrático irreducible tiene la forma  $x^2 + bx + c$ , donde  $b$  y  $c$  son reales y el discriminante  $b^2 - 4c$  es negativo. Esta última condición asegura que el factor cuadrático ya no se puede seguir descomponiendo en factores reales lineales; de aquí el nombre de irreducible. Los factores cuadráticos irreducibles se asocian con ceros complejos de  $Q$ . Si  $\alpha \pm i\beta$  son un par de ceros conjugados de  $Q$ , entonces

$$\begin{aligned} [x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] &= x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2), \\ &= x^2 + bx + c, \end{aligned}$$

siempre que  $b = -2\alpha$  y que  $c = \alpha^2 + \beta^2$ . En este caso

$$b^2 - 4c = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = -4\beta^2 < 0.$$

Los factores cuadráticos también pueden ser repetidos, correspondiendo a ceros complejos de  $Q$  repetidos.

A continuación damos unos ejemplos de polinomios factorizados:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x + 2)$$

cuyos ceros son 0, 1, -2;

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

cuyos ceros son -1,  $i$ ,  $-i$ ;

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

cuyos ceros son 1, 1, -2;

$$x^5 - 6x^4 + 22x^3 - 48x^2 + 65x - 50 = (x - 2)(x^2 - 2x + 5)^2$$

cuyos ceros son 2,  $1 \pm 2i$ ,  $1 \pm 2i$ .

Una vez habiendo factorizado a  $Q(x)$ , es posible demostrar que toda función racional  $P(x)/Q(x)$  se puede expresar como una suma de fracciones de la forma

$$\frac{A}{(x - a)^r} \quad \text{y} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^s}, \quad (4)$$

en la cual  $x - a$  y  $x^2 + bx + c$  son factores reales lineales e irreducibles de  $Q$ . Esta suma de fracciones se llama **descomposición en fracciones parciales** de  $P(x)/Q(x)$ . Mostraremos cómo integrar cualquier expresión de la forma (4). Por consiguiente, toda función racional puede integrarse mediante este procedimiento.

La forma exacta de la representación de  $P/Q$  en fracciones parciales depende de la factorización de  $Q$ . Tenemos dos reglas al respecto:

**REGLA 1.** Si aparece  $r$  veces un factor  $x - a$  en la factorización de  $Q(x)$ , suponer entonces que la representación de  $P(x)/Q(x)$  contiene los términos

$$\frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x - a)^r}. \quad (5)$$

Después explicaremos cómo calcular las constantes  $A$ .

**REGLA 2.** Si aparece  $s$  veces un factor irreducible  $x^2 + bx + c$  en la factorización de  $Q(x)$ , suponer entonces que la representación de  $P(x)/Q(x)$  contiene los términos

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_sx + C_s}{(x^2 + bx + c)^s}. \quad (6)$$

De nuevo, explicaremos más adelante cómo calcular las  $B$  y las  $C$ .

Los ejemplos siguientes muestran cómo se deben aplicar esas reglas para formar la representación de una función racional en fracciones parciales.

$$\frac{3}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}; \quad \text{Se debe calcular } A \text{ y } B$$

$$\frac{2x + 4}{(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{B_1}{x + 2}; \quad \text{Se debe calcular } A_1, A_2, \text{ y } B_1$$

$$\frac{3 - 4x^2}{x(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}; \quad \text{Se debe calcular } A, B_1, B_2, C \text{ y } D.$$

$$\frac{2 - 3x + x^2 - 6x^3}{x(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2};$$

Se debe calcular  $A, B_1, B_2, B_3, C_1, D_1, C_2$  y  $D_2$ .

En los ejemplos siguientes se muestra el método para el cálculo de los coeficientes (que en las expresiones anteriores son las constantes  $A, B, C$  y  $D$ ).

### EJEMPLO 1

Determinar

$$\int \frac{2x-1}{x^2+x-2} dx.$$

Observaremos primero que  $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ . A continuación, de acuerdo con la regla 1, tenemos que

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}. \quad (7)$$

Para calcular las constantes  $A$  y  $B$ , multiplicamos ambos lados de esta ecuación por  $(x-1)(x+2)$  para obtener

$$2x-1 = A(x+2) + B(x-1). \quad (8)$$

Como toda  $x$  debe satisfacer la ecuación 8, se infiere que todos los coeficientes de las potencias iguales de  $x$  deben ser iguales en cada lado de la ecuación. Esto es, el coeficiente de  $x$  en el lado izquierdo debe ser igual al coeficiente de  $x$  del lado derecho, y el término constante de la izquierda debe ser igual que el término constante de la derecha. Así llegamos a la conclusión de que

$$\text{para } x^1: \quad 2 = A + B,$$

$$\text{para } x^0: \quad -1 = 2A - B.$$

Resolviendo esas ecuaciones vemos que  $A = \frac{1}{3}$  y  $B = \frac{5}{3}$ . Por tanto



$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{5/3}{x+2},$$

y

$$\begin{aligned}\int \frac{2x-1}{x^2+x-2} dx &= \int \left( \frac{1/3}{x-1} + \frac{5/3}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{5}{3} \ln|x+2| + c.\end{aligned}\quad (9)$$

Un método alternativo para calcular  $A$  y  $B$  de la ecuación 8 es seleccionar valores de  $x$  que hagan cero a los factores separados. Haciendo que  $x = -2$  en la ecuación 8 da  $-5 = -3B$  y haciendo que  $x = 1$  da  $1 = 3A$ . Esto siempre se puede hacer cuando los factores de  $Q(x)$  son lineales y no repetidos. ■

## EJEMPLO 2

Determinar

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

Según la regla 1, es posible escribir

$$\frac{3x^2 + 4x + 2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}. \quad (10)$$

Para calcular  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , multiplicamos ambos lados de la ecuación 10 por  $(x+1)^3$ . Con esto se obtiene

$$3x^2 + 4x + 2 = A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Cx(x+1) + Dx \quad (11a)$$

$$\begin{aligned}&= A(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + B(x^3 + 2x^2 + x) \\ &\quad + C(x^2 + x) + Dx\end{aligned}\quad (11b)$$

$$\begin{aligned}&= x^3(A+B) + x^2(3A+2B+C) \\ &\quad + x(3A+B+C+D) + A.\end{aligned}\quad (11c)$$

De nuevo, como toda  $x$  debe satisfacer la ecuación 11(c), se sigue que los coeficientes de las potencias iguales de  $x$  a cada lado de esta ecuación deben ser iguales. Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{para } x^3: & \quad A + B = 0, \\ \text{para } x^2: & \quad 3A + 2B + C = 3, \\ \text{para } x^1: & \quad 3A + B + C + D = 4, \\ \text{para } x^0: & \quad A = 2.\end{aligned}\quad (12)$$

Así hemos llegado a cuatro ecuaciones algebraicas lineales para  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . De la última ecuación,  $A = 2$ ; por lo que, de la primera ecuación  $B = -2$  y prosiguiendo con la segunda ecuación  $C = 1$ . Por último, de la tercera ecuación obtenemos que  $D = -1$ . Por consiguiente

$$\frac{3x^2 + 4x + 2}{x(x+1)^3} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3},$$

y

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 4x + 2}{x(x+1)^3} dx &= \int \left[ \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right] dx \\ &= 2 \ln|x| - 2 \ln|x+1| \\ &\quad - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c. \end{aligned} \quad (13)$$

En este caso fue bastante fácil despejar  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  de las ecuaciones 12; en otros problemas puede ser más difícil. Sin embargo, podemos evitar el problema de despejar en forma simultánea las cuatro constantes. Las constantes  $A$  y  $D$  se pueden obtener directamente de la ecuación 11(a) haciendo que  $x = 0$ , y a continuación  $x = -1$ . Se pueden obtener dos ecuaciones en las que aparecen  $B$  y  $C$  seleccionando dos valores convenientes de  $x$  distintos de 0 y  $-1$  y evaluando la ecuación 11(a) en esos puntos. Para este problema sabemos que  $A = 2$  y  $D = -1$ . Si seleccionamos  $x = 1$  y  $x = -2$ , obtendremos las dos ecuaciones siguientes en las que aparecen  $B$  y  $C$ :

$$\text{para } x = 1: \quad 9 = 2(2)^3 + B(2)^2 + C(2) - 1$$

$$\text{para } x = -2: \quad 6 = 2(-1)^3 + B(-2)(-1)^2 + C(-2)(-1) - 1(-2),$$

que se reducen a

$$4B + 2C = -6,$$

$$-2B + 2C = 6.$$

Despejando a  $B$  y  $C$  de estas ecuaciones llegamos, como era de esperarse, a que  $B = -2$  y  $C = 1$ . ■

### EJEMPLO 3

Determinar

$$\int \frac{x^4 + 2x^3 + 9x + 6}{x(x^2 - 2x + 3)} dx.$$

Observemos primero que el factor cuadrático  $x^2 - 2x + 3$  en el denominador es

irreducible, porque su discriminante es negativo; por tanto el denominador se encuentra en su forma más simple. Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, efectuamos la división para poner al integrando en la forma adecuada para emplear la técnica de las fracciones parciales:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 + 3x \overline{) \frac{x+4}{x^4 + 2x^3 + 0x^2 + 9x + 6}} \\
 \underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} \phantom{+ 6} \\
 4x^3 - 3x^2 + 9x \phantom{+ 6} \\
 \underline{4x^3 - 8x^2 + 12x} \phantom{+ 6} \\
 5x^2 - 3x + 6
 \end{array}$$

así que

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 9x + 6}{x(x^2 - 2x + 3)} = x + 4 + \frac{5x^2 - 3x + 6}{x(x^2 - 2x + 3)}. \quad (14)$$

De acuerdo con las reglas 1 y 2, vemos que

$$\frac{5x^2 - 3x + 6}{x(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 3}. \quad (15)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 5x^2 - 3x + 6 &= A(x^2 - 2x + 3) + (Bx + C)x \\
 &= (A + B)x^2 + (-2A + C)x + 3A,
 \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned}
 \text{para } x^2: \quad & A + B = 5, \\
 \text{para } x^1: \quad & -2A + C = -3, \\
 \text{para } x^0: \quad & 3A = 6.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Al resolver las ecuaciones 16 nos encontramos con que  $A = 2$ ,  $B = 3$  y  $C = 1$ . Como consecuencia, se sigue de las ecuaciones 14 y 15, que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4 + 2x^3 + 9x + 6}{x(x^2 - 2x + 3)} dx &= \int \left( x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{3x + 1}{x^2 - 2x + 3} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 + 4x + 2 \ln|x| + \int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x + 3} dx. \quad (17)
 \end{aligned}$$

La última integral se evalúa completando el cuadrado en el denominador como sigue:



$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+3} dx = \int \frac{3x+1}{x^2-2x+1+2} dx = \int \frac{3x+1}{(x-1)^2+2} dx.$$

A continuación hacemos que  $u = x - 1$  por lo que  $du = dx$ ; por consiguiente

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{(x-1)^2+2} dx &= \int \frac{3(u+1)+1}{u^2+2} du \\ &= 3 \int \frac{u}{u^2+2} du + 4 \int \frac{du}{u^2+2} \\ &= \frac{3}{2} \ln|u^2+2| + \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + c \\ &= \frac{3}{2} \ln[(x-1)^2+2] + \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c. \quad (18) \end{aligned}$$

Hemos eliminado las barras de valor absoluto en el logaritmo, porque  $(x-1)^2+2$  siempre es positivo.

De acuerdo con la ecuación 17, la ecuación final es

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2x^3+9x+6}{x(x^2-2x+3)} dx &= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2 \ln|x| \\ &+ \frac{3}{2} \ln(x^2-2x+3) + \frac{4}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c. \quad (19) \end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 3 llevamos a cabo la integración de las funciones racionales cuando sus representaciones en fracciones parciales constaban de términos en la forma

$$\frac{A}{(x-a)^r} \quad \text{y} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}.$$

Para completar el análisis general debemos tener en cuenta el caso en el que la representación en fracciones parciales contiene un término de la forma

$$\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}, \quad n > 1.$$

Si se presenta esa fracción, debemos calcular su integral indefinida. Esta parte final del análisis la estudiaremos en la sección siguiente.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 16 determinar la integral indefinida dada.

1.  $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

2.  $\int \frac{5x-13}{(x-2)(x-3)} dx$

$$3. \int \frac{-4 dx}{(x^2 - 4)} \quad 4. \int \frac{5x + 1}{(x - 1)^2(x + 2)} dx$$

$$5. \int \frac{x^2 + 4x + 5}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} dx$$

$$6. \int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 2} dx \quad 7. \int \frac{x dx}{(x + 1)^2(x - 1)^2}$$

$$8. \int \frac{3x + 2}{(x + 2)(x^2 + 4)} dx$$

$$9. \int \frac{x^3 + 3x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$10. \int \frac{x^2 + 5x + 6}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$$

$$11. \int \frac{2x^2 + 4}{x(x^2 + 2x + 2)} dx \quad 12. \int \frac{3 dx}{x^3 - x}$$

$$13. \int \frac{dx}{x^4 - 1} \quad 14. \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 2x + 6}{x^2 + 4} dx$$

$$15. \int \frac{dx}{(x - 1)^2(x + 2)^2}$$

$$16. \int \frac{(3x - 4) dx}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 2)}$$

En los problemas 17 a 32, deducir la fórmula de integración dada.

$$17. \int \frac{dx}{(x + b)(x + d)} = \frac{1}{d - b} \ln \left| \frac{x + b}{x + d} \right| + c, \quad d \neq b$$

$$18. \int \frac{dx}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{1}{(ad - bc)} \times \ln \left| \frac{ax + b}{cx + d} \right| + C, \quad ad - bc \neq 0$$

$$19. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c$$

$$20. \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 - x^2)} + \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c$$

$$21. \int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln |a^2 - x^2| + c$$

$$22. \int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2 - x^2)} + c$$

$$23. \int \frac{x^2 dx}{a^2 - x^2} = -x + \frac{a}{2} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c$$

$$24. \int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2 - x^2)} - \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + c$$

$$25. \int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{x^2 + a^2} + c$$

$$26. \int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$27. \int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{x^2 + a^2} + c$$

$$28. \int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c$$

$$29. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + a^2} = x - a \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$30. \int \frac{x^3 dx}{x^2 + a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x^2 + a^2) + c$$

$$31. \int \frac{x^4 dx}{x^2 + a^2} = \frac{x^3}{3} - a^2x + a^3 \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$* 32. \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + c.$$

Sugerencia: las raíces cuartas de  $-1$  son  $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$ .

## 9.7 FRACCIONES PARCIALES: FACTORES CUADRÁTICOS REPETIDOS

En esta sección estudiaremos primero el problema de determinar

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^n} dx, \quad n > 1 \quad y \quad b^2 - 4c < 0. \quad (1)$$

Una vez con este resultado, podremos completar la integración de las funciones racionales para las cuales la representación en fracciones parciales contenga polinomios cuadráticos elevados a potencias mayores que uno.

Para determinar a  $I$ , procederemos de un modo estándar completando el cuadrado en el denominador, para entonces llevar a cabo un sencillo cambio de variables

$$I = \int \frac{Bx + C}{\left(x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4}\right)^n} dx = \int \frac{Bx + C}{\left[\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)\right]^n} dx.$$

Como  $b^2 - 4c < 0$ , según nuestra hipótesis, sabemos que  $c - b^2/4 > 0$ . Sea  $k^2 = c - b^2/4$  y llevamos a cabo los siguientes cambios de variables:

$$s = x + \frac{b}{2}, \quad \text{de modo que} \quad x = s - \frac{b}{2} \quad y \quad ds = dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{B(s - b/2) + C}{(s^2 + k^2)^n} ds \\ &= B \int \frac{s}{(s^2 + k^2)^n} ds + \left(C - \frac{Bb}{2}\right) \int \frac{ds}{(s^2 + k^2)^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Se puede determinar la primera integral llevando a cabo el cambio de variables  $w = s^2 + k^2$  haciendo que  $dw = 2s ds$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{s ds}{(s^2 + k^2)^n} &= \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w^n} = \frac{w^{-n+1}}{2(-n+1)} + c \\ &= \frac{-1}{2(n-1)(s^2 + k^2)^{n-1}} + c, \quad n > 1. \end{aligned} \quad (3)$$

La segunda integral en la ecuación 2 es más difícil. Deduiremos una fórmula de reducción mediante integración por partes. Sean

$$u = \frac{1}{(s^2 + k^2)^n}, \quad dv = ds,$$

de modo que

$$du = \frac{-2ns ds}{(s^2 + k^2)^{n+1}}, \quad v = s.$$

Entonces



$$\begin{aligned}
 \int \frac{ds}{(s^2 + k^2)^n} &= \frac{s}{(s^2 + k^2)^n} - \int \frac{-2ns^2 ds}{(s^2 + k^2)^{n+1}} \\
 &= \frac{s}{(s^2 + k^2)^n} + 2n \int \frac{(s^2 + k^2) - k^2}{(s^2 + k^2)^{n+1}} ds \\
 &= \frac{s}{(s^2 + k^2)^n} + 2n \int \frac{ds}{(s^2 + k^2)^n} \\
 &\quad - 2nk^2 \int \frac{ds}{(s^2 + k^2)^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

Por último, despejamos la última integral del lado derecho en la ecuación para obtener la fórmula de reducción siguiente:

$$\int \frac{ds}{(s^2 + k^2)^{n+1}} = \frac{s}{2nk^2(s^2 + k^2)^n} + \frac{2n-1}{2nk^2} \int \frac{ds}{(s^2 + k^2)^n}. \quad (4)$$

Mediante el empleo repetido de la fórmula de reducción (4), podemos reducir a

$$\int \frac{ds}{(s^2 + k^2)^{n+1}} \text{ a } \int \frac{ds}{s^2 + k^2} = \frac{1}{k} \arctan \frac{s}{k} + c.$$

Así,  $I$  se puede evaluar expresándolo en la forma que se da en la ecuación 2, para emplear a continuación la fórmula (3) de integración y la fórmula (4) de reducción.

El empleo de la fórmula (4) de reducción se muestra en el ejemplo 1; en el ejemplo 2 presentaremos la integral de una función racional bastante complicada.

## EJEMPLO 1

Determinar

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 7)^3}. \quad (5)$$

Primero completamos el cuadrado y obtenemos

$$I = \int \frac{dx}{[x^2 + 2x + 1 + (7-1)]^3} = \int \frac{dx}{[(x+1)^2 + 6]^3}.$$

A continuación hacemos que  $s = x + 1$ , por lo que  $ds = dx$  y entonces

$$I = \int \frac{ds}{(s^2 + 6)^3}.$$

A continuación empleamos la fórmula de reducción (4) con  $k^2 = 6$  y  $n = 2$ , de modo que  $n + 1 = 3$ ; lo anterior da

$$I = \frac{1}{4 \cdot 6} \frac{s}{(s^2 + 6)^2} + \frac{3}{4 \cdot 6} \int \frac{ds}{(s^2 + 6)^2}.$$

Luego empleamos de nuevo la fórmula de reducción (4) con  $k^2 = 6$  y  $n = 1$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{s}{24(s^2 + 6)^2} + \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2 \cdot 6} \frac{s}{s^2 + 6} + \frac{1}{2 \cdot 6} \int \frac{ds}{s^2 + 6} \right] \\ &= \frac{s}{24(s^2 + 6)^2} + \frac{s}{96(s^2 + 6)} + \frac{1}{96\sqrt{6}} \arctan \frac{s}{\sqrt{6}} + c. \end{aligned}$$

Al sustituir  $s$  por  $x + 1$  obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 7)^3} &= \frac{x + 1}{24(x^2 + 2x + 7)^2} + \frac{x + 1}{96(x^2 + 2x + 7)} \\ &\quad + \frac{1}{96\sqrt{6}} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{6}} + c. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (6)$$

## EJEMPLO 2

Determinar

$$I = \int \frac{5x^4 + 6x^3 + 25x^2 + 22x + 17}{(x - 1)^2(x^2 + 4)^2} dx. \quad (7)$$

Según las reglas 1 y 2 de la sección 9.6, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{5x^4 + 6x^3 + 25x^2 + 22x + 17}{(x - 1)^2(x^2 + 4)^2} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 4)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Para calcular las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  y  $F$  multiplicamos la ecuación 8 por  $(x - 1)^2(x^2 + 4)^2$ . Esto nos da

$$\begin{aligned} 5x^4 + 6x^3 + 25x^2 + 22x + 17 &= A(x - 1)(x^2 + 4)^2 + B(x^2 + 4)^2 \\ &\quad + (Cx + D)(x - 1)^2(x^2 + 4) \\ &\quad + (Ex + F)(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^5 + (-A + B - 2C + D)x^4 \\ &\quad + (8A + 5C - 2D + E)x^3 \\ &\quad + (-8A + 8B - 8C + 5D - 2E + F)x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (16A + 4C - 8D + E - 2F)x \\
 &+ (-16A + 16B + 4D + F).
 \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de potencias iguales de  $x$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \text{para } x^5: & \quad A + C = 0, \\
 \text{para } x^4: & \quad -A + B - 2C + D = 5, \\
 \text{para } x^3: & \quad 8A + 5C - 2D + E = 6, \\
 \text{para } x^2: & \quad -8A + 8B - 8C + 5D - 2E + F = 25, \\
 \text{para } x^1: & \quad 16A + 4C - 8D + E - 2F = 22, \\
 \text{para } x^0: & \quad -16A + 16B + 4D + F = 17.
 \end{aligned} \tag{9}$$

La solución de estas ecuaciones es  $A = 2$ ,  $B = 3$ ,  $C = -2$ ,  $D = 0$ ,  $E = 0$  y  $F = 1$ . Así

$$I = \int \left[ \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{(x^2+4)^2} \right] dx. \tag{10}$$

Las primeras tres integrales del lado derecho de la ecuación 10 se pueden evaluar con facilidad:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2}{x-1} dx &= 2 \ln|x-1| + c, \\
 \int \frac{3}{(x-1)^2} dx &= \frac{-3}{x-1} + c, \\
 \int \frac{-2x}{x^2+4} dx &= -\ln(x^2+4) + c.
 \end{aligned}$$

Para evaluar la última integral de la ecuación 10, empleamos la fórmula de reducción (4) con  $k = 2$  y  $n = 1$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} &= \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x}{(x^2+4)} + \frac{1}{2 \cdot 4} \int \frac{dx}{x^2+4} \\
 &= \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + c.
 \end{aligned}$$

Combinando estos resultados individuales, encontramos que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x^4 + 6x^3 + 25x^2 + 22x + 17}{(x-1)^2(x^2+4)^2} dx &= 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \ln(x^2+4) \\
 &\quad + \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + c. \blacksquare \tag{11}
 \end{aligned}$$



Es claro del ejemplo 2 que si la representación en fracciones parciales de una función racional contiene factores cuadráticos con potencias mayores que uno, entonces el problema de calcular la integral se vuelve algo tedioso. Sin embargo las reglas y los procedimientos son directos: no hay que adivinar una vez que se han determinado los factores del denominador. Las dificultades principales no son las de llevar a cabo la integración, sino más bien en factorizar el denominador de la función racional y determinar las constantes de la representación en fracciones parciales.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 14, determinar la integral indefinida dada.

$$1. \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$$

$$2. \int \frac{3x - 2}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}$$

$$4. \int \frac{4 - x}{(x^2 + 4)^3} dx$$

$$5. \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 8)^2}$$

$$6. \int \frac{2x}{(x^2 - 4x + 8)^2} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$8. \int \frac{6x + 5}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

$$9. \int \frac{dx}{(2x^2 + 6)^3}$$

$$10. \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^3}$$

$$11. \int \frac{dx}{x(x^2 + 4)^2}$$

$$12. \int \frac{(3x^3 + 1) dx}{x^2(x^2 + 1)^2}$$

$$13. \int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x - 1)(x^3 - 1)} dx$$

$$14. \int \frac{x^4 + 2x^3 + 25}{x(x^2 + 2x + 5)^2} dx$$

En los problemas 15 a 17 emplear la fórmula de reducción que se dedujo en esta sección, la ecuación 4, para obtener el resultado de la integración que se presenta.

$$15. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$16. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2 + a^2)} + \frac{3}{8a^5} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$17. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^4} = \frac{x}{6a^2(x^2 + a^2)^3}$$

$$+ \frac{5x}{24a^4(x^2 + a^2)^2} + \frac{5x}{16a^6(x^2 + a^2)} + \frac{5}{16a^7} \arctan \frac{x}{a} + c$$

En los problemas 18 a 22, deducir el resultado de la integración que se presenta. Estas fórmulas extienden los resultados que se dieron en los problemas 25 a 27 de la sección 9.6.

$$18. \int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{a^2 + x^2} + c$$

$$* 19. \int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2(x^2 + a^2)^2} + \frac{1}{2a^4(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^6} \ln \frac{x^2}{a^2 + x^2} + c$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(x^2 + a^2)} - \frac{3}{2a^5} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$* 21. \int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^3} = -\frac{1}{a^6 x} - \frac{x}{4a^4(x^2 + a^2)^2} - \frac{7x}{8a^6(x^2 + a^2)} - \frac{15}{8a^7} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$22. \int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2 + a^2)} - \frac{1}{a^6} \ln \frac{x^2}{x^2 + a^2} + c$$

En los problemas 23 a 26, deducir el resultado de la integración que se presenta. Estas fórmulas amplían los resultados que se dieron en los problemas 28 a 31 de la sección 9.6.

$$23. \int \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2 + a^2)} + c$$

$$24. \int \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$25. \int \frac{x^3 \, dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c$$

$$26. \int \frac{x^4 \, dx}{(x^2 + a^2)^2} = x + \frac{a^2 x}{2(x^2 + a^2)} - \frac{3a}{2} \arctan \frac{x}{a} + c$$

27. Demostrar que la sustitución  $x = a \tan u$  reduce

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad a$$

$$I_n = \frac{1}{a^{2n-1}} \int \cos^{2(n-1)} u \, du.$$

Para  $n = 2$ , demostrar que esta nueva fórmula de  $I_n$  da

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + c.$$

Es el mismo resultado que se obtuvo en el problema 15 empleando la fórmula de reducción. Para valores de  $n > 2$ , es más conveniente emplear la fórmula de reducción para calcular  $I_n$  en lugar de la fórmula que se obtuvo para este problema.

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 56 determinar la integral definida o indefinida que se presenta.

$$1. \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$$

$$2. \int \left( \frac{\ln x + 1}{x \ln x} \right) dx$$

$$3. \int \frac{\ln x + 1}{x} dx$$

$$4. \int \operatorname{arc} \sinh x \, dx$$

$$5. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^5 x \, dx$$

$$6. \int \frac{\sec x}{\tan x + 2 \cot x} dx$$

$$7. \int x^4 \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$8. \int x \operatorname{arc} \sin x \, dx$$

$$9. \int \frac{2x - 2x \tan x^2}{1 + \tan x^2} dx$$

$$10. \int \tan^4 x \sec^4 x \, dx$$

$$11. \int x^3 \sqrt{1 + x^2} \, dx$$

$$12. \int \frac{dx}{2x + x^3}$$

$$13. \int \frac{x^3 + x^2 - 7x - 2}{x(x + 3)} dx$$

$$14. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx$$

$$15. \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{\pi x}{4} dx$$

$$16. \int \frac{\cos 2x \sin 4x}{\sin 2x} dx$$

$$17. \int \frac{\tan x \sec^3 x}{1 + \sec^6 x} dx$$

$$18. \int \frac{x \, dx}{2 + 2x^2 + x^4}$$

$$19. \int \cos 3x \sin^3 2x \, dx$$

$$20. \int_0^{\pi/2} \sin^{1/4} x \cos^3 x \, dx$$

$$21. \int \frac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 4}{x^2(x^2 - 4)} dx$$

$$22. \int \frac{\sinh 2x + \sin 2x}{\sinh^2 x + \sin^2 x} dx$$

$$23. \int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$

$$24. \int \frac{x(x - 2)}{x^4 + x^2 - 2x + 1} dx$$

$$25. \int \frac{dx}{x\sqrt{64 - x^3}}$$

$$26. \int \frac{1 + e^x}{1 + x^2 + 2xe^x + e^{2x}} dx$$

$$27. \int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1}$$

$$28. \int_0^2 \sqrt{(1 - 2x + x^2)(2 + 2x - x^2)} \, dx$$

$$29. \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x} dx$$

$$30. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 x \, dx$$

$$31. \int \frac{x + 1 + \cos x}{x + 1} \sec x \, dx$$

## 552 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

32.  $\int_0^{\pi} \tan^{-3} x \csc^4 x \, dx$

33.  $\int \tan^2 x \sen x \, dx$

34.  $\int \frac{\tan ax + \tan bx}{1 - \tan ax \tan bx} \, dx$

35.  $\int_1^2 \frac{dx}{2x^2 - 6x + 5}$

36.  $\int \frac{\ln(\arc \tan x)}{1 + x^2} \, dx$

37.  $\int x^3 \sinh x^2 \, dx$

38.  $\int \cot^{1/2} x \csc^4 x \, dx$

39.  $\int x \sec^2 x \, dx$

40.  $\int \frac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

41.  $\int \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} \, dx$

42.  $\int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{3 + 2x^2 - x^4}}$

43.  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}} \, dx$

44.  $\int \frac{\cos(\arc \sen x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

45.  $\int \frac{\tan(a \arc \tan x)}{1 + x^2} \, dx$

46.  $\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \, dx$

47.  $\int \frac{2x^4 - x^3 + 17x^2 - 2x + 2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+2)} \, dx$

48.  $\int \frac{2x^2 - x + 3}{\sqrt{x^2 - 9}} \, dx$

49.  $\int (1 - e^{2x})^{3/2} \, dx$

50.  $\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{2-x^2}}$

51.  $\int_0^1 \sqrt{1+x^{2/3}} \, dx$

52.  $\int (1 + \cos \theta)^{3/2} \, d\theta$

53.  $\int \frac{d\theta}{(1 - \cos \theta)^{3/2}}$

54.  $\int \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)(2x^2 + 1)} \, dx$

55.  $\int_{-1}^1 x^3 e^{x^2} \, dx$

56.  $\int x \sen x^2 e^{x^2} \, dx$

En los problemas 57 a 60 emplear las sustituciones

$$\arc \tan u = \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2 \, du}{1 + u^2}$$

y

$$\sen x = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

para determinar las integrales dadas.

57.  $\int \frac{\sen x \, dx}{(1 + \sen x) \cos x}$

58.  $\int \frac{1 + \sen x}{1 + \cos x} \, dx$

59.  $\int \frac{dx}{a + \cos x}$

60.  $\int \frac{dx}{\sen x + \cos x}$



# CÁLCULO

## Capítulo 10

### Ecuaciones diferenciales de primer orden

Uno de los usos más importantes de la integración es la resolución de ecuaciones diferenciales. Ya hemos encontrado algunas de esas ecuaciones. Por ejemplo, en la sección 8.4, en relación con la función exponencial como modelos de fenómenos de crecimiento o decaimiento. En las ciencias físicas con frecuencia surgen ecuaciones de la aplicación de una ley física que gobierna la razón de cambio de una o más cantidades de interés. Por ejemplo, la ley de Newton,  $F = ma$  es una ecuación diferencial, porque la aceleración  $a$  es la segunda derivada de la posición del objeto en movimiento con respecto al tiempo.

Como las ecuaciones diferenciales se presentan en forma natural en la descripción de muchos problemas significativos, tienen su correspondiente importancia los métodos que se emplean para resolverlas. Aunque un tratamiento sistemático de las ecuaciones diferenciales pertenece a un curso posterior, en este capítulo trataremos algunos tipos de ecuaciones que se pueden resolver mediante métodos elementales de integración.\*

---

\* Esos métodos se deben a Leibniz más que a nadie. Por ejemplo, fue él quien descubrió cómo resolver las ecuaciones separables (Secc. 10.2) en 1691 y las ecuaciones lineales (Secc. 10.1) en 1694. Las técnicas que se mencionan en el problema 27 de la sección 10.1 y en el problema 22 de la sección 10.2 también se deben a él.

## 10.1 ECUACIONES LINEALES

En la sección 8.4 estudiamos varios fenómenos de crecimiento y de desintegración que se pueden modelar mediante el problema con valor inicial

$$Q'(t) = rQ(t) + k, \quad (1)$$

$$Q(0) = Q_0, \quad (2)$$

en las cuales  $r$ ,  $k$  y  $Q_0$  son constantes dadas. En esta sección y en la próxima estudiaremos algunos otros tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Sólo veremos ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (3)$$

donde  $f$  es una función dada de la variable independiente  $t$  y de la variable dependiente  $y$ . Desafortunadamente, no hay método universal para resolver la ecuación diferencial (3). En lugar de ello, existen varios métodos y se puede emplear cada uno de ellos para determinadas clases de ecuaciones. Una de ellas es la clase de las ecuaciones lineales. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es **lineal** si la función  $f(t, y)$  se puede escribir en la siguiente forma:

$$f(t, y) = -p(t)y + g(t), \quad (4)$$

en la cual  $p$  y  $g$  son funciones dadas sólo de la variable independiente  $t$ . Entonces la ecuación diferencial (3) se vuelve

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (5)$$

que es la forma más general de una ecuación diferencial lineal de primer orden. Con frecuencia también se tiene una condición inicial prescrita

$$y(t_0) = y_0. \quad (6)$$

Como se indicó en la sección 8.4, una ecuación diferencial como la ecuación 3 ó la 5, junto con una condición inicial forman un problema con valor inicial.

Para resolver el problema con valor inicial (5), (6), buscamos una función  $y = \phi(t)$  que satisfaga la ecuación 5 en determinado intervalo que contenga al punto  $t_0$  y también que tenga el valor  $y_0$  en  $t_0$ . Suponemos que las funciones  $p$  y  $g$  son continuas en el intervalo en el que se busca la solución  $\phi$ .

Obsérvese que la ecuación 1 es una ecuación lineal de un tipo especial, a saber uno en el cual los coeficientes  $p$  y  $g$  de la función son constantes. A continuación veremos el caso más general en el cual  $p$  y  $g$  pueden ser funciones continuas arbitrarias de  $t$ .

En el ejemplo 3 de la sección 8.4 el primer paso para resolver la ecuación

$$Q' - rQ = -k \quad (7)$$

consistió en multiplicarla por la función  $e^{-r}$ , paso que transformó la ecuación en una forma fácilmente integrable. Tratemos de hacer algo semejante para resolver la ecuación 5. El problema entonces consiste en determinar qué función emplear como multiplicador para simplificar la ecuación. Antes de presentar el argumento general veremos un ejemplo.

### EJEMPLO 1

Resolver

$$\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = 3, \quad t < 0 \quad \text{o} \quad t > 0. \quad (8)$$

Nótese que no podemos tratar de resolver la ecuación diferencial en cualquier intervalo que contenga al origen, porque el coeficiente  $p(t) = 2/t$  no está definido en  $t = 0$  y se hace no acotado cuando se aproxima a este punto.

Para seguir el procedimiento que se acaba de indicar, multiplicaremos la ecuación por una función  $\mu$  y a continuación trataremos de seleccionar a  $\mu(t)$  de tal modo que el lado izquierdo de la ecuación sea fácil de integrar. Multiplicando la ecuación 8 por  $\mu(t)$  obtenemos

$$\mu(t)y' + \frac{2}{t}\mu(t)y = 3\mu(t). \quad (9)$$

Nuestro objeto es seleccionar a  $\mu$  de tal manera que el lado izquierdo de la ecuación 9 pueda identificarse como la derivada de cierta función. El término  $\mu(t)y'$  nos sugiere que la función deseada podría ser el producto  $\mu(t)y$ . Para obtener la combinación  $[\mu(t)y]' = \mu'(t)y + \mu(t)y'$  debemos sumar y restar el término  $\mu'(t)y$  del lado izquierdo de la ecuación 9. Al hacerlo y al agrupar los términos en forma adecuada, obtenemos

$$[\mu'(t)y + \mu(t)y'] - \left[ \mu'(t) - \frac{2}{t}\mu(t) \right] y = 3\mu(t). \quad (10)$$

A continuación, si fuera cero el segundo término del lado izquierdo de la ecuación 10, entonces esa ecuación tendría la forma

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = 3\mu(t), \quad (11)$$

y el lado izquierdo, cuando menos, sería fácilmente integrable. Para lograr esta situación debemos seleccionar a  $\mu$  de tal modo que

$$\mu'(t) - \frac{2}{t}\mu(t) = 0. \quad (12)$$



Si suponemos en forma provisional que  $\mu$  no es cero, entonces podemos escribir la ecuación 12 de la siguiente manera

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{2}{t},$$

o sea

$$\frac{d}{dt} [\ln \mu(t)] = \frac{2}{t}. \quad (13)$$

Así,

$$\ln \mu(t) = 2 \ln t + c = \ln t^2 + c.$$

Haciendo que  $c = 0$ , obtenemos la función  $\mu$  más sencilla posible, que es

$$\mu(t) = t^2. \quad (14)$$

Obsérvese que ciertamente  $\mu(t)$  no es cero en ningún intervalo que no contenga al origen, que es lo que se necesita.

Habiendo determinado la función  $\mu$ , regresamos a la ecuación 8 y la multiplicamos por  $\mu(t) = t^2$ , y con ello obtenemos

$$t^2 y' + 2ty = 3t^2. \quad (15)$$

El lado izquierdo de la ecuación 15 es ciertamente la derivada de  $t^2 y$ , y entonces

$$\frac{d}{dt} (t^2 y) = 3t^2.$$

Por lo que

$$t^2 y = t^3 + c$$

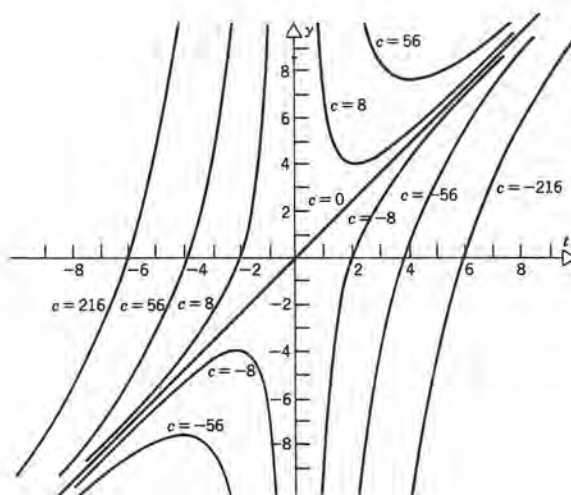
y

$$y = t + \frac{c}{t^2}. \quad (16)$$

Ésta es la solución más general de la ecuación 8, y es válida ya sea para  $t > 0$  o para  $t < 0$ . La figura 10.1.1 muestra la gráfica de  $y$  contra  $t$  para varios valores de  $c$ . ■

A continuación regresamos a la ecuación diferencial (5) y procedemos en la misma forma que en el ejemplo 1. Primero la multiplicamos por una función  $\mu(t)$  y obtenemos

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \quad (17)$$



**Figura 10.1.1** Algunas curvas integrales de  $y' + (2/t)y = 3$ .

A continuación, como en el ejemplo 1, sumamos y restamos la cantidad  $\mu'(t)y$ , y agrupamos los términos, de modo que

$$[\mu'(t)y + \mu(t)y'] - [\mu'(t) - \mu(t)p(t)]y = \mu(t)g(t). \quad (18)$$

Hacemos entonces que

$$\mu'(t) - \mu(t)p(t) = 0, \quad (19)$$

o sea que

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{d}{dt} \ln[\mu(t)] = p(t).$$

Por tanto

$$\ln \mu(t) = \int p(t) dt,$$

y

$$\mu(t) = \exp \int p(t) dt; \quad (20)$$

nótese que, por comodidad, hemos eliminado la constante arbitraria de integración. La

función  $\mu$  dada por la ecuación 20 se llama **factor de integración**, ya que con esta selección de  $\mu(t)$  la ecuación 18 se reduce a

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \quad (21)$$

De donde

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + c,$$

o sea

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t) dt + c}{\mu(t)} \quad (22)$$

La expresión de la ecuación 22 es la **solución general** de la ecuación 5, y corresponde a una familia de curvas en el plano  $ty$ , y se tiene una curva para cada valor posible de  $c$ , como en el ejemplo 1. A estas curvas a veces se les llama **curvas integrales** de la ecuación diferencial. Si se da una condición inicial como la ecuación 6, entonces con ello se determina el valor de  $c$  y por tanto se selecciona de entre la familia a una curva integral determinada.

De acuerdo con las ecuaciones 20 y 22 debe ser claro que la resolución de la ecuación diferencial lineal de primer orden (5) depende de la evaluación de dos integrales: la integral (20), que da el factor de integración  $\mu(t)$ , y a continuación la de la ecuación 22, que da la solución  $y$ . Es natural que la dificultad de evaluar esas integrales depende por completo de la naturaleza de las funciones  $p$  y  $g$  de la ecuación 5.

Aunque la ecuación 22 da una fórmula para la solución de la ecuación 5, no recomendamos al lector que la memorice. En lugar de ello, debe aprender cómo determinar el factor de integración, para luego proseguir como en los ejemplos siguientes.

## EJEMPLO 2

Determinar la solución del problema con valor inicial

$$y' - 2ty = t, \quad y(0) = 0. \quad (23)$$

Para esta ecuación, la función  $\mu$  es

$$\mu(t) = \exp \left[ \int -2t dt \right] = \exp(-t^2).$$

De donde tenemos que

$$e^{-t^2} y' - 2te^{-t^2} y = te^{-t^2},$$



o sea

$$(e^{-t^2}y)' = te^{-t^2}.$$

Así

$$e^{-t^2}y = \int te^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + c,$$

o bien

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{t^2}. \quad (24)$$

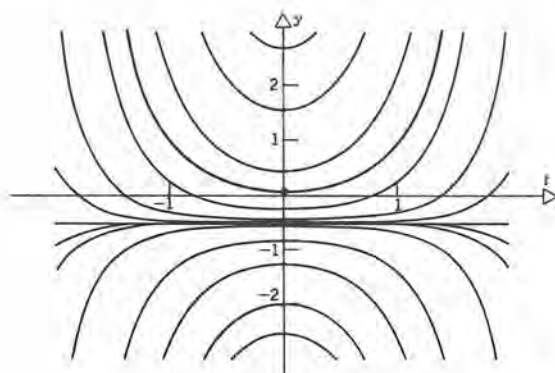
Para satisfacer la condición inicial debemos seleccionar a  $c$  de tal modo que  $0 = -\frac{1}{2} + c$ . Por tanto  $c = \frac{1}{2}$  y la solución del problema con valor inicial es

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{t^2}. \quad (25)$$

La figura 10.1.2 muestra la solución (25) junto con las curvas integrales que corresponden a algunos otros valores de  $c$ . ■

### EJEMPLO 3

Determinar la solución general de



**Figura 10.1.2** Solución del problema con valor inicial  $y' - 2ty = t$ ,  $y(0) = 0$  y otras curvas integrales.

$$ty' - y = t^3 \cos t \quad (26)$$

para  $t > 0$ .

En este caso debemos llevar primero a la ecuación a la forma (5) dividiéndola entre  $t$ . Así

$$y' - \frac{1}{t}y = t^2 \cos t. \quad (27)$$

De acuerdo con la ecuación 20, tenemos entonces que, con  $p(t) = -1/t$ ,

$$\mu(t) = \exp \int -\frac{dt}{t} = \exp(-\ln t) = \exp\left[\ln \frac{1}{t}\right] = \frac{1}{t}. \quad (28)$$

Multiplicando la ecuación 27 por  $\mu(t)$ , obtenemos

$$\frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = t \cos t,$$

o bien

$$\left(\frac{y}{t}\right)' = t \cos t,$$

de modo que

$$\frac{y}{t} = \int t \cos t \, dt.$$

Por último, al integrar por partes vemos que

$$\frac{y}{t} = t \sin t + \cos t + c,$$

o sea

$$y = t^2 \sin t + t \cos t + ct. \quad \blacksquare \quad (29)$$

#### **EJEMPLO 4**

Determinar la solución del problema con valor inicial

$$y' + (\tan t)y = \sec t, \quad y(\pi) = -2. \quad (30)$$

Para esta ecuación  $p(t) = \tan t$ ; por tanto, por la ecuación 20, tenemos que

$$\mu(t) = \exp \int \tan t \, dt = \exp[-\ln|\cos t|] = \exp[\ln|\sec t|] = |\sec t|, \quad (31)$$

Obsérvese que  $\sec t < 0$  cerca del punto inicial  $t = \pi$ . Así,  $|\sec t| = -\sec t$  es el factor de integración para este problema. Sin embargo, cuando multiplicamos la ecuación diferencial por  $-\sec t$ , el signo menos se puede eliminar y entonces tenemos que

$$(\sec t)y' + (\sec t \tan t)y = \sec^2 t.$$

Por tanto

$$[(\sec t)y]' = \sec^2 t$$

y

$$(\sec t)y = \int \sec^2 t \, dt = \tan t + c.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = \sin t + c \cos t.$$

Para satisfacer la condición inicial hacemos que  $t = \pi$ , y  $y = -2$ . Por lo que  $c = 2$ , y

$$y = \sin t + 2 \cos t \quad (32)$$

es la solución de este problema. ■

Algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se describieron en la sección 8.4. En los problemas 21 a 26 se presentan más aplicaciones.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 12 determinar la solución general de la ecuación diferencial dada.

1.  $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

2.  $y' - y = 2e^t$

3.  $y' + 3y = t + e^{-t}$

4.  $y' + 2y = 3t$

5.  $y' + \frac{1}{t}y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$

6.  $y' + \frac{2}{t}y = \frac{e^{-t}}{t}, \quad t > 0$

7.  $ty' + 2y = e^t, \quad t > 0$

8.  $y' + (\tan t)y = t \sin 2t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

9.  $t^2 y' + 3ty = \frac{\sin t}{t}, \quad t > 0$

10.  $ty' + 2y = 2 \cos(t^2), \quad t > 0$

11.  $ty' + (t-1)y = te^{-t}, \quad t > 0$

12.  $(\sin t)y' + 2(\cos t)y = \frac{2 \cos 2t}{\sin t},$

$0 < t < \pi$

En los problemas 13 a 18, determinar la solución del problema dado con valor inicial.



## 562 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

13.  $y' - y = 2te^t, \quad y(0) = 1$

14.  $y' - 2y = t - 3, \quad y(0) = -1$

15.  $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0$

16.  $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

17.  $(t+1)y' + 2y = t, \quad y(0) = 3$

18.  $y' + (\cot t)y = t, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

19. Demostrar que si  $a$  y  $\lambda$  son constantes positivas, y si  $b$  es cualquier número real, entonces toda solución de la ecuación

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tiene la propiedad de que  $y \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .  
*Sugerencia:* tener en cuenta, por separado, los casos en los que  $a = \lambda$  y  $a \neq \lambda$ .

20. Se tiene el siguiente problema con valor inicial:

$$y' - 2ty = 1, \quad y(0) = 1. \quad (i)$$

- (a) Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{t^2} \int_{t_0}^t e^{-s^2} ds + ce^{t^2}, \quad (ii)$$

en la cual  $t_0$  es un número real arbitrario.

- (b) Para determinar la constante  $c$  de manera que se satisfaga la condición inicial, es conveniente seleccionar a  $t_0 = 0$  y escribir

$$y = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + ce^{t^2}. \quad (iii)$$

Demostrar que si se usa un límite inferior diferente, entonces la fórmula (iii) cambia por una constante  $\times \exp(t^2)$ , que se puede incluir en el término  $c \exp(t^2)$ .

- (c) Demostrar que la solución al problema con valor inicial es

$$y = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}. \quad (iv)$$

- (d) Nótese que no hemos desarrollado ningún método para encontrar la integral indefinida en la ecuación

(iv). En realidad este integrando no tiene antiderivada elemental. Sin embargo, puede recurrir uno a una integración numérica. Use la regla de Simpson (Secc. 6.6) para calcular aproximadamente el valor de  $y$  para  $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1.0$ . Así, aun cuando la solución (iv) contenga una integral, desde el punto de vista de cómputo sigue siendo una forma perfectamente satisfactoria de la solución del problema con valor inicial. De hecho, el valor  $e^{t^2}$  en la solución (iv) también se calcula normalmente en forma numérica. La única diferencia es que la mayor parte de las calculadoras tienen una rutina interconstruida para calcular en forma automática la función exponencial.

### Determinación de la hora de la muerte\*

En la investigación de un homicidio o de una muerte accidental, con frecuencia es más importante calcular o *estimar* la hora de la muerte. A continuación describiremos un modelo matemático sencillo para este problema.

La ley de enfriamiento de Newton afirma que la rapidez del cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y el medio que lo rodea, digamos, el aire. Si  $\theta$  es la temperatura del objeto y  $T$  es la temperatura del aire, entonces  $\theta$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T), \quad (i)$$

en la cual  $k > 0$  es la constante de proporcionalidad. Es necesario el signo menos en esta ecuación porque si el objeto es más caliente que sus alrededores ( $\theta > T$ ), entonces  $\theta$  tenderá a decrecer, y viceversa. Sea  $t$  el tiempo medido a la hora en que el legista llega y mide la temperatura del cuerpo, y supongamos que esa temperatura es  $\theta_0$ . Entonces, la condición inicial que corresponde a la ecuación (i) es

$$\theta(0) = \theta_0. \quad (ii)$$

21. Un cadáver se encuentra a la orilla de una calle y su temperatura corporal es de  $28^\circ\text{C}$ . Una hora después se ha enfriado a  $22^\circ\text{C}$ . Suponiendo que  $T = 10^\circ\text{C}$  y que permanece constante, y que se aplica la ley de Newton

\* Véase J. F. Hurley, "An Application of Newton's Law of Cooling," *Mathematics Teacher*, 67, 1974, Págs. 141-142; y David A. Smith, "The Homicide Problem Revisited," *The Two Year College Mathematics Journal*, 9, 1978, Págs. 141-145.

a este caso calcular cuánto tiempo llevaba muerta la persona antes de que fuera encontrada. La temperatura corporal normal es de  $37^{\circ}\text{C}$ .

22. Suponer que un cadáver tiene una temperatura  $\theta_0$  cuando se le encuentra a la hora  $t = 0$  y que tiene una temperatura  $\theta_1$  determinado tiempo después  $t_1$ . Suponiendo que se aplica la ley de enfriamiento de Newton, y que la temperatura ambiente  $T$  es constante, determinar lo siguiente:

- Una expresión para la razón de enfriamiento  $k$ .
- La hora  $t_d$  de la muerte, suponiendo que el individuo haya tenido una temperatura corporal normal de  $37^{\circ}\text{C}$  en el momento de su muerte.

### Mezclado

Muchas aplicaciones importantes, incluyendo los procesos fisiológicos y ambientales, implican la determinación de la concentración de una solución de una determinada sustancia. Como modelo para esta clase de problemas se tiene un tanque con agua salada (figura 10.1.3). Sea  $V$  el volu-



Figura 10.1.3

men del agua en el tanque, que supondremos constante, y sea  $Q(t)$  la cantidad de sal en el tanque cuando el tiempo es  $t$ . Entonces  $Q(t)/V$  es la concentración. Supondremos que el tanque se mantiene bien agitado y por tanto que esta concentración se mantiene uniforme en todo el tanque siempre. Supongamos que entra al tanque una solución salina cuya concentración es  $q$ , una razón de entrada al tanque de  $r$ , y que, para mantener constante el volumen, se drena solución de este tanque a esa misma razón. Entonces la rapidez de cambio de la cantidad de sal en el tanque está dada por

$$\frac{dQ}{dt} = \text{razón de entrada del flujo} - \text{razón de salida del flujo}$$

$$= rq - \frac{rQ(t)}{V},$$

o sea

$$Q' + \frac{r}{V}Q = rq,$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La condición inicial es

$$Q(0) = Q_0,$$

en la cual  $Q_0$  es la cantidad de sal que había inicialmente en el tanque.

- Se tiene un tanque que contiene inicialmente ( $t = 0$ ) 20 kg de sal disuelta en 300 litros de agua. Suponer que entra agua con 0.1 kg de sal por litro a razón de 5 litros/min, y que la mezcla bien agitada sale del tanque a la misma razón. Calcular la cantidad de sal  $Q(t)$  que hay en el tiempo  $t$ .
- Un tanque contiene al principio agua pura. Entra una mezcla de  $\gamma$  gramos de sal por litro a razón de 2 litros por minuto, y la mezcla bien agitada sale del tanque a la misma razón.
  - Determinar la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque en cualquier tiempo  $t$ .
  - Determinar el valor límite de  $Q(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .
- Un tanque contiene inicialmente 50 galones de agua pura. Se le bombean 5 gal/min de salmuera con  $\gamma$  libras de sal por galón, y la mezcla bien agitada sale del tanque a la misma razón.
  - Determinar la cantidad  $Q(t)$  de sal en el tanque en cualquier tiempo  $t$ .
  - Calcular  $\gamma$  si después de una hora hay 5 lb de sal en el tanque.
- Un tanque de agua contiene inicialmente 40 lb de sal disueltas en 100 gal de agua. Al tanque entra agua con 0.1 lb de sal por galón, a razón de 5 gal/min, y la mezcla, bien agitada, sale del tanque a la misma razón.
  - Determinar la cantidad de sal  $Q(t)$  en el tanque en cualquier tiempo  $t$ .
  - Calcular el tiempo que pasa para que haya 20 lb de sal en el tanque.



## 564 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

27. **Ecuaciones de Bernoulli.** Una ecuación de la forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n$$

se llama ecuación de Bernoulli, en honor de Jakob Bernoulli. Es lineal si  $n = 0$  ó  $n = 1$ . En cualquier otro caso es no lineal. Demostrar que si  $n \neq 0, 1$ , entonces la sustitución  $v = y^{1-n}$  reduce a la ecuación de Bernoulli a la ecuación lineal

$$v' + (1 - n)p(t)v = (1 - n)q(t),$$

que se puede resolver con los métodos de esta sección.

28. Emplear el método del problema 27 para resolver el problema con valor inicial

$$y' = (k - ay)y, \quad y(0) = y_0 > 0,$$

en la cual  $k > 0$  y  $a > 0$ .

Este problema se presenta en el estudio de la dinámica poblacional.

29. Emplear el método del problema 27 para resolver

$$y' = \epsilon y - \sigma y^3, \quad \epsilon > 0 \quad y \quad \sigma > 0.$$

Ecuaciones de este tipo se presentan en la mecánica de los fluidos, al estudiar *la transición del flujo laminar al flujo turbulento*.

## 10.2 ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

En esta sección describiremos otra clase de ecuaciones diferenciales de primer orden para las cuales se cuenta con un procedimiento directo de resolución. La ecuación diferencial general de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1}$$

siempre se podrá escribir en la siguiente forma:

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0. \tag{2}$$

Un modo de hacerlo consiste en fijar a  $M(t, y) = -f(t, y)$ , y a  $N(t, y) = 1$ , pero pudiera haber también otras maneras. Si  $M$  es sólo función de  $t$ , y  $N$  es función sólo de  $y$ , entonces la ecuación 2 se vuelve

$$M(t) + N(y) \frac{dy}{dt} = 0. \tag{3}$$

En este caso, la solución de la ecuación diferencial se puede reducir de nuevo al caso de evaluar ciertas integrales.

### EJEMPLO 1

Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1 + 3y^2}. \tag{4}$$



Es fácil ver que la ecuación 4 se puede reformular como

$$-t^2 + (1 + 3y^2) \frac{dy}{dt} = 0, \quad (5)$$

que es de la forma (3). Para resolver la ecuación 5, obsérvese que, de acuerdo con la regla de la cadena,

$$(1 + 3y^2) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dy} (y + y^3) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} (y + y^3). \quad (6)$$

Desde luego, también es cierto que

$$-t^2 = \frac{d}{dt} \left( -\frac{t^3}{3} \right). \quad (7)$$

Por tanto, la ecuación 5 es lo mismo que

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{t^3}{3} \right) + \frac{d}{dt} (y + y^3) = 0,$$

o que

$$\frac{d}{dt} \left( -\frac{t^3}{3} + y + y^3 \right) = 0. \quad (8)$$

Por lo que

$$-\frac{t^3}{3} + y + y^3 = c, \quad (9)$$

en la cual  $c$  es una constante arbitraria.

El procedimiento que hemos empleado se puede expresar en forma más compacta si escribimos la ecuación 5 en la forma diferencial

$$-t^2 dt + (1 + 3y^2) dy = 0, \quad (10)$$

Entonces, al integrar cada término vemos que

$$- \int t^2 dt + \int (1 + 3y^2) dy = c,$$

o sea

$$-\frac{t^3}{3} + y + y^3 = c,$$

que es igual a la ecuación 9. ■

A continuación veremos el caso general. Se dice que una ecuación diferencial que se puede llevar a la forma (3) es de **variables separables**. La razón de este nombre es que si la ecuación 3 se escribe en la forma diferencial

$$M(t) dt + N(y) dy = 0, \quad (11)$$

entonces se separan las variables, esto es, cada variable aparece sólo en un término. Para resolver la ecuación 3 supongamos que podemos determinar funciones  $H_1$  y  $H_2$  de tal manera que

$$\frac{dH_1(t)}{dt} = M(t) \quad y \quad \frac{dH_2(y)}{dy} = N(y). \quad (12)$$

Entonces la ecuación 3 se transforma en

$$\frac{dH_1}{dt}(t) + \frac{dH_2}{dy}(y) \frac{dy}{dt} = 0. \quad (13)$$

Como en el ejemplo 1, la regla de la cadena implica que

$$\frac{dH_2}{dy}(y) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} H_2(y), \quad (14)$$

Así, la ecuación 13 será

$$\frac{dH_1}{dt}(t) + \frac{d}{dt} H_2(y) = 0, \quad (15)$$

de donde se concluye que

$$H_1(t) + H_2(y) = c, \quad (16)$$

donde  $c$ , que es una constante arbitraria, es la solución de la ecuación 13.

Obsérvese que podemos también escribir las ecuaciones 12 en la forma

$$H_1(t) = \int M(t) dt \quad y \quad H_2(y) = \int N(y) dy; \quad (17)$$

entonces la solución 16 se vuelve

$$\int M(t) dt + \int N(y) dy = c. \quad (18)$$

Así, de hecho, se resuelve la ecuación 11 de variables separables sencillamente integrando cada término con respecto a la variable que aparece en él. La justificación de este procedimiento es el argumento que acabamos de presentar.

Obsérvese que las expresiones (16) y (18) dan la solución  $y$  de la ecuación 3, en forma implícita, como función de  $t$ . Para obtener la solución en su forma explícita debemos despejar a  $y$  de la ecuación 16 o 18. En muchos casos esto será difícil o imposible. Aun para una ecuación tan sencilla como la del ejemplo 1, la solución (9) es una ecuación cúbica de la cual no se puede despejar a  $y$  con facilidad. En contraste, la ecuación (22) de la sección 10.1, para la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden da la solución en forma explícita.

A continuación veremos algunos ejemplos más de ecuaciones de variables separables.

## EJEMPLO 2

Encontrar la solución de

$$yy' = 2t\sqrt{y^2 + 4} \quad (19)$$

que pasa por el punto  $(2, -\sqrt{5})$ .

La ecuación 19 se puede escribir en la siguiente forma:

$$y(y^2 + 4)^{-1/2} dy = 2t dt, \quad (20)$$

y por tanto es una ecuación de variables separables. Al integrar ambos lados de ella obtenemos

$$(y^2 + 4)^{1/2} = t^2 + c, \quad (21)$$

en la cual  $c$  es una constante arbitraria. Para calcular  $c$ , hacemos que  $t = 2$  y  $y = -\sqrt{5}$  en esta última ecuación; entonces  $3 = 4 + c$  y por tanto  $c = -1$ . Entonces

$$(y^2 + 4)^{1/2} = t^2 - 1. \quad (22)$$

En este caso, también podemos obtener la solución en su forma explícita. Si elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación 22 encontraremos que

$$y^2 + 4 = (t^2 - 1)^2.$$

Por lo que

$$y^2 = (t^2 - 1)^2 - 4 = t^4 - 2t^2 - 3,$$

y

$$y = -\sqrt{t^4 - 2t^2 - 3}. \quad (23)$$

Nótese que se debe escoger la raíz cuadrada negativa en esta ecuación, para que  $y = -\sqrt{5}$  cuando  $t = 2$ , que son las condiciones iniciales. ■



**EJEMPLO 3**

Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2(1+t)(1+y^2), \quad y(0) = 1. \quad (24)$$

Primero reformularemos la ecuación diferencial para que sea de variables separables:

$$\frac{dy}{1+y^2} = 2(1+t) dt.$$

A continuación, integrando ambos lados, vemos que

$$\arctan y = 2t + t^2 + c. \quad (25)$$

Para calcular  $c$ , hacemos que  $t = 0$  y  $y = 1$  en esta última ecuación. Así,  $c = \arctan 1 = \pi/4$ , y

$$\arctan y = t^2 + 2t + \pi/4,$$

o sea

$$y = \tan(t^2 + 2t + \pi/4). \quad (26)$$

De nuevo, en este caso fue posible determinar la solución en su forma explícita. ■

**La ecuación logística**

Una de las ecuaciones diferenciales de variables separables más importantes, aunque no es lineal, es

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right), \quad (27)$$

en la cual  $r$  y  $K$  son constantes positivas. A veces a la ecuación 27 se le conoce como la **ecuación logística**, y surge en varias aplicaciones diferentes.

Un campo en el que se presenta esta ecuación es en el estudio del crecimiento de una población aislada de algunas especies. En este caso  $y$  es el tamaño de la población,  $r$  es la rapidez de crecimiento y  $K$  es la población máxima sostenible. Si escribimos la ecuación 27 en la siguiente forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{r}{K} y(K - y),$$

entonces queda expresada la hipótesis de que la rapidez de cambio de la población,

$dy/dt$ , es proporcional al producto de la población actual,  $y$ , por la diferencia,  $K - y$ , entre la población actual y la población máxima  $K$ .

Otra aplicación en la que aparece la ecuación 27 es en epidemiología, que es el estudio de la diseminación de enfermedades infecciosas. Supongamos que  $y$  es la proporción de una población dada que tiene determinada enfermedad, y que puede infectar a otras personas y que  $x$  es la población de personas no infectadas pero susceptibles de serlo. Suponiendo que toda persona cae en uno de esos dos grupos, se infiere que

$$x + y = 1. \quad (28)$$

El modelo más simple de la diseminación de la enfermedad es aquel en el cual la rapidez de cambio de la proporción de personas enfermas,  $dy/dt$ , es proporcional al número de encuentros entre individuos infectados y susceptibles. A su vez, si suponemos que las personas enfermas y las sanas se mueven libremente entre sí, entonces el número de encuentros debe ser proporcional al producto de  $x$  por  $y$ . En símbolos,

$$\frac{dy}{dt} = rxy = ry(1 - y), \quad (29)$$

en la cual hemos sustituido a  $x$  de acuerdo con la ecuación 28. Obsérvese que la ecuación 29 es la misma que la ecuación 27 con  $K = 1$ .

En esas aplicaciones, y en la mayor parte de otras en las que se presenta la ecuación 27, nuestro interés general en la solución de la ecuación 27 es para valores de  $y$  en el intervalo  $0 < y < K$ . Para resolver la ecuación 27, separamos primero las variables y así

$$\frac{dy}{y(1 - y/K)} = r dt. \quad (30)$$

A continuación desarrollamos en fracciones parciales el lado izquierdo de la ecuación 30, de modo que

$$\left( \frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K} \right) dy = r dt. \quad (31)$$

Entonces, integrando ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\ln y - \ln \left( 1 - \frac{y}{K} \right) = rt + c, \quad (32)$$

en la cual  $c$  es una constante arbitraria de integración. Obsérvese que hemos eliminado los valores absolutos en los términos logarítmicos, ya que tanto  $y$  como  $1 - y/K$  son positivos si  $0 < y < K$ .

Supongamos que también se da una condición inicial

$$y(0) = y_0. \quad (33)$$

Entonces, sustituyendo  $t = 0$  y  $y = y_0$  en la ecuación 32, vemos que

$$\ln y_0 - \ln\left(1 - \frac{y_0}{K}\right) = c,$$

o sea

$$c = \ln \frac{y_0}{1 - y_0/K}. \quad (34)$$

Entonces podemos escribir la ecuación 32 en la siguiente forma:

$$\ln \frac{y}{1 - y/K} = rt + \ln \frac{y_0}{1 - y_0/K}. \quad (35)$$

Poniendo ambos lados de esta ecuación en forma exponencial, y agrupando los términos, obtenemos

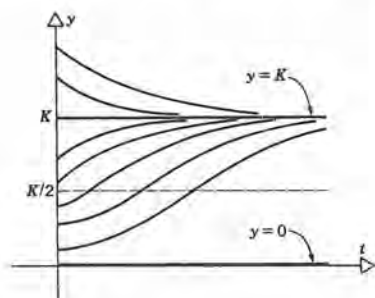
$$\frac{y}{1 - y/K} = \frac{y_0 e^{rt}}{1 - y_0/K}. \quad (36)$$

Por último, podemos despejar a  $y$  de esta ecuación y llegamos a

$$y = \frac{y_0}{y_0/K + (1 - y_0/K)e^{-rt}}. \quad (37)$$

Si el valor inicial  $y_0$  es igual a cero, entonces  $y$  es cero para toda  $t$ . Análogamente, si  $y_0 = K$ , entonces  $y = K$  para toda  $t$ . Si  $0 < y_0 < K$ , entonces  $y$  crece cuando  $t$  crece, y  $y(t) \rightarrow K$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Independientemente de los valores de  $r$  y de  $K$ , las gráficas de las soluciones (37) son semejantes a las de la figura 10.2.1.

Si  $\dot{y} < 0$  o  $y > K$ , entonces se puede resolver la ecuación 27 de modo semejante. Todo lo que se necesita es la inserción y la interpretación adecuada de valores absolutos en los términos logarítmicos de la ecuación 32. Sucede que al final se vuelve a obtener



**Figura 10.2.1**

Soluciones de  $y' = ry(1 - y/K)$ .



la ecuación 37 como solución del problema con valor inicial (27) y (33). En la figura 10.2.1 se muestran también algunas soluciones para  $y_0 > K$ .

### EJEMPLO 4

Una población satisface la ecuación logística

$$\frac{dy}{dt} = 0.5y \left( 1 - \frac{y}{K} \right), \quad (38)$$

en la cual  $t$  está dada en años. Al principio la población es de  $0.1K$ . Determinar cuánto tiempo tarda esa población en duplicar su tamaño. También, calcular la población al término de cinco años.

La ecuación diferencial es un caso especial de la ecuación 27, y por tanto se puede resolver del mismo modo. En lugar de repetir este cálculo, podemos emplear la solución (37), sustituyendo a  $r$  por  $0.5$  y a  $y_0$  por  $0.1K$ . Obtenemos entonces

$$y = \frac{0.1K}{0.1 + 0.9e^{-t/2}}. \quad (39)$$

Para calcular el tiempo  $\tau$  en el cual se ha duplicado la población, hacemos que  $y = 0.2K$  y  $t = \tau$  en la ecuación anterior y despejamos a  $\tau$ . Así se obtiene

$$e^{-\tau/2} = \frac{4}{9},$$

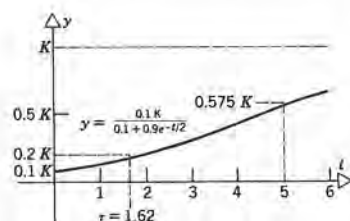
de modo que

$$\tau = 2 \ln \frac{9}{4} \cong 1.62 \text{ años.}$$

Para calcular la población después de cinco años, hacemos que  $t = 5$  en la ecuación 39. Esto da

$$y = \frac{0.1K}{0.1 + 0.9e^{-2.5}} \cong 0.575K.$$

En la figura 10.2.2 se muestra la gráfica de la solución (39). ■



**Figura 10.2.2** Solución del problema con valor inicial  $y' = 0.5y(1 - y/K)$ ,  $y(0) = 0.1K$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8 resolver la ecuación diferencial respectiva.

1.  $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y}$
2.  $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{1 + y^2}$
3.  $\frac{dy}{dt} = \frac{2y \cos 2t}{1 + 2y^2}$
4.  $\frac{dy}{dt} = 1 + t^2 + y^2 + t^2 y^2$
5.  $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y(1 + t^3)}$
6.  $y' + (\sin t)y^2 = 0$
7.  $ty' = \sqrt{1 - y^2}$
8.  $\frac{dy}{dt} = \frac{t - e^{-t}}{y + e^t}$

En los problemas 9 a 18, determinar la solución de  $y = \phi(t)$  del problema respectivo con valor inicial, en forma explícita.

9.  $y' = \frac{2t}{y + t^2 y}$ ,  $y(0) = 2$
10.  $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{1 + 2y}$ ,  $y(2) = 1$
11.  $\frac{dy}{dt} = ty^3/\sqrt{1 + t^2}$ ,  $y(0) = 1$
12.  $\frac{dy}{dt} = -ty^2$ ,  $y(0) = -2$
13.  $\frac{dy}{dt} = \frac{2t - 1}{2y + 2}$ ,  $y(3) = -3$
14.  $yy' = t(1 + y^2)$ ,  $y(0) = -1$
15.  $y' = 2t \exp(3t + y)$ ,  $y(0) = 0$
16.  $2(2 + y)y' = t$ ,  $y(0) = -1$
17.  $yy' = 3(2t + 1)^2$ ,  $y(0) = -1$
18.  $y' = \frac{t(t^2 + 1)}{4y^3}$ ,  $y(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

19. Suponer que determinada población crece siguiendo la ecuación logística

$$\frac{dy}{dt} = ry \left( 1 - \frac{y}{K} \right)$$

- (a) Si  $y_0 = K/3$ , determinar el tiempo  $\tau$  en el cual se ha duplicado la población inicial. Determinar también el valor de  $\tau$  si  $r = 0.025$  por año.

- (b) Si  $y_0 = \alpha K$ , determinar el tiempo  $T$  en el cual  $y(T) = \beta K$ , donde  $0 < \alpha$  y  $\beta < 1$ . Determinar el valor de  $T$  si  $r = 0.025$  por año,  $\alpha = 0.1$  y  $\beta = 0.9$ . Obsérvese que  $T \rightarrow \infty$  cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , o cuando  $\beta \rightarrow 1$ .

20. Otra ecuación que se ha empleado para modelar el crecimiento de la población es la siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = ry \ln \frac{K}{y}.$$

A esta ecuación se le llama ecuación de Gompertz.

- (a) Resolver la ecuación de Gompertz sujeta a la condición inicial  $y(0) = y_0$ .
- (b) Si  $y_0 = K/3$ , determinar el tiempo  $\tau$  al cual se ha duplicado la población. También, determinar el valor de  $\tau$  cuando  $r = 0.025$  al año. Comparar los resultados con los del problema 19(a).
21. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = \frac{at + b}{ct + d}$$

en la cual  $a, b, c$  y  $d$  son constantes y  $c \neq 0$ . Suponer también que  $ct + d \neq 0$ .

- \*22. La ecuación

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y - 4t}{t - y}$$

no es de variables separables. Demostrar que si se sustituye la variable  $y$  por una nueva variable  $v$  definida mediante  $v = y/t$ , entonces la ecuación en  $t$  y  $v$  es de variables separables. Emplear esta técnica para determinar la solución de la ecuación dada.

23. Algunas enfermedades, como la fiebre tifoidea, se transmiten principalmente mediante *portadores*, que son individuos que pueden transmitir la enfermedad, pero que no muestran síntomas aparentes. Sean  $x$  y  $y$ , respectivamente, la proporción de portadores y de individuos sanos, pero susceptibles, en la población en el tiempo  $t$ . Supongamos que se retira de la población a los portadores a una razón  $\beta$ , de modo que

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x. \quad (i)$$

Supóngase también que la enfermedad se disemina con una rapidez proporcional al producto de  $x$  y  $y$ . Entonces

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha xy, \quad (ii)$$

- (a) Determinar a  $x$  para cualquier tiempo  $t$  resolviendo la ecuación (i) sujeta a la condición inicial  $x(0) = x_0$ .
- (b) Emplear el resultado de la parte (a) para determinar a  $y$  en cualquier tiempo  $t$  resolviendo la ecuación (ii) sujeta a la condición inicial  $y(0) = y_0$ .
- (c) Determinar la proporción de la población que escapa a la epidemia; esto es, determinar el valor límite de  $y$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . También determinar cómo varía esta cantidad con  $\alpha$  y con  $\beta$ .
24. Suponer que, por evaporación, el volumen de una gota esférica de lluvia disminuye con una rapidez proporcional al área de su superficie. Al principio el radio de la gota es de 3 mm, y 20 min después se ha reducido a 2 mm. Deducir una ecuación para el radio de la gota de lluvia en función del tiempo  $t$ .

## Reacciones químicas

Una reacción química de segundo orden implica la interacción o choque de una molécula de una sustancia  $P$  con una molécula de otra sustancia  $Q$  para producir una molécula de una nueva sustancia,  $X$ . En la representación usual,  $P + Q \rightarrow X$ . Supongamos que  $p$  y  $q$  son las concentraciones iniciales de las sustancias  $P$  y  $Q$ , respectivamente, y sea  $x(t)$  la concentración de  $X$  en el tiempo  $t$ . Entonces  $p - x(t)$  y  $q - x(t)$  son las concentraciones de  $P$  y  $Q$  en el tiempo  $t$ , y la rapidez con la que se lleva a cabo la reacción se describe mediante la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)(q - x),$$

en la cual  $\alpha$  es una constante positiva.

25. Si se produce  $X$  mediante la reacción descrita, determinar la concentración  $x(t)$  de  $X$  en cualquier tiempo  $t$ , suponiendo que  $x(0) = 0$ .
26. Si las sustancias  $P$  y  $Q$  son iguales, entonces la ecuación de la reacción se transforma en la siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(p - x)^2.$$

Si  $x(0) = 0$ , determinar a  $x(t)$  como una función del tiempo  $t$ .

## Movimiento de acuerdo con la segunda ley de Newton

Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de una recta. Sean  $x$ ,  $v = dx/dt$  y  $a = dv/dt$  la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula. La segunda ley de Newton afirma que  $F = ma$ , siendo  $F$  la fuerza neta que obra sobre la partícula. La fuerza  $F$  puede depender del tiempo  $t$ , de la posición  $x$  o de la velocidad  $v$ . Supongamos que la partícula se mueve bajo la influencia de la gravedad en un medio que presenta una resistencia proporcional a la velocidad de la partícula. Supongamos también que  $x$  es positiva en la dirección hacia arriba. Entonces las fuerzas que actúan sobre la partícula se muestran en la figura 10.2.3. Son las siguientes:

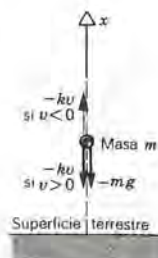


Figura 10.2.3 Fuerzas sobre una partícula en movimiento.

- (a) La fuerza de la gravedad, que siempre obra hacia abajo y está dada por  $-mg$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad. En la cercanía de la superficie terrestre, es suficiente tomar a  $g$  como una constante con valor  $32 \text{ ft/seg}^2$ , ó  $9.8 \text{ m/seg}^2$ .
- (b) La fuerza de la resistencia, que siempre actúa en dirección opuesta a la dirección del movimiento. Esta fuerza está representada por  $-kv$ , en la que  $k$  es una constante de proporcionalidad. Nótese que la resistencia está dirigida hacia abajo cuando  $v$  es positiva y por tanto la partícula se mueve hacia arriba; igualmente, la resistencia se dirige hacia arriba cuando  $v$  es negativa.

De acuerdo con estas hipótesis, la ecuación del movimiento es

$$m \frac{dv}{dt} + kv = -mg.$$



## 574 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Si la partícula se pone en movimiento con una velocidad inicial  $v_0$ , entonces la condición inicial es  $v(0) = v_0$ .

27. Se arroja una pelota de 0.25 kg de masa hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/seg, desde el techo de un edificio de 30 m de altura. No tomar en cuenta la resistencia del aire.

- (a) Calcular la altura máxima que alcanza la pelota, sobre el nivel del suelo.  
(b) Suponiendo que la pelota no regresa al edificio en su descenso, calcular el tiempo que tarda en chocar con el suelo.

28. Suponer que las condiciones son como las del problema 27, excepto que hay una fuerza debida a la resistencia del aire, igual a  $|v|/30$ , donde la velocidad  $v$  está en metros por segundo.

- (a) Calcular la altura máxima que alcanza la pelota sobre el suelo.  
(b) Calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.

*Sugerencia:* emplear el método de Newton, o algún otro procedimiento numérico para la parte (b).

29. Un cuerpo de masa constante  $m$  se arroja en dirección vertical y hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ . Suponiendo que la atracción gravitacional de la Tierra es constante, y no tomando en cuenta las demás fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo, determinar lo siguiente:

- (a) La altura máxima que alcanza el cuerpo.  
(b) El tiempo que se tarda en alcanzar la altura máxima.  
(c) El tiempo que se tarda en regresar a su punto de partida.

- \*30. Se arroja hacia arriba un cuerpo de masa constante  $m$ , desde la superficie terrestre, con una velocidad inicial  $v_0$ . Suponiendo que no hay resistencia del aire, pero tomando en cuenta la variación del campo gravitacional terrestre conforme a la inversa del cuadrado de la distancia (véase figura 10.2.4), tenemos que

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}, \quad v(0) = v_0,$$

en la cual  $R$  es el radio de la Tierra y  $x(t)$  es la altura medida desde la superficie terrestre. Como la fuerza

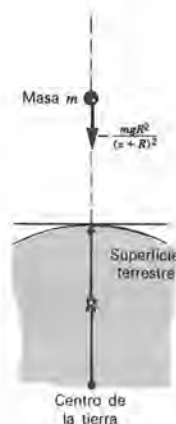


Figura 10.2.4

es una función de  $x$ , es conveniente pensar que  $x$ , y no  $t$ , es la variable independiente. Lo podemos hacer si notamos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Por lo que

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{-gR^2}{(x+R)^2}$$

y  $v = v_0$  cuando  $x = 0$ .

- (a) Demostrar que

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}.$$

- (b) La **velocidad de escape**,  $v_e$ , se puede calcular haciendo que la velocidad  $v$  permanezca positiva para toda  $x$  positiva. Véase también el problema 36 en la sección 11.3. Demostrar que  $v_e = (2gR)^{1/2}$ , lo cual es aproximadamente 11.1 km/seg (6.9 mi/seg). Si se toma en cuenta la resistencia del aire, entonces la velocidad de escape será algo mayor. La velocidad efectiva de escape se puede reducir de manera apreciable si el cuerpo se lleva a una gran altura sobre el nivel del mar antes de lanzarlo, ya que la fuerza de gravedad y en especial la resistencia del aire disminuyen cuando la altura aumenta.

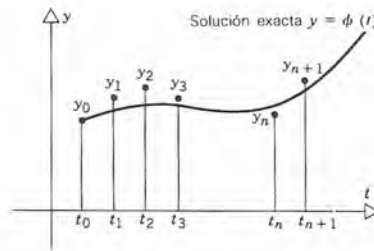
## 10.3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Aunque se pueden resolver en forma analítica muchas ecuaciones diferenciales de primer orden, empleando los métodos que se describieron en las dos secciones anteriores, hay muchas otras que ni son lineales ni son de variables separables, de modo que esos métodos no se les pueden aplicar. Aun cuando una ecuación sea lineal o de variables separables, podría suceder que las integraciones necesarias en la resolución analítica fueran demasiado difíciles para llevarse a cabo mediante los métodos elementales. Por estas dos razones es deseable desarrollar métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales.

Veamos el problema con valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

cuya solución es  $y = \phi(t)$ . Por un método numérico para resolver este problema con valor inicial se quiere decir un procedimiento para calcular los valores aproximados  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  de la solución  $\phi$  en los puntos  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \dots$  (véase figura 10.3.1). Los datos calculados se pueden representar en forma tabular o gráfica.



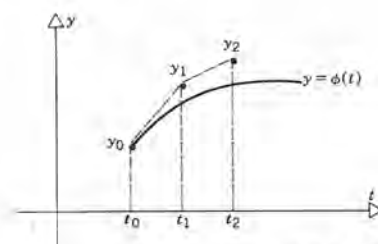
**Figura 10.3.1** Aproximación numérica a la solución de  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ .

La notación que usaremos es la siguiente: la solución del problema con valor inicial (1) es  $\phi$ , o  $y = \phi(t)$ , y el valor de la solución en  $t_n$  es  $\phi(t_n)$ . Los símbolos  $y_n$  y  $y'_n = f(t_n, y_n)$  representan valores aproximados de la solución y de su derivada en  $t_n$ . Es claro que  $y_0 = \phi(t_0)$  y que  $y'_0 = \phi'(t_0)$ , pero en general,  $y_n \neq \phi(t_n)$  y  $y'_n \neq \phi'(t_n)$ , para  $n \geq 1$ . Además, por comodidad, seleccionaremos un espaciamiento o un tamaño de paso  $h$  uniforme en el eje  $t$ . Así,  $t_1 = t_0 + h$ ,  $t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$ , y en general  $t_n = t_0 + nh$ .

### Método de Euler o de la línea tangente

El método numérico más sencillo para resolver el problema (1) con valor inicial es el de la recta tangente, que Euler\* empleó por primera vez. Como se conocen  $t_0$  y  $y_0$ , la

\* Entre las muchas e importantes contribuciones de Euler a las matemáticas se tiene el primer empleo sistemático de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales. Comenzando aproximadamente en 1768, desarrolló y empleó el método de la recta tangente.



**Figura 10.3.2** Aproximación de Euler, o de la recta tangente.

pendiente de la recta tangente a la solución en  $t_0$ , que es  $\phi'(t_0) = f(t_0, y_0)$ , también se conoce. Por tanto podemos trazar la tangente a la solución en  $t_0$  y con ello obtener el valor aproximado  $y_1$  de  $\phi(t_1)$  moviéndonos a lo largo de la tangente hasta  $t_1$  (véase figura 10.3.2). La ecuación de la tangente en  $(t_0, y_0)$  es

$$y - y_0 = \phi'(t_0)(t - t_0).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \phi'(t_0)(t_1 - t_0) \\ &= y_0 + f(t_0, y_0)h. \end{aligned} \quad (2)$$

Nótese que ésta es precisamente la aproximación lineal a la función  $\phi$  cerca de  $t = t_0$  que estudiamos en la sección 3.4.

Una vez determinada  $y_1$ , podemos calcular  $y'_1 = f(t_1, y_1)$ , que es un valor aproximado de  $\phi'(t_1)$ . Empleamos este valor aproximado de la pendiente y obtenemos una aproximación a  $\phi(t_2)$ , que es

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + (t_2 - t_1)y'_1 \\ &= y_1 + hy'_1. \end{aligned}$$

En el enésimo paso, se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n, \quad \text{siendo } y'_n = f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

A la ecuación 3 se le conoce como la fórmula de Euler, o de la recta tangente.

El método de Euler sólo consiste en emplear la fórmula (3) una y otra vez. En cada paso el cálculo del siguiente valor aproximado  $y_{n+1}$  cuando  $t$  es  $t_{n+1}$  hace uso del resultado  $y_n$  del paso anterior.

## EJEMPLO 1

Emplear la fórmula de Euler (3) con un tamaño de paso  $h = 0.1$  para calcular un valor aproximado de la solución  $y = \phi(t)$  para  $t = 0.2$ , en el problema con valor inicial



$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1. \quad (4)$$

Observemos primero que la ecuación diferencial  $y' = 1 - t + 4y$  es lineal y que por tanto se puede resolver mediante el método que se describió en la sección 10.1. Esta solución es

$$y = \phi(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4t}. \quad (5)$$

Hemos seleccionado, como ejemplo, un problema sencillo con valor inicial que podamos resolver con facilidad y así poder comparar el valor de la solución numérica con el de la solución analítica.

Para la solución numérica calculamos primero

$$y'_0 = f(0, 1) = 1 - 0 + 4(1) = 5.$$

Entonces

$$y_1 = y_0 + hy'_0 = 1 + (0.1)(5) = 1.5.$$

A continuación

$$\begin{aligned} y'_1 &= f(t_1, y_1) = f(0.1, 1.5) \\ &= 1 - 0.1 + 4(1.5) = 6.9, \end{aligned}$$

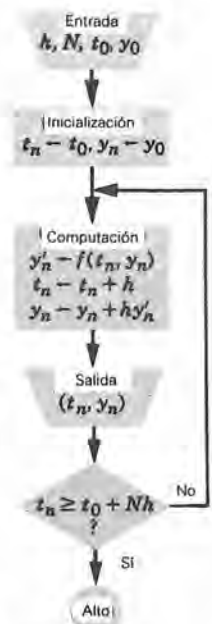
y

$$y_2 = y_1 + hy'_1 = 1.5 + (0.1)(6.9) = 2.19.$$

El valor de  $\phi(2)$  es 2.5053299 con una aproximación de ocho dígitos. Por tanto, el error cuando  $t = 0.2$  es aproximadamente  $|2.19 - 2.51| = 0.32$ , lo cual es un porcentaje de error de 12.7.

Normalmente no se acepta un error así de grande. Se pueden obtener mejores aproximaciones empleando un tamaño menor de paso. En la tabla 10.1 se presentan algunos resultados. Por ejemplo, para  $h = 0.01$ , con lo cual se necesitan 20 pasos para llegar a  $t = 0.2$ , obtenemos el valor aproximado 2.4645, cuyo porcentaje de error es aproximadamente 1.6. Los datos de la tabla 10.1 muestran también que disminuye la exactitud a medida que aumenta  $t$ . ■

En la figura 10.3.3 se muestran las etapas esenciales para resolver el problema con valor inicial (1) para  $t_0 \leq t \leq t_0 + Nh$  mediante el método de Euler, en forma de diagrama de flujo. La primera caja indica los parámetros a los que se deben asignar valores para iniciar el cómputo. En la segunda caja se igualan las variables  $t_n$  y  $y_n$  a sus valores iniciales  $t_0$  y  $y_0$ , respectivamente. La tercera caja representa el cálculo de  $f(t_n, y_n)$  y la actualización de  $t_n$  y  $y_n$  mediante la fórmula de Euler. Los resultados pueden imprimirse ya sea para cada valor de  $n$  o para determinado conjunto preseleccionado



**Figura 10.3.3**  
Diagrama de flujo  
para el método de  
Euler.

**Tabla 10.1** Comparación de los resultados de la solución numérica de  $y' = 1 - t + 4y$ ,  $y(0) = 1$  empleando el método de Euler con distintos tamaños  $h$  de paso

$t$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.01$	Exacto
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5475000	1.5761188	1.5952901	1.6090418
0.2	2.1900000	2.3249000	2.4080117	2.4644587	2.5053299
0.3	3.1460000	3.4333560	3.6143837	3.7390345	3.8301388
0.4	4.4744000	5.0185326	5.3690304	5.6137120	5.7942260
0.5	6.3241600	7.2901870	7.9264062	8.3766865	8.7120041
0.6	8.9038240	10.550369	11.659058	12.454558	13.052522
0.7	12.505354	15.234032	17.112430	18.478797	19.515518
0.8	17.537495	21.967506	25.085110	27.384136	29.144880
0.9	24.572493	31.652708	36.746308	40.554208	43.497903
1	34.411490	45.588400	53.807866	60.037126	64.897803

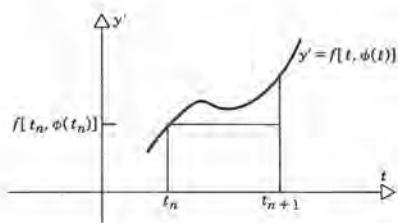
de valores. Siempre que  $t_n < t_0 + Nh$ , se repite el cómputo empleando valores nuevos de  $t_n$  y de  $y_n$ , que se obtuvieron en el paso anterior. El proceso se detiene cuando  $t_n = t_0 + Nh$ .

Aunque el método de Euler es sencillo y fácil de emplear, los datos de la tabla 10.1 nos dicen que aun para este problema tan sencillo el método de Euler no es muy exacto. Se puede demostrar, empleando la teoría de los polinomios de Taylor que se estudiará en el capítulo 13, que si es correcto el valor de  $y_n$  en  $t_n$ , entonces el error cometido al calcular  $y_{n+1}$  en  $t_{n+1}$  es proporcional a  $h^2$ . Este error se llama **error de discretización local**. Aunque en general no se puede obtener la constante de proporcionalidad a partir de esta expresión para el error, de todos modos es útil que el error de discretización local se comporte como una constante multiplicada por  $h^2$ . Por ejemplo, podemos llegar a la conclusión de que si se reduce a la mitad el tamaño del paso, entonces el error de discretización local se reduce en un factor de 4, y así sucesivamente.

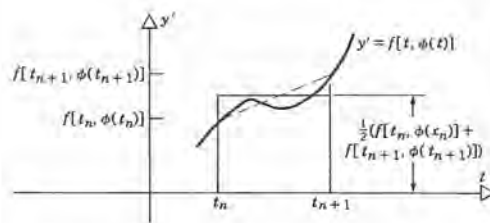
La falta de exactitud del método de Euler se debe principalmente al hecho de que el error de discretización local es proporcional a  $h^2$ . Por fortuna, hay otros métodos que son mucho más exactos que el de Euler y cuyo empleo, a veces, es ligeramente más difícil. Describiremos dos métodos de ellos, que tienen errores de discretización local proporcionales a  $h^3$  y a  $h^5$ , respectivamente. En cada caso, la descripción general del cómputo la sigue dando el diagrama de flujo de la figura 10.3.3. La única diferencia es que se calcula el nuevo valor de  $y_n$  mediante una fórmula diferente y más exacta.

### Método de Euler mejorado

Si  $y = \phi(t)$  es la solución exacta del problema con valor inicial (1), y si integramos la ecuación diferencial entre  $t_n$  y  $t_{n+1}$ , tendremos



**Figura 10.3.4** Deducción integral del método de Euler.



**Figura 10.3.5** Deducción del método de Euler mejorado.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)] dt$$

o sea

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)] dt. \quad (6)$$

Podemos obtener distintas aproximaciones a  $\phi(t_{n+1})$  si hacemos diferentes aproximaciones en el cálculo de la integral del lado derecho de la ecuación 6. Por ejemplo, para obtener la fórmula de Euler (3), aproximamos al integrando mediante su valor en  $t_n$ , como se ve en la figura 10.3.4. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(t_{n+1}) &\cong \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t_n, \phi(t_n)] dt \\ &\cong \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)](t_{n+1} - t_n). \end{aligned}$$

La aproximación adicional  $\phi(t_n) \cong y_n$  da la fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + hy'_n,$$

que concuerda con la ecuación 3.

A continuación volvemos a la ecuación 6 y aproximaremos a la integral de un modo diferente, empleando el promedio de los valores del integrando en  $t_n$  y en  $t_{n+1}$ ; véase la figura 10.3.5. Así

$$\phi(t_{n+1}) \cong \phi(t_n) + \frac{1}{2}[f[t_n, \phi(t_n)] + f[t_{n+1}, \phi(t_{n+1})]](t_{n+1} - t_n).$$

Si sustituimos de nuevo  $\phi(t_n)$  y  $\phi(t_{n+1})$  por los valores aproximados  $y_n$  y  $y_{n+1}$ , respectivamente, obtendremos entonces

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]h. \quad (7)$$

Dado que  $y_{n+1}$  aparece como uno de los argumentos de  $f$  en el lado derecho de la ecuación 7, en general será bastante difícil despejar a  $y_{n+1}$  de esta ecuación. Se puede



superar esta dificultad si se aproxima a  $y_{n+1}$  del lado derecho de la ecuación 7 mediante el valor obtenido empleando la fórmula de Euler (3). Así

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hy'_n)] \frac{h}{2} \\ &= y_n + [y'_n + f(t_{n+1}, Y_{n+1})] \frac{h}{2}, \quad \text{siendo } Y_{n+1} = y_n + hy'_n \end{aligned} \quad (8)$$

A esta fórmula se le llama fórmula mejorada de Euler, o fórmula de Heun.uede demostrarse que el error de discretización local es proporcional a  $h^3$ .

## EJEMPLO 2

Emplear la fórmula mejorada de Euler (8) para calcular valores aproximados de la solución del problema (4) de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1.$$

Sea  $f(t, y) = 1 - t + 4y$  y supóngase que  $h = 0.1$ . Como  $t_0 = 0$  y  $y_0 = 1$ , tenemos, como en el ejemplo 1,  $y'_0 = 1 - 0 + 4 = 5$ . Entonces  $y_1 = y_0 + hy'_0 = 1 + (0.1) 5 = 1.5$ , y

$$f(t_1, Y_1) = 1 - 0.1 + 4(1.5) = 6.9.$$

Finalmente

$$y_1 = 1 + (0.5)(0.1)(5 + 6.9) = 1.595.$$

En la tabla 10.2 se muestran más resultados. Los datos de esta tabla indican que los resultados obtenidos mediante el método de Euler mejorado para  $h = 0.1$  son en realidad mejores que los que se obtuvieron con el método de Euler para  $h = 0.1$  y que también son mejores que los obtenidos con el método de Euler para  $h = 0.05$ . Hasta son mejores que los obtenidos con el método de Euler para  $h = 0.025$ , y casi tan buenos como cuando  $h = 0.01$  con el método de Euler, lo cual se puede ver comparando las tablas 10.1 y 10.2. ■

Para las ecuaciones complicadas, la parte más tardada, y por tanto la más costosa, del cómputo es la evaluación repetida de  $r(t, y)$ . En consecuencia, se puede hacer una comparación burda del tiempo necesario para emplear dos métodos diferentes contando el número de veces que se tiene que calcular  $f(t, y)$ . El método de Euler mejorado necesita dos evaluaciones de la función en cada paso, mientras que el método de Euler sólo precisa una. Así, el método de Euler mejorado con un tamaño de paso  $h$  debería emplear aproximadamente el mismo tiempo de cómputo que el método de Euler con un tamaño de paso  $h/2$ . Para el problema (4), y en la gran mayoría de los casos, el método de Euler mejorado da una exactitud bastante mayor bajo esas condiciones.

**Tabla 10.2** Comparación de los resultados obtenidos empleando el método de Euler y el método de Euler mejorado para  $h = 0.1$  y  $h = 0.05$ , para el problema con valor inicial  $y' = 1 - t + 4y$ ,  $y(0) = 1$ .

$t$	Euler		Euler mejorado		Exacto
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5475000	1.5950000	1.6049750	1.6090418
0.2	2.1900000	2.3249000	2.4636000	2.4932098	2.5053299
0.3	3.1460000	3.4333560	3.7371280	3.8030484	3.8301388
0.4	4.4744000	5.0185326	5.6099494	5.7404023	5.7942260
0.5	6.3241600	7.2901870	8.3697252	8.6117498	8.7120041
0.6	8.9038240	10.550369	12.442193	12.873253	13.052522
0.7	12.505354	15.234032	18.457446	19.203865	19.515518
0.8	17.537495	21.967506	27.348020	28.614138	29.144880
0.9	24.572493	31.652708	40.494070	42.608178	43.497903
1.0	34.411490	45.588400	59.938223	63.424698	64.897803

### Método de Runge-Kutta

Uno de los métodos numéricos que se emplean con más frecuencia es el de Runge-Kutta.\* Se puede deducir de la ecuación 6 si se aproxima el integrando mediante un promedio ponderado de los valores tomados en los puntos  $t_n$ ,  $t_n + h/2$  y  $t_{n+1}$  de modo semejante a como se aproxima el valor de una integral mediante la regla de Simpson. Esto da lugar a una fórmula en la que intervienen expresiones como  $f[t_n + h/2, \phi(t_n + h/2)]$ . A continuación es necesario llevar a cabo más aproximaciones para calcular  $\phi(t_n + h/2)$ . La fórmula que resulta es

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}) \quad (9)$$

en la cual

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n), \\ k_{n2} &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}), \\ k_{n3} &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}), \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{aligned} \quad (10)$$

\* Carl David Runge (1856-1927) se vio impulsado a abordar problemas de cálculo numérico debido a sus trabajos de espectroscopía, y el método de Runge-Kutta se originó en su trabajo acerca de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales en 1895. El método fue ampliado en 1901 por M. Wilhelm Kutta (1867-1944), matemático alemán y especialista en aerodinámica, quien hizo contribuciones importantes a la teoría de los alerones.

La suma  $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ , que multiplica a  $h$  en la ecuación 9, se puede interpretar como una pendiente promedio, esto es, como un valor promedio de  $f(t, y)$ . Nótese que  $k_{n1}$  es la pendiente en el extremo izquierdo del intervalo;  $k_{n2}$  es la pendiente en el punto medio empleando la fórmula de Euler para pasar de  $t_n$  a  $t_n + h/2$ ;  $k_{n3}$  es una segunda aproximación a la pendiente en  $t_n + h/2$  empleando la pendiente  $k_{n2}$  para pasar de  $t_n$  a  $t_n + h/2$  y, finalmente  $k_{n4}$  es la pendiente en el extremo derecho del intervalo empleando la fórmula de Euler con la pendiente  $k_{n3}$  para pasar de  $t_n$  a  $t_n + h$ . Es posible demostrar que el error de discretización local es proporcional a  $h^5$  en el caso del método de Runge-Kutta; por lo que es un método muy exacto. Por ejemplo, si se reduce el tamaño del paso en un factor de 4, el error se reduce en un factor de  $4^5$ , o sea 1024.

### EJEMPLO 3

Emplear el método de Runge-Kutta con  $h = 0.2$  para calcular un valor aproximado de la solución  $y = \phi(t)$  para  $t = 0.2$  del problema con valor inicial (4).

$$y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1.$$

Como  $h = 0.2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} k_{01} &= f(0, 1) = 5, & hk_{01} &= 1 \\ k_{02} &= f(0 + 0.1, 1 + 0.5) = 6.9, & hk_{02} &= 1.38 \\ k_{03} &= f(0 + 0.1, 1 + 0.69) = 7.66, & hk_{03} &= 1.532 \\ k_{04} &= f(0 + 0.2, 1 + 1.532) = 10.928. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \frac{0.2}{6} [5 + 2(6.9) + 2(7.66) + 10.928] \\ &= 1 + 1.5016 = 2.5016. \end{aligned}$$

En la tabla 10.3 se presentan algunos resultados adicionales. Éstos indican que la exactitud del método de Runge-Kutta es razonable, aun con un tamaño de paso mayor. Por ejemplo, para  $h = 0.2$ , la aproximación de Runge-Kutta para este ejemplo tiene un error menor que 1 por ciento para el intervalo  $0 \leq t \leq 1$ . Se puede alcanzar una exactitud mucho mayor empleando un valor menor de  $h$ . Para este problema, con  $h = 0.01$ , obtenemos resultados correctos hasta al menos cinco decimales en el intervalo  $0 \leq t \leq 1$ .

Obsérvese que el método de Runge-Kutta necesita cuatro evaluaciones de la función en cada paso. Así, para  $h = 0.1$  necesitamos diez pasos y cuarenta evaluaciones de la función para pasar de  $t = 0$  a  $t = 1$ . En comparación, el método de Euler mejorado para  $h = 0.05$  también necesita cuarenta evaluaciones de la función para atravesar el mismo intervalo. En las tablas 10.2 y 10.3 es fácil ver que el método de Runge-Kutta es muy superior en términos de exactitud. ■



**Tabla 10.3** Comparación de resultados para la solución numérica del problema con valor inicial  $y' = 1 - t + 4y$ ,  $y(0) = 1$ .

$t$	Euler $h = 0.1$	Euler mejorado $h = 0.1$	Runge-Kutta		Exacto
			$h = 0.2$	$h = 0.1$	
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5000000	1.5950000		1.6089333	1.6090418
0.2	2.1900000	2.4636000	2.5016000	2.5050062	2.5053299
0.3	3.1460000	3.7371280		3.8294145	3.8301388
0.4	4.4774000	5.6099494	5.7776358	5.7927853	5.7942260
0.5	6.3241600	8.3697252		8.7093175	8.7120041
0.6	8.9038240	12.442193	12.997178	13.047713	13.052522
0.7	12.505354	18.457446		19.507148	19.515518
0.8	17.537495	27.348020	28.980768	29.130609	29.144880
0.9	24.572493	40.494070		43.473954	43.497903
1.0	34.411490	59.938223	64.441579	64.858107	64.897803

Como se ve en este ejemplo, el método de Runge-Kutta es un procedimiento práctico para la solución numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden. Es directo en cuanto a su programación y da una buena combinación de simplicidad y exactitud. Hasta el momento en que el lector haya progresado lo suficiente en su comprensión de las sutilezas de las ecuaciones diferenciales y del cómputo numérico, el método de Runge-Kutta resulta adecuado para comenzar cuando se necesite la solución numérica de una ecuación diferencial.

## PROBLEMAS

En los primeros 16 problemas siguientes se pide el cálculo de valores aproximados de la solución de una ecuación diferencial dada. Los problemas 1 a 8 se pueden resolver con una calculadora de bolsillo, si es necesario, aunque es deseable una calculadora programable. Para los problemas 9 a 16 se debe tener cuando menos una calculadora programable o una microcomputadora. En todos estos problemas se redondean las respuestas a seis dígitos. Al trabajar en ellos se debe poner atención a los efectos del empleo de diferentes métodos y distintos tamaños de paso.

En los problemas 1 y 2:

- (a) Calcular los valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial para  $t = 0.1$ ,

0.2, 0.3 y 0.4 empleando el método de Euler para  $h = 0.1$ .

- (b) Repetir la parte (a) con  $h = 0.05$ . Comparar los resultados con los de la parte (a).  
 (c) Repetir la parte (a) empleando el método de Euler mejorado para  $h = 0.1$ .  
 (d) Calcular valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial cuando  $t = 0.2$  y 0.4 mediante el método de Runge-Kutta para  $h = 0.2$ .  
 (e) Calcular la solución exacta  $y = \phi(t)$  del problema dado con valor inicial y calcular su valor cuando

## 584 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

$t = 0.1, 0.2, 0.3$  y  $0.4$ . Comparar estos valores con los de las partes (a) a (d).

- Ⓐ 1.  $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$   
 Ⓑ 2.  $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$

En los problemas 3 a 8:

(a) Calcular valores aproximados de la solución al problema dado con valor inicial para  $t = t_0 + 0.1, t_0 + 0.2, t_0 + 0.3$  y  $t_0 + 0.4$  mediante el método de Euler para  $h = 0.1$ .

(b) Repetir la parte (a) empleando el método de Euler mejorado para  $h = 0.1$ .

(c) Calcular valores aproximados de la solución del problema dado con valor inicial para  $t = t_0 + 0.2$  y  $t_0 + 0.4$  empleando el método de Runge-Kutta para  $h = 0.2$ .

- Ⓒ 3.  $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$   
 Ⓒ 4.  $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$   
 Ⓒ 5.  $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$   
 Ⓒ 6.  $y' = 2t + e^{-y}, \quad y(0) = 1$   
 Ⓒ 7.  $y' = \frac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(1) = 2$   
 Ⓒ 8.  $y' = (t^2 - y^2)\text{sen } y, \quad y(0) = -1$

En los problemas 9 a 12 calcular un valor aproximado de la solución al problema dado con valor inicial cuando  $t = t_0 + 1$ .

- (a) Empleando el método de Euler para  $h = 0.025$ .  
 (b) Empleando el método de Euler para  $h = 0.0125$ .  
 (c) Empleando el método de Euler mejorado para  $h = 0.05$ .  
 (d) Empleando el método de Euler mejorado para  $h = 0.025$ .  
 (e) Empleando el método de Runge-Kutta con  $h = 0.1$ .

(f) Empleando el método de Runge-Kutta con  $h = 0.05$ .

Nótese que se necesitan 40 evaluaciones de la función en las partes (a), (c) y (e), mientras que en las partes (b), (d) y (f) se necesitan 80. Comparar los resultados obtenidos con los diversos métodos.

- Ⓒ 9.  $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$   
 Ⓒ 10.  $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$   
 Ⓒ 11.  $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$   
 Ⓒ 12.  $y' = 2t + e^{-y}, \quad y(0) = 1$

En los problemas 13 a 16, calcular un valor aproximado de la solución del problema dado con valor inicial cuando  $t = t_0 + 1$ .

(a) Empleando el método de Runge-Kutta para  $h = 0.025$ .

(b) Empleando el método de Runge-Kutta para  $h = 0.01$ .

Comparar estos resultados con los de las partes (e) y (f) de los problemas 9 a 12.

- Ⓒ 13.  $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$   
 Ⓒ 14.  $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$   
 Ⓒ 15.  $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$   
 Ⓒ 16.  $y' = 2t + e^{-y}, \quad y(0) = 1$

\*17. Considere la ecuación diferencial  $y' = f(t)$ ; esto es,  $f$  no depende de  $y$ . Demostrar que en este caso la fórmula del método de Euler mejorado se reduce a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(t_n) + f(t_{n+1})].$$

Demostrar que esto es equivalente a la regla del trapecioide para evaluar una integral definida.

\*18. Con las mismas condiciones que las del problema 17, demostrar que el método de Runge-Kutta se reduce a la regla de Simpson para evaluar una integral definida.

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 10 resolver el problema dado con valor inicial.

1.  $(e^x + e^{-x}) y' + (e^x - e^{-x}) y = e^x, \quad y(0) = 1$   
 2.  $xy' + y = \ln x, \quad y(1) = 1$



3.  $\cos x y' + \sin x y = \sec x, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

4.  $y' - 2ty = e^{t^2}, \quad y(0) = 0$

5.  $y' - e^y = e^{-e^t} y^2, \quad y(0) = 1$

6.  $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(\frac{1}{2}) = 1$

7.  $y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$

8.  $yy' + x = 1, \quad y(1) = 1$

9.  $\frac{dy}{dx} = \frac{4+y^2}{y}, \quad y(0) = -1$

10.  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x(2e^x - 7)}{2y - 4}, \quad y(0) = 4$

En los problemas 11 a 14 calcular un valor aproximado de la solución del problema dado con valor inicial cuando  $t = t_0$  y empleando

(a) el método de Euler para  $h = 0.01$ ;

(b) el método mejorado de Euler para  $h = 0.025$  y  $h = 0.01$ ;

(c) el método de Runge-Kutta para  $h = 0.05$  y  $h = 0.025$ .

11.  $ty' = y + te^{y/t}, \quad y(1) = 0$

12.  $2y + 1 + \left(\frac{t^2 - y}{t}\right)y' = 0, \quad y(0) = 1$

13.  $ty' - y = (ty)^{1/2}, \quad y(1) = 2$

14.  $y' = -\frac{3t^2y + y^2}{3t^3 + 3yt}, \quad y(1) = -2$

15. Empleando el método de Runge-Kutta para  $h = 0.05$ , calcular valores aproximados de la solución al problema con valor inicial para la ecuación logística

$$\frac{dy}{dt} = 0.5 y \left(1 - \frac{y}{10}\right), \quad y(0) = 1$$

cuando  $t = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ . El valor exacto de  $y(6)$  es  $6.905679$ , con seis cifras decimales.

16. Empleando el método de Runge-Kutta para  $h = 0.05$ , calcular valores aproximados de la solución del problema con valor inicial para la ecuación de Gompertz

$$\frac{dy}{dt} = 0.5 y \ln \left(\frac{10}{y}\right), \quad y(0) = 1$$

cuando  $t = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ . El valor exacto de  $y(6)$  es  $8.816880$ , con seis cifras decimales. Comparar las respuestas que se obtengan con las del problema 15.

17. El isótopo radiactivo plutonio 241 se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si la semivida, que es el período durante el cual la masa se reduce a la mitad de su valor original, de plutonio 241 es de 13.20 años, deducir una ecuación para el decaimiento o desintegración del isótopo, suponiendo que al principio hay  $P_0$  mg presentes. Si hoy se tiene 50 mg de plutonio, ¿cuánto quedará dentro de 10 años?

18. Un determinado material radiactivo tiene una semivida de 10 días. ¿Qué tiempo debe pasar para que una masa dada de este material se reduzca al uno por ciento de su cantidad original?

Una ecuación diferencial de segundo orden es aquella en la cual la segunda derivada de la función indeterminada es el orden mayor de la derivada que aparece. En los problemas 19 a 22 emplear el cambio de variable  $y' = u$  para reducir la ecuación dada de segundo orden a una de primer orden. A continuación, resolver el problema con valor inicial.

19.  $y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

20.  $y'y'' + x = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

21.  $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

22.  $xy'' + y' = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$





# CÁLCULO

## Capítulo 11

### Formas indeterminadas, regla de L'Hospital e integrales impropias

En este capítulo ampliaremos el cálculo del límite de una función y la evaluación de una integral para abarcar algunos casos importantes que todavía no hemos descrito. El teorema 2.3.1 trata del álgebra de los límites y, como hemos visto en forma repetida, es de importancia fundamental tanto para la teoría como para el cálculo de límites de funciones específicas. Sin embargo, hay muchos casos importantes que no cubre este teorema. Entre ellos están los límites de lo que llamamos formas indeterminadas. Un caso típico se presenta en el cociente  $f(x)/g(x)$  si  $f(x)$  y  $g(x)$  tienden a cero cuando  $x \rightarrow a$ . Entonces se dice que  $f(x)/g(x)$  es una forma indeterminada del tipo  $0/0$  cuando  $x \rightarrow a$ . Por ejemplo,

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \text{y} \quad \frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

son expresiones sencillas de la forma  $0/0$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Existe un teorema notable, debido a Johann Bernoulli, pero al que se le conoce en todos lados como la regla de L'Hospital, que nos permite determinar el límite de estas formas indeterminadas y muchas otras más, en forma rápida y elegante. Veremos algunos usos de la regla de L'Hospital en las dos secciones siguientes.

Hasta ahora, también hemos restringido la operación de integración a integrandos que están acotados y a intervalos cuya longitud es finita. A veces, pero no siempre, es posible generalizar el concepto de integración para que se aplique a integrandos o a intervalos de

integración no acotados. A estas integrales se les llama integrales impropias y se estudian en las dos últimas secciones de este capítulo.

## 11.1 FORMAS INDETERMINADAS Y LA REGLA DE L'HOSPITAL

El teorema 2.3.1(d) afirma que si existe el  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad (1)$$

siempre que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \neq 0$ , entonces  $f(x)/g(x)$  se hace no acotado y, en consecuencia, no tiene límite cuando  $x \rightarrow a$ . En la terminología de la sección 2.4 puede ser cierto en este caso que  $f(x)/g(x) \rightarrow \infty$ , o que  $f(x)/g(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow a$ , o cuando  $x \rightarrow a$  por un sólo lado. A continuación, veremos el caso en que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . En este caso el lado derecho de la ecuación 1 es la expresión  $0/0$  sin significado y decimos que  $f(x)/g(x)$  es una **forma indeterminada** del tipo  $0/0$  cuando  $x \rightarrow a$ .

Hasta ahora hemos evitado estos casos o, cuando era inevitable, hemos tratado con cada caso por separado, empleando cualquier medio que parecía adecuado. En el ejemplo 9 de la sección 2.3 empleamos una construcción geométrica como ayuda para demostrar que  $(\sin x)/x \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Ahora deseamos desarrollar métodos más formales y generales para la determinación del límite de una forma indeterminada del tipo  $0/0$ , al igual que de otros tipos que se presentarán después. Necesitaremos hacer uso de una generalización del teorema del valor medio para derivadas y por tanto dirigiremos primero nuestra atención a ese resultado.

### Teorema del valor medio generalizado (de Cauchy)

El teorema del valor medio (teorema 4.1.3) relaciona los valores de una función en los extremos de un intervalo con el valor de su derivada en algún punto interior del intervalo. El teorema que sigue es semejante, excepto que involucra a dos funciones.

#### Teorema 11.1.1

Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones que satisfacen las siguientes hipótesis:

- (a)  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$ .
- (b)  $f$  y  $g$  son derivables en  $(a, b)$ .
- (c)  $g'$  nunca es cero en  $(a, b)$ .

Entonces, existe al menos un punto  $c$  en  $(a, b)$  tal que



$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (2)$$

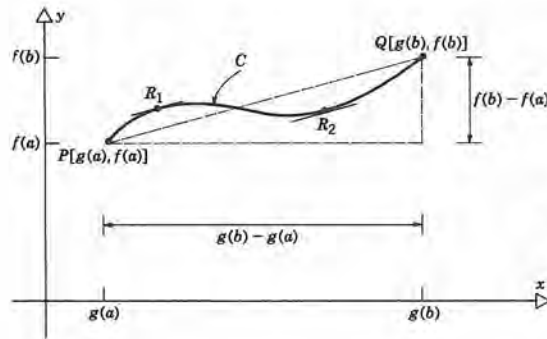


Figura 11.1.1

Está claro que el teorema 11.1.1 se reduce al teorema 4.1.3, si  $g(x) = x$ . Antes de demostrar el teorema 11.1.1, presentaremos un argumento geométrico que hace plausible el resultado. Sean  $x = g(t)$  y  $y = f(t)$  para  $a \leq t \leq b$  ecuaciones paramétricas de un arco  $C$  como el de la figura 11.1.1. Entonces

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad (3)$$

es la pendiente del segmento de recta  $PQ$  que une a los puntos extremos del arco  $C$ . Además, de acuerdo con la sección 5.5 sabemos que  $f'(t)/g'(t)$  es la pendiente de la recta tangente a  $C$  en el punto  $[g(t), f(t)]$ . El teorema dice que existe al menos un punto en el arco en el que la recta tangente es paralela al segmento de recta  $PQ$  entre los puntos extremos. En el caso que se muestra en la figura 11.1.1, hay dos valores posibles de  $c$ , que corresponden a los dos puntos  $R_1$  y  $R_2$ . La condición de que  $g'(x)$  no sea cero quiere decir que no hay ningún punto en el arco  $C$  en el que la recta tangente sea vertical. El resultado (2) en realidad es válido en condiciones algo más generales. Estas condiciones se indican en el problema 44.

**Demostración del teorema 11.1.1.** Este teorema se puede demostrar construyendo una función auxiliar a la cual se le pueda aplicar el teorema de Rolle (teorema 4.1.2). Sea

$$F(t) = f(t)[g(b) - g(a)] - g(t)[f(b) - f(a)]. \quad (4)$$

Como  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$  y como  $F$  es una combinación lineal de  $f$  y  $g$ , se infiere que  $F$  tiene también estas propiedades. Haciendo que  $t = a$  y  $t = b$ , respectivamente, vemos que

$$F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a). \quad (5)$$

En este caso  $F$  satisface las condiciones del teorema de Rolle, y por tanto hay al menos un punto  $c$  en  $(a, b)$  en el cual  $F'(c) = 0$ . Derivando la ecuación 5 y haciendo que  $t = c$ , obtenemos

$$F'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0. \quad (6)$$

Para obtener la ecuación 2 a partir de la ecuación 6 debemos dividir entre  $g'(c)$  y entre  $[g(b) - g(a)]$ ; por tanto, nos debemos asegurar de que ninguna de esas cantidades puedan ser cero. La hipótesis (c) afirma que  $g'(x)$  nunca es cero; por consiguiente  $g'(c) \neq 0$  independientemente de la ubicación del punto  $c$ . Además, si  $g(b) = g(a)$ , entonces el teorema de Rolle aplicado a  $g$  requiere que haya al menos un punto  $\hat{c}$  en  $(a, b)$  tal que  $g'(\hat{c}) = 0$ . Como debido a la hipótesis (c) no puede existir un punto  $\hat{c}$  de esos, sabemos que  $g(b) \neq g(a)$ . Por lo que podemos dividir a la ecuación 6 entre  $g'(c)[g(b) - g(a)]$  con el siguiente resultado:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad (7)$$

lo que completa la demostración del teorema 11.1.1.  $\square$

## La regla de L'Hospital

Estamos en posibilidad de describir el resultado principal de esta sección, que se llama la regla de L'Hospital.\* Es un medio para evaluar los límites de muchas formas indeterminadas.

### Teorema 11.1.2

#### (Regla de L'Hospital)

Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones derivables en un intervalo abierto  $a < x < b$ , y que

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0, \quad (8)$$

o bien

\* Guillaume F. A. de L'Hospital (1661-1704), fue un noble francés, alumno y protector a la vez de Johann Bernoulli. En 1696 publicó el primer texto de cálculo, *L'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*, influyente libro que permaneció como referencia de rigor hasta muy entrado el siglo XVIII. Entre otras cosas, presentaba un enunciado de lo que se conoce ahora como la regla de L'Hospital, resultado que en realidad había sido descubierto por Johann Bernoulli en 1694.

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty \quad (9)$$

donde se permite todas las combinaciones de los signos más y menos en la ecuación 9. Supongamos además que  $g'(x)$  nunca es cero en  $(a, b)$  y que

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \quad (10)$$

donde  $L$  es un número finito,  $\infty$ , o  $-\infty$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \quad (11)$$

Hemos enunciado el teorema 11.1.2 con límites cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha, pero si se satisfacen las hipótesis en un intervalo  $b < x < a$ , entonces el enunciado del teorema también es válido para los límites por la izquierda ( $x \rightarrow a^-$ ). Si se satisfacen las hipótesis por ambos lados de  $x = a$ , entonces el teorema es válido para los límites cuando  $x \rightarrow a$  de modo irrestricto. Por el momento supondremos que  $a$  es finito, aunque en la siguiente sección tendremos en cuenta casos para los cuales  $x \rightarrow \pm\infty$ . Al final de esta sección se da la demostración del teorema 11.1.2. Mientras tanto, presentaremos algunos ejemplos representativos de su utilidad.

### EJEMPLO 1 (0/0)

Calcular el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \quad (12)$$

Si hacemos que  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , y que  $g(x) = x$ , se satisfacen las condiciones del teorema 11.1.2, en un intervalo abierto, a cada lado de  $x = 0$ . Como  $f'(x) = \cos x$  y  $g'(x) = 1$ , el teorema 11.1.2 nos dice que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1}, \quad (13)$$

siempre que el límite del lado derecho de la ecuación 13 sea un número finito o bien  $\pm\infty$ . Sin embargo, la expresión  $(\cos x)/1$  no está indeterminada, y su límite es 1 cuando  $x \rightarrow 0$ . Así,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \quad \blacksquare \quad (14)$$



Recuérdese que en la sección 3.6 necesitamos el valor límite de  $(\sin x)/x$  para determinar la derivada de  $\sin x$ . Podrá ser tentador pensar que podríamos haber empleado la regla de L'Hospital para evitar la deducción más complicada de este límite que presentamos en el ejemplo 9 de la sección 2.3. Sin embargo, esto sería pensar de manera falaz. No podemos emplear la regla de L'Hospital para determinar el  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x$  sino hasta haber deducido la fórmula de derivación de  $\sin x$  en forma independiente.

### EJEMPLO 2 (0/0)

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad (15)$$

Anteriormente en esta sección hicimos notar que se trata de una forma indeterminada. Empleando la regla de L'Hospital obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}, \quad (16)$$

siempre y cuando exista el límite del lado derecho de esta ecuación, o que sea  $\pm\infty$ . La expresión  $(\sin x)/2x$  está indeterminada cuando  $x \rightarrow 0$ , pero si aplicamos otra vez la regla de L'Hospital, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}. \quad (17)$$

Así, combinando las ecuaciones 16 y 17 tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Este ejemplo muestra que podría necesitarse aplicar la regla de L'Hospital más de una vez para evaluar el límite de una forma indeterminada. ■

### EJEMPLO 3 (0/0)

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan 2x}{x^2}. \quad (19)$$

Se trata de nuevo de una forma indeterminada del tipo 0/0 cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Empleamos la regla de L'Hospital y obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sec^2 2x}{2x} = \infty, \quad (20)$$

ya que  $\sec 2x \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Éste es un ejemplo del caso en el que  $L$  es infinito.

Existe un peligro potencial al emplear la regla de L'Hospital, que es la posibilidad de emplearlo de manera repetida sin comprobar en cada etapa que la expresión que se maneja sea realmente indeterminada. En este ejemplo, la expresión  $(2 \sec^2 2x)/2x$  no es indeterminada. Sin embargo, si no lo hubiéramos notado, pudiéramos haber tratado de emplear por segunda vez la regla de L'Hospital; con ello hubiéramos llegado a la conclusión errónea de que el límite requerido es igual a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8 \sec^2 2x \tan 2x}{2},$$

que es cero. Así, antes de emplear la regla de L'Hospital, se debe comprobar y estar seguro de que en realidad la expresión sea indeterminada. ■

#### EJEMPLO 4 ( $\infty/\infty$ )

Calcular el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}. \quad (21)$$

Empleamos la regla de L'Hospital y tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc^2 x},$$

siempre que podamos evaluar este límite. Sin embargo, para  $x \neq 0$ ,

$$\frac{1/x}{-\csc^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{x} = -(\sin x) \left( \frac{\sin x}{x} \right) \rightarrow -(0)(1) = 0$$

cuando  $x \rightarrow 0^+$ . También, podemos emplear la regla de L'Hospital por segunda vez para evaluar el  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)/x$ . De cualquier modo, se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = 0. \quad \blacksquare \quad (22)$$

#### EJEMPLO 5 (0/0)

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{(\pi - x)^2}. \quad (23)$$

Este ejemplo muestra el empleo de la regla de L'Hospital en un punto  $a$  distinto de cero. De acuerdo con esta regla obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{(\pi - x)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sec^2 x}{-2(\pi - x)}. \quad (24)$$

La expresión del lado derecho de esta ecuación no tiene límite, ya que cuando  $x \rightarrow \pi$  su numerador tiende a uno, mientras que su denominador tiende a cero. Así,  $(\tan x)/(\pi - x)^2$  no tiene cota cuando  $x \rightarrow \pi$ . Para examinar la naturaleza del no acotamiento consideramos los límites laterales correspondientes y encontramos que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\tan x}{(\pi - x)^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\tan x}{(\pi - x)^2} = +\infty. \quad (25)$$

A veces encontramos formas indeterminadas que no son del tipo  $0/0$  ni  $\infty/\infty$ . Por ejemplo otras dos indeterminaciones que se presentan con frecuencia tienen la forma  $\infty - \infty$ , ó  $0 \cdot \infty$ . Una manera de manejar esas expresiones es reformularlas como  $0/0$  o  $\infty/\infty$ , para entonces aplicar la regla de L'Hospital. Los dos ejemplos siguientes muestran este procedimiento.

### EJEMPLO 6 ( $\infty - \infty$ )

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \csc x \right). \quad (26)$$

Esta expresión es un ejemplo de una forma indeterminada del tipo  $\infty - \infty$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Para emplear la regla de L'Hospital, reformulamos la expresión de modo que tenga la forma  $0/0$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Si  $x \neq 0$  y  $|x| < \pi$ , tenemos que

$$\frac{1}{x} - \csc x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x},$$

y esta última expresión tiene la forma  $0/0$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Al emplear la regla de L'Hospital obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \csc x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right), \end{aligned}$$



siempre que exista el último límite, o que sea  $\pm\infty$ . Observamos que  $\cos x - 1 \rightarrow 0$  y que  $\sin x + x \cos x \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Por consiguiente, seguimos teniendo una forma indeterminada del tipo  $0/0$  cuando  $x \rightarrow 0$ . Empleamos una vez más la regla de L'Hospital y obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right).$$

Este último límite es cero, porque el numerador tiende a cero y el denominador tiende a dos. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \csc x \right) = 0. \quad (27)$$

Vemos de nuevo que podemos necesitar el empleo de la regla de L'Hospital más de una vez para calcular el límite de una forma indeterminada. ■

### EJEMPLO 7 ( $0 \cdot \infty$ )

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x. \quad (28)$$

Para emplear la regla de L'Hospital, debemos escribir primero  $x \ln x$  de tal modo que tenga la forma  $0/0$  ó  $\infty/\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Escogemos la última,

$$x \ln x = \frac{\ln x}{1/x},$$

en la cual el numerador y el denominador del lado derecho se hacen infinitos cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Al emplear la regla de L'Hospital obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1/x}{-1/x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Por último, veamos qué sucede si escribimos  $x \ln x$  en la forma  $0/0$ . Tenemos entonces

$$x \ln x = \frac{x}{1/\ln x},$$

y al tratar de emplear la regla de L'Hospital obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1/\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-(1/\ln x)^2(1/x)} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(1/\ln x)^2}.\end{aligned}$$

Así, hemos obtenido otra forma indeterminada, que es más complicada que la del problema original. Si se prosiguen los intentos de emplear la regla de L'Hospital se llega a más complicaciones, pero no obtenemos el resultado. Este ejemplo muestra que puede haber distintos modos de contemplar el mismo problema y que un método puede ser mejor que otro. Al tratar con formas indeterminadas en las que intervienen logaritmos y polinomios, con frecuencia se aconseja amoldar el problema de tal manera que la derivación elimine al logaritmo. Esto fue lo que se hizo en el primer planteamiento de este ejemplo, pero no en el segundo. ■

**Demostración del teorema 11.1.2.** Damos una demostración para el caso en que sea válida la ecuación 8. Aunque  $f$  y  $g$  tienen límites cero cuando  $x \rightarrow a^+$ , estas funciones pueden no ser continuas en  $a$  por la derecha, ya sea porque  $f(a)$  y  $g(a)$  no están definidas, o porque no son iguales al valor límite. Sin embargo, si definimos (o, si es necesario, redefinimos) a  $f(a) = 0$  y  $g(a) = 0$ , y seleccionamos a  $x$  en el intervalo  $(a, b)$ , entonces  $f$  y  $g$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, x]$ . También son derivables en el intervalo abierto  $(a, x)$  y  $g'(x)$  nunca es cero en ese intervalo. Así, el teorema 11.1.1 se puede aplicar a  $f$  y  $g$  en el intervalo  $[a, x]$  y el resultado es

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad (30)$$

para algún  $c$  entre  $a$  y  $x$ . Como  $f(a) = g(a) = 0$ , la ecuación 30 se transforma en

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Por último, si dejamos que  $x \rightarrow a^+$ , notando que para ello se necesita que  $c \rightarrow a^+$  también, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L,$$

con lo cual se completa la demostración para el caso en el que  $f$  y  $g$  tienen límite cero cuando  $x \rightarrow a^+$ . En los casos en que  $f$  y  $g$  tienden a  $\pm \infty$ , la demostración es algo más difícil y por tanto se omite; sin embargo, véase el problema 43. □

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 35, evaluar el límite dado. En algunos de esos problemas la regla de L'Hospital no es la herramienta adecuada y si se usa ésta en forma descuidada puede conducir a un resultado incorrecto.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$
8.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{2}{\pi - 2x} - \tan x\right)$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} + 1}{e^x - 1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + (1/x))}{1/\sqrt{x}}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^3}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{2x^2}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-q}}, \quad q > 0$
16.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{1/x}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$
20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \quad a > b > 0$
21.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x - \tan x)$
22.  $\lim_{x \rightarrow 1} x \ln x$
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{x}$
24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot ax}{\cot bx}, \quad a > 0, \quad b > 0$
26.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{x^2 - 16}$
27.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x + 6)^{1/3} - 2}$

28.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a}, \quad a \neq 0$
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\arcsin x}$
30.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|\ln x|}{\ln x}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\arcsin x - x}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x \sin^2 x}$
34.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(\sin 2x)(\sin 3x)}{x \sin 4x}$
35.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$
36. (a) Sea  $f$  continua en alguna vecindad del origen. Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}.$$

- (b) Si  $f$  también es derivable en alguna vecindad del origen y si  $f(0) = 0$ , evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}.$$

37. Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x \sin t dt\right)^2}{\int_0^x \sin t^2 dt}.$$

38. Calcular el valor de  $a$  para el cual

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin x - x}{x^3}$$

es finito y evaluar el límite en este caso.

39. Determinar los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - b}{2x^2} = -1.$$



40. Sea  $P$  un punto del círculo unitario en el primer cuadrante (véase figura 11.1.2). El segmento de recta  $AQ$  es tangente al círculo y su longitud es la misma que la longitud del arco  $AP$ . La recta que pasa por  $P$  y  $Q$  interseca al eje  $x$  en  $B$ . Determinar la posición límite de  $B$  cuando  $P \rightarrow A$ .

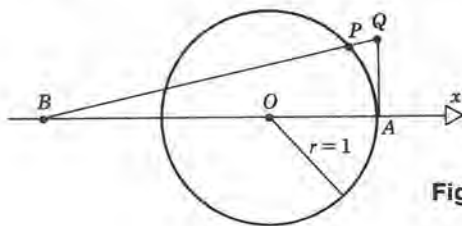


Figura 11.1.2

41. Se tiene el caso que se muestra en la figura 11.1.3. Sean

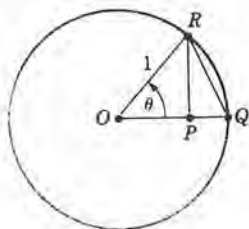


Figura 11.1.3

$a(\theta)$  = área del triángulo  $PQR$

$b(\theta)$  = área del sector  $OQR$  menos el área del triángulo  $OPR$

$c(\theta)$  = área del sector  $OQR$  menos el área del triángulo  $OQR$

(a) Determinar  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{a(\theta)}{c(\theta)}$ .

(b) Determinar  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ .

42. Se deja caer una partícula de masa  $m$  partiendo del reposo bajo la influencia de la gravedad, en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad de la partícula.

- (a) Demostrar que la velocidad en el tiempo  $t$  es la solución del problema con valor inicial

$$m \frac{dv}{dt} + kv = mg, \quad v(0) = 0. \quad (i)$$

Véase la explicación que precede al problema 27 de la sección 10.2.

- (b) Hallar  $v$  en cualquier tiempo  $t$  y determinar el valor límite de  $v$  cuando  $k \rightarrow 0$ . Esto es, cuando la resistencia del aire tiende a cero.
- (c) El resultado que se encontró en (b), ¿es el mismo que el que se determinó en la ecuación (i) al hacer  $k = 0$  y resolviendo entonces el problema con valor inicial?

- \*43. Suponer que  $f$  y  $g$  satisfacen las condiciones de la regla de L'Hospital (teorema 11.1.2) con

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty.$$

Suponer también que existe  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)/g'(x)$ . Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

*Sugerencia:* nótese que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)},$$

y que la última expresión es una forma indeterminada del tipo  $0/0$ . Nótese también que en este problema suponemos la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)/g(x)$ . ¿Dónde se usó esta hipótesis en el argumento? No se hizo la hipótesis en el caso  $0/0$  que se vio en el texto. No se requiere tampoco en esta parte para el caso  $\infty/\infty$ , pero la demostración es mucho más difícil sin este requisito.

- \*44. La conclusión del teorema del valor medio generalizado sigue siendo válida con hipótesis algo más generales que las que se dieron en el teorema 11.1.1 en el texto. Supongamos que  $f$  y  $g$  satisfacen las hipótesis (a) y (b) del texto, y que también cumplen con:

(c)  $g(b) \neq g(a)$ ;

(d) No hay punto en  $(a, b)$  en el que  $f'$  y  $g'$  sean cero.

Demostrar que es válida la ecuación 2 del texto bajo estas condiciones.

*Sugerencia:* se necesita demostrar que  $g'(c) \neq 0$ . Emplear la ecuación 6 del texto y la condición (c) de arriba para demostrar que si  $g'(c) = 0$ , entonces  $f'(c) = 0$  también, lo cual viola la condición (d).

*Nota.* El significado de este resultado es que generaliza el teorema para abarcar arcos que puedan tener tangentes verticales. Un caso típico se muestra en la

figura 11.1.4, en la cual  $R_1, R_2$  y  $R_3$  indican puntos que corresponden a valores posibles de  $c$ .

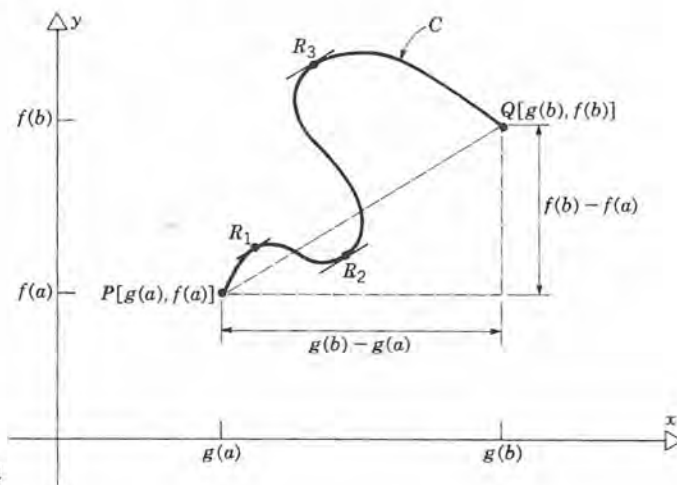


Figura 11.1.4

## 11.2 OTRAS FORMAS INDETERMINADAS; EXTENSIONES DE LA REGLA DE L'HOSPITAL

En la sección anterior describimos un procedimiento que se conoce como la regla de L'Hospital, para calcular el límite de una forma indeterminada del tipo  $0/0$  ó  $\infty/\infty$  en un punto finito  $x = a$ . En los ejemplos 6 y 7 de la sección 11.1, indicamos cómo se podía aplicar también la regla de L'Hospital a algunas formas indeterminadas del tipo  $\infty - \infty$  y  $0 \cdot \infty$ . En todos estos casos el problema consiste, en realidad, en descubrir *si una de las dos influencias que intervienen es dominante*, o bien *si las dos influencias se equilibran*. Por ejemplo, para una forma del tipo  $0/0$  ¿tiende el numerador a cero apreciablemente más rápido que el denominador, o el caso es al revés, o tienden a cero en forma parecida el numerador y el denominador? Como hemos visto, la regla de L'Hospital nos proporciona un medio para resolver esas preguntas, y con frecuencia con bastante facilidad.

Comenzaremos esta sección presentando una extensión de la regla de L'Hospital para casos en los cuales se toma el límite al infinito, en lugar de hacerlo en un punto finito.

### Teorema 11.2.1

(Regla de L'Hospital)

Supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, \quad (1)$$

o que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty, \quad (2)$$

en las cuales se permiten todas las combinaciones de los signos más y menos en la ecuación 2. También, supongamos que  $f$  y  $g$  son derivables cuando  $x > M$ , siendo  $M$  un número positivo y que  $g'(x)$  nunca es cero cuando  $x > M$ . Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

donde  $L$  es un número finito, o  $\infty$  o  $-\infty$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

El teorema se puede modificar obviamente si  $x \rightarrow -\infty$ .

**Demostración del teorema 11.2.1.** Para el caso de la hipótesis (1), se puede llevar a cabo la demostración transformando el problema en uno para el que se puede emplear el teorema 11.1.2. Sea  $x = 1/t$ ; entonces  $x \rightarrow \infty$  quiere decir que  $t \rightarrow 0^+$ . En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)}. \quad (3)$$

El lado derecho de la ecuación 3 involucra al límite de una forma indeterminada del tipo  $0/0$  en el origen. Así, la versión de la regla de L'Hospital que se dio en el teorema 11.1.2 sí se puede aplicar. Empleando la regla de la cadena para calcular las derivadas que sea necesario, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(-1/t^2)f'(1/t)}{(-1/t^2)g'(1/t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Por último, cambiando la variable de  $t$  a  $x$ , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \quad (5)$$

La prueba se completa combinando las ecuaciones 3, 4 y 5.

La prueba para el caso de la hipótesis (2) es considerablemente más difícil, y se omite.  $\square$

A continuación veremos algunos ejemplos del teorema 11.2.1. Los primeros dos



ejemplos dan resultados cualitativos importantes en algunas de las funciones elementales.

### EJEMPLO 1 ( $\infty/\infty$ )

Determinar el valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p}, \quad p > 0. \quad (6)$$

Haciendo uso del teorema 11.2.1, tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{px^p} = 0, \quad p > 0. \quad (7)$$

Nótese que el valor límite de cero es independiente de  $p$ . Así,  $\ln x$  crece con mucho más lentitud que cualquier potencia positiva de  $x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , sin importar lo pequeño que sea el exponente. En otras palabras, el *crecimiento algebraico, por lento que sea, domina al crecimiento logarítmico*. ■

### EJEMPLO 2 ( $\infty/\infty$ )

Determinar el valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}, \quad n \text{ es un entero positivo.} \quad (8)$$

Empleando el teorema 11.2.1 en forma repetida tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (2)x}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

El resultado sigue siendo válido si  $n$  se sustituye por cualquier número positivo  $\nu$ , esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\nu}{e^x} = 0, \quad \nu > 0. \quad (10)$$

Para comprobarlo podemos observar que si  $n$  es un entero tal que  $n \geq \nu$ , y si  $x \geq 1$ , entonces

$$0 \leq \frac{x^v}{e^x} \leq \frac{x^n}{e^x}.$$

Como  $x^n/e^x \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , la ecuación 10 se obtiene de acuerdo con el principio del emparedado para los límites (teorema 2.3.4). Como en el ejemplo 1, el resultado (10) es independiente del exponente  $v$ . Así, cuando  $x \rightarrow \infty$ , la función exponencial  $e^x$  crece con mucha mayor rapidez que cualquier potencia de  $x$ , no importa cuán grande sea. En otras palabras, *el crecimiento exponencial domina al crecimiento algebraico*. ■

Un ejemplo dramático del significado de los crecimientos logarítmico, algebraico y exponencial se tiene en relación con los algoritmos numéricos para la solución de problemas como la determinación del flujo máximo en una red de comunicaciones o de transportes. La complejidad de un algoritmo se expresa en términos del número de operaciones necesarias para ejecutarlo en un problema general. Por ejemplo, para un problema de una red que tiene  $n$  eslabones que conectan a un conjunto de puntos, un determinado algoritmo podría necesitar de un número de pasos proporcional a  $n^3$  o a  $2^n$ , o a alguna otra función de  $n$ . Los algoritmos que requieren un número exponencial de pasos se hacen demasiado tardados cuando los problemas son de tamaño relativamente modesto.

**Tabla 11.1** Tiempo necesario para implementar algoritmos numéricos de diversa complejidad en problemas de diferentes tamaños

$n$	10	20	50	100	500	1000
$n \ln n$	0.00002 seg	0.00006 seg	0.0002 seg	0.0005 seg	0.003 seg	0.007 seg
$n^2$	0.0001 seg	0.0004 seg	0.0025 seg	0.01 seg	0.25 seg	1 seg
$n^3$	0.001 seg	0.008 seg	0.125 seg	1 seg	2.1 min	17 min
$2^n$	0.001 seg	1 seg	36 años	$4 \times 10^{14}$ siglos		

Suponiendo que se ejecuta un paso cada microsegundo, la tabla 11.1 muestra los tiempos necesarios para resolver problemas de varios tamaños, mediante algoritmos cuyo número de operaciones es  $n \ln n$ ,  $n^2$ ,  $n^3$  y  $2^n$ , respectivamente. Una comparación de los elementos para  $n = 100$  da una impactante confirmación de las diferencias entre el crecimiento logarítmico, el algebraico y el exponencial.

### EJEMPLO 3 (0/0)

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[1 + (1/x)]}{(\pi/2) - \arctan x}. \quad (11)$$

De acuerdo con el teorema 11.2.1, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[1 + (1/x)]}{(\pi/2) - \arctan x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1/x^2)}{[1 + (1/x)] [1/(1 + x^2)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^2}{x(x + 1)} = 1. \quad \blacksquare\end{aligned}\quad (12)$$

Veamos ahora otros tipos de formas indeterminadas. En especial, buscamos expresiones del tipo  $0^0$ ,  $\infty^0$  o  $1^\infty$  cuando la variable independiente tiende a un punto finito, o al infinito. Veremos primero un ejemplo.

### EJEMPLO 4 ( $0^0$ )

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x. \quad (13)$$

La expresión  $x^x$  para  $x$  pequeño y positivo nuevamente involucra a dos efectos en competencia. Si domina la  $x$  del exponente, entonces se espera que el límite sea uno, ya que  $a^0 = 1$  para cualquier  $a$  positiva. Por otro lado, si domina la  $x$  de la base, entonces posiblemente el límite sea cero, ya que  $0^b = 0$  para cualquier  $b$  positiva. O bien, si hay determinado tipo de equilibrio, entonces el límite podría ser algún número entre cero y uno.

Como  $x^x$  no es una razón, no se puede aplicar la regla de L'Hospital en forma directa para determinar el límite que se necesita. Sin embargo, si tomamos el logaritmo de  $x^x$  obtendremos

$$\ln x^x = x \ln x. \quad (14)$$

La expresión  $x \ln x$  es indeterminada del tipo  $0 \cdot \infty$ . Se describió en el ejemplo 7 de la sección 11.1, en donde se demostró que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0. \quad (15)$$

Para relacionar a este resultado con  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ , ponemos la ecuación 14 en forma exponencial y así

$$x^x = \exp(x \ln x),$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x \ln x). \quad (16)$$



Además, la función exponencial es continua, y por tanto, el límite se puede tomar dentro de la exponencial. En consecuencia

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \exp \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \right] = \exp(0) = 1. \quad (17)$$

Por lo que, en este caso domina la influencia del exponente cuando la expresión tiende a cero. ■

Se pueden manejar problemas más generales de este tipo en la misma forma. Supongamos que

$$f(x) = u(x)^{v(x)},$$

en la cual  $u(x) > 0$  para  $x \neq a$ , y  $u(x) \rightarrow 0$  y  $v(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow a$ . Tomando el logaritmo natural de  $f(x)$ , obtenemos

$$\ln f(x) = v(x) \ln u(x),$$

que es una indeterminación del tipo  $0 \cdot \infty$ . Supongamos que, empleando la regla de L'Hospital, o de alguna otra manera, podemos demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) = L. \quad (18)$$

Entonces, como en el ejemplo 4,

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \exp[v(x) \ln u(x)] = \exp \left[ \lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) \right] = \exp(L). \quad (19)$$

De nuevo, el hecho de que la función exponencial es continua nos permite tomar el límite dentro de la exponencial.

Los ejemplos siguientes muestran otros tipos de indeterminaciones que pueden investigarse si primero se toman logaritmos.

### EJEMPLO 5 ( $1^\infty$ )

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x. \quad (20)$$

Al tomar el logaritmo tenemos que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x}. \quad (21)$$

Aplicamos la regla de L'Hospital a la última expresión de la ecuación anterior y vemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/x^2}{[1 + (1/x)](-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (1/x)} = 1. \quad (22)$$

Por último, aplicamos la exponencial en la ecuación 21 para recuperar la expresión original y el resultado es

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x} \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x}\right) \\ &= \exp(1) = e. \blacksquare \end{aligned} \quad (23)$$

### EJEMPLO 6 ( $1^\infty$ )

Determinar el valor de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x^2}. \quad (24)$$

Tomando el logaritmo tenemos que

$$x^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right),$$

que es del tipo  $0 \cdot \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Entonces, escribimos primero

$$x^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{\ln[1 + (2/x)]}{x^{-2}}$$

para aplicar a continuación la regla de L'Hospital (teorema 11.2.1). El resultado es

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln[1 + (2/x)]}{x^{-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2/x^2}{[1 + (2/x)](-2x^{-3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2/x)} = \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, también es cierto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[ x^2 \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) \right] = \infty. \quad \blacksquare \quad (25)$$

### EJEMPLO 7 ( $\infty^0$ )

Evaluar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{x^2})^{1/x^q} \quad (26)$$

para todo valor positivo de  $q$ .

Al tomar el logaritmo nos vemos llevados a considerar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{x^2})}{x^q},$$

que es una forma indeterminada del tipo  $\infty/\infty$ . Empleando el teorema 11.2.1, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{x^2})}{x^q} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xe^{x^2}}{(1 + e^{x^2})qx^{q-1}} \\ &= \frac{2}{q} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{1 + e^{x^2}} \right) \left( \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2-q} \right). \end{aligned}$$

El primer límite del lado derecho de esta ecuación es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{1 + e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x^2} + 1} = 1.$$

De manera que el resultado depende del segundo límite, que tiene un valor distinto, dependiendo de si  $q < 2$ ,  $q = 2$  ó  $q > 2$ . Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2-q} = \begin{cases} \infty, & 0 < q < 2; \\ 1, & q = 2; \\ 0, & q > 2, \end{cases}$$

y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{x^2})}{x^q} = \begin{cases} \infty, & 0 < q < 2; \\ 1, & q = 2; \\ 0, & q > 2. \end{cases}$$

Por consiguiente,



$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^{x^2})^{1/x^q} = \begin{cases} \infty, & 0 < q < 2; \\ e, & q = 2; \\ 1, & q > 2. \end{cases} \quad (27)$$

## Resumen

A continuación hacemos una lista de los diversos tipos de formas indeterminadas que hemos descrito en estas dos secciones, junto con una referencia que indica en dónde se puede localizar un ejemplo del tipo respectivo.

- $0/0$ : Ejemplos 1, 2, 3 y 5, de la sección 11.1;  
 Ejemplo 3 de la sección 11.2.  
 $\infty/\infty$ : Ejemplo 4 de la sección 11.1;  
 Ejemplos 1 y 2 de la sección 11.2.  
 $\infty - \infty$ : Ejemplo 6 de la sección 11.1.  
 $0 \cdot \infty$ : Ejemplo 7 de la sección 11.1.  
 $0^0$ : Ejemplo 4 de la sección 11.2.  
 $1^\infty$ : Ejemplos 5 y 6 de la sección 11.2.  
 $\infty^0$ : Ejemplo 7 de la sección 11.2.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 36 evaluar el límite que se pide

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{x}$ ,  $n$  un entero positivo

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{2^x}$ ,  $n$  un entero positivo

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{(1.01)^{x^2}}$ ,  $n$  un entero positivo

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{x/100}}$ ,  $n$  un entero positivo

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^{-x})}{\sin(1/x)}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{1/x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(\ln x^3)}$

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^2 + 9)}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^n$ ,  $n$  un entero positivo

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-ax}$ ,  $n$  un entero positivo,  $a > 0$

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{b^x}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 1$

16.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\sec x}$

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$

19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{x^2}$

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^3)^{x^{-2}}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{x^{-q}}$ ,  $q > 0$

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^p)^{x^{-q}}$ ,  $p > 0$  y  $q > 0$

18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^x$

20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^x$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \ln x$

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^{-p})^{x^q}, \quad p > 0 \quad y \quad q > 0$

28.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^p)^{x^q}, \quad p > 0 \quad y \quad q > 0$

29.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} \right)^{1/x}$

30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

31.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$

33.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x^2}$

35.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x)^{1/x}$

32.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{1/x}$

34.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x)^{1/x^2}$

36.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/4)^-} (\tan x)^{\sec 2x}$

### 11.3 INTEGRALES IMPROPIAS

En el capítulo 6 describimos integrales de la forma

$$\int_a^b f(x) dx,$$

en donde el intervalo de integración es finito y el integrando  $f$  está acotado en  $[a, b]$ . A estas integrales a veces se les llama **integrales propias**. A continuación deseamos ampliar el concepto de integración para que abarque algunos casos en los cuales el intervalo de integración es infinito, o que el integrando no está acotado en la vecindad de algún punto finito, o quizá en ambos casos. A esas integrales se les llama **integrales impropias**. Por ejemplo,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4}, \quad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}, \quad (2)$$

y

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1} \quad (3)$$

son integrales impropias. La primera integral es impropia porque el intervalo de integración es infinito, la segunda porque el integrando es no acotado cerca de  $x = 1$ , y la tercera por ambas razones.

Cuando una integral es impropia debido a más de una razón, es conveniente descomponerla en partes tales que cada una de ellas sea impropia por un solo motivo. También es conveniente arreglar el integrando de tal manera que se haga no acotado sólo en la vecindad de un punto extremo. Por ejemplo, podemos reformular la integral (3) del siguiente modo:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 - 1} + \int_1^2 \frac{dx}{x^4 - 1} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^4 - 1}. \quad (4)$$

Las primeras dos integrales del lado derecho de la ecuación 4 son impropias sólo porque

el integrando es no acotado cerca de uno de los extremos, mientras que la tercera es impropia sólo porque el intervalo de integración es infinito. Cualquier punto  $c > 1$  se podría emplear en lugar del 2 como punto de división entre las últimas dos integrales de la ecuación 4.

Primero veremos integrales que sólo sean impropias debido a que el intervalo de integración es infinito. En algunos casos, aunque no en todos, se puede asignar un valor a esas integrales de acuerdo con la definición siguiente:

**DEFINICIÓN 11.3.1** Sea  $f$  definida para  $x \geq a$  y supongamos que  $I(b) = \int_a^b f(x) dx$  existe para toda  $b > a$ . Entonces el valor de la integral impropia  $\int_a^\infty f(x) dx$  se define mediante

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (5)$$

siempre que este límite exista, o sea, que tenga un valor finito.

Si existe el límite del lado derecho de la ecuación 5, se dice entonces que la integral impropia **converge**; si no es así, **diverge**.

Tenemos una definición semejante para integrales cuyo límite inferior de integración es infinito:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (6)$$

siempre que exista este límite. Si ambos límites de integración son infinitos, entonces se puede escribir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx \quad (7)$$

en la cual  $c$  es cualquier número finito que nos convenga. La integral del lado izquierdo de la ecuación 7 converge si y sólo si convergen las dos integrales del lado derecho de esa ecuación.

## EJEMPLO 1

Determinar si converge la integral impropia

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx \quad (8)$$

y, si es así, establecer su valor.

Para toda  $b > 0$ , tenemos que



$$\int_0^b e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^b = \frac{1}{2} (1 - e^{-2b}).$$

Así, empleando la definición (5), encontramos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-2b}) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Por tanto, la integral impropia (8) converge y tiene el valor  $\frac{1}{2}$ .

En forma más general, para toda  $c > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-cx} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-cx} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{c} (1 - e^{-cb}) = \frac{1}{c}. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (10)$$

### EJEMPLO 2

Determinar si converge la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{2x}{(x^2 + 1)^{3/4}} dx \quad (11)$$

y, si es así, hallar su valor.

Para toda  $b > 0$  tenemos que

$$\int_0^b \frac{2x}{(x^2 + 1)^{3/4}} dx = 4(x^2 + 1)^{1/4} \Big|_0^b = 4[(b^2 + 1)^{1/4} - 1].$$

Así, empleando la definición (5),

$$\int_0^\infty \frac{2x}{(x^2 + 1)^{3/4}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 4[(b^2 + 1)^{1/4} - 1] = \infty,$$

y por tanto diverge la integral dada.  $\blacksquare$

### EJEMPLO 3

Determinar si converge la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \cos 2x \, dx \quad (12)$$

y si es así, hallar su valor.

Para toda  $b > 0$  tenemos que

$$\int_0^b \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \Big|_0^b = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2b.$$

Sin embargo,  $\operatorname{sen} 2b$  oscila entre  $-1$  y  $1$  cuando  $b \rightarrow \infty$ , y en consecuencia no tiene límite. Por consiguiente, la integral (12) diverge. ■

Cuando  $f(x) \geq 0$ , se puede interpretar en forma geométrica la argumentación anterior en términos del área bajo una curva. En la figura 11.3.1a,  $I(b) = \int_a^b f(x) \, dx$  es el área de la región  $R$  sombreada. Cuando  $b \rightarrow \infty$ , la frontera derecha de  $R$  se desplaza al infinito y se origina la región  $\hat{R}$  de la figura 11.3.1b. Si converge la integral impropia  $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ , entonces se define su valor como el área de  $\hat{R}$ . Si  $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$  diverge, se dice entonces que  $\hat{R}$  tiene un área infinita. Los dos casos se muestran en los ejemplos 1 y 2, respectivamente.

Parecerá sorprendente al principio que una región no acotada pueda tener un área finita, pero con frecuencia se presenta este caso. Además, supongamos que la región

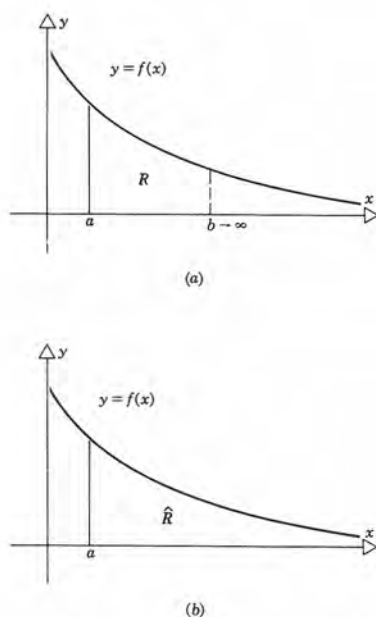


Figura 11.3.1

$\hat{R}$  se hace girar alrededor de uno de los ejes coordenados de tal manera que se genere un sólido de revolución. Entonces, aun cuando  $\hat{R}$  tenga área finita, el volumen de ese sólido de revolución puede ser infinito. O bien, si  $\hat{R}$  tiene un área infinita, el sólido de revolución puede tener un volumen finito. De este modo, se aconseja tener cuidado al aplicar la intuición geométrica a las integrales impropias. Véase una argumentación adicional en los problemas 33 y 34.

Hasta ahora hemos tenido cuidado de emplear el término “integral impropia” siempre que la integral específica sea, efectivamente, impropia. De aquí en adelante, siguiendo la práctica normal, con frecuencia emplearemos la palabra “integral” sólo para representar a una integral que puede ser tanto propia como impropia; normalmente, no es difícil decir si una integral dada es impropia o no.

### EJEMPLO 4

Si  $p$  es un número real dado, determinar si converge la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (13)$$

y si es así, calcular su valor.

Si  $p \neq 1$ , entonces, para toda  $b > 1$  tenemos que

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^b = \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1).$$

El comportamiento de esta expresión al tomar el límite cuando  $b \rightarrow \infty$  depende del signo de  $1-p$ . Si  $1-p > 0$ , esto es, si  $p < 1$ , entonces  $b^{1-p} \rightarrow \infty$  cuando  $b \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$  no existe y diverge la integral (13). Por otra parte, si  $1-p < 0$ , esto es, si  $p > 1$ , entonces  $b^{1-p} \rightarrow 0$  cuando  $b \rightarrow \infty$ . Por ello, en este caso,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}, \quad p > 1.$$

Si  $p = 1$ , tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty, \end{aligned}$$

y por tanto en este caso la integral (13) diverge.

Resumiendo:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1; \\ \text{diverge} & \text{si } p \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$



A continuación pasaremos a ver integrales que sólo son impropias debido a que el integrando se hace no acotado cerca de un punto finito. Si descomponemos la integral original en subintervalos, si es necesario, siempre se puede llevar a este punto a uno de los extremos del intervalo de integración. El estudio sigue los mismos lineamientos que en el caso del intervalo no acotado.

**DEFINICIÓN 11.3.2** Sea  $f$  definida en  $(a, b]$ , y supóngase que  $f(x)$  se hace no acotada cuando  $x \rightarrow a$  por la derecha. Supóngase además que  $\int_c^b f(x) dx$  existe para toda  $c$  en  $(a, b)$ . Entonces se define a la integral impropia  $\int_a^b f(x) dx$  mediante

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx, \quad (15)$$

siempre que exista este límite.

Nuevamente, si existe el límite del lado derecho de la ecuación 15, entonces se dice que la integral impropia  $\int_a^b f(x) dx$  converge. Si no es así, diverge. Se aplica una definición semejante si la integral es impropia debido a que el integrando se hace no acotado en la vecindad del límite superior de integración:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx, \quad (16)$$

siempre que exista este límite.

Este tipo de integral impropia también se puede representar en forma geométrica en términos de un área cuando  $f(x) \geq 0$  (véase figura 11.3.2). El área de la región  $R$  sombreada está dada por  $\int_c^b f(x) dx$ . Si existe el límite en la ecuación 15, entonces el valor de la integral impropia convergente  $\int_a^b f(x) dx$  se define como el área de la región no acotada  $R$  que se obtiene cuando  $c \rightarrow a^+$ . Se puede dar una interpretación geométrica

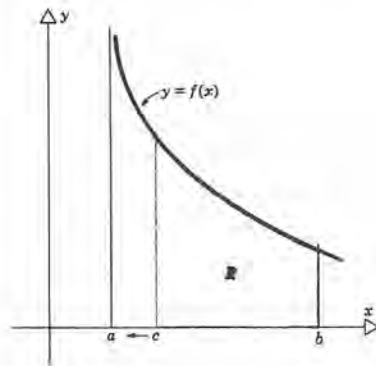


Figura 11.3.2

semejante para el caso de una integral cuyo integrando se hace no acotado cuando  $x$  se acerca al límite superior de integración.

### EJEMPLO 5

Determinar si converge la integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} \quad (17)$$

y si es así, calcular su valor.

Esta integral es impropia, porque el integrando se hace no acotado cuando  $x \rightarrow 1^+$ . Para toda  $c$  tal que  $1 < c < 2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_c^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} &= \int_c^2 (x-1)^{-1/3} dx \\ &= \frac{3}{2} (x-1)^{2/3} \Big|_c^2 = \frac{3}{2} [1 - (c-1)^{2/3}]. \end{aligned}$$

Cuando  $c \rightarrow 1$  por arriba,  $(c-1)^{2/3} \rightarrow 0$ , y en consecuencia

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}} = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

### EJEMPLO 6

Si  $p$  es un número real dado, determinar si converge la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \quad (18)$$

y si es así, hallar su valor.

Si  $p \leq 0$ , la integral no es impropia, por lo que sólo veremos el caso en que  $p > 0$ , para el cual el integrando se hace no acotado cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Si  $p \neq 1$ , entonces, para toda  $c$  en  $0 < c < 1$ , tenemos que

$$\int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_c^1 = \frac{1}{1-p} (1 - c^{1-p}).$$

El comportamiento de esta expresión cuando se toma límite conforme  $c \rightarrow 0^+$  depende de que  $1-p$  sea positivo o negativo. Si  $1-p > 0$ , entonces  $c^{1-p} \rightarrow 0$  cuando  $c \rightarrow 0^+$ .

En este caso

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}, \quad p < 1.$$

Sin embargo, si  $1-p < 0$ , entonces  $c^{1-p} \rightarrow \infty$  cuando  $c \rightarrow 0^+$  y así el integrando (18) diverge en este caso.

Si  $p = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = \infty, \end{aligned}$$

y también en este caso la integral diverge.

Resumiendo:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{si } p < 1; \\ \text{diverge} & \text{si } p \geq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Con el mismo método es posible demostrar que las integrales

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \quad \text{y} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \quad (20)$$

convergen para  $p < 1$  y divergen cuando  $p \geq 1$ . ■

## EJEMPLO 7

Determinar si converge la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \quad (21)$$

y si es así, calcular su valor.

Como esta integral es impropia en el origen, primero la dividiremos en dos partes:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}. \quad (22)$$

De acuerdo con el resultado del ejemplo 6, cada una de las integrales del lado derecho de la ecuación anterior diverge; y por lo tanto la integral (21) diverge también.

Lo importante en este ejemplo es subrayar que

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \neq -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$



Si bien este procedimiento pudiera parecer plausible a primera vista, es incorrecto, porque el integrando  $1/x^2$  no satisface los requisitos del teorema fundamental del cálculo (teorema 6.4.3). El resultado también es claramente erróneo, según el teorema 6.3.4; la integral de una función positiva no puede ser negativa. ■

Concluiremos esta sección con un ejemplo de una integral que es impropia debido a las dos razones que se han descrito antes.

### EJEMPLO 8

Si  $p$  es un número real dado, determinar si converge la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (23)$$

y si es así, hallar su valor.

Supongamos que  $p > 0$ . Entonces la integral es impropia en el origen porque el integrando se hace no acotado, y también es impropia debido a que el intervalo de integración es infinito. Por estos motivos dividiremos la integral en dos partes

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}. \quad (24)$$

La primera integral del lado derecho de la ecuación 24 sólo converge si  $p < 1$  (de acuerdo con el ejemplo 6) y la segunda integral sólo converge si  $p > 1$  (de acuerdo con el ejemplo 4). Por tanto no hay  $p$  positiva para la cual converjan las dos integrales del lado derecho de la ecuación 24, por lo que no hay  $p$  positiva para la cual converja la ecuación 23.

El resultado es el mismo si  $p \leq 0$ . En este caso, la primera integral del lado derecho de la ecuación 24 ya no es impropia, pero la segunda integral diverge siempre.

El resultado final es que no hay valor de  $p$  para el cual converja la integral 23. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 24 determinar si la integral que aparece converge o diverge. Si converge, determinar su valor.

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}}$$

$$5. \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{9-x}}$$

$$7. \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^3)^{1/2}} dx$$

$$8. \int_0^{\infty} xe^{-x^2/a^2} dx, \quad a \neq 0$$

9.  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
10.  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x \, dx$
11.  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
12.  $\int_0^9 \frac{dx}{(9-x)^2}$
13.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$
14.  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$
15.  $\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} \, dx$
16.  $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$
17.  $\int_0^1 \frac{e^x}{1-e^x} \, dx$
18.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}} \, dx$
19.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+|x|}$
20.  $\int_{-\infty}^0 e^{2x} \, dx$
21.  $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} \, dx$
22.  $\int_{-\infty}^0 \sin \frac{x}{2} \, dx$
23.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$
24.  $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} \, dx$

**25. Integración por partes.** Demostrar que si  $u$  y  $v$  tienen derivadas continuas para  $x \geq a$ , entonces

$$\int_a^{\infty} u(x)v'(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^{\infty} v(x)u'(x) \, dx, \quad (i)$$

siempre que exista el  $\lim_{b \rightarrow \infty} u(b)v(b)$  y que converja cualquiera de las dos integrales de la ecuación (i), ya que en ese caso, la otra integral debe converger también.

En los problemas 26 a 30 emplear la integración por partes (problema 25) para evaluar la integral impropia dada.

26.  $\int_0^{\infty} xe^{-x} \, dx$
27.  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx$ ,  $n$  un entero positivo
28.  $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$
29.  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$
30.  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$

**31.** Determinar un valor de  $\alpha$  para el cual la integral

$$\int_1^{\infty} \left( \frac{x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{2x+3} \right) dx$$

converge, y si existe ese caso, evaluar la integral.

**32.** Determinar el valor de  $\alpha$  para el cual converge la integral

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\alpha x}{4x^2+1} - \frac{3x^2}{x^3+1} \right) dx$$

y si existe ese caso, evaluar la integral.

**33.** Sea  $\hat{R}$  la región comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de  $y = x^{-p}$  para  $x \geq 1$ , donde  $p$  es un número real.

(a) Determinar los valores de  $p$  para los cuales el área de  $\hat{R}$  es finita.

(b) Si se hace girar a  $\hat{R}$  alrededor del eje  $x$ , determinar los valores de  $p$  para los cuales el volumen que resulta es finito.

(c) Se hace girar a  $\hat{R}$  alrededor del eje  $y$ . Determinar los valores de  $p$  para los cuales el volumen que resulta es finito.

(d) ¿Para qué valores de  $p$  puede hacerse girar una región con área finita alrededor de uno de los ejes coordenados para que se forme un sólido de volumen infinito?

(e) ¿Para qué valores de  $p$  puede hacerse girar una región con área infinita alrededor de uno de los ejes coordenados para que se forme un sólido de volumen finito?

**34.** Sea  $R$  la región comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de  $y = x^{-p}$ , en la cual  $p$  es un número real y  $0 < x \leq 1$ .

(a) Determinar los valores de  $p$  para los cuales es finita el área de  $R$ .

(b) Se hace girar a  $R$  alrededor del eje  $x$ . Determinar los valores de  $p$  para los cuales el volumen que resulta es finito.

(c) Se hace girar  $R$  alrededor del eje  $y$ . Determinar los valores de  $p$  para los cuales el volumen que resulta es finito.

(d) ¿Para qué valores de  $p$  se puede hacer girar una región de área finita alrededor de uno de los ejes coordenados de modo que se forme un sólido de volumen infinito?

- (e) ¿Para qué valores de  $p$  se puede hacer girar una región de área infinita alrededor de uno de los ejes coordenados para que se forme un sólido de volumen finito?
35. (a) Hallar el valor de  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x \, dx$ .
- (b) Determinar si la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$  converge o diverge.
- (c) Explicar por qué son consistentes las respuestas de las partes (a) y (b) de este problema.
- (d) Contestar las partes (a), (b) y (c) si el integrando se sustituye con  $x^2$ .
- (e) Contestar las partes (a), (b) y (c) si el integrando se sustituye con  $(1 + x^2)^{-1}$ .
- \*36. Conforme a la ley de atracción gravitacional, según la cual la fuerza varía de acuerdo con el inverso del cuadrado de la distancia, la fuerza que ejerce el campo gravitatorio terrestre sobre un objeto de masa  $m$  es

$$F(r) = -mg \left( \frac{R}{r} \right)^2,$$

en la cual  $g$  es la aceleración al nivel del mar, debida a la gravedad,  $R$  es el radio de la tierra y  $r$  es la distancia del objeto medida desde el centro de la tierra.

- (a) Determinar el trabajo que se debe efectuar contra la fuerza  $F$  para elevar la masa  $m$  desde el nivel del mar hasta una altitud  $h$  sobre dicho nivel.
- (b) Determinar el trabajo que se debe efectuar contra la fuerza  $F$  para llevar a la masa  $m$  fuera del campo gravitacional terrestre; esto es, elevar a  $m$  a una distancia infinita.
- (c) Suponer que se va a levantar la masa  $m$  desde el nivel del mar, impartándole una energía cinética inicial al objeto. Calcular la velocidad inicial necesaria para elevar a la masa a una altura infinita. A esta velocidad se le llama velocidad de escape al nivel del mar. Véase también el problema 30 de la sección 10.2.

## 11.4 CRITERIO DE COMPARACIÓN PARA LAS INTEGRALES IMPROPIAS

Considere de nuevo la integral

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx \quad (1)$$

que es impropia porque el intervalo de integración es infinito. En la sección 11.3 afirmamos que

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx, \quad (2)$$

siempre que exista este límite. En los ejemplos 1 al 4 de esa sección se presentó el empleo de la definición (2) para determinar si converge una integral de la forma (1) y si es así, a qué valor.

Desafortunadamente, este procedimiento no tiene una aplicación todo lo amplia que quisiéramos, porque se necesita evaluar  $\int_a^b f(x) \, dx$  y examinarla como una función de  $b$ . Con frecuencia ello no es posible, y en esos casos no se puede emplear en forma directa la definición, como se hizo en los ejemplos de la sección anterior.



La dificultad inherente al empleo de la definición (2) se puede superar en gran medida una vez entendido claramente que hay implícitas dos preguntas independientes. La primera es *¿converge o diverge la integral impropia (1)?* La segunda es que si converge, *¿cuál es su valor?* Estas dos preguntas están interrelacionadas en la definición (2), pero en general se prestan más al análisis si se tratan por separado. Si se dispone de una antiderivada del integrando, entonces se pueden contestar ambas preguntas al mismo tiempo empleando las definiciones de la sección 11.3. Si no podemos reconocer una antiderivada, entonces será necesario tratar las dos preguntas por separado.

En breve presentaremos un resultado que nos permitirá contestar la primera pregunta, el de la convergencia o divergencia de muchas integrales impropias. Si llegamos a la conclusión de que una integral impropia dada sí converge, entonces la segunda pregunta, la de la evaluación, se puede contestar echando mano de herramientas como la integración numérica, o quizá las series infinitas,\* para obtener un valor aproximado adecuado de la integral. Esto último constituye con frecuencia un problema bastante difícil, y no lo presentaremos aquí, excepto para decir que estos métodos aproximados en general son inadecuados para contestar la primera pregunta, que es la básica, la cuestión de convergencia o divergencia.

A continuación pasaremos a la pregunta de decidir si una integral impropia dada converge, independientemente de encontrar su valor. Con frecuencia es posible contestarla comparando una integral dada con otra para la cual se haya establecido su convergencia o su divergencia.

### Teorema 11.4.1

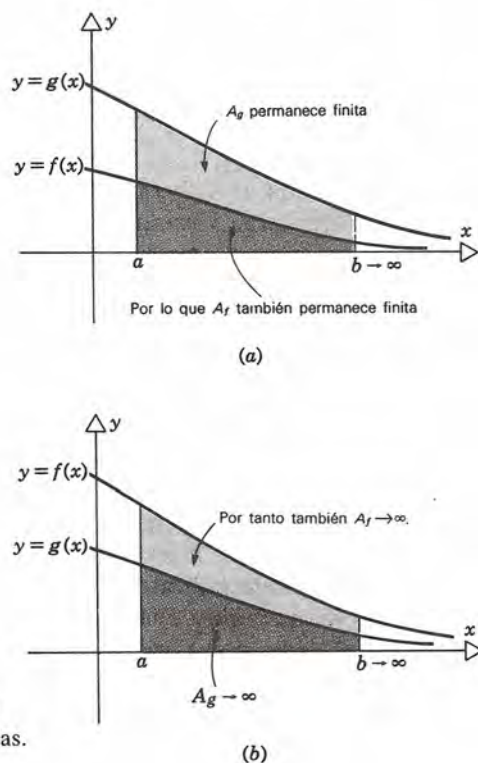
#### (Criterio de comparación)

Suponiendo que  $f$  y  $g$  son integrables en todo intervalo  $[a, b]$ , donde  $b > a$ , y  $a$  es fijo,

- (a) Si  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  para toda  $x \geq a$ , y si  $\int_a^\infty g(x) dx$  converge, entonces  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge también.
- (b) Si  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  para toda  $x \geq a$ , y si  $\int_a^\infty g(x) dx$  diverge, entonces  $\int_a^\infty f(x) dx$  también diverge.

Este teorema tiene una interpretación geométrica sencilla, porque las integrales se pueden interpretar como áreas. El caso de la parte (a) del teorema se muestra en la figura 11.4.1a. La gráfica de  $y = g(x)$  siempre queda arriba de la gráfica de  $y = f(x)$ , y por tanto el área  $A_g$  bajo la curva de  $g$  entre  $a$  y  $b$  es al menos tan grande como el área  $A_f$  bajo la curva de  $f$  en el mismo intervalo. Como tanto  $f$  como  $g$  son no negativas, las áreas  $A_f$  y  $A_g$  tienden a crecer (o al menos, a no decrecer) cuando  $b$  crece. Si  $A_b$

\* Las series infinitas se estudian en los capítulos 12 y 13.



**Figura 11.4.1** Interpretación geométrica del criterio de comparación para integrales impropias.

tiende a un límite finito cuando  $b \rightarrow \infty$ , entonces el teorema afirma que lo mismo sucede con  $A_f$ .

De modo semejante, la figura 11.4.1b muestra el caso de la parte (b) del teorema. En este caso  $A_f \geq A_g$ . Como  $A_g$  se vuelve no acotada cuando  $b \rightarrow \infty$ , eso mismo debe suceder con  $A_f$ .

Una formulación más precisa de estos conceptos geométricos conduce a la demostración del teorema 11.4.1; véase el problema 39. Sin embargo, por el momento omitiremos la argumentación de esto, ya que en el teorema 12.3.1 del capítulo siguiente se presenta un resultado muy semejante.

Si bien el teorema 11.4.1 puede ser extremadamente útil, a veces es molesto tener que manejar las desigualdades de sus hipótesis. Con frecuencia es más fácil de emplear la siguiente variación de la prueba de comparación, y por tanto, en general es preferible.

### Teorema 11.4.2

#### (Criterio de comparación límite)

Supongamos que  $f(x) \geq 0$  y que  $g(x) > 0$  para  $x \geq a$ , y que  $f$  y  $g$  son integrables en todo intervalo  $[a, b]$ , donde  $b > a$ . Supóngase además que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty. \quad (3)$$

Entonces las integrales impropias  $\int_a^\infty f(x) dx$  y  $\int_a^\infty g(x) dx$  convergen ambas o divergen ambas.

La demostración de este teorema se basa en la idea de que si  $f(x)/g(x) \rightarrow L$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces, cuando  $x$  es grande, se debe cumplir

$$f(x) \cong L g(x). \quad (4)$$

En consecuencia, para  $R$  grande,

$$\int_R^\infty f(x) dx \cong L \int_R^\infty g(x) dx, \quad (5)$$

y esto hace plausible la conclusión del teorema. El problema 40 indica cómo hacer más preciso este argumento. Nótese que es importante que  $L$  quede en el intervalo  $(0, \infty)$ , esto es que  $L \neq 0$  y  $L \neq \infty$ . En el problema 41 se indican las conclusiones que se pueden obtener de estos últimos casos.

Cuando empleamos ya sea el teorema 11.4.1, o el teorema 11.4.2, llegamos a una conclusión acerca de  $\int_a^\infty f(x) dx$  de acuerdo con nuestros conocimientos anteriores acerca del comportamiento de una integral  $\int_a^\infty g(x) dx$  de comparación. La integral de comparación más útil es  $\int_1^\infty x^{-p} dx$ , que se describió en el ejemplo 4 de la sección 11.3; recuérdese que esta integral converge cuando  $p > 1$  y diverge si no es así.

### EJEMPLO 1

Determinar si converge o diverge la integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4} \quad (6)$$

La convergencia o divergencia de esta integral está determinada por la naturaleza del integrando para valores grandes de  $x$ . En este caso parece razonable despreciar al 1 en el denominador, en comparación con  $x^4$  y usar  $g(x) = 1/x^4$  como función de comparación. Como

$$\frac{1}{1+x^4} \leq \frac{1}{x^4} \quad \text{para } x \geq 1,$$

y como  $\int_1^\infty x^{-4} dx$  converge, llegamos a la conclusión, de acuerdo con el teorema 11.4.1 de que la integral (6) converge también.

También, observamos que si  $g(x) = x^{-4}$ , entonces



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/(1+x^4)}{1/x^4} = \frac{x^4}{1+x^4} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Así, se aplica el teorema 11.4.2, y, junto con la convergencia conocida de  $\int_1^\infty x^{-4} dx$ , muestra que la integral (6) converge.

En este ejemplo es bastante obvia una comparación satisfactoria, y tanto con el teorema 11.4.1 como con el 11.4.2 se llega a la conclusión acerca de  $\int_1^\infty dx/(1+x^4)$  sin dificultad. ■

## EJEMPLO 2

Determinar si la integral

$$\int_2^\infty \frac{x-2}{x^{3/2}+1} dx \quad (7)$$

converge o diverge.

Para  $x$  grande es razonable suponer que

$$\frac{x-2}{x^{3/2}+1} \cong \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

De hecho, empleando la función de comparación  $g(x) = 1/x^{1/2}$ , tenemos

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-2)/(x^{3/2}+1)}{1/x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}(x-2)}{x^{3/2}+1} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Como  $\int_2^\infty dx/x$  diverge, llegamos a la conclusión de que, de acuerdo con el teorema 11.4.2, la integral (7) diverge también.

En este ejemplo es un poco más difícil demostrar que la integral (7) diverge empleando el teorema 11.4.1, ya que la función obvia de comparación  $g(x)$  no satisface el tipo adecuado de desigualdad. En realidad tenemos que

$$\frac{x-2}{x^{3/2}+1} \leq \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}},$$

mientras que para establecer la divergencia de la integral (7) necesitamos una función de comparación que sea *más pequeña* que el integrando en (7). En el problema 36 indicaremos un modo de proceder para hacer uso del teorema 11.4.1, en este caso, en lugar del 11.4.2. Sin embargo, lo principal a recordar es que este ejemplo muestra que el teorema 11.4.2 con frecuencia es más cómodo que el 11.4.1. ■

## EJEMPLO 3

Determinar si la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} \quad (8)$$

converge o diverge.

Primero separamos la integral dada en dos partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+e^x} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+e^x}, \quad (9)$$

y a continuación revisamos cada parte por separado. Se puede demostrar que la segunda integral del lado derecho de la ecuación 9 converge, empleando la función de comparación  $g(x) = e^{-x}$  ya que  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$  converge. Sin embargo, para  $x$  grande y negativa tenemos que  $(1+e^x)^{-1} \approx 1$ , y por tanto para la primera integral del lado derecho de la ecuación 9 escogemos la función de comparación  $g(x) = 1$ . Entonces  $f(x)/g(x) = 1/(1+e^x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , y  $\int_{-\infty}^0 g(x) dx = \int_{-\infty}^0 dx$  diverge. Por lo que  $\int_{-\infty}^0 (1+e^x)^{-1} dx$  diverge también. Por todo lo anterior, también diverge la integral (8). ■

También hay criterios de comparación análogos a los teoremas 11.4.1 y 11.4.2 para integrales que son impropias porque el integrando se hace no acotado cerca de un punto finito. Enunciaremos estos teoremas para las integrales impropias cuyos integrandos se hacen no acotados en el extremo inferior, pero es fácil adaptar los teoremas al caso en el que los integrandos se hacen no acotados en el extremo superior. Las demostraciones son análogas a las de los teoremas 11.4.1 y 11.4.2, y por tanto se omiten.

### Teorema 11.4.3

(Criterio de comparación)

Supongamos que  $f$  y  $g$  son integrables en todo intervalo  $[c, b]$  en el cual  $a < c < b$ .

- (a) Si  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  para  $a < x \leq b$ , y si  $\int_a^b g(x) dx$  converge, entonces también converge  $\int_a^b f(x) dx$ .
- (b) Si  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  para  $a < x \leq b$ , y si diverge  $\int_a^b g(x) dx$ , entonces también diverge  $\int_a^b f(x) dx$ .

### Teorema 11.4.4

(Criterio de comparación límite)

Supongamos que  $f(x) \geq 0$  y  $g(x) > 0$  para  $a < x \leq b$ , y que tanto  $f$  como  $g$  son integrables en todo intervalo  $[c, b]$ , siendo  $a < c < b$ . Supongamos además que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty. \quad (10)$$

Entonces las integrales  $\int_a^b f(x) dx$  y  $\int_a^b g(x) dx$  convergen ambas o divergen ambas.

Los ejemplos siguientes muestran el empleo de los teoremas 11.4.3 y 11.4.4. Las integrales de comparación más útiles son  $\int_a^b (x-a)^{-p} dx$  y  $\int_a^b (b-x)^{-p} dx$ . De acuerdo con el ejemplo 6 de la sección 11.3 sabemos que esas integrales convergen para  $p < 1$  y divergen si no es así.

#### EJEMPLO 4

Determinar si la integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (11)$$

converge o diverge.

La integral es impropia porque el integrando se hace no acotado cuando  $x \rightarrow 1^+$ . Para examinar las consecuencias de ello ayuda el factorizar al integrando

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} \sqrt{x-1}} \quad (12)$$

a modo de aislar más claramente la parte que crece sin cota. Para  $x > 1$  observaremos que

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1;$$

por tanto, de acuerdo con la ecuación 12,

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad x > 1.$$

Como sabemos que  $\int_1^2 dx/\sqrt{x-1}$  converge, llegamos a la conclusión, de acuerdo con el teorema 11.4.3, de que la integral (11) dada también converge. ■

#### EJEMPLO 5

Determinar si el integrando

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^{7/2}} dx \quad (13)$$

converge o diverge.

Para poder llegar a alguna conclusión acerca de esta integral, debemos examinar el comportamiento del integrando cerca de  $x = 0$ . Según el ejemplo de la sección 11.1, sabemos que para  $|x|$  muy pequeño,  $1 - \cos x$  casi es proporcional a  $x^2$ . Por lo que es



razonable llegar a la conclusión de que  $g(x) = x^{-3/2}$  es una posible función de comparación para el integrando de la integral (13). Entonces tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(1 - \cos x)/x^{7/2}}{x^{-3/2}} = \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad (14)$$

Por tanto, empleando el resultado del ejemplo 2 de la sección 11.1, o aplicando la regla de L'Hospital al lado derecho de la ecuación 14, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}.$$

Como sabemos que

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^{-3/2} dx$$

diverge, el teorema 11.4.4 lleva a la misma conclusión acerca de la integral (13). ■

## EJEMPLO 6

Determinar los valores de  $p$  para los cuales la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p \sqrt{1+x^p}}, \quad p > 0 \quad (15)$$

converge.

Esta integral es impropia por dos razones: el intervalo de integración es infinito y el integrando se hace no acotado cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Para separar estos efectos escribiremos primero

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p \sqrt{1+x^p}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^p \sqrt{1+x^p}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^p \sqrt{1+x^p}}. \quad (16)$$

Entonces la integral (1) converge si y sólo si convergen las dos integrales del lado derecho de la ecuación (16). Examinaremos cada una de ellas por turno.

Cerca de  $x = 0$  tenemos que  $\sqrt{1+x^p} \cong 1$ . Por consiguiente

$$f(x) = \frac{1}{x^p \sqrt{1+x^p}} \cong \frac{1}{x^p},$$

de manera que parece razonable emplear  $g(x) = x^{-p}$  como una función de comparación. Entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/(x^p \sqrt{1+x^p})}{1/x^p} = \frac{1}{\sqrt{1+x^p}} \rightarrow 1 \quad (17)$$

cuando  $x \rightarrow 0^+$ . Como  $\int_0^1 x^{-p} dx$  converge si  $p < 1$ , y diverge en los demás casos, el teorema 11.4.4 lleva a la misma conclusión acerca de la primera integral del lado derecho de la ecuación 16.

Ahora veamos la segunda integral, en la cual es crucial el comportamiento del integrando para  $x$  grande. Tenemos que  $\sqrt{1+x^p} \cong x^{p/2}$  cuando  $x$  es muy grande, de modo que en este caso

$$\frac{1}{x^p \sqrt{1+x^p}} \cong \frac{1}{x^p x^{p/2}} = x^{-3p/2}.$$

Así, seleccionamos a  $g(x) = x^{-3p/2}$  como una función de comparación. Entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^p \sqrt{1+x^p}} \bigg/ \frac{1}{x^{3p/2}} = \frac{x^{p/2}}{\sqrt{1+x^p}} \rightarrow 1 \quad (18)$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . Además,  $\int_1^\infty x^{-3p/2} dx$  converge cuando  $3p/2 > 1$ , esto es, cuando  $p > \frac{2}{3}$  y diverge si no es así. De acuerdo con el teorema 11.4.4, llegamos a la misma conclusión acerca de la segunda integral del lado derecho de la ecuación 16.

Combinando nuestros resultados observamos que las dos integrales del lado derecho de la ecuación 16 convergen sólo para aquellos valores de  $p$  en el intervalo  $\frac{2}{3} < p < 1$ . Así estos son los únicos valores positivos de  $p$  para los cuales converge la integral (15). Dejamos al lector la tarea (problema 37) de demostrar que la integral (15) diverge para toda  $p \leq 0$ . ■

Los resultados de esta sección sólo se aplican a integrales impropias con integrandos no negativos, o bien, si multiplicamos por  $-1$ , con integrandos no positivos. Es natural que haya más integrales impropias cuyos integrandos fluctúen en el signo. Estas integrales se pueden analizar a veces extendiendo los métodos que se presentan aquí, pero dejamos este tema para los textos más avanzados. El procedimiento se asemeja mucho a la descripción de las series infinitas de la sección 12.7.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 34, determinar si la integral dada converge o diverge.

1.  $\int_1^\infty \frac{x}{4+x^3} dx$

2.  $\int_0^3 \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$

7.  $\int_2^5 \frac{x}{x-2} dx$

8.  $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-2}} dx$

3.  $\int_1^\infty \frac{x^{3/2}}{4+x^2} dx$

4.  $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{4+x^3}} dx$

9.  $\int_1^\infty \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4+x^3}} dx$

10.  $\int_2^\infty \frac{x+1}{x^3-1} dx$

5.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec x}{x^{3/2}} dx$

6.  $\int_1^\infty \frac{\sec^2 x}{4+x^3} dx$

11.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + e^{-2x}} dx$

12.  $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{1/2} \tan x dx$

13.  $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}}$

14.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3}{e^x} dx$

15.  $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$

16.  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-1}$

17.  $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x} dx$ ,  $n$  un entero positivo

18.  $\int_0^{\pi/2} \sec^2 x dx$

19.  $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx$

20.  $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} \ln x}$

21.  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$

22.  $\int_0^\infty \frac{|\sin(x^2)|}{x^{3/2}} dx$

23.  $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^p} dx$ ,  $p$  un número real

24.  $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^{3/2}} dx$

25.  $\int_3^\infty \frac{(x^2 - 9)^p}{1 + x^4} dx$

26.  $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{1+p}} dx$ ,  $p > 0$

27.  $\int_0^1 x \ln x dx$

28.  $\int_0^1 x^p \ln x dx$ ,  $p$  un número real

29.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

30.  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - 3x + 2|}}$

31.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$

32.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{|x|^{3/2}} dx$

33.  $\int_1^\infty \frac{x^p}{(4+x^3)^q} dx$ ,  $p, q$ , cualesquiera números reales

34.  $\int_2^\infty \frac{x^p(x-1)^q}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ ,  $p, q$ , cualesquiera números reales

35. Se tiene la región  $R$  comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de  $f(x) = x^{-p}$  para  $x \geq 1$ , donde  $p$  es un número real positivo. Hacemos girar a  $R$  alrededor del eje  $x$  para formar un sólido  $D$  de revolución, y  $S$  es la superficie de  $D$ . Determinar los valores de  $p$  para los cuales es finita el área de  $S$ .

*Nota:* En el problema 33(b) de la sección 11.3 se demostró que el volumen de  $D$  es finito cuando  $p > \frac{1}{2}$ . Así, para  $\frac{1}{2} < p \leq 1$ , un volumen finito tiene un área de superficie infinita. Si se tratara de pintar a  $S$ , se necesitaría una cantidad infinita de pintura para cubrir a  $S$  por completo. Sin embargo, se puede llenar a  $D$

por completo con una cantidad finita de pintura. ¿Podría explicar el lector esta contradicción aparente?

36. Considerar de nuevo la integral

$$\int_2^\infty \frac{x-2}{x^{3/2}+1} dx \quad (i)$$

del ejemplo 2. Para demostrar que esta integral diverge empleando el teorema 11.4.1, debemos encontrar una función de comparación  $g(x)$  tal que  $g(x) \leq f(x)$  y que  $\int_a^\infty g(x)$  diverja.

- (a) Demostrar que  $x-2 \geq x/2$  para  $x \geq 4$  y que  $x^{3/2} + 1 \leq 2x^{3/2}$  para  $x \geq 1$ . Por tanto,

$$\frac{x-2}{x^{3/2}+1} \geq \frac{x/2}{2x^{3/2}} = \frac{1}{4\sqrt{x}} \quad \text{para } x \geq 4.$$

- (b) Usar el resultado de la parte (a) para llegar a la conclusión de que la integral (i) diverge.

37. Demostrar que la integral del ejemplo 6,

$$\int_0^x \frac{dx}{x^p \sqrt{1+x^p}}$$

diverge siempre que  $p \leq 0$ .

- \*38. Una función de gran importancia, tanto en matemáticas como en sus aplicaciones, es la **función gamma**, que se define mediante la integral

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx. \quad (i)$$

A esta función la estudió Euler por primera vez en 1729. Mucho tiempo después la bautizó Legendre con el nombre como la conocemos.

- (a) ¿Para cuáles valores reales de  $p$  converge la integral (i)? Estos valores de  $p$  comprenden el dominio de  $\Gamma$ .

- (b) Demostrar que

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad p > 0. \quad (ii)$$

- (c) Si  $p = n$  es un entero positivo, demostrar que

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (iii)$$

Así, la función gamma es una extensión de la función factorial para valores no enteros de la variable independiente.

- \*39. **Demostración del teorema 11.4.1(a).** Definir el conjunto  $S$  de tal manera que



$$S = \{s | s = \int_a^b f(x) dx \text{ para alguna } b > a\}.$$

(a) Demostrar que  $S$  no es vacío y que está acotado por arriba. Por tanto,  $S$  tiene una mínima cota superior, que denotaremos con  $I$  (véase la argumentación dada antes del problema 29 de la sección 1.1).

(b) Demostrar que  $\int_a^b f(x) dx \leq I$  para toda  $b > a$ .

(c) Demostrar que para toda  $\epsilon > 0$  hay una  $B > a$  tal que

$$\int_a^B f(x) dx \geq I - \epsilon.$$

(d) Demostrar que  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = I$ ; en otras palabras,  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge y tiene el valor  $I$ .

#### \*40. Demostración del teorema 11.4.2.

(a) Supongamos que  $f(x)/g(x) \rightarrow L > 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Entonces se puede demostrar que hay una  $R$  tal que

$$\frac{1}{2}Lg(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}Lg(x) \quad (i)$$

para  $x \geq R$ .

(b) Demostrar que  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge o diverge según si  $\int_R^\infty f(x) dx$  converge o diverge.

(c) Emplear la desigualdad del lado derecho de la ecuación (i) y el teorema 11.4.1 para demostrar que si converge  $\int_a^\infty g(x) dx$ , entonces también lo hace  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

(d) Emplear la desigualdad del lado izquierdo de la ecuación (i) y el teorema 11.4.1 para demostrar que si  $\int_a^\infty g(x) dx$  diverge, también lo hace  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

\*41. Este problema examina el caso cuando  $L = 0$  ó  $L = \infty$  en el teorema 11.4.2.

(a) Demostrar que si  $L = 0$  y si  $\int_a^b g(x) dx$  converge, entonces también converge  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

(b) Sean  $g(x) = x^{-1/2}$ ,  $f(x) = x^{-1}$  y  $a > 0$ . Demostrar que  $L = 0$  y que divergen tanto  $\int_a^\infty f(x) dx$  como  $\int_a^\infty g(x) dx$ .

(c) Sean  $g(x) = x^{-1/2}$ ,  $f(x) = x^{-2}$  y  $a > 0$ . Demostrar que  $L = 0$ , que  $\int_a^\infty g(x) dx$  diverge, pero que  $\int_a^\infty f(x) dx$  converge. Obsérvese que los resultados de (b) y (c) demuestran que no se puede llegar a conclusión alguna acerca de la convergencia de  $\int_a^\infty f(x) dx$  cuando  $L = 0$  y  $\int_a^\infty g(x) dx$  diverge.

(d) Demostrar que si  $L = \infty$  y  $\int_a^\infty g(x) dx$  diverge, entonces también diverge  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

(e) Mediante ejemplos, demostrar que si  $L = \infty$  y  $\int_a^\infty g(x) dx$  converge, entonces no se puede llegar a ninguna conclusión acerca de  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 29, evaluar el límite pedido, o, en su caso, demostrar que no existe.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x - \pi/2)}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{|x - 1|}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{|x - \pi|}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan^2 x}{\sec(x - \pi)}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1)}{x^2 + 2x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\ln(2x - 3)}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x^{-2} + 1)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} \ln x$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos^2 x - 1}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} - e^{1/x}\right)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{(\pi/2 - \arccos x)^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/\sqrt{x}}}{e^{1/\arcsin x}}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{\ln x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x \cos x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)^x e^{1/(1-x)}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^p}\right)^{\sin x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^x$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln(x^2)]^{x-1}$$

$$23. \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[ \frac{1}{(x^2 - 1)} \right]^{\sec \pi x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + \ln x)}{x^p}$$

$$38. \int_1^3 \frac{x - 2}{(x^2 - 4x + 3)^2} dx$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} (x^{3/2})^{1/(1-x^2)}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-1/x})^{1/x}$$

En los problemas 39 y 40, determinar los valores de  $p$  para los cuales converge la integral respectiva.

$$27. \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\ln(x^2 + 1)}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{\sqrt{x-1}})^{1/x}$$

$$39. \int_0^4 \frac{x - 2}{(x^2 - 4x)^p} dx$$

$$40. \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x^p} dx$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

En los problemas 41 a 49 determinar si la integral dada converge o diverge.

En los problemas 30 a 38 determinar si la integral converge o diverge. Si converge, calcular su valor.

$$30. \int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{2/3}} dx$$

$$31. \int_0^2 \frac{x}{(x^2 - 4)^{1/3}} dx$$

$$41. \int_0^{\pi} \frac{x - \sin x}{x^{3/2}} dx$$

$$42. \int_0^4 \frac{4 - x}{x^{1/2} |x^{3/2} - 8|} dx$$

$$32. \int_0^2 \frac{x^3}{(x^4 - 16)^{1/3}} dx$$

$$33. \int_0^1 x^{-3/2} e^{x^{-1/2}} dx$$

$$43. \int_2^{\infty} \frac{x^{3/2}}{(x^{5/2} - 1)^2} dx$$

$$44. \int_2^3 \frac{e^{1/(2-x)}}{x^2 + x - 6} dx$$

$$34. \int_1^{\infty} x^{-3/2} e^{x^{-1/2}} dx$$

$$35. \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{\sin^{3/2} x} dx$$

$$45. \int_1^2 \frac{x^{3/2}}{(x + \cos \pi x)^2} dx$$

$$46. \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

$$36. \int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^3 + 1)^{4/3}} dx$$

$$37. \int_1^{\infty} \frac{x^{-3/2}}{(x^{-1/2} + 1)^2} dx$$

$$47. \int_1^{\infty} e^{1/(x^2-1)} dx$$

$$48. \int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2 + x - 2)^{2/3}} dx$$

$$49. \int_1^{\infty} \frac{\sin x + x}{(x^3 - 1)^{1/2}} dx$$





# CÁLCULO

## Capítulo 12

### Series infinitas

En este capítulo y en el siguiente estudiaremos algunas de las propiedades de las sucesiones y de las series infinitas. En la conversación diaria las palabras “sucesión” y “serie” se emplean casi indistintamente, pero en matemáticas tienen diferentes significados. Las sucesiones y las series con frecuencia son útiles para construir aproximaciones a números o a funciones cuyo cálculo exacto es difícil o imposible. En general se desea obtener una aproximación que se pueda mejorar o refinar en forma sistemática, de ser necesario. Esto, a menudo nos conduce al estudio de una sucesión de aproximaciones sucesivas. También, el estudio de las sucesiones y de las series nos da una oportunidad de volver a examinar algunas de las ideas asociadas con los límites en un nuevo contexto.

---

### 12.1 SUCESIONES

Una **sucesión** de números reales es un conjunto ordenado o lista, de números

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

Los números individuales, como  $a_1$  o  $a_2$ , se llaman **términos** de la sucesión. La característica que distingue a una sucesión de otros conjuntos de números reales es que los términos de una sucesión *aparecen en un orden definido*. Para la sucesión (1),  $a_1$  es el primer

término,  $a_2$  el segundo, y así sucesivamente; a  $a_n$  se le llama el término general o término  $n$ ésimo. Como se indica en la expresión (1), se usa la notación  $\{a_n\}$  para denotar a la sucesión como un todo. A veces es conveniente indicar los términos de tal modo que el primero corresponda a un valor de  $n$  que no sea uno. Por ejemplo, es muy común comenzar con  $n = 0$ , y se podría también comenzar con  $n = 2$ , o con algún otro valor.

Ya nos hemos encontrado con sucesiones en diversas ocasiones sin mencionarlo en forma explícita. Por ejemplo, en la sección 4.5 describimos el método de Newton para calcular la raíz de una ecuación  $f(x) = 0$ . Comenzando con una aproximación inicial  $x_0$  de la raíz, el método de Newton da mayores aproximaciones  $x_1, x_2, \dots$ . Las aproximaciones sucesivas forman una sucesión

$$\{x_n\} = x_0, x_1, x_2, \dots \quad (2)$$

De nuevo, en la sección 6.2, durante la definición de la integral, formamos varias sumas de Riemann. Por ejemplo, sea  $f$  una función continua definida en  $[a, b]$ , y sea  $\Delta$  partición uniforme, de este intervalo en  $n$  subintervalos de modo que  $\Delta x_i = (b - a)/n$ . Si seleccionamos al punto estrella en cada subintervalo de modo que sea el extremo izquierdo, entonces  $x_i^* = x_{i-1}$ . La suma de Riemann correspondiente es

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}). \quad (3)$$

Cuando  $n$  toma los valores  $1, 2, 3, \dots$ , la ecuación 3 genera una sucesión de sumas que se aproxima a  $\int_a^b f(x) dx$ .

En la sección 8.3 se nos presentó un tercer ejemplo de una sucesión, ya que nos encontramos

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} = 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots \quad (4)$$

Los primeros términos de esta sucesión están marcados en la figura 12.1.1. Hicimos notar en la sección 8.3 que a medida que avanzamos más y más en la sucesión (4), obtendremos aproximaciones a  $e$  cada vez más exactas.

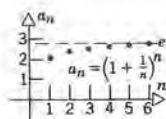


Figura 12.1.1

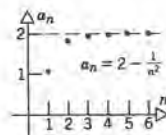


Figura 12.1.2

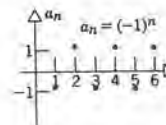


Figura 12.1.3

## EJEMPLO 1

A continuación presentaremos algunos ejemplos adicionales de sucesiones. Las figuras 12.1.2 a 12.1.7 muestran los primeros términos de cada sucesión, respectivamente. En cada caso hemos supuesto que el valor inicial de  $n$  es uno.

$$\left\{ 2 - \left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} = 1, \frac{7}{4}, \frac{17}{9}, \frac{31}{16}, \frac{49}{25}, \dots \quad (5)$$

$$\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, -1, \dots \quad (6)$$

$$\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\} = -1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \dots \quad (7)$$

$$\left\{\sqrt{n} \sin \frac{n\pi}{2}\right\} = 1, 0, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{5}, \dots \quad (8)$$

$$\left\{\frac{n^2 + 1}{n}\right\} = 2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \dots \quad (9)$$

$$\left\{\frac{4^n}{n!}\right\} = 4, 8, \frac{32}{3}, \frac{32}{3}, \frac{128}{15}, \dots \quad (10)$$

Para cada una de las sucesiones (4) a (10) hay una fórmula para el término general  $a_n$ . Sin embargo, no necesariamente es el caso. Por ejemplo, para la sucesión (2) obtenida con el método de Newton se tiene en su lugar una fórmula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (11)$$

que define a cada miembro de la sucesión  $\{x_n\}$  en términos del precedente.

## Sucesiones convergentes y divergentes

En general, la pregunta más importante que se debe hacer acerca de una sucesión  $\{a_n\}$  es si tiene un *límite* o no, o si *converge* cuando  $n \rightarrow \infty$ . En forma intuitiva, una sucesión  $\{a_n\}$  converge al límite  $L$  si sus términos se acercan más y más al número  $L$  cuando  $n$  crece sin cota. La definición formal del límite de una sucesión es completamente análoga a la de la sección 2.4 para el límite de una función  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . En realidad, podemos considerar a una sucesión como una especie de función, a saber, una cuyo dominio es un conjunto de enteros. En este caso podríamos escribir  $a_n = f(n)$  y el límite de una sucesión es tan sólo un caso especial del límite de una función.

**DEFINICIÓN 12.1.1** La sucesión  $\{a_n\}$  tiene el límite  $L$ , esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad (12)$$

si para toda  $\epsilon > 0$  existe un entero  $N$ , que depende de  $\epsilon$ , que tiene la propiedad

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{para toda } n > N. \quad (13)$$

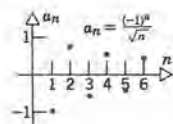


Figura 12.1.4

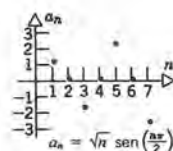


Figura 12.1.5

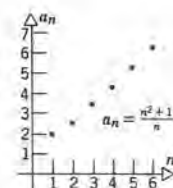


Figura 12.1.6

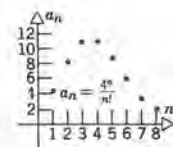
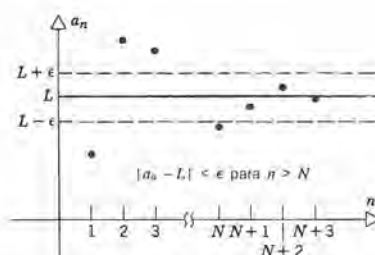


Figura 12.1.7



En este caso, se dice que  $\{a_n\}$  converge a  $L$ . Por otro lado, si no existe ningún número  $L$  para el que sea válida la relación (13), entonces la sucesión  $\{a_n\}$  no tiene límite y se dice que diverge.

El número  $\epsilon$  que aparece en la definición mide la cercanía entre  $a_n$  y  $L$ , mientras que  $N$  indica cuánto debe uno avanzar en la sucesión para alcanzar el grado especificado de cercanía (véase figura 12.1.8). Como la ecuación 13 sólo involucra a los términos de la sucesión para los cuales  $n > N$ , se infiere que la posible existencia de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , o su valor, no depende de  $a_1, \dots, a_N$ . Dicho de otra manera, la convergencia de la sucesión  $\{a_n\}$  no queda afectada por ningún conjunto finito de términos del inicio de la sucesión; más bien, la convergencia se determina por completo por los términos restantes, los que quedan en la “cola” de la sucesión.



**Figura 12.1.8** Convergencia de la sucesión  $\{a_n\}$ .

Las sucesiones (5) y (7) tienen como límites dos y cero, respectivamente. Los ejemplos 2 y 3, que aparecen más adelante, muestran cómo se puede emplear la definición 12.1.1 para formalizar estos resultados. La sucesión (10) también converge, pero en este caso puede ser menos obvio; esta sucesión se describe en el ejemplo 5.

Hay varias maneras por las cuales una sucesión puede ser divergente. Una posibilidad es que sus términos se hagan y permanezcan mayores que cualquier número positivo a medida que  $n$  aumenta sin cota. Por ejemplo, éste es el caso de la sucesión (9). Enunciado de un modo más formal, para cada  $M > 0$  existe un entero  $N$ , que depende de  $M$ , que tiene la propiedad de que  $a_n > M$  para toda  $n > N$ . En este caso escribimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty. \quad (14)$$

Si la sucesión se comporta en forma análoga, pero tiene términos negativos, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty. \quad (15)$$

La sucesión (6) no converge porque sus términos saltan de aquí para allá entre los dos números  $-1$  y  $1$ . Por último, la sucesión (8) también tiene cambios repetidos de signo y el valor absoluto de sus términos aumenta sin cota. Por tanto, la sucesión (8) diverge, pero ni la ecuación 14 ni la 15 se pueden emplear para describir su comportamiento.

Los ejemplos que siguen muestran el empleo de la definición 12.1.1.

**EJEMPLO 2**

Emplear la definición 12.1.1 para demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right) = 2. \quad (16)$$

Supongamos que se da una  $\epsilon > 0$ . Entonces debemos considerar  $|a_n - L|$ . Tenemos

$$|a_n - L| = \left| \left( 2 - \frac{1}{n^2} \right) - 2 \right| = \left| -\frac{1}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}.$$

Si suponemos que  $n > N$ , para algún número  $N$ , entonces  $1/n < 1/N$ , y

$$|a_n - L| < \frac{1}{N^2}.$$

Ahora, para hacer que  $|a_n - L| < \epsilon$ , sólo necesitamos pedir que  $1/N^2 \leq \epsilon$ , o que  $N^2 \geq 1/\epsilon$ , o bien que

$$N \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (17)$$

Así se cumplen los requisitos de la definición 12.1.1 siempre que escojamos a  $N$  como un entero igual o mayor que  $1/\sqrt{\epsilon}$ . Por ejemplo, si  $\epsilon = 0.002$ , entonces  $1/\epsilon \cong 22.36$  y de esa manera podemos seleccionar  $N = 23$  o a cualquier entero mayor. ■

**EJEMPLO 3**

Emplear la definición 12.1.1 para demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0. \quad (18)$$

Demos una  $\epsilon$  y supongamos que  $n > N$ . Entonces

$$|a_n - L| = \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Por tanto, para hacer que  $|a_n - L| < \epsilon$ , es suficiente pedir que  $1/\sqrt{N} \leq \epsilon$ , o sea

$$N \geq \frac{1}{\epsilon^2}. \quad (19)$$

Por ejemplo, si  $\epsilon = 0.002$ , entonces  $1/\epsilon^2 = 250,000$ , por lo que podremos seleccionar a  $N$  como este número, o cualquier entero mayor que él. ■

Tómese nota de la diferencia en los valores necesarios de  $N$  en los ejemplos 2 y 3 para la misma  $\epsilon$ . Esto refleja el hecho de que la sucesión del ejemplo 2 converge con mucho mayor rapidez que la del ejemplo 3. La rapidez de convergencia es un punto importante si se quiere emplear una sucesión con fines de cómputo.

### Algunas propiedades de las sucesiones

A continuación pasaremos a unos teoremas que nos permiten determinar los límites de muchas sucesiones. Los tres primeros teoremas corresponden a teoremas semejantes para las funciones, de manera que sólo los enunciaremos sin demostrarlos.

#### Teorema 12.1.1

Si converge  $\{a_n\}$ , entonces el límite  $L$  es único.

#### Teorema 12.1.2

Supongamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ . Entonces

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$ , para cualesquiera números  $\alpha$  y  $\beta$ .
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$ .
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = A/B$ , siempre que  $B \neq 0$ .

#### Teorema 12.1.3

(Principio del emparedado)

Si  $a_n \leq b_n \leq c_n$  para toda  $n$  (o para toda  $n > N$ , para algún entero positivo  $N$ ), y si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .

El teorema siguiente expresa la relación que existe entre el límite de una función y el límite de una sucesión.

#### Teorema 12.1.4

Si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad (0 \infty, 0 - \infty) \quad (20)$$

y si  $a_n = f(n)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad (0 \infty, 0 - \infty). \quad (21)$$



**Demostración.** Esta demostración es consecuencia directa de las definiciones de los límites que intervienen. De la ecuación 20 para un límite  $L$  finito, sabemos que para cada  $\epsilon > 0$  existe un entero  $N$  tal que si  $x > N$  entonces

$$|f(x) - L| < \epsilon. \quad (22)$$

Si restringimos a  $x$  a los valores enteros  $n$ , la ecuación se transforma en

$$|a_n - L| < \epsilon, \quad (23)$$

siempre y cuando  $n > N$  y esto demuestra la ecuación 21. Se deja al lector la modificación que se necesita en esta demostración si  $L$  se reemplaza ya sea por  $\infty$  o por  $-\infty$ .  $\square$

La importancia del teorema 12.1.4 se debe al hecho de que podemos determinar  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y, por tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , mediante métodos como la regla de L'Hospital, que no se pueden aplicar en forma directa a las sucesiones.

## EJEMPLO 4

Determinar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 4n + 1}, \quad (24)$$

o, si es el caso, demostrar que no existe este límite.

No podemos emplear el teorema 12.1.2 para evaluar el límite (24) tal como está presentado, porque ni el numerador ni el denominador tienen un límite. Para volver a plantear el problema en una forma más adecuada, dividiremos el numerador y el denominador entre  $n^2$ . Así

$$\frac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 4n + 1} = \frac{2 - (1/n) + (3/n^2)}{1 + (4/n) + (1/n^2)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 4n + 1} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} [2 - (1/n) + (3/n^2)]}{\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + (4/n) + (1/n^2)]} \\ &= \frac{2 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) + 3[\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)]^2}{1 + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) + [\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)]^2}. \end{aligned}$$

Como cada uno de los límites de la última expresión es cero, entonces, de acuerdo con el teorema 12.1.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 4n + 1} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 2. \quad (25)$$

También podemos evaluar el límite (24) recurriendo al teorema 12.1.4 y empleando a continuación la regla de L'Hospital. De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 3}{n^2 + 4n + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 4x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 1}{2x + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (26)$$

### EJEMPLO 5

Determinar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n!},$$

o, si es el caso, demostrar que este límite no existe.

Es conveniente escribir, para  $n \geq 6$ ,

$$0 < b_n = \frac{4^n}{n!} = \underbrace{\left( \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right)}_{=c} \underbrace{\left( \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{4}{n-1} \right)}_{<1} \frac{4}{n} < \frac{4c}{n}, \quad (27)$$

donde  $c$  es constante; en realidad,  $c = \frac{32}{5}$ , pero en este caso no tiene importancia. Sea  $a_n = 0$  y  $c_n = 4c/n$  para cada  $n$  y observe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ . Entonces el teorema 12.1.3 implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n!} = 0. \quad \blacksquare \quad (28)$$

### EJEMPLO 6

Si  $-1 < r < 1$ , demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0. \quad (29)$$

Si  $r = 0$ , el resultado es obvio; así, supongamos que  $r \neq 0$ . En este caso observemos que

$$-|r| \leq r \leq |r|,$$

y por tanto que

$$-|r|^n \leq r^n \leq |r|^n,$$

donde  $0 < |r| < 1$ . En este caso la ecuación 29 se infiere del principio del emparedado, teorema 12.1.3, siempre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n = 0.$$

Para demostrarlo, nótese que

$$\ln |r|^n = n \ln |r|. \quad (30)$$

Como  $0 < |r| < 1$ , sabemos que  $\ln |r| < 0$ ; por consiguiente  $\ln |r|^n \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se demuestra la ecuación 29 al aplicar la exponencial en ambos lados de la ecuación 30. ■

## Sucesiones monótonas acotadas

Exactamente como en el caso de las funciones, las sucesiones también pueden tener las propiedades de acotamiento y monotonía. Se dice que una sucesión  $\{a_n\}$  es **acotada** si existe un número  $K$  tal que  $|a_n| \leq K$  para toda  $n$ , o, en forma equivalente, si existen dos números  $A$  y  $B$  tales que  $A \leq a_n \leq B$  para toda  $n$ . Si  $\{a_n\}$  no es acotada, se le llama **no acotada**. Por ejemplo, las sucesiones (5), (6), (7) y (10) son acotadas, mientras que las sucesiones (8) y (9) son no acotadas. Para las sucesiones acotadas con frecuencia es fácil determinar una cota  $K$  para  $|a_n|$  tan sólo con revisar algunos términos de la sucesión. Por ello debe quedar claro que podemos seleccionar  $K = 2$  para la sucesión (5) y  $K = 1$  para las sucesiones (6) y (7).

Se dice que una sucesión es **monótona creciente**, si  $a_{n+1} \geq a_n$  para toda  $n$ . Análogamente,  $\{a_n\}$  es **monótona decreciente**, o **monótona no creciente** si  $a_{n+1} \leq a_n$ , o si  $a_{n+1} \leq a_n$ , respectivamente, para toda  $n$ . Una sucesión que satisface cualquiera de esos requisitos se puede llamar sencillamente **monótona**. Es fácil demostrar que las sucesiones (5) y (9) son monótonas crecientes; la sucesión (5) se estudia en el ejemplo 7. Las sucesiones (6), (7) y (8) obviamente no son monótonas, porque oscilan entre valores positivos y negativos. La sucesión (10) se estudia en el ejemplo 8.

### EJEMPLO 7

Mostrar que la sucesión (5) es monótona creciente.



En este caso,  $a_n = 2 - (1/n^2)$ . Para demostrar que esta sucesión es monótona revisaremos la diferencia  $a_{n+1} - a_n$  para un entero positivo arbitrario  $n$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left[ 2 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] - \left[ 2 - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Por tanto,  $a_{n+1} > a_n$  para toda  $n$  y la sucesión es monótona creciente. ■

Para una sucesión con términos positivos podemos investigar también la monotonía revisando la relación  $a_{n+1}/a_n$ : si esta razón es  $< 1$  para toda  $n$ , entonces  $\{a_n\}$  es monótona decreciente y si  $a_{n+1}/a_n > 1$  para toda  $n$ , entonces  $\{a_n\}$  es monótona creciente.

### EJEMPLO 8

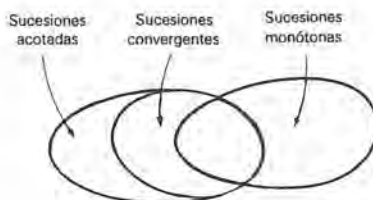
Determinar si la sucesión (10),  $\{a_n\} = \{4^n/n!\}$  es monótona.

Se puede ver de los primeros términos que aparecen en la ecuación (10) que la sucesión no es monótona; es claro que  $a_2 > a_1$ , pero  $a_5 < a_4$ . Sin embargo, podemos investigar más a fondo el asunto formando la razón  $a_{n+1}/a_n$ . Nos encontramos con que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1}. \quad (32)$$

Por tanto  $a_{n+1}/a_n < 1$  para  $n \geq 4$ . En consecuencia, la sucesión  $\{4^n/n!\}$  es monótona decreciente desde el cuarto término en adelante. ■

Los dos teoremas siguientes establecen las relaciones básicas entre las sucesiones acotadas, las monótonas y las convergentes. Estas relaciones también se muestran en la figura 12.1.9.



**Figura 12.1.9** Relación entre las sucesiones acotadas, las monótonas y las convergentes.

**Teorema 12.1.5**

Si  $\{a_n\}$  converge, entonces es acotada.

No es difícil la demostración de este resultado, y se bosqueja en el problema 47. Se infiere de inmediato que *si  $\{a_n\}$  es no acotada, entonces debe ser divergente*. Las sucesiones (8) y (9) muestran este hecho.

**Teorema 12.1.6**

Si  $\{a_n\}$  es acotada y monótona, entonces converge.

Como la convergencia de una sucesión es independiente del comportamiento de cualquier bloque de términos iniciales, la conclusión del teorema 12.1.6 tiene validez si la sucesión es monótona sólo para  $n > N$  para alguna  $N$ . El teorema 12.1.6 es uno de los teoremas fundamentales del análisis matemático. Es uno de los diversos enunciados equivalentes de lo que se conoce como la **propiedad de completación** del sistema de los números reales. Otro enunciado de esta propiedad se presenta en el conjunto de problemas que sigue a la sección 1.1. Una demostración del teorema 12.1.6 necesita ya sea un argumento largo y complicado, o bien la hipótesis de que uno de los demás enunciados de la propiedad de completación es válido. En consecuencia, simplemente aceptaremos este teorema como cierto, y dejaremos el análisis de su demostración para un curso más avanzado; sin embargo, véase el problema 51.

Aunque es una afirmación profunda, el teorema 12.1.6 parece plausible aparentemente. Por ejemplo, supongamos que  $\{a_n\}$  es monótona creciente. En ese caso parece razonable llegar a la conclusión de que  $\{a_n\}$  debe crecer sin cota y divergir a  $\infty$ , o bien que permanece acotada y converge por abajo a algún límite finito. Si  $\{a_n\}$  es acotada, entonces se excluye la primera posibilidad y por tanto la sucesión debe ser convergente.

La sucesión (5) es una ilustración del teorema 12.1.6, porque es acotada y monótona creciente, y también ilustra al teorema la sucesión (10), que es acotada y, desde el cuarto término en adelante, es monótona decreciente como demostramos en el ejemplo 8. Obsérvese que las sucesiones (7) y (8) no son monótonas; una converge, pero la otra no. También, las sucesiones (8) y (9) divergen, porque no son acotadas, aunque la sucesión (9) es monótona. Los problemas 45 y 46 son ejemplos adicionales del empleo de este teorema para sucesiones particulares.

En lo siguiente emplearemos el teorema 12.1.6 principalmente con fines teóricos, esto es, para ayudar a demostrar otros resultados que tienen una utilidad más inmediata. Sin embargo, tiene también el siguiente significado práctico: una dificultad potencial del empleo de la definición 12.1.1 para demostrar que una sucesión  $\{a_n\}$  converge, es que debe uno discernir, o adivinar, el valor del límite  $L$  por adelantado. Con frecuencia es fácil, pero a veces no. En cualquier caso, el teorema 12.1.6 nos proporciona una alternativa; si podemos demostrar que  $\{a_n\}$  es acotada y monótona, entonces sabemos que converge, aunque quizá no tengamos idea de cuál es el límite.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10, llevar a cabo lo siguiente:

- Escribir los primeros cinco términos de la sucesión dada, comenzando con  $n = 1$ .
- Determinar si la sucesión es acotada.
- Determinar si la sucesión es monótona.
- Determinar si la sucesión converge o diverge; si converge, determinar su límite  $L$ .

1.  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$

2.  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

3.  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

4.  $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$

5.  $a_n = (-1)^{n+1} n^{1/3}$

6.  $a_n = \cos \frac{n\pi}{3}$

7.  $a_n = \frac{n-4}{n^2+1}$

8.  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

9.  $a_n = \frac{2^n}{4n^2}$

10.  $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

En los problemas 11 a 32, determinar el límite de la sucesión dada, o, si es el caso, demostrar que la sucesión diverge.

11.  $a_n = \frac{n^2 + 2n - 3}{2n^2 - 3n + 1}$

12.  $a_n = \frac{2n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$

13.  $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^{3/2} + n}$

14.  $a_n = (10)^{1/n}$

15.  $a_n = \frac{\ln n}{n}$

16.  $a_n = (n)^{1/n}$

17.  $a_n = (n)^{1/p}$ , siendo  $p$  un entero positivo

18.  $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{3n}}$

19.  $a_n = (1.01)^n$

20.  $a_n = (1.01)^{\sqrt{n}}$

21.  $a_n = \frac{n^3}{3^n}$

22.  $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

23.  $a_n = \frac{2^{n+1} + n^2}{3^n}$

24.  $a_n = (-1)^n \frac{2^n}{2^{n-1} + 1}$

25.  $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

26.  $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

27.  $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

28.  $a_n = n[\ln(n+1) - \ln n]$

29.  $a_n = \frac{\ln bn}{\ln cn}$ , siendo  $b > 0$   $c > 0$

30.  $a_n = \frac{n!}{n^n}$

31.  $a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$

32.  $a_n = \frac{(n)^{2n}}{(2n)^n}$

En los problemas 33 a 38 hallar una sucesión (que no sea de las que aparecen en el texto) que tenga las propiedades solicitadas.

33. Que sea convergente pero no monótona

34. Que sea acotada pero no convergente

35. Que sea monótona pero no acotada

36. Que sea monótona decreciente y no acotada

37. Que sea monótona decreciente y convergente

38. Que sea no acotada, pero no monótona

En los problemas 39 a 44, emplear la definición 12.1.1 para demostrar que converge la sucesión dada; esto es, para una  $\epsilon$  arbitraria, determinar  $L$  y  $N$  tales que  $|a_n - L| < \epsilon$  para toda  $n > N$ .

39.  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$

40.  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

41.  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

42.  $a_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$

43.  $a_n = 2^{-n}$

44.  $a_n = (-1)^n n^{-1/3}$

\*45. Se tiene la sucesión  $\{a_n\}$  para la cual  $a_1 = 1$ , y

$$a_n = 1 + \sqrt{a_{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (i)$$

Esta sucesión es un ejemplo de una sucesión definida en forma recursiva, para la cual no hay una definición sencilla para  $a_n$  como una función de  $n$ .

(a) Demostrar que  $\{a_n\}$  es monótona creciente.

*Sugerencia:* usar el principio de inducción para demostrar que  $a_{n+1} > a_n$  para todo entero positivo  $n$ .



- (b) Demostrar que
- $\{a_n\}$
- está acotada por arriba.

*Sugerencia:* de nuevo, se puede emplear el principio de inducción. Una cota superior conveniente es  $M = 4$ .

- (c) La sucesión
- $\{a_n\}$
- converge debido a (a) y a (b); sea
- $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- . Emplear la ecuación (i) para demostrar que

$$L = 1 + \sqrt{L}, \quad (ii)$$

y determinar  $L$  a continuación.

- \*46. Considere la sucesión
- $\{a_n\}$
- para la cual
- $a_1 = 1$
- y

$$a_n = \sqrt{3a_{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

- (a) Demostrar que
- $\{a_n\}$
- es monótona creciente demostrando a su vez que
- $a_{n+1}/a_n > 1$
- para todo entero positivo
- $n$
- .

- (b) Demostrar que
- $\{a_n\}$
- está acotada por arriba.

- (c) Determinar el
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
- .

- \*47.
- Demostración del teorema 12.1.5.**
- Supongamos que
- $a_n \rightarrow L$
- cuando
- $n \rightarrow \infty$
- .

- (a) Dada
- $\epsilon > 0$
- , seleccionar a
- $N$
- de tal manera que
- $|a_n - L| < \epsilon$
- para
- $n > N$
- . A continuación demostrar que
- $|a_n| < |L| + \epsilon$
- para
- $n > N$
- .

- (b) Sea
- $M_1$
- el máximo del conjunto de números
- $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|$
- . ¿Cómo se puede asegurar que existe este máximo?

- (c) Emplear los resultados de (a) y (b) para demostrar que
- $\{a_n\}$
- es acotada.

48. Demostrar que si converge
- $\{a_n\}$
- y si
- $a_n \leq M$
- , entonces
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$
- .

49. Demostrar que si
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- y
- $\{b_n\}$
- es acotada, entonces
- $\{a_n b_n\}$
- tiene a cero como límite.

50. (a) Demostrar que si
- $\{a_n\}$
- converge a
- $L$
- , entonces
- $\{|a_n|\}$
- converge a
- $L$
- .

- (b) Mediante ejemplos, demostrar que si converge
- $\{|a_n|\}$
- , entonces
- $\{a_n\}$
- puede converger o no.

- \*51. El teorema 12.1.6 se demuestra con facilidad si suponemos la propiedad de completación en la forma que precede al problema 29 de la sección 1.1, es decir, que todo conjunto acotado
- $S$
- no vacío de números reales tiene una mínima cota superior y una máxima cota inferior. Definamos a
- $S$
- de tal manera que

$$S = \{s \mid s = a_n \text{ para alguna } n\}.$$

Entonces  $S$  es no vacío, y si  $\{a_n\}$  es acotada, entonces  $S$  también es acotada. En consecuencia,  $S$  tiene una mínima cota superior  $L$  y una máxima cota inferior  $M$ . Supongamos que  $\{a_n\}$  es monótona no decreciente. Entonces se sigue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .

- (a) Demostrar que para una
- $\epsilon > 0$
- existe una
- $N$
- tal que
- $a_N > L - \epsilon$
- .

- (b) Demostrar que
- $|a_n - L| < \epsilon$
- para
- $n \geq N$
- . En otras palabras, que
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
- .

*Nota:* si  $\{a_n\}$  es monótona no creciente, y acotada, entonces un argumento semejante demuestra que  $\{a_n\}$  converge a su máxima cota inferior  $M$ .

## 12.2 CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA DE LAS SERIES

Una **serie infinita** es una expresión que tiene la forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots, \quad (1)$$

en la cual los tres puntos después de  $a_k$  indican que la suma nunca termina. A las cantidades  $a_1, a_2, \dots$  se les llama **términos** de la serie; a  $a_k$  se le llama **término general**. En este capítulo limitaremos nuestro estudio a las series cuyos términos son números reales. Por brevedad con frecuencia emplearemos el símbolo de suma siguiente

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (2)$$

para representar a la suma (1).

Las series infinitas se presentan con frecuencia en matemáticas y también en sus aplicaciones. Con frecuencia el primer término representa una aproximación inicial a determinada cantidad de interés, y los términos siguientes son correcciones sucesivas de esa aproximación. Los algoritmos de cómputo que se implementan en las computadoras con frecuencia son de este tipo; la suma se termina cuando se ha alcanzado una exactitud suficiente.

Es importante comprender la diferencia que hay entre una sucesión y una serie. Como se explicó en la sección 12.1, una sucesión es sencillamente un *conjunto* de números dispuestos en un orden determinado. Por otro lado, una serie es una *suma*. Se puede hablar de la sucesión

$$\{a_k\} = a_1, a_2, \dots, a_k, \dots \quad (3)$$

y también de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (4)$$

cuyos términos son los mismos que los de la sucesión  $\{a_k\}$ . Sin embargo, la sucesión (3) y la serie (4) son dos cosas muy distintas.

Antes de proseguir, hacemos notar que no es necesario *indicar* a los términos en una serie de modo que el primer término corresponda a  $k = 1$ , el segundo a  $k = 2$ , y así sucesivamente. Con frecuencia es cómodo escribir la serie de tal modo que el primer término corresponda a  $k = 0$ , o quizá a algún otro valor de  $k$ . Por ejemplo, la serie infinita

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 4} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \dots, \\ \sum_{k=4}^{\infty} \frac{k+1}{k^2} &= \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \frac{7}{36} + \frac{8}{49} + \dots, \end{aligned}$$

y

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} = \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots$$

están dentro del propósito de este capítulo.

No podemos asignar una suma a la serie (4) tan sólo sumando todos los términos, porque es imposible hacerlo en un tiempo finito. Recuérdese que nos encontramos en un caso semejante en la sección 11.3 en relación con la integral impropia  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ . En ese caso integramos desde  $a$  hasta un límite superior  $b$  arbitrario y a continuación vimos el comportamiento del límite cuando  $b \rightarrow \infty$ . Esta vez haremos algo análogo. Si hacemos que  $s_n$  sea la suma de los primeros  $n$  términos de la serie (4), entonces

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

y así sucesivamente. En general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \quad (5)$$

Los números  $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$  forman una sucesión  $\{s_n\}$  que se llama **sucesión de las sumas parciales** de la serie (4). Cuando  $n$  crece, hay más y más términos de la serie comprendidos en las sumas parciales. Si la sucesión  $\{s_n\}$  de las sumas parciales tiene un límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces definimos a este valor límite como la suma de la serie (4).

**DEFINICIÓN 12.2.1** Para la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad (6)$$

se define la sucesión  $\{s_n\}$  de sumas parciales de tal modo que

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n; \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Se dice que la serie (6) converge y que tiene la suma  $s$  si y sólo si converge la sucesión  $\{s_n\}$  al límite  $s$ . En este caso se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s. \quad (8)$$

Por otro lado, se dice que la serie (6) diverge siempre que la sucesión (7) diverge.

Los ejemplos siguientes muestran el empleo de la definición 12.2.1.

### EJEMPLO 1

Determinar si la serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad (9)$$

converge, y si es así, calcular su suma.

La suma (9) es un ejemplo de una serie geométrica; cada término es un múltiplo



constante (en este caso  $\frac{1}{3}$ ) del término anterior. Es conveniente formar la sucesión de las sumas parciales como sigue:

$$s_0 = 1$$

$$s_1 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$$

y en general

$$s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (10)$$

donde  $n$  es un entero arbitrario no negativo. Deseamos investigar el posible comportamiento en el límite de  $\{s_n\}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Desafortunadamente esto no queda claro de inmediato según la ecuación (10), que expresa a  $s_n$  como la suma de muchos términos. Sin embargo, podemos reformular a  $s_n$  para que quede en una forma más útil. Primero multiplicamos a  $s_n$  por  $\frac{1}{3}$  en la ecuación 10; con esto obtenemos

$$\frac{1}{3}s_n = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

A continuación restamos esta ecuación de la ecuación 10 y obtenemos

$$s_n - \frac{1}{3}s_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1},$$

o sea

$$s_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

De acuerdo con el ejemplo 6 de la sección 12.1, sabemos que  $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ; por tanto, conforme a la ecuación 11,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}. \quad (12)$$

Y, por consiguiente, de acuerdo con la definición 12.2.1, la serie (9) converge y su suma es  $\frac{3}{2}$ . ■

### Series geométricas en general

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k + \cdots \quad (13)$$

se llama serie geométrica con la razón común  $r$ . Se puede manejar del mismo modo que la serie (9) del ejemplo 1, para la cual  $r = \frac{1}{3}$ . Procediendo como en la deducción de la ecuación 11, podemos demostrar que, para cualquier entero positivo  $n$ , la suma parcial  $s_n$  de la serie (3) está dada por

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1. \quad (14)$$

Se deben considerar ahora varios casos distintos. Si  $|r| < 1$ , entonces  $r^{n+1} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , según el ejemplo 6 de la sección 12.1. En consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - r}, \quad |r| < 1. \quad (15)$$

Si  $|r| > 1$ , entonces  $r^{n+1}$  se hace no acotado cuando  $n \rightarrow \infty$  y como resultado  $\{s_n\}$  diverge. Si  $r = -1$ , entonces

$$s_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ impar;} \\ 1, & n \text{ par.} \end{cases} \quad (16)$$

Como  $s_n$  oscila entre los dos valores 0 y 1, la sucesión  $\{s_n\}$  diverge también en este caso. Por último, si  $r = 1$ , no se aplica la fórmula (14). Sin embargo, en este caso cada término de la serie (13) tiene el valor 1, y por tanto  $s_n = n + 1$ . Nuevamente  $\{s_n\}$  diverge cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Resumiendo nuestros resultados, llegamos a la conclusión de que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \begin{cases} \text{converge a } 1/(1 - r) \text{ para } -1 < r < 1; \\ \text{diverge para } |r| \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

A continuación presentamos otro ejemplo del empleo de la definición 12.2.1.

## EJEMPLO 2

Determinar si converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \cdots \quad (18)$$

y si es así, evaluar su suma.

Comencemos calculando algunas sumas parciales. Tenemos que

$$s_1 = \frac{1}{2},$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4},$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}.$$

Esto sugiere que

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \quad (19)$$

Si es válida la ecuación 19, entonces  $s_n \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y por tanto la serie (18) converge también y su suma es 1.

Para demostrar la ecuación 19, podemos desarrollar el término general de la serie (18) en fracciones parciales. El resultado es

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \quad (20)$$

Así podemos entonces reformular la serie como sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \cdots. \end{aligned}$$

En esta forma es fácil ver que  $s_n$  está dada por

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

lo cual comprueba la ecuación 19.

A una serie cuyos términos se anulan de esta forma se le llama con frecuencia *serie telescópica*. A menudo, es fácil calcular las sumas parciales de tales series por medio de fracciones parciales. ■

Desafortunadamente, los ejemplos anteriores no son típicos, ya que la definición 12.2.1 por lo general no suele ser de utilidad directa para descubrir si una serie dada converge o diverge, porque en general no es posible obtener una fórmula útil para la  $n$ -ésima suma parcial  $s_n$ . En realidad, la serie geométrica y la serie telescópica son los casos principales en los cuales se puede calcular  $s_n$  de un modo elemental. Como en el



caso de las integrales impropias, con frecuencia es conveniente separar la cuestión de la convergencia o divergencia de una serie infinita, de la del cálculo de su suma, en el caso de que converja. Si podemos determinar que una serie converge, podemos entonces, en general, calcular una aproximación adecuada a su suma si empleamos una computadora para sumar un número suficiente de términos. Lo que deseamos evitar es tratar de calcular la suma de una serie divergente. El concepto de convergencia también se puede extender a series más generales que las que tienen términos constantes, como veremos en el capítulo 13.

En lo que resta de esta sección estudiaremos unas cuantas propiedades generales de las series. En las cinco secciones siguientes veremos algunos criterios que con frecuencia son de utilidad para determinar si una serie dada converge o no.

Un hecho muy importante es que la convergencia o divergencia de una serie infinita está determinada por los términos que aparecen en forma arbitraria cuando se avanza mucho, y no por algún bloque *finito* de términos al principio de la serie. La definición 12.2.1 dice que la convergencia de una serie infinita equivale a la convergencia de su sucesión de sumas parciales, esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s. \quad (21)$$

Por ejemplo, supongamos que modificamos en cierta forma cada uno de los primeros 1000 términos de la serie. Entonces cambia cada suma parcial  $s_n$ , pero para  $n \geq 1000$  cada  $s_n$  cambia exactamente la misma cantidad. Así, la existencia o no existencia de  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  no se afecta por la alteración de los primeros 1000 términos de la serie, aunque en general cambia el valor del límite. Como consecuencia de este hecho, la convergencia o divergencia de una serie no se afecta si introducimos, eliminamos o alteramos cualquier número finito de términos de la serie. Sin embargo, si una serie converge, entonces su suma depende del valor de cada término de la serie y en general la suma cambiará si se cambia aunque sea uno de los términos.

Para hacer más riguroso este argumento, recordemos que la ecuación 21 quiere decir que, para una  $\epsilon > 0$  dada, existe un entero positivo  $N$ , que depende de  $\epsilon$ , tal que

$$|s_n - s| < \epsilon \quad (22)$$

siempre que  $n > N$ . Sustituyendo a  $s_n$  y a  $s$  de las ecuaciones 7 y 8, respectivamente, se llega a la conclusión de que la ecuación 22 se puede reformular del siguiente modo:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \epsilon, \quad (23)$$

siempre que  $n > N$ . Así, la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ocurre si y sólo si es válida la desigualdad (23). En palabras, la ecuación 23 dice que *el residuo* después de los primeros  $n$  términos de la serie debe ser arbitrariamente pequeño para que converja la serie. Obsérvese que no aparecen los primeros  $n$  términos de la serie en la ecuación 23, y por tanto no tienen que ver con la convergencia de dicha serie.

**Teorema 12.2.1****(Criterio del *k*ésimo término)**

Si converge la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  entonces  $a_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

**Demostración.** Para demostrar este teorema observamos que, para  $k \geq 2$ ,

$$a_k = s_k - s_{k-1}.$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}).$$

Si  $s$  es la suma de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$ . Además,  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s$  también, ya que  $\{s_{k-1}\}$  es la misma sucesión que  $\{s_k\}$ ; tan sólo se ha desplazado el índice. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} \\ &= s - s = 0, \end{aligned}$$

que es lo que se tenía que demostrar.  $\square$

Se debe comprender con claridad que el teorema 12.2.1 dice que si la serie converge, entonces  $a_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . *No dice* que si  $a_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces la serie converge. En realidad, si  $a_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces no se puede llegar a conclusión alguna, empleando el teorema 12.2.1, acerca de la convergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Sin embargo, si conforme  $k \rightarrow \infty$  la sucesión  $\{a_k\}$  converge o diverge a un límite *distinto de cero*, entonces la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  debe ser divergente. El empleo principal del teorema consiste en establecer de este modo la divergencia.

**EJEMPLO 3**

Determinar si la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad (24)$$

converge o diverge.

En este caso  $a_k = (-1)^k$  y la sucesión  $\{a_k\}$  no tiene límite cuando  $k \rightarrow \infty$  porque sus términos son  $+1$  y  $-1$ , alternativamente. Por lo que la serie (24) diverge.

A esta conclusión se puede llegar también partiendo de la definición 12.2.1, notando que la sucesión de las sumas parciales de la serie (24) es

$$\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\},$$

la que diverge por ser oscilante. ■

## EJEMPLO 4

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots \quad (25)$$

converge o diverge.

La serie (25) se conoce como **serie armónica**. No nos es útil el teorema 12.2.1 en este caso, porque  $a_k = 1/k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Sin embargo, es posible demostrar que la serie diverge al infinito, no obstante el hecho de que sus términos sucesivos tienden a cero en forma monótona. Nótese que todos los términos son positivos; en consecuencia, la sucesión de las sumas parciales es monótona creciente. Si la sucesión de las sumas parciales también es acotada, entonces esta sucesión debe ser convergente de acuerdo con el teorema 12.1.6. Así, para demostrar que la serie diverge, sólo necesitamos demostrar que las sumas parciales se hacen no acotadas. Lo demostraremos construyendo cotas inferiores para ciertas sumas parciales. Primero, obsérvese que

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

y que

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2.$$

Nótese que al estimar  $s_4$  hemos remplazado a  $a_3 (= \frac{1}{3})$  por un número menor  $\frac{1}{4}$ , y con ello hemos obtenido una cota inferior para  $s_4$ . A continuación veamos  $s_8$ . Si remplazamos a  $a_3$  por  $\frac{1}{4}$  y a  $a_5, a_6$  y  $a_7$  por  $\frac{1}{8}$ , obtendremos

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Del mismo modo, encontramos que

$$\begin{aligned} s_{16} &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\text{ocho términos}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3. \end{aligned}$$



Al proceder de igual modo para la suma parcial  $s_{2^m}$ , donde  $m$  es un entero positivo arbitrario, tenemos que

$$s_{2^m} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{2^{m-1} \text{ términos}} = 1 + \frac{m}{2}. \quad (26)$$

Así, las sumas parciales  $s_{2^m}$  se pueden hacer arbitrariamente grandes si se selecciona  $m$  lo suficientemente grande, y por tanto la sucesión  $\{s_n\}$  también crece sin cota cuando  $n \rightarrow \infty$ . En consecuencia, *la serie armónica diverge*. ■

Las series de los ejemplos 2 y 4 confirman que no se puede llegar a conclusión alguna acerca de la convergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  tan sólo porque  $a_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Para las dos series es verdad que el  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ , pero una de ellas converge y la otra diverge.

### Teorema 12.2.2

Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  convergen a las sumas  $s$  y  $S$ , respectivamente, y si  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  también converge y su suma es  $\alpha s + \beta S$ , esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \alpha s + \beta S. \quad (27)$$

**Demostración.** Para demostrar este teorema sean  $s_n$ ,  $S_n$  y  $\sigma_n$  las  $n$ -ésimas sumas parciales de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , y  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k \\ &= \alpha s_n + \beta S_n \\ &\rightarrow \alpha s + \beta S, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

de acuerdo con el teorema 12.1.2(a), con lo cual se completa la demostración. □

Un caso especialmente importante del teorema 12.2.2 se tiene si  $\beta = 0$ , en el que la ecuación 27 se reduce a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \alpha s. \quad (28)$$

En otras palabras, si se multiplica cada término de una serie convergente por una constante, entonces la suma de la serie queda multiplicada por esa constante.

Por último, llamamos la atención hacia el hecho de que *no es cierto* el inverso del teorema 12.2.2: la convergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  no garantiza la convergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  o de  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Por ejemplo, en el ejemplo 2 se demostró que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

converge. Sin embargo, de acuerdo con el ejemplo 4, sabemos que las series  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k+1)$  divergen.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 escribir algunos términos de cada lado de la igualdad, comprobando con ello que es válida la ecuación.

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^2} = \sum_{m=4}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

$$5. \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

$$6. \sum_{k=n}^{\infty} a_{k+r} = \sum_{k=n+r}^{\infty} a_k$$

$$17. \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \text{donde } a_k = \begin{cases} 2^{-k}, & k \text{ par} \\ 1, & k \text{ impar} \end{cases}$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{donde } a_k = \begin{cases} \frac{k-5}{k}, & k \text{ impar} \\ 10^{-k}, & k \text{ par} \end{cases}$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{3}{k(k+1)} - \frac{1}{2^k} \right)$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^k$$

En los problemas 21 a 24 determinar todos los valores de  $\alpha$  para los cuales converge la serie dada. Si converge, calcular su suma  $s$ .

$$21. \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha - 2)^k$$

$$22. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - 2)^k}, \quad \alpha \neq 2$$

$$23. \sum_{k=0}^{\infty} (2\alpha - 3)^k$$

$$24. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{(3\alpha - 1)^k}, \quad \alpha \neq \frac{1}{3}$$

**Rapidez de la convergencia.** En los problemas 25 a 27 determinar el número de términos que se deben considerar si se ha de calcular la suma  $s$  de la serie dada con un error que no sea mayor que 0.0001. Esto es, determinar la  $N$  mínima tal que  $|s - s_n| < 0.0001$  para toda  $n \geq N$ .

$$\textcircled{c} 25. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$$

$$\textcircled{c} 26. \sum_{k=0}^{\infty} (0.9)^k$$

$$\textcircled{c} 27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$8. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2}$$

$$10. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k}$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k/2}}$$

$$12. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$$

$$13. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k}$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}$$

28. Determinar, para la serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ , donde  $|r| < 1$ , el número de términos que se deben considerar si se debe aproximar la suma  $s$  con un error que no sea mayor que  $\epsilon$ , siendo  $\epsilon$  un número positivo dado. Esto es, determinar la  $N$  mínima tal que  $|s - s_n| < \epsilon$  para toda  $n \geq N$ .

29. Suponer que cuando se deja caer una pelota desde una altura  $h$  sobre una superficie dura y horizontal, siempre rebota hasta una altura  $\alpha h$ , donde  $0 < \alpha < 1$ . Determinar la distancia total recorrida por esta pelota.

30. Se sabe bien que las fracciones decimales periódicas representan números racionales, las razones de dos enteros. En este caso indicaremos cómo determinar el número racional que corresponde a una fracción decimal periódica.

(a) Sea  $s = 0.27272727 \dots$ . Demostrar que se puede escribir  $s$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s &= \frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \frac{27}{10^8} + \dots \\ &= \frac{27}{10^2} \left( 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right). \end{aligned}$$

(b) Obsérvese que la serie que se obtuvo en la parte

(a) es una serie geométrica en la cual la razón es  $10^{-2}$ . Sumar esta serie y demostrar que  $s = \frac{3}{11}$ .

En los problemas 31 a 36 emplear el método descrito en el problema 30 para expresar al decimal dado como un número racional.

31. 0.555555 . . .

32. 0.321321321 . . .

33. 0.39999999 . . .

34. 0.285714285714 . . .

35. 0.8181818181 . . .

36. 0.477477477 . . .

En los problemas 37 y 38, determinar el término general de la serie que corresponde a la sucesión de las sumas parciales dada. Nótese que  $a_1 = s_1$ ,  $a_2 = s_2 - s_1$ , y así sucesivamente.

37.  $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$

38.  $s_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

39. Deducir la ecuación

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1$$

para la suma de un número finito de términos de una serie geométrica con el método que se empleó para deducir la ecuación 11.

## 12.3 EL CRITERIO DE COMPARACIÓN

El obstáculo principal para emplear la definición 2.2.1 y determinar si una serie dada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge o diverge es que, en general, es imposible hallar una fórmula útil para la suma parcial  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Por este motivo, se han desarrollado criterios de convergencia que no requieren conocer a  $s_n$ . En el resto de este capítulo estudiaremos el empleo de algunos de estos criterios.

Hasta que lo hagamos notar, sólo tomaremos en cuenta series que tengan términos positivos, esto es,  $a_k > 0$  para toda  $k$ . Como la convergencia no se afecta si se elimina cualquier bloque finito de términos, los resultados se aplican también a las series que tienen un número finito de términos negativos. El primer criterio es análogo a los criterios de comparación para las integrales impropias, que se estudiaron en la sección 11.4.

### Teorema 12.3.1

(Criterio de comparación)

Si  $0 < a_k \leq b_k$  para toda  $k$ , y si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  también



converge. Por otro lado, si  $0 < b_k \leq a_k$  para toda  $k$ , y si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diverge, entonces también diverge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Demostración.** Para demostrar la primera parte de este teorema, sean  $s_n$  y  $\sigma_n$  las  $n$ -ésimas sumas parciales de las dos series:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Se nos dice que  $\sigma_n$  tiende a un límite, digamos  $B$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Necesitamos demostrar que también converge la sucesión  $\{s_n\}$ . Como  $a_k > 0$ , entonces  $\{s_n\}$  es monótona creciente. Además, tenemos que

$$0 < s_n \leq \sigma_n < B,$$

de manera que  $\{s_n\}$  es acotada. Sabemos (teorema 12.1.6) que una sucesión acotada y monótona converge. Por tanto,  $\{s_n\}$  converge y en consecuencia también converge la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

La segunda parte del teorema se demuestra al observar que en este caso

$$0 < \sigma_n \leq s_n$$

y que  $\sigma_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En consecuencia,  $s_n \rightarrow \infty$  cuando también  $n \rightarrow \infty$ , y por consiguiente  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverge.  $\square$

El teorema 12.3.1 se puede generalizar si de nuevo se nota que la convergencia o divergencia de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  no se afecta si se omite un número finito de términos de la serie. En consecuencia, el teorema 12.3.1 sigue siendo válido si se satisfacen las hipótesis para una  $k$  suficientemente grande, pero quizá no para toda  $k$ . Este resultado se enuncia en el corolario siguiente:

### Corolario

Si  $0 < a_k \leq b_k$  para  $k$  mayor o igual que algún entero  $K$ , y si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  también converge. Por otro lado, si  $0 < b_k \leq a_k$  para  $k \geq K$ , y si diverge  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , entonces también diverge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Como en el caso de las integrales impropias, a veces resulta incómodo tener que manejar las desigualdades del teorema 12.3.1 o de su corolario. Esto en general se puede evitar si se emplea la siguiente forma límite del criterio de comparación. Es semejante a las pruebas correspondientes para las integrales impropias.

**Teorema 12.3.2****(Criterio de comparación límite)**Supongamos que  $a_k > 0$  y  $b_k > 0$  para  $k \geq K$  y que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L. \quad (1)$$

Si  $0 < L < \infty$  entonces las series  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  convergen las dos, o divergen las dos. Además, si  $L = 0$ , y si converge  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  también converge. Por último, si  $L = \infty$  y si diverge  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , entonces también diverge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . No se puede llegar a conclusiones en los demás casos.

**Demostración.** Sólo demostraremos la primera parte de este teorema. Supongamos que  $0 < L < \infty$  y que  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge. Como  $a_k/b_k \rightarrow L$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , podemos estar seguros, para valores de  $k$  lo suficientemente grandes, digamos para  $k \geq K_2$ , que

$$\frac{a_k}{b_k} \leq 2L$$

o bien

$$a_k \leq 2Lb_k. \quad (2)$$

De acuerdo con el teorema 12.2.2, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} 2Lb_k = 2L \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge siempre que lo haga  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Por tanto, para  $k \geq \max(K_1, K_2)$  se satisfacen las condiciones del corolario al teorema 12.3.1 por lo que converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Supongamos ahora que  $0 < L < \infty$  y que  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diverge. Como  $a_k/b_k \rightarrow L$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , podemos afirmar ahora que

$$\frac{a_k}{b_k} \geq \frac{L}{2} \quad (3)$$

para una  $k$  suficientemente grande, digamos para  $k \geq K_3$ . Como la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (L/2) b_k$  diverge, se concluye del corolario que también diverge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Las demostraciones de las partes restantes del teorema 12.3.2 son semejantes y se dejan como ejercicio (problema 26).  $\square$

**EJEMPLO 1**

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \quad (4)$$

converge o diverge.

Como  $k!$  crece extremadamente rápido, es razonable sospechar que la serie (4) converge. Para determinar con más precisión su comportamiento, observemos que los términos sucesivos están acotados como sigue:

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1, \\ \frac{1}{2!} &= \frac{1}{1 \cdot 2} \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}, \\ \frac{1}{4!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}, \end{aligned} \quad (5)$$

En general tenemos que

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k \geq 1. \quad (6)$$

Así, cada término de la serie (4) no es mayor que el término correspondiente de la serie geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \cdots, \quad (7)$$

que se sabe que converge (ecuación 17 de la sección 12.2). Por tanto, la serie (4) también converge, de acuerdo con el teorema 12.3.1.

En este caso sabemos también que la suma de la serie geométrica (7) es 2. Así, entonces, de acuerdo con las desigualdades (5) y (6) la suma  $s$  de  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k!)$  no es mayor que 2. Además, como todos los términos de la serie (4) son positivos, las sumas parciales de esta serie son monótonas crecientes. Así,  $s_n \leq s \leq 2$  para toda  $n$ . Una vez sabido que la serie (4) converge, podemos aproximar su suma al sumar términos de la serie. Como  $s_n$  crece en forma monótona con  $n$ , mientras más términos usemos, mejor será la aproximación. Sin embargo, aun pocos términos dan una aproximación razonablemente buena a la suma. Por ejemplo, con sólo cuatro términos obtenemos

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \cong 1.708.$$

En el ejemplo 3 de la sección 13.2 demostraremos que en realidad la suma de la serie (4) es  $s = e - 1 \cong 1.718$ . ■

## EJEMPLO 2

Determinar si la serie



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (8)$$

converge o diverge.

Recuérdese que en el ejemplo 2 de la sección 12.2 demostramos que la serie, bastante parecida,  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k(k+1)$  converge. Por tanto, sospechamos que la serie (8) también converge. Sin embargo,

$$\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k(k+1)} \quad (9)$$

de modo que la desigualdad va en sentido erróneo como para poder usar el teorema 12.3.1 sin modificarlo. Por otro lado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k^2}{1/k(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1, \quad (10)$$

y entonces se aplica el teorema 12.3.2 y se llega a la conclusión de que  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$  converge.

También podemos emplear el teorema 12.3.1 siempre que se modifique la desigualdad (9) en forma adecuada. Por ejemplo, podemos partir del hecho de que  $k^2 \geq k$  para  $k = 1, 2, \dots$ . Entonces  $2k^2 \geq k^2$ , esto es,  $k^2 \geq k(k+1)/2$ , y por último

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \quad (12)$$

y esta última serie converge, se infiere del teorema 12.3.1 que  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$  converge también. Además, la serie de la ecuación 12 tiene a 2 como suma, por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Como en el ejemplo 1, las sumas parciales  $s_n$  tienden a la suma  $s$  en forma monótona por abajo.

Si calculamos un valor aproximado de  $s$  empleando sólo los primeros cuatro términos, obtenemos

$$s_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cong 1.401.$$

Es posible demostrar, mediante métodos más avanzados, que para esta serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \cong 1.645,$$

que es un resultado descubierto por Euler aproximadamente en 1736. Así, la aproximación de cuatro términos no es tan buena en este caso como en la del ejemplo 1. Lo anterior refleja el hecho de que la serie (8) converge mucho más lentamente que la serie (4). ■

Para un uso eficaz de los teoremas 12.3.1 y 12.3.2, es necesario tener un conjunto de series potenciales de comparación cuya convergencia o divergencia esté ya determinada. Las series geométricas a veces son útiles para fines de comparación, como en el ejemplo 1. Quizá las más útiles de todas estas series son aquellas de la forma  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$ , donde  $p$  es una constante. El teorema siguiente especifica los valores de  $p$  para los cuales converge esta serie.

### Teorema 12.3.3

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad (13)$$

que se llama “serie  $p$ ”, converge para  $p > 1$  y diverge para  $p \leq 1$ .

**Demostración.** La demostración de este resultado se obtiene con mayor facilidad a partir del criterio de la integral, que estudiaremos en la sección 12.5. Mientras tanto, podremos demostrar *una parte* del teorema 12.3.3 mediante un criterio de comparación.

En el ejemplo 2 demostramos que la serie (13) converge para  $p = 2$ . Además, si  $p > 2$ , tenemos que

$$\frac{1}{k^p} < \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \text{ y } p > 2. \quad (14)$$

Por tanto, según el teorema 12.3.1, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$  converge para toda  $p \geq 2$ .

Igualmente, en el ejemplo 4 de la sección 12.2, se encontró que la serie armónica ( $p = 1$ ) diverge. Para  $p < 1$  tenemos que

$$\frac{1}{k^p} > \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \text{ y } p < 1. \quad (15)$$

Por lo que, de acuerdo con el teorema 12.3.1, la serie (13) diverge para toda  $p \leq 1$ . □

Los casos restantes,  $1 < p < 2$ , se tratan en la sección 12.5. Sin embargo, aceptaremos la validez del teorema 12.3.3 y lo usaremos a continuación.

Una consecuencia de ese teorema es que la serie armónica  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$  apenas diverge. La serie armónica se obtiene haciendo que  $p = 1$  en la ecuación 13 y si se emplea un valor algo mayor de  $p$  se produce una serie convergente. En otras palabras, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{1+\epsilon}$  converge para toda  $\epsilon$  positiva, no importa cuán pequeña sea.

Terminaremos esta sección con algunos ejemplos más del criterio de comparación.

### EJEMPLO 3

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}}{k^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{10} + \dots \quad (16)$$

converge o diverge.

Para  $k$  grande tenemos que

$$\frac{\sqrt{k+2}}{k^2+1} \cong \frac{\sqrt{k}}{k^2} = k^{-3/2},$$

lo cual sugiere que la serie converge. Para confirmarlo hacemos que

$$a_k = \frac{\sqrt{k+2}}{k^2+1}, \quad b_k = \frac{1}{k^{3/2}}$$

y notamos que  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge, según el teorema 12.3.3. Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k+2}}{k^2+1} \cdot k^{3/2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} x^{3/2}}{x^2+1}$$

de acuerdo con el teorema 12.1.4. Dividiendo numerador y denominador entre  $x^2$  encontramos que

$$\frac{\sqrt{x+2} x^{3/2}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{1+(2/x)}}{1+(1/x^2)} \rightarrow 1$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$$

y de acuerdo con el teorema 12.3.2, la serie (16) converge también. ■

### EJEMPLO 4

Determinar si la serie



$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} + \cdots \quad (17)$$

converge o diverge.

La idea básica en este caso consiste en observar que el término general  $a_k$  se puede escribir en la siguiente forma:

$$a_k = \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k-2} \right) \left( \frac{1}{2k} \right). \quad (18)$$

En consecuencia

$$a_k > \frac{1}{2k},$$

y por tanto la serie dada diverge por comparación con la serie armónica. ■

## EJEMPLO 5

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = \sin 1 + \sin \frac{1}{4} + \sin \frac{1}{9} + \cdots \quad (19)$$

converge o diverge.

Para  $k$  grande,  $1/k^2$  es pequeña y  $\sin(1/k^2)$  se aproxima a  $1/k^2$ . En realidad, si hacemos que  $\alpha = 1/k^2$ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/k^2)}{1/k^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Como  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$  converge, se sigue del criterio de comparación límite que también converge la serie (19). ■

Nótese que en todos estos ejemplos nuestro método consistió en estimar  $a_k$  para  $k$  grande en términos de  $k^{-p}$ . Entonces el criterio de comparación nos dice que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge si  $p > 1$  y diverge si  $p \leq 1$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20 determinar si la serie dada converge o diverge.

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 4}$

2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 4}}$

3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+2}$
5.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)^2}{(k^2+4)^{3/2}}$
7.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k+1)^{4/3}}{(2k^4-1)^{1/2}}$
9.  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$
11.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{(4+e^k)^2}$
13.  $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{k!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)} + \cdots$
14.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\sqrt{k} + (1/k)]^p}{k^2 + 1}$
15.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2+1)^p}{k^q + 4}$ ,  $p, q > 0$
16.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{(\ln 2)^k}$
17.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^2}$
18.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$
19.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \ln k}{4 + k^2 \ln k}$
20.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$
21. Demostrar que si  $\lim_{k \rightarrow \infty} ka_k = A \neq 0$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverge.
22. (a) Si  $a_k > 0$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge, demostrar que  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k$  diverge.  
(b) Si  $a_k > 0$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverge, demostrar, mediante ejemplos, que  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/a_k$  puede ser convergente o divergente.
23. (a) Si  $a_k > 0$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge, demostrar que también converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ .

(b) Si  $a_k > 0$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  converge, demostrar mediante ejemplos que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  puede ser convergente o divergente.

24. (a) Demostrar que  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k}$  converge para toda  $\alpha > 0$ .

(b) Demostrar que  $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\alpha k}$  converge para cualquier  $\alpha > 0$ .

*Sugerencia:* Ver el ejemplo 2 de la sección 11.2 y demostrar que  $ke^{-\alpha k/2} \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Así, para  $k$  grande,  $ke^{-\alpha k} \leq e^{-\alpha k/2}$ .

(c) Ampliar el argumento de la parte (b) para demostrar que  $\sum_{k=1}^{\infty} k^n e^{-\alpha k}$  converge para toda  $\alpha > 0$  y para toda  $n > 0$ .

\*25. Demostrar que  $\sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)/k^p$  converge para  $p > 1$  y diverge para  $p \leq 1$ .

*Sugerencia:* si  $p > 1$ , hacer que  $p = 1 + 2r$ ,  $r > 0$ . Entonces

$$\frac{\ln k}{k^p} = \frac{\ln k}{k^r} \cdot \frac{1}{k^{1+r}}.$$

\*26. Extender el argumento que se presentó en el texto para demostrar las siguientes partes del teorema 12.3.2.

(a) Si  $L = 0$  en el teorema 12.3.2, y si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge, demostrar que también converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diverge, demostrar que no se puede llegar a alguna conclusión acerca de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

(b) Si  $L = \infty$  en el teorema 12.3.2, y si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diverge, demostrar que también diverge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  converge, demostrar que no se puede llegar a alguna conclusión acerca de  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

\*27. Suponer que  $c_k \leq a_k \leq b_k$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$  y que convergen tanto  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  como  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Demostrar que también converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Nótese que no hay hipótesis acerca de los signos de  $a_k$ ,  $b_k$  y  $c_k$ .

*Sugerencia:* considerar las series  $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - c_k)$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - c_k)$ .

## 12.4 EL CRITERIO DE LA RAZÓN

En esta sección estudiaremos otro criterio para la convergencia o divergencia de una serie infinita  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  de términos positivos, que se aplica mucho. La idea básica

consiste en que si la razón  $a_{k+1}/a_k$  tiende a un límite  $L$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , entonces, para  $k$  grande la serie dada es casi la serie geométrica con una razón común  $L$  y podemos esperar que converja o diverja de manera semejante. A este criterio se le conoce como el criterio de la razón.

### Teorema 12.4.1

#### (Criterio de la razón)

Considere la serie infinita  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , donde  $a_k > 0$ , y suponga que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L. \quad (1)$$

Entonces

- (a) Si  $L < 1$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge.
- (b) Si  $L > 1$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverge.
- (c) Si  $L = 1$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  puede ser convergente o divergente, y por tanto no se puede llegar a una conclusión con este criterio.

Demostraremos este teorema más adelante en esta sección. Primero veremos algunos ejemplos.

### EJEMPLO 1

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!} \quad (2)$$

converge o diverge.

En este caso  $a_k = 5^k/k!$ , y entonces  $a_{k+1} = 5^{k+1}/(k+1)!$ . Por lo que tenemos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{5^k} = \frac{5}{k+1},$$

y en consecuencia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0.$$

Así, de acuerdo con el criterio de la razón (con  $L = 0$ ), llegamos a la conclusión de que la serie (2) converge. ■



**EJEMPLO 2**

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3} \quad (3)$$

converge o diverge.

Para esta serie tenemos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{k+1}/(k+1)^3}{3^k/k^3} = 3 \left( \frac{k}{k+1} \right)^3.$$

Así, se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 3 \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^3 = 3,$$

por lo que  $L = 3$  en este ejemplo. Por tanto, según el criterio de la razón, la serie (3) diverge. ■

**EJEMPLO 3**

Determinar si la serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (4)$$

converge o diverge.

En este caso tenemos que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

de modo que el criterio de la razón no nos ayuda. Sin embargo, de acuerdo al ejemplo 4 de la sección 12.2, o al teorema 12.3.3, sabemos que la serie armónica (4) diverge. ■

**EJEMPLO 4**

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad (5)$$

converge o diverge.

De nuevo, el criterio de la razón no nos ayuda, ya que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left( \frac{k}{k+1} \right)^2 \rightarrow 1 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Sin embargo, en este caso ya sabemos que la serie converge, según el teorema 12.3.3 o el ejemplo 2 de la sección 12.3. ■

Nótese que la serie del ejemplo 3 diverge y la del ejemplo 4 converge, aunque en ambos casos  $L = 1$ . Estos ejemplos confirman que no se puede llegar a conclusión alguna acerca de la convergencia a partir del criterio de la razón cuando  $L = 1$ .

### EJEMPLO 5

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \quad (6)$$

converge o diverge.

Aplicando a esta serie el criterio de la razón obtenemos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{k!} = \left( \frac{k}{k+1} \right)^k.$$

Para determinar el límite de esta expresión, obsérvese que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k+1}{k} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k = e.$$

En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k}{k+1} \right)^k = \frac{1}{e}.$$

Como  $1/e < 1$ , se concluye que la serie (6) converge.

También obsérvese que la convergencia de la serie (6) implica, de acuerdo con el teorema 12.2.1, que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k} = 0.$$

Así,  $k^k$  crece mucho más rápidamente que  $k!$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . ■

**EJEMPLO 6**

Determinar si la serie

$$\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3k} + \cdots \quad (7)$$

converge o diverge.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)(2k+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3k(3k+3)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)} \\ &= \frac{2k+1}{3k+3} \rightarrow \frac{2}{3} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Así, de acuerdo con el criterio de la razón, la serie (7) converge. ■

**Demostración del teorema 12.4.1.** Recuérdese que estamos suponiendo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L; \quad (8)$$

Como  $a_k > 0$  para toda  $k$ , entonces  $L \geq 0$ . Se demuestra la parte de la convergencia del criterio de la razón al comparar la serie dada con una serie geométrica adecuada. Supongamos entonces que  $L < 1$  en la ecuación 8 y seleccionemos un número  $r$  entre  $L$  y 1. Esto es,

$$L < r < 1. \quad (9)$$

Como  $a_{k+1}/a_k \rightarrow L$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , sabemos que al final esta relación debe tomar valores arbitrariamente cercanos a  $L$ . En particular, la razón, también al final, no debe ser mayor que  $r$ . Así, para  $k$  suficientemente grande, digamos para  $k \geq M$ , donde  $M$  depende de la selección de  $r$ , tenemos que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r, \quad k = M, M+1, \dots \quad (10)$$

Para  $k = M$ , la ecuación 10 se transforma en

$$a_{M+1} \leq r a_M.$$

Análogamente, para  $k = M+1$ ,

$$a_{M+2} \leq r a_{M+1} \leq r^2 a_M,$$

y para  $k = M+2$ ,

$$a_{M+3} \leq r a_{M+2} \leq r^3 a_M.$$



En general, tenemos que

$$a_{M+m} \leq r^m a_M, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

La serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_M r^m = a_M \sum_{m=0}^{\infty} r^m$$

converge ya que es una serie geométrica con  $|r| < 1$ . Así, se satisface la hipótesis del corolario del teorema 12.3.1 y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge.

La parte del teorema 12.4.1 acerca de la divergencia es más fácil de demostrar. Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L > 1,$$

entonces, para  $k$  suficientemente grande, tenemos que

$$a_{k+1} \geq a_k.$$

Así, más allá de cierto punto los términos de la serie son crecientes monótonos y además positivos. Por tanto,  $a_k$  no puede tender a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por lo anterior, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diverge, de acuerdo al teorema 12.2.1, el criterio del késimo término.

Por último, como hicimos notar anteriormente en los ejemplos 3 y 4, si  $L = 1$ , entonces la serie puede ser tanto convergente como divergente. Con ello se completa la demostración del teorema.  $\square$

En contraste con el criterio de comparación, el criterio de la razón tiene la ventaja de que no necesita del empleo de una serie auxiliar de comparación. Por otro lado, en algunos casos resulta que el límite  $L$  de la ecuación 1 es igual a uno y en tales casos no se puede usar el criterio de la razón. En realidad, el criterio de la razón y el de comparación se complementan muy bien entre sí. El criterio de la razón es adecuado para series en las que  $a_k$  involucre cantidades tales como  $k!$  o  $2^k$ , porque entonces se simplificará la razón  $a_{k+1}/a_k$  debido a la simplificación de factores iguales en el numerador y en el denominador, como en los ejemplos 1 y 2. Por otro lado, si en  $a_k$  intervienen polinomios u otras expresiones algebraicas en  $k$ , entonces es probable que falle el criterio de la razón, porque  $L = 1$ . Sin embargo, estas series se pueden manejar normalmente mediante el criterio de comparación límite junto con el conocimiento de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$ , como en el ejemplo 3 de la sección 12.3.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 22, determinar si la serie dada converge o diverge.

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{2^k}$

3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{2k}}$

4.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{k^2}}$

6.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k k^3}$

5.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}$

7.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

8.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k} \quad 10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! a^k}{(2k)!}, \quad a > 0$$

$$11. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k)^3}{(\ln 3)^k} \quad 12. \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k} \quad 15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^2 2^{2k}} \quad 16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 3^k}{2^{2k}}$$

$$17. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k)^{10}}{(\ln a)^k}, \quad a > 1 \quad 18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^{2k}}$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k)^k} \quad 20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (2k)!}{k^{2k}} \quad 21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^k)!}{2^{k!}}$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k^k}$$

23. Considere la serie

$$a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

en la cual  $0 < a < b < 1$ . Demostrar que en esta serie falla el criterio de la razón. A continuación determinar si la serie converge o diverge.

En los problemas 24 a 27 evaluar el límite que se pide teniendo en cuenta una serie infinita adecuada.

$$24. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10^k}{k!}$$

$$25. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k k!}{k^k}$$

$$26. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k k!}{k^k}$$

$$27. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k}$$

\*28. (a) Demostrar la siguiente versión del criterio de la razón: si  $a_k > 0$ , y si  $a_{k+1}/a_k \leq r < 1$ , para toda  $k$  suficientemente grande, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge.

(b) Demostrar, mediante un ejemplo, que puede ser errónea la conclusión de la parte (a) si sólo se supone que  $a_k > 0$  y que  $a_{k+1}/a_k$  para toda  $k$  suficientemente grande.

29. Considere la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{72} + \cdots$$

para la cual

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k \text{ impar;} \\ \frac{1}{3}, & k \text{ par.} \end{cases}$$

(a) Demostrar que no se aplica el teorema 12.4.1.

(b) Determinar si la serie converge o diverge.

*Sugerencia:* ver el problema 28.

## 12.5 EL CRITERIO DE LA INTEGRAL

Hay muchas semejanzas entre las series infinitas y las integrales impropias. La relación más importante entre ellas se presenta en el teorema siguiente, que con mayor frecuencia se emplea para deducir la convergencia o divergencia de una serie a partir del comportamiento conocido de determinada integral correspondiente.

### Teorema 12.5.1

#### (Criterio de la integral)

Sea  $f$  una función continua, positiva, monótona no creciente, en el intervalo  $[1, \infty)$ . Supóngase también que

$$f(k) = a_k \quad (1)$$

para todo entero positivo  $k = 1, 2, \dots$ . Entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (2)$$

y la integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \quad (3)$$

convergen ambas o divergen ambas.

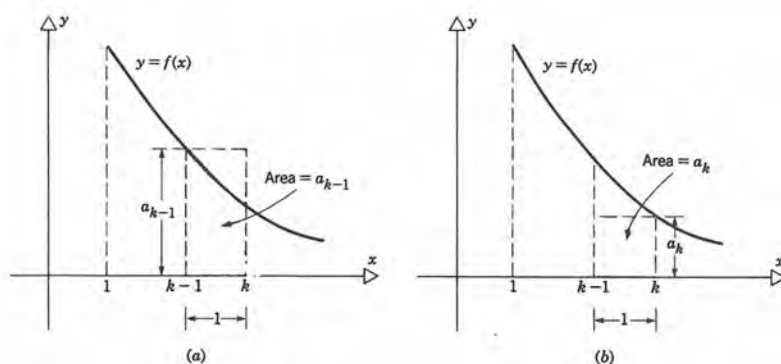


Figura 12.5.1

**Demostración.** Para ver la relación que hay entre la serie (2) y la integral (3) nos ayudaremos con la figura 12.5.1. El área comprendida entre la gráfica de  $y = f(x)$  y el eje  $x$ , y entre las rectas  $x = k - 1$  y  $x = k$  está dada por

$$\int_{k-1}^k f(x) dx.$$

El área del rectángulo inscrito es  $a_k$  y la del rectángulo circunscrito es  $a_{k-1}$ . De acuerdo con la figura 12.5.1 es claro que estas tres áreas se relacionan mediante las desigualdades

$$a_k \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq a_{k-1}, \quad (4)$$

y esto es válido para  $k = 2, 3, \dots$ . Si escribimos la ecuación 4 para  $k = 2, 3, \dots, n$ , tenemos que

$$a_2 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq a_1,$$



$$\begin{aligned}
 a_3 &\leq \int_2^3 f(x) \, dx \leq a_2, \\
 &\vdots \\
 a_n &\leq \int_{n-1}^n f(x) \, dx \leq a_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Sumando estas desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned}
 a_2 + a_3 + \cdots + a_n &\leq \int_1^2 f(x) \, dx + \int_2^3 f(x) \, dx + \cdots \\
 &\quad + \int_{n-1}^n f(x) \, dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}; \tag{6}
 \end{aligned}$$

esta desigualdad se muestra en la figura 12.5.2 para el caso en que  $n = 6$ . El término de en medio de la ecuación 6 es justamente  $\int_1^n f(x) \, dx$ . Como  $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ , podemos reformular la ecuación 6 como sigue:

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x) \, dx \leq s_n - a_n. \tag{7}$$

Obsérvese que tanto  $s_n$  como  $\int_1^n f(x) \, dx$  crecen en forma monótona con  $n$  porque  $f(x) > 0$  para toda  $x \geq 1$ .

Supongamos ahora que la integral (3) converge y que tiene el valor  $I$ . Entonces, de acuerdo con la desigualdad de la ecuación 7, tenemos

$$s_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) \, dx \leq a_1 + I. \tag{8}$$

Así,  $\{s_n\}$  es una sucesión monótona creciente acotada por arriba; por tanto, de acuerdo con el teorema 12.1.6 debe converger. Por lo que también converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

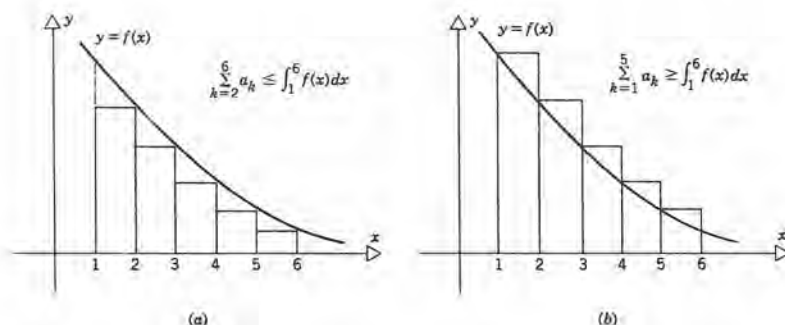


Figura 12.5.2

Por otro lado, si diverge la integral (3), entonces emplearemos la desigualdad de la derecha de la ecuación 7 para obtener

$$s_n \geq \int_1^n f(x) dx + a_n. \quad (9)$$

En este caso el lado derecho de la desigualdad se hace no acotado cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto  $s_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que también diverge la serie (2). Con ello se completa la demostración del teorema 12.5.1.  $\square$

Como en otros criterios de convergencia, sólo es necesario que se satisfagan las hipótesis del teorema 12.5.1 por todos los términos de la serie lo suficientemente alejados. Con ello el teorema sigue siendo válido si se satisfacen las condiciones para  $x \geq M$ , donde  $M$  es algún número positivo.

### EJEMPLO 1

Determinar los valores de  $p$  para los cuales la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad (10)$$

converge o diverge.

Para  $p \leq 0$  la serie diverge porque  $a_k = k^{-p}$  no tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$  (teorema 12.2.1). Por tanto es suficiente tener en cuenta sólo valores positivos de  $p$ . Para  $p > 0$ , la función

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad x \geq 1 \quad (11)$$

tiene todas las propiedades que se especifican en el teorema 12.5.1. Entonces la serie (10) converge si y sólo si la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \quad (12)$$

converge. En el ejemplo 4 de la sección 11.3 demostramos que la integral (12) converge si  $p > 1$  y diverge en los demás casos. Por tanto, de acuerdo con el teorema 12.5.1, lo mismo vale para la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$ : converge para  $p > 1$  y diverge para  $p \leq 1$ . Nótese que este ejemplo suministra una demostración completa del teorema 12.3.3.  $\blacksquare$

### EJEMPLO 2

Determinar si la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \quad (13)$$

converge o diverge.

En este caso falla el criterio de la razón y no es obvia alguna serie de comparación conveniente. Sin embargo, si hacemos que

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad (14)$$

entonces se satisfacen las condiciones del criterio de la integral para  $x \geq 2$ . Por tanto, la serie (14) converge o diverge de acuerdo con el comportamiento de la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}. \quad (15)$$

Para evaluar esta integral escribimos

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x},$$

y a continuación empleamos la sustitución  $u = \ln x$  para obtener

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \ln u \right) \Big|_{\ln 2}^{\ln b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty. \end{aligned}$$

Así, la integral (15) diverge y en consecuencia también la serie (13).

En el ejemplo 1 encontramos que  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$  converge siempre que  $p > 1$ , sin importar cuán pequeña sea la diferencia  $p - 1$ . Dicho de otro modo, debemos tener  $k^p > k$  para que haya convergencia. En este ejemplo tenemos que  $k \ln k > k$  cuando menos para  $k \geq 3$ , pero la serie  $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k \ln k$  diverge de todos modos. Esto muestra una vez más la diferencia entre los crecimientos logarítmico y algebraico:  $\ln k$  crece más lentamente que cualquier potencia positiva de  $k$  y su crecimiento no es lo suficientemente rápido como para hacer que converja la serie  $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k \ln k$ . Por otro lado, la serie  $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k(\ln k)^{\alpha}$  sí converge cuando  $\alpha$  es cualquier número mayor que uno (problema 10). ■

### Estimación del residuo

Al emplear en la práctica una serie infinita con frecuencia es importante conocer algo acerca de la rapidez de convergencia de la serie. Esto es lo mismo que preguntar qué tan grande debemos escoger a  $n$  para que la suma parcial

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad (16)$$



sea una aproximación adecuada de la suma  $s$  de la serie completa. Considerándolo desde otro punto de vista, deseamos estimar el residuo  $R_n$  dado por

$$R_n = s - s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad (17)$$

y seleccionar a  $n$  de tal modo que  $R_n$  se pueda despreciar para la aplicación de que se trate. El argumento que se usa para demostrar el criterio de la integral también se puede ampliar para dar, en algunos casos, respuestas a estas cuestiones.

Bajo las condiciones del teorema 12.5.1, consideremos de nuevo a la ecuación 4,

$$a_k \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq a_{k-1}.$$

Si sumamos con respecto a  $k$  en la ecuación 4 desde  $n+1$  hasta infinito obtendremos

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k-1}, \quad (18)$$

que es equivalente a

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx \leq a_n + R_n. \quad (19)$$

Podemos escribir de nuevo la ecuación 19 en la forma

$$\int_n^{\infty} f(x) dx - a_n \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad (20)$$

Nótese que la desigualdad de la izquierda de la ecuación 20 se obtiene a partir de la desigualdad de la derecha de la ecuación 19 y viceversa. La ecuación 20 da cotas superior e inferior del residuo  $R_n$ . La utilidad de esas cotas depende de si la integral que aparece en la ecuación 20 se puede evaluar o estimar en una forma conveniente. Sin embargo, hemos demostrado el siguiente teorema:

### Teorema 12.5.2

Sea  $f$  una función continua, positiva y monótona no creciente en  $[1, \infty)$ , y  $f(k) = a_k$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Entonces el residuo

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

satisface la desigualdad (20)

$$\int_n^{\infty} f(x) dx - a_n \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

Tomando la media de las cotas superior e inferior de  $R_n$ , que aparecen en la ecuación 20, obtenemos una estimación

$$R_n \cong \int_n^{\infty} f(x) dx - \frac{a_n}{2} \quad (21)$$

cuyo error máximo es  $a_n/2$ . Como  $s = s_n + R_n$ , entonces

$$s \cong s_n + \int_n^{\infty} f(x) dx - \frac{a_n}{2}, \quad (22)$$

también con un error máximo de  $a_n/2$ . Estos resultados se ilustran en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3

Estimar el residuo al tomar 10 términos de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ . Estimar también la suma  $s$  de la serie.

En este caso,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a_k = f(k) = \frac{1}{k^2}, \quad (23)$$

y se satisfacen todas las condiciones del teorema 12.5.2. Así, la ecuación 20 es válida para todo entero positivo  $n$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_n^b \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_n^b = \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (24)$$

Además,  $a_n = n^{-2}$ . Por lo tanto, para un valor arbitrario de  $n$ , la ecuación 20 se transforma en

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < R_n < \frac{1}{n}, \quad (25)$$

y en especial para  $n = 10$ ,

$$0.09 < R_{10} < 0.10, \quad (26)$$

que es la estimación que se deseaba del residuo.

Sumando los primeros diez términos de la serie obtenemos, con una precisión de cinco decimales,

$$s_{10} = 1.54977.$$

Para estimar  $s$  observamos que

$$s = s_{10} + R_{10},$$

y, de esta manera, empleando los valores máximo y mínimo posibles de  $R_{10}$  de la ecuación 26 tenemos

$$1.54977 + 0.09 < s < 1.54977 + 0.10$$

o sea

$$1.63977 < s < 1.64977. \quad (27)$$

Empleando la media de las cotas superior e inferior para  $s$  obtenemos la estimación

$$s \cong 1.64477. \quad (28)$$

Como la diferencia entre las cotas superior e inferior de  $s$  dada por la ecuación 27 es de 0.01, se infiere que el error máximo al emplear el valor promedio es de 0.005.

De hecho, el valor real es

$$s = \frac{\pi^2}{6} \cong 1.64493, \quad (29)$$

por lo que la estimación (28) tiene un error real de sólo 0.00016, lo cual es aproximadamente un centésimo del 1 por ciento.

Obsérvese que, al emplear la estimación del residuo como lo hemos hecho aquí, obtenemos un valor mucho más exacto de  $s$  que si hubiéramos empleado tan sólo la suma parcial  $s_{10}$ . Para garantizar una exactitud semejante empleando tan sólo una suma parcial adecuada  $s_n$  necesitaríamos usar la estimación (25), esto es, escoger a  $n$  de tal modo que

$$R_n < \frac{1}{n} < 0.00016.$$

Esto significa emplear más de 6250 términos en la serie, en lugar de 10. ■

## La función zeta

Se demostró, en el ejemplo 1, que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$  converge para toda  $p > 1$ . Por tanto podemos emplear la serie para definir una función de  $p$  cuyo dominio sea  $p > 1$ . Esta función se conoce como la función zeta y se representa mediante  $\zeta(p)$ , esto es,

$$\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \quad p > 1.$$



Euler, Gauss y otros descubrieron algunas propiedades de  $\zeta(p)$ , pero en general la función zeta se asocia con el nombre de Riemann, quien la estudió extensamente, en especial para valores complejos de  $p$ . El dominio de  $\zeta(p)$  se extiende al plano complejo mediante un proceso llamado continuación analítica. Sucede que la función zeta es importante en matemáticas, y entre otras cosas, los ceros de  $\zeta(p)$  se relacionan estrechamente con la distribución de los números primos. Una conjetura famosa que hizo Riemann es que todos los ceros no reales de  $\zeta(p)$  tienen una parte real igual a  $\frac{1}{2}$ . Aunque han pasado más de 120 años desde la muerte de Riemann, hasta ahora los intensos esfuerzos de muchos matemáticos notables no han podido cristalizar en una demostración de esta conjetura. También han fallado cálculos numéricos muy extensos, porque no han encontrado un cero que viole la conjetura, y por tanto ésta permanece como conjetura, lo que posiblemente constituye el problema más célebre sin resolver en matemáticas.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 emplear el criterio de la integral para determinar si la serie dada converge o diverge. Nótese que muchas de estas series también se pueden manejar mediante el criterio de comparación o el de la razón.

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2}$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k^4+1}$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3}{(k^4+1)^2}$$

$$7. \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k \ln k \ln(\ln k)}$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arctan k}{1+k^2}$$

$$10. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

11. Considerar la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^4)$ .

(a) Determinar unas cotas superior e inferior para el residuo  $R_6$  después de seis términos.

(b) Determinar  $s_6$ .

(c) Determinar una mejor estimación de  $s$  empleando los resultados de (a) y (b). El valor real de  $s$  es  $\pi^4/90 \approx 1.0823232$ .

(d) ¿Qué tan grande se debe seleccionar  $n$  para asegu-

rar que la estimación dada por la ecuación 22 tenga un error cuya magnitud sea menor que  $10^{-6}$ ?

12. Considerar la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

(a) Emplear el criterio de la integral para demostrar que esta serie converge.

(b) Determinar

$$s_{10} = \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

(c) Determinar las cotas superior e inferior del residuo  $R_{10}$ .

(d) Emplear los resultados de (b) y (c) para estimar la suma  $s$  de la serie dada. ¿Cuál es el error máximo  $e$  de esta estimación?

(e) Suponer que se desea determinar una suma parcial  $s_n$  que se aproxime a  $s$  así como a la estimación que se obtuvo en (d). ¿Qué tan grande debe ser  $n$  para lograrlo?

(f) Suponer que la computadora lleva a cabo  $10^{12}$  sumas por segundo. ¿Cuánto tardará en sumar el número de términos que se determinó en (e)? Obsérvese que esto significa que es imposible obtener

más de una cifra decimal de  $s$  tan sólo sumando términos en la serie. Sencillamente converge muy lentamente para este objeto. Para determinar a  $s$  con más exactitud se debe hacer algo diferente, como por ejemplo estimar el residuo.

En los problemas 13 y 14 investigaremos el crecimiento de las sumas parciales de algunas series divergentes. En algunos casos las sumas parciales tienden al infinito *muy lentamente*.

13. (a) Sea  $s_n = \sum_{k=1}^n (1/k)$  la  $n$ -ésima suma parcial de la serie armónica. Demostrar que

$$\frac{1}{n} + \ln n < s_n < 1 + \ln n.$$

- (b) Calcular cotas superiores para las sumas parciales después de  $10^4$ ,  $10^8$  y  $10^{12}$  términos, respectivamente. Obsérvese que si las sumas parciales se calculan sumando términos sucesivos en una computadora capaz de alcanzar una exactitud de ocho decimales, entonces todos los términos después de  $k = 10^8$  serán demasiado pequeños para la computadora; esto es, según ella serán cero.

14. (a) Considerar la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

y sea

$$s_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

Demostrar que

$$\ln \ln n - \ln \ln 2 + \frac{1}{n \ln n} < s_n$$

$$< \ln \ln n - \ln \ln 2 + \frac{1}{2 \ln 2}.$$

- (b) Calcular cotas superiores para las sumas parciales para  $n = 10^4$ ,  $10^8$ , y  $10^{12}$ , respectivamente.
- (c) Calcular en forma aproximada cuántos términos se necesitan para obtener una suma parcial tan grande como diez.

15. Se demostró en el problema 13(a) que la  $n$ -ésima suma parcial de la serie armónica se relaciona con  $\ln$

$n$ . A continuación investigaremos con más cuidado esta relación. Sea

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Demostrar que la sucesión  $\{\sigma_n\}$  es monótona decreciente y que  $0 < \sigma_n \leq 1$  para todo valor entero positivo de  $n$ . Por tanto, existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ . Calcular  $\sigma_1$ ,  $\sigma_5$  y  $\sigma_{10}$ . El límite de la sucesión  $\{\sigma_n\}$  se llama constante de Euler-Mascheroni y por tradición se representa mediante  $\gamma$ ; su valor aproximado es

$$\gamma \approx 0.577215665.$$

Un viejo problema sin resolver es determinar si  $\gamma$  es un número racional o irracional.

- \*16. Una curva continua, acotada y no rectificable.

- (a) Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que  $f$  es continua para  $x \geq 0$  y derivable para  $x > 0$ . Obsérvese que la gráfica de  $f$  es oscilatoria y que la frecuencia es creciente y que la amplitud es decreciente cuando  $x \rightarrow 0$  y que  $f(x) = 0$  para  $x = 1/\pi, 1/2\pi, \dots, 1/n\pi, \dots$ .

- (b) Sea  $s_n$  la longitud de arco de la porción de la curva correspondiente al intervalo  $1/(n+1)\pi \leq x \leq 1/n\pi$ . Entonces  $s = \sum_{n=2}^{\infty} s_n$  es la longitud de arco de la curva dada en el intervalo  $0 > x \leq 1/\pi$ . Haciendo un dibujo de la gráfica de  $f$ , o de cualquier otra manera, demostrar que  $s_2 \geq 4/3\pi$ . Demostrar también que  $s_3 \geq 4/5\pi$  y que en general

$$s_n \geq \frac{4}{(2n-1)\pi}.$$

- (c) Demostrar que

$$s \geq \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots \right),$$

para llegar a la conclusión de que la curva dada no es rectificable.

## 12.6 SERIES ALTERNANTES

En esta sección y en la siguiente estudiaremos series con términos tanto positivos como negativos. Primero veremos una clase de series que se conocen como **series alternantes**, en las cuales se alternan los términos con signos positivo y negativo. Por ejemplo, la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \cdots \quad (1)$$

es una serie alternante. Se conoce como la *serie armónica alternante*. Por otro lado, la serie

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \quad (2)$$

no es una serie alternante, porque se tienen dos términos positivos entre cada par sucesivo de términos negativos.

Podemos emplear la serie (1) para mostrar las propiedades principales de las series alternantes y por tanto comenzaremos estudiando con algún detalle esta serie. Observemos primero que, debido a que los signos se alternan y los términos pares siempre son negativos, se infiere que toda suma parcial de un número impar de términos es mayor que la suma siguiente, que corresponde a un número par de términos. Así, tenemos las desigualdades

$$s_1 > s_2, s_3 > s_4, \dots, s_{2k-1} > s_{2k}, \dots, \quad (3)$$

donde  $k$  es cualquier entero positivo.

Además, agrupando los términos por pares, obtenemos la serie

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \cdots \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k)} + \cdots \end{aligned} \quad (4)$$

cuyas sumas parciales son las sumas parciales de un número par de términos de la serie (1). Como cada término de la serie (4) es positivo, se sigue que las sumas parciales con un número par de términos de la serie (1) forman una sucesión creciente

$$s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2k} < \cdots. \quad (5)$$

A continuación agrupamos los términos de otro modo y obtenemos la serie

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2k-2} - \frac{1}{2k-1}\right) - \cdots$$



$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \cdots - \frac{1}{(2k-2)(2k-1)} - \cdots \quad (6)$$

cuyas sumas parciales son las sumas parciales de un número impar de términos de la serie (1). De acuerdo con la ecuación 6 las sumas parciales de un número impar de términos de la serie (1) forman una sucesión decreciente

$$s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2k-1} > \cdots \quad (7)$$

Combinando las desigualdades (5) y (7) y empleando la relación  $s_{2k-1} > s_{2k}$  de la ecuación 3, obtenemos, para todo entero  $k$  positivo,

$$s_1 > s_3 > \cdots > s_{2k-3} > s_{2k-1} > s_{2k} > s_{2k-2} > \cdots > s_4 > s_2. \quad (8)$$

Todo esto se muestra en la figura 12.6.1. Así, las sumas parciales con un número impar de términos forman una sucesión monótona decreciente que está acotada por abajo (por ejemplo, por  $s_2$ ), y por tanto converge por arriba a un límite que llamaremos  $A$ , donde  $A \geq s_2 = \frac{1}{2}$ . Análogamente, las sumas parciales de un número par de términos forman una sucesión monótona creciente que está acotada por arriba (por ejemplo, por  $s_1$ ) y por tanto converge por abajo a un límite  $B$ , donde  $B \leq s_1 = 1$ .

Para determinar la relación que existe entre  $A$  y  $B$ , observamos que cuando  $k \rightarrow \infty$ , el límite del lado izquierdo de la ecuación 9 es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( s_{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k-1} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} = A - 0 = A, \quad (10)$$

mientras que el límite del lado derecho de la ecuación 9 es  $B$ . Por lo que debemos tener que

$$A = B. \quad (11)$$

Como tanto las sumas parciales de un número impar de términos como las de un número par de términos tienden hacia el mismo límite, se sigue que toda la sucesión de las sumas parciales también debe tender a este límite, al cual de aquí en adelante lo representaremos mediante  $s$ , como de costumbre. En otras palabras, la serie (1)

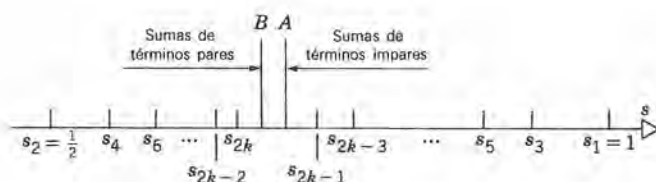


Figura 12.6.1

converge al valor común  $s$ , al cual las sumas parciales de un número impar de términos y las de un número par de términos convergen por arriba y por abajo, respectivamente.

Para una estimación de  $s$  se puede recurrir al cálculo de las sumas parciales, recordando que toda suma de un número impar de términos es una cota superior, y que toda suma de un número par de términos es una cota inferior. Por ejemplo, tenemos que

$$\begin{aligned}s_1 &= 1.0, & s_2 &= 0.5, \\s_3 &= 0.8333, & s_4 &= 0.5833, \\s_5 &= 0.7833, & s_6 &= 0.6167, \\s_7 &= 0.7595, & s_8 &= 0.6345.\end{aligned}\tag{12}$$

Este cálculo coloca a la suma  $s$  en el intervalo  $(0.6345, 0.7595)$ . Se puede lograr más exactitud empleando más términos de la serie.

También es fácil estimar el error en que se incurre al truncar la suma después de cualquier número finito de términos. Supongamos que el truncamiento se tiene después de un número par de términos, y que por tanto la suma obtenida es menor que  $s$ . La suma de un término más resultaría en un valor mayor que  $s$ ; por lo que, al parar después de un número par de términos nuestro error es menor que el primer término que se desecha. El caso es semejante si nos detenemos después de un número impar de términos; de nuevo el error es menor, en valor absoluto, que la magnitud del primer término que se desecha.

En el caso de la serie (1) esta estimación del error indica que la serie converge con bastante lentitud. Por ejemplo, después de ocho términos tenemos que  $s_8 = 0.6345$  y sólo sabemos que el error es menor que  $a_9 = \frac{1}{9} \cong 0.111$ . Además, aun cuando sumemos los primeros mil términos, sólo podremos llegar a la conclusión de que el error es menor que  $\frac{1}{1001} \cong 0.001$ , lo cual sugiere que puede seguir habiendo un error de uno en el tercer lugar decimal. Igualmente, si se emplea un millón de términos, el error entonces es menor que  $10^{-6}$  y por tanto puede seguir habiendo un error de uno en la sexta cifra decimal. Estas estimaciones son conservadoras, porque se basan en una cota superior del error. Sin embargo, indican, correctamente, que la serie (1) en realidad converge muy lentamente.

En la práctica se puede obtener una estimación más exacta de  $s$  si se emplea el promedio aritmético de dos sumas parciales sucesivas, ya que una de esas sumas parciales, la impar, es demasiado alta y la otra, la par, es demasiado pequeña. Por ejemplo, empleando las sumas parciales  $s_7$  y  $s_8$  de la ecuación 12, tenemos que

$$s \cong \frac{1}{2}(s_7 + s_8) = 0.697.$$

El error en esta estimación es menor que

$$\frac{1}{2}(s_7 - s_8) = \frac{1}{2}a_8 = 0.0625,$$

o sea un poco más que la mitad de la cota anterior para el error que está asociada sólo

con la suma parcial  $s_8$ . De hecho, al considerar el promedio de  $s_7$  y  $s_8$  hemos obtenido un resultado mucho mejor que lo que sugiere la afirmación. En el ejemplo 2 de la sección 13.5 demostraremos que en realidad  $s = \ln 2 \approx 0.693147$ . Así, la estimación  $s \approx 0.697$  en realidad sólo tiene un error de 0.003853, mientras que  $s_8$  tiene un error de 0.058647, o sea más de quince veces el anterior. Sin embargo, la serie armónica alternante converge con lentitud y hay otras series mucho mejores para calcular  $\ln 2$  (véase problema 17).

A no ser por el cálculo numérico de las sumas parciales, los argumentos que hemos expuesto se aplican por igual a *cualquier serie alternante cuyos términos tienden a cero monótonamente en magnitud*. En general escribiremos estas series en la siguiente forma:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k+1}a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}a_k, \quad (13)$$

donde  $a_k > 0$  para cada  $k$ , y por tanto se indica el signo en forma explícita. Llegamos entonces al siguiente teorema.

### Teorema 12.6.1

#### (Criterio de la serie alternante)

Supongamos que los términos de la serie alternante  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}a_k$  satisfacen las condiciones siguientes:

- (a)  $a_k > 0$  para toda  $k$ .
- (b)  $a_{k+1} < a_k$  para toda  $k$ .
- (c)  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Entonces la serie converge a una suma  $s$ , y

$$|s - s_n| < a_{n+1}. \quad (14)$$

Además, si

$$\bar{s} = \frac{s_n + s_{n+1}}{2}, \quad (15)$$

entonces tenemos la cota mejorada para el error

$$|s - \bar{s}| < \frac{a_{n+1}}{2}. \quad (16)$$

Como de costumbre, la convergencia de una serie no se modifica por ningún bloque finito de términos al principio de la serie y por tanto siguen siendo válidas las



conclusiones del teorema 12.6.1 si se satisfacen las hipótesis sólo cuando  $k > K$ , donde  $K$  es un número positivo fijo. La demostración de este teorema es completamente semejante a la correspondiente para la serie armónica alternante. Nótese que el teorema da condiciones suficientes para la convergencia; si esas condiciones no se satisfacen, no se puede llegar a conclusión alguna respecto a la convergencia o divergencia de la serie que no las satisfaga.

### EJEMPLO 1

Determinar si converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}. \quad (17)$$

Si converge, hacer una estimación del error en el que se incurre al truncar la suma después de cien términos.

La serie (17) es una serie alternante cuyos términos decrecen en magnitud monótonamente hasta cero. Así, se aplica el teorema 12.6.1 y la serie converge. Empleando la estimación (14), tenemos que

$$|s - s_{100}| < \frac{1}{(101)^3} < \frac{1}{10^6} = 0.000001. \quad (18)$$

También, si hacemos que  $\bar{s} = (s_{100} + s_{101})/2$ , y usamos la ecuación 16, obtendremos

$$|s - \bar{s}| < \frac{1}{2} \frac{1}{(101)^3} < 0.0000005. \quad (19)$$

Así, si se emplea la estimación  $\bar{s}$  se obtiene una suma exacta al menos hasta la sexta cifra decimal. ■

### EJEMPLO 2

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{2k} \quad (20)$$

converge o diverge.

Ésta es una serie alternante y ya que

$$a_k = \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$$

la magnitud de sus términos decrece en forma monótona. Sin embargo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (21)$$

y por tanto no se satisface la última de las hipótesis del teorema 12.6.1. Así, no se puede llegar a conclusión alguna a partir de ese teorema acerca de si la serie (20) converge o diverge. Sin embargo, como  $a_k$  no tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ , según el teorema 12.2.1 la serie debe ser divergente. ■

### EJEMPLO 3

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{|k - 3\pi|}} \quad (22)$$

converge o diverge. Nótese que se necesitan las barras de valor absoluto para asegurar que la cantidad dentro del radical tenga signo positivo.

Ésta es una serie alternante cuyos términos tienden a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Sin embargo, los valores absolutos de los términos no son monótonos decrecientes. En efecto, para  $k = 1, \dots, 9$ , los términos crecen y sólo para  $k \geq 9$  decrecen en forma monótona. Sin embargo, como hicimos notar en la observación que sigue al teorema 12.6.1, la convergencia o divergencia no se ve influida por ningún bloque finito de términos. Como se satisfacen las hipótesis del teorema 12.6.1 para  $k \geq 9$ , podemos emplear ese teorema para llegar a la conclusión de que la serie converge. Sin embargo, obsérvese que esta serie converge muy lentamente. Por ejemplo, después de un millón de términos, la ecuación 14 nos da la estimación del error

$$|s - s_{10^6}| < (10^6 + 1 - 3\pi)^{-1/2} \cong 10^{-3} = 0.001. \quad (23)$$

De esta manera, puede ser que el tercer decimal no sea exacto aun después de un millón de términos. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 determinar si la serie dada converge o diverge.

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

3.  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3}{2}\right)^k$

5.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{10^k}{k!}$

4.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{5/4}}$

6.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{k^k}$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\sqrt{k}}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin[(2k-1)\pi/2]}{\sqrt{2k-1}}$$

$$* 10. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}$$

En los problemas 11 a 16 determinar el número de términos necesarios para aproximar la suma  $s$  con un error menor que  $10^{-4}$ . Emplear tanto  $s_n$  como  $\bar{s}_n = (s_n + s_{n+1})/2$ .

$$\odot 11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

$$\odot 12. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$$

$$\odot 13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{5/4}}$$

$$\odot 14. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{10^k}{k!}$$

$$\odot 15. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$$

$$\odot 16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

- $\odot 17$ . En este problema presentaremos una serie mejor que la armónica alternante para calcular el valor de  $\ln 2$ . Se puede demostrar que para  $|x| < 1$ ,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} +$$

$$\cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + E_n(x), \quad (i)$$

donde

$$|E_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}, \quad |x| < 1. \quad (ii)$$

- (a) Emplear la ecuación (ii) para demostrar que  $E_n(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para toda  $x$  en  $-1 < x < 1$ .

- (b) ¿Qué valor de  $x$  se debe emplear en la ecuación (i) para tener un valor aproximado de  $\ln 2$ ?

- (c) Determinar a  $n$  para que la ecuación (i) produzca un valor de  $\ln 2$  cuyo error sea menor que  $10^{-4}$ . Nótese que se necesitan aproximadamente cinco mil términos de la serie armónica para alcanzar el mismo resultado.

- $\odot 18$ . Considerar la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{1/10}}.$$

- (a) Demostrar que la serie converge.  
 (b) Estimar un número  $n$  de términos necesarios para asegurar que  $s_n$  tenga un error menor que  $10^{-4}$ .  
 (c) Suponiendo que se pudieran sumar  $10^{10}$  términos por segundo, calcular cuántos años se necesitan para determinar la suma parcial indicada en la parte (b). Con ello llegamos a la conclusión de que algunas series convergentes lo hacen demasiado lentamente como para ser de utilidad práctica en la computación.

- $* 19$ . Determinar si la serie

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \cdots$$

converge o diverge.

*Sugerencia:* el criterio de la serie alternante no se aplica (¿por qué no?). Trátese de agrupar los términos  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, \frac{1}{8} - \frac{1}{9}, \dots$

## 12.7 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONDICIONAL

En el estudio de las series infinitas es útil distinguir entre dos mecanismos diferentes que pueden originar que converja una serie dada. En primer lugar, los términos de la serie pueden disminuir tan rápidamente de tamaño que la serie converja aun cuando todos los términos sean del mismo signo. Por ejemplo, las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k^2}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \quad (1)$$



son de este tipo; cada una de ellas converge porque los términos se hacen pequeños con suficiente rapidez. Puede suceder que las series de este tipo tengan signos variables, por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2^k}{k!}. \quad (2)$$

Si lo anterior es verdad, entonces las series pueden converger un poco más rápidamente, pero el efecto de cancelación originado al sumar términos positivos y negativos no es esencial, de ningún modo, para la convergencia. La serie (2) de todos modos sería convergente, aun si todos los términos se tomaran como positivos.

Por otra parte, hay otras series, como la serie armónica alternante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \cdots, \quad (3)$$

que sólo converge por las cancelaciones que resultan de las variaciones del signo de los términos. Para tales series son esenciales los cambios de signo para que converjan. Por ejemplo, si se hacen positivos todos los signos de la serie (3), entonces resulta la serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots, \quad (4)$$

que es divergente.

El primer tipo de convergencia, ejemplificada por las ecuaciones 1 y 2, se llama **convergencia absoluta**; el segundo tipo, ejemplificado por la ecuación 3, se llama **convergencia condicional**. Para definir con más precisión estos términos es necesario asociar a una serie dada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  formada al tomar el valor absoluto de cada término. Es así que llegamos a la definición siguiente:

**DEFINICIÓN 12.7.1** Si  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  converge, entonces se dice que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge absolutamente. Si  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  diverge, pero  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge, entonces se dice que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge condicionalmente.

Por ejemplo, la series (2) convergen absolutamente porque en todos los casos la serie correspondiente de los valores absolutos converge. La serie armónica alternante (3) converge condicionalmente porque es convergente, pero la serie asociada (4) de sus valores absolutos es divergente.

Para series cuya totalidad de términos tengan el mismo signo, la convergencia y la convergencia absoluta son lo mismo porque  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  son la misma serie, excepto posiblemente porque estén multiplicadas por  $-1$ . Así, la convergencia condicional sólo se puede presentar para series que tengan un número infinito de términos positivos y también un número infinito de términos negativos.

Como todos los términos de  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  son no negativos, se puede usar cualquiera

de las pruebas de las secciones 12.3 a 12.5 para determinar si converge o diverge la serie. El siguiente teorema da la relación que existe entre la convergencia absoluta y la convergencia ordinaria.

### Teorema 12.7.1

Si  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  converge, entonces también converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . En otras palabras, si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge absolutamente, entonces converge en el sentido ordinario. En general, la afirmación inversa no es válida.

**Demostración.** Este teorema se puede demostrar empleando una serie auxiliar  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  cuyos términos están dados por

$$b_k = a_k + |a_k| = \begin{cases} 0, & a_k < 0; \\ 2a_k, & a_k \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Así, siempre es cierto que

$$0 \leq b_k \leq 2|a_k|. \quad (6)$$

A continuación definiremos las sumas parciales siguientes:

$$A_n = \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k. \quad (7)$$

Como  $|a_k| \geq 0$  y  $b_k \geq 0$ , las sucesiones  $\{A_n\}$  y  $\{B_n\}$  son monótonas no decrecientes. De acuerdo con la hipótesis del teorema, la sucesión  $\{A_n\}$  converge a un límite  $A$ . Como  $\{A_n\}$  es monótona no decreciente, debe tender a su límite por abajo y por tanto  $A_n \leq A$  para toda  $n$ . Así, de acuerdo con las ecuaciones 6 y 7,

$$0 \leq B_n \leq 2A_n \leq 2A, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Así, la sucesión  $\{B_n\}$  también está acotada por arriba y es monótona no decreciente; por lo que también converge. Como las series  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  convergen, resulta como consecuencia del teorema 12.2.2 que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} [b_k - |a_k|] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (9)$$

también converge, que es lo que se tenía que demostrar.

Para mostrar que la convergencia no implica la convergencia absoluta es suficiente considerar la serie armónica alternante (3). Esta serie converge, mientras que la serie armónica (4) no. Con ello se completa la demostración del teorema.  $\square$

**EJEMPLO 1**

Determinar si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \quad (10)$$

converge en forma absoluta, en forma condicional, o diverge.

Esta serie converge, de acuerdo con el criterio de la serie alternante. La serie correspondiente de los valores absolutos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (11)$$

diverge si la comparamos con la serie armónica, mediante el criterio de la integral o mediante el teorema 12.3.3. Por tanto, la serie (10) converge condicionalmente. ■

La siguiente versión del criterio de la razón se usa con frecuencia para determinar si una serie converge absolutamente.

**Teorema 12.7.2**

Considere la serie infinita  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , donde  $a_k \neq 0$ , y sea

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L. \quad (12)$$

Entonces

- (a) Si  $L < 1$ , la serie converge absolutamente.
- (b) Si  $L > 1$ , la serie diverge.
- (c) Si  $L = 1$ , no es posible llegar a conclusión alguna. La serie puede converger absoluta o condicionalmente, o puede ser divergente.

Para demostrar la parte (a) aplicaremos el criterio de la razón a la serie  $|a_k|$ . Empleando la hipótesis del teorema se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L < 1.$$

Por tanto la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  converge de acuerdo al teorema 12.4.1 y en consecuencia la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge en forma absoluta.

La parte (b) se demuestra al observar que si  $L > 1$ , entonces la sucesión  $\{|a_k|\}$  es



positiva y monótona creciente para  $k$  suficientemente grande. Por tanto no es posible que  $|a_k|$  tienda a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . En consecuencia tampoco es posible que  $a_k$  tenga a 0 como límite. Por lo que, de acuerdo con el teorema 12.2.1, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  debe ser divergente.

Para demostrar la parte (c), nótese que  $L = 1$  para cada una de las series  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k^2$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ , y que las dos primeras series convergen, la primera en forma absoluta, la segunda en forma condicional, y que la tercera diverge.  $\square$

En los siguientes ejemplos se muestra la utilidad del teorema.

## EJEMPLO 2

Determinar los valores de  $\alpha$  para los cuales la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}} = \alpha + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha^3}{\sqrt{3}} + \cdots \quad (13)$$

converge absolutamente, converge condicionalmente, o diverge.

Para aplicar el teorema 12.7.2 debemos determinar a  $L$  tal como se define mediante la ecuación 12, o sea

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha^{k+1}/\sqrt{k+1}}{\alpha^k/\sqrt{k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \alpha \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right| = |\alpha|. \quad (14)$$

Así, la serie (13) converge en forma absoluta para  $|\alpha| < 1$ , mientras que diverge para  $|\alpha| > 1$ . Debemos examinar por separado los casos para los cuales  $|\alpha| = 1$ . Cuando  $\alpha = 1$ , la serie (13) se transforma en  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k}$ , que diverge, como se vio en el ejemplo 1. Para  $\alpha = -1$ , la serie (13) toma la forma  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/\sqrt{k}$ , que converge de acuerdo con el criterio de la serie alternante, o del ejemplo 1. La convergencia es condicional, porque la serie correspondiente de los valores absolutos  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\sqrt{k}$  diverge. En resumen, la serie (13) converge absolutamente para  $-1 < \alpha < 1$ , converge condicionalmente para  $\alpha = -1$ , y diverge en los demás casos. ■

## Rearreglo de series

Una razón para distinguir entre la convergencia absoluta y la condicional es que las series absolutamente convergentes tienen algunas propiedades importantes que no comparten con las series condicionalmente convergentes. Nos restringiremos al estudio de un ejemplo en donde se presenta una de esas propiedades.

De nuevo, consideremos la serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = s. \quad (15)$$

Hicimos notar antes que el valor de  $s$  es  $\ln 2$ , pero esto no importa. Todo lo que necesitamos saber es que  $s \neq 0$ , lo cual es consecuencia de la argumentación dada al principio de la sección 12.6. Multiplicaremos primero la ecuación 15 por  $\frac{1}{2}$ , con lo cual obtenemos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}s. \quad (16)$$

Este paso lo justifica el teorema 12.2.2. Cualquier serie convergente se puede multiplicar término a término por una constante. A continuación introduciremos un cero entre cada par de términos en la ecuación 16, con lo cual se obtiene

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}s. \quad (17)$$

La introducción de ceros no afecta la convergencia de una serie; en este caso tan sólo significa que se repite cada miembro de la sucesión de las sumas parciales. Por último, sumamos los términos correspondientes de las ecuaciones 15 y 17 para obtener

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}s$$

o sea

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2}s, \quad (18)$$

en la cual se han quitado los ceros. Esta suma se basa en el teorema 12.2.2.

Un examen de la ecuación 18 revela que la serie del lado izquierdo contiene exactamente los mismos términos que la serie armónica alternante (15). La única diferencia es que en la ecuación 18 los términos se han *rearrreglado*, para que dos términos positivos aparezcan entre cada par de términos negativos. En otras palabras, los términos de la serie (18) tan sólo se suman *en orden diferente* al de los de la ecuación 15. Sin embargo, las sumas de las dos series son distintas; de nuevo, una es un medio más grande que la otra.

El fenómeno que muestran las ecuaciones 15 y 18 no tiene contrapartida para las sumas de un número finito de términos, en las cuales el orden de la suma no importa. Es posible demostrar que las series absolutamente convergentes se asemejan a las sumas finitas en este aspecto. *La suma de una serie absolutamente convergente no cambia, independientemente de cómo se reagrupen los términos.\**

La cuestión es bastante distinta de las de las series condicionalmente convergentes, para las cuales se puede demostrar el siguiente resultado notable: *Dado cualquier*

---

\* Este resultado, al igual que el ejemplo de las ecuaciones 15 y 18, se debe a Dirichlet (1837). Los resultados acerca de las series condicionalmente convergentes que aparecen en el párrafo siguiente fueron descubiertos por Riemann (1854).

número real  $\sigma$  y cualquier serie condicionalmente convergente, existe un rearrreglo de la serie que converge a  $\sigma$ . Esto es, si se rearrreglan adecuadamente los términos de una serie condicionalmente convergente, podemos hacerla converger a cualquier número que queramos. Hasta la podemos hacer divergir a  $+\infty$  o  $-\infty$ , o que oscile entre dos o más números. El problema 25 describe cómo se pueden obtener estos resultados.

La cuestión del rearrreglo de términos de una serie infinita condicionalmente convergente muestra que un proceso de límite infinito es mucho más sutil que las operaciones con conjuntos finitos de números, o de otros objetos matemáticos. Se debe emplear la intuición propia con cuidado cuando se traten todos los procesos que involucren al infinito, porque las propiedades familiares pueden no trasladarse del caso finito al infinito. El hecho de que el razonamiento heurístico puede ser engañoso subraya la necesidad de tener una cuidadosa atención a las definiciones, a los teoremas y a las demostraciones cuando se haga uso de procesos que involucren al infinito.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 18 determinar si la serie que se presenta converge absolutamente, condicionalmente, o diverge.

$$1. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + 4}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k + 2}$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k + 1}$$

$$5. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^4}{2^k}$$

$$6. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k!)^2}{(2k)!}$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(3/2)^k}{k^2}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{k^k}$$

$$10. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \arctan k}{k^2}$$

$$12. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{k^4 + 1}$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1)}$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k!}{10^k}$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (k + 1)^2}{k^{1/3} (k^2 + 4)}$$

$$16. 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36}$$

$$+ \frac{1}{49} + \frac{1}{64} - \frac{1}{81} + \cdots$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

$$18. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^k}{e^k + e^{-k}}$$

En los problemas 19 a 24 determinar para qué valores de  $\alpha$  converge la serie dada absolutamente, condicionalmente, o diverge.

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k}$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha^k}{k^2}$$

$$21. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k}{2^k}$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha - 1)^k}{k}$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \alpha^k}{k!}$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\alpha + 2)^k}{\sqrt{k}}$$

\*25. Considerar la serie armónica alternante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad (i)$$

En este problema indicaremos cómo demostrar que se puede reagrupar esta serie para que converja a una suma arbitraria  $\sigma$ .

(a) Formamos las series

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad (ii)$$



$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} q_k, \quad (iii)$$

usando los términos positivos y negativos, respectivamente, de la serie (i). Demostrar que la serie (ii) diverge a  $\infty$ , y que la serie (iii) diverge a  $-\infty$ .

- (b) Suponiendo que  $\sigma > 0$ , formamos una reagrupación de la serie (i) del siguiente modo: se toman los términos positivos de la serie (ii) necesarios únicamente para formar una suma mayor que  $\sigma$ , y a continuación se toman los términos negativos de la serie (iii) necesarios únicamente para que la

suma acumulada sea menor que  $\sigma$ ; a continuación se toman de la serie (ii) únicamente los suficientes términos positivos para que la suma acumulada sea mayor que  $\sigma$  y así sucesivamente. Demostrar que la serie que se forma de este modo converge a  $\sigma$ .

- (c) Si  $\sigma < 0$ , describir cómo reagrupar la serie (i) para que converja a  $\sigma$ .
- (d) Describir cómo reagrupar la serie (i) de tal manera que diverja a  $+\infty$ , y después a  $-\infty$ .
- (e) Describir cómo rearmar la serie (i) de tal manera que diverja por oscilación entre dos valores  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , donde  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .

## 12.8 RESUMEN DE LOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA

En este capítulo hemos descrito algunos criterios que se han desarrollado con objeto de determinar si una serie infinita dada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge o diverge. Una dificultad consiste en que a veces puede no ser fácil seleccionar un criterio que sea adecuado para determinada serie. Indicaremos a continuación un método de proceder para esta selección de manera ordenada y sistemática. Sin embargo, casi siempre intervendrá algo de acierto y error para probar la convergencia o divergencia de una serie infinita.

1. ¿ $a_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ ? Si no es así, la serie diverge, pero si es así, entonces no se puede llegar a conclusión alguna y se necesitarán más pruebas.
2. ¿Son positivos los términos de la serie para toda  $k$ , o para  $k$  suficientemente grande? Si es así, considerar el criterio de comparación, el criterio de la razón o el criterio de la integral.
  - (a) Si  $a_k$  contiene factoriales o cantidades elevadas a una potencia en que intervenga  $k$ , intentar con el criterio de la razón.
  - (b) Si  $a_k$  contiene expresiones en las que intervenga  $k$  elevada a varias potencias, intentar con el criterio de comparación límite con  $\sum_{k=1}^{\infty} k^p$  como serie de comparación.
  - (c) Si al cambiar  $k$  por  $x$  se obtiene una función  $f(x)$  que sea monótona decreciente a cero y que se puede integrar, intentar con el criterio de la integral.
3. Si no todos los términos  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  son positivos, remplazar cada término por su valor absoluto y examinar la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  mediante los métodos indicados en el punto 2. Si converge  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ , entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge absolutamente. Si  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  diverge, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  puede ser divergente o condicionalmente convergente.
4. ¿Alterna el signo de los términos en  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ? Si es así, intentar con el criterio de la serie alternante. Recuérdese que si no se satisfacen las hipótesis de este criterio, no se puede llegar a conclusión alguna.
5. Si el problema sigue sin resolverse, intentar definir algún cálculo preliminar que

transforme a  $a_k$  en una forma más susceptible para su análisis. Por ejemplo, se pueden agrupar factores de  $a_k$  en determinada forma, o racionalizar el numerador o el denominador de  $a_k$  para eliminar algún radical, o descomponer a  $a_k$  en una suma de dos o más términos, o quizá reformular  $a_k$  en alguna otra forma.

Los primeros cuarenta problemas que siguen tienen como objetivo darle a usted práctica para seleccionar una prueba adecuada para la convergencia o divergencia de una serie dada.

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 40, determinar si la serie dada converge, converge absolutamente, converge condicionalmente, o diverge.

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 9}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k + 1}$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k k^4}$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{\sqrt{k+4}}$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!}$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^2 2^k}$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sqrt{k}}{k + 10}$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (1/k)}{1 + (1/k^2)}$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k! 2^k}$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k^2)!}$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{2^k k!}$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^{-3}$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^2}{k^2}$$

$$18. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{2^k}$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k + (1/k)]^2}{(k^2 + 1)^{3/2}}$$

$$20. 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2}$$

$$- \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k^2}}{\sqrt{k}}$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} [\sqrt{k+1} - \sqrt{k}]$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k} + 1)^{3/2}}{k^{5/2} + 4}$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)! (k+1)!}{(2k)!}$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{2k\pi}$$

$$29. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \cdots$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{k}}}{\sqrt{e^k}} \quad 31. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad 32. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k^2)}{(\ln k)^2}$$

$$33. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4k-1)}{2^k k!}$$

$$34. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{(e^k + 1)^2}$$

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^{k^3}}$$

$$36. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\ln k}$$

$$37. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh k}{k}$$

$$38. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^{\sqrt{k}}}$$

$$39. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln k}}$$

$$40. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{\sqrt{k}}$$

En los problemas 41 a 48, demostrar la afirmación que se presenta, en caso de ser cierta, o dar un ejemplo que la refute, si es falsa.

41. Si converge  $\{a_n\}$ , y diverge  $\{a_n b_n\}$ , entonces  $\{b_n\}$  diverge.
42. Si divergen  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$ , entonces  $\{a_n b_n\}$  diverge.
43. Si converge  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$ , entonces también converge  $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \dots$ . ¿Es distinta la respuesta para cada  $k$ ?
44. Si converge  $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \dots$  entonces  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \dots$  también converge. ¿Es distinta la respuesta si  $a_k > 0$  para toda  $k$ ?
45. Si converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , entonces converge  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a^3$ .
46. Si converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  de manera absoluta, entonces

también converge de manera absoluta  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/(1 + a_k)$ .

47. Si converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , entonces también converge  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ . ¿Qué sucede si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge absolutamente?
48. Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge y  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$ , entonces converge  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ . ¿Qué sucede si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge en forma absoluta?

En los problemas 49 a 52, suponer que  $f(x)$  es no negativa y continua para  $x \geq 1$ .

49. Definir  $f(x)$  de tal modo que  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  converja, pero que  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  diverja.
50. Definir  $f(x)$  de tal modo que  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  diverja, pero que  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  converja.
51. Definir  $f(x)$  de tal modo que  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  converja, pero que  $f(x)$  no tienda a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ .
52. Definir  $f(x)$  de tal modo que  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  converja, pero que  $f(x)$  no sea acotada cuando  $x \rightarrow \infty$ .





# CÁLCULO

## Capítulo 13

### Aproximación de Taylor y series de potencias

La clase más sencilla de funciones que a la vez es razonablemente grande es la de los polinomios. En comparación con otras funciones, es muy fácil combinarlos mediante sumas, restas o multiplicaciones, y desde luego que también son fáciles de derivar o de integrar. Además, cuando se llevan a cabo cualquiera de esas operaciones con los polinomios se obtienen otros polinomios, de manera que, si es necesario, se pueden llevar a cabo varias de esas operaciones en sucesión.

Por consiguiente, si se necesita efectuar tales operaciones en una función más complicada, se aconseja considerar su remplazo por un polinomio de aproximación, pues entonces, se pueden simplificar mucho las operaciones. Desde luego, en ese caso también es necesario tener en cuenta qué tan bien se aproxima el polinomio a la función original para no introducir errores inaceptables. Hablando en general, se puede mejorar la exactitud empleando polinomios de mayor grado.

La idea de aproximar una función mediante polinomios de grados sucesivamente mayores conduce de forma natural a la representación exacta mediante una serie infinita de un tipo llamado serie de potencias. Como veremos en este capítulo, sujetas a ciertas restricciones, las series de potencias se comportan de modo muy semejante a los polinomios, lo cual las hace ser instrumentos analíticos muy valiosos.

El empleo de aproximaciones polinomiales y de series de potencias data de los primeros días del cálculo. Formaron parte fundamental de la metodología de

Newton, aunque pasaron muchos años antes de poderse establecer una fundamentación teórica firme y de poderse contestar preguntas acerca de la convergencia. Hoy día las aproximaciones polinomiales y las series de potencias, útiles siempre en investigaciones analíticas, forman también la base de una variedad de poderosos algoritmos numéricos.

### 13.1 POLINOMIOS DE TAYLOR

En la sección 3.4 estudiamos la aproximación de una función  $f$  dada en la vecindad de un punto  $x_0$  mediante un polinomio de primer grado  $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ . En esta ocasión deseamos considerar el problema más general de aproximar a  $f$  cerca de  $x_0$  mediante un polinomio  $P_n$  de grado arbitrario  $n$ . Hay muchas razones por las que puede ser útil hacerlo: por ejemplo, los polinomios son fáciles de evaluar, de derivar, de integrar y de manipular en forma algebraica. La primera pregunta que debemos tener en cuenta es cómo seleccionar el polinomio de aproximación  $P_n$  para una función dada  $f$  cerca de un determinado punto  $x_0$ . Después deduciremos estimaciones del error en que se incurre si se usa  $P_n(x)$  para aproximar el valor de  $f(x)$ .

Determinaremos el polinomio de aproximación  $P_n$  generalizando el procedimiento que empleamos para la aproximación lineal, o de recta tangente. Esta aproximación de  $f$  en  $x_0$  es la función  $P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$  cuyo valor  $a_0$  y su pendiente  $a_1$  en  $x = x_0$  concuerdan con las cantidades correspondientes de  $f$ . Así,

$$a_0 = P_1(x_0) = f(x_0), \quad a_1 = P'_1(x_0) = f'(x_0).$$

Para ampliar esta idea a un polinomio  $P_n$  de grado  $n$  necesitamos que  $P_n$  en cada una de sus primeras  $n$  derivadas tenga el mismo valor en  $x_0$  que  $f$  y su derivada correspondiente. Entonces debemos tener

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P'_n(x_0) = f'(x_0), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \quad (1)$$

Como un polinomio de grado  $n$  tiene  $n + 1$  coeficientes, es razonable esperar que las  $n + 1$  condiciones (1) determinen todos los coeficientes de  $P_n(x)$ .

La determinación del polinomio  $P_n$  se simplifica mucho si se escribe en la siguiente forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad (2)$$

en la cual  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  se deben determinar mediante las condiciones (1). Esto necesita del cálculo de las primeras  $n$  derivadas de  $P_n$  y de sus valores en  $x_0$ . De acuerdo con la ecuación 2 tenemos

$$P_n(x_0) = a_0.$$



Entonces, al derivar repetidamente  $P_n(x)$  y haciendo que  $x = x_0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}, \\ P'_n(x_0) &= a_1; \\ P''_n(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \\ P''_n(x_0) &= 2a_2; \\ P'''_n(x) &= 3 \cdot 2 a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}, \\ P'''_n(x_0) &= 3 \cdot 2 a_3; \\ &\vdots \\ P^{(n)}_n(x) &= n!a_n, \quad P^{(n)}_n(x_0) = n!a_n. \end{aligned}$$

Las condiciones (1) dan

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},$$

y en general

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

en la cual  $f^{(0)}(x_0)$  y  $0!$  se deben interpretar respectivamente como  $f(x_0)$  y 1.

A los coeficientes (3) se les conoce con el nombre de los **coeficientes de Taylor** para la función  $f$  en  $x_0$ . Al polinomio correspondiente

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (4) \end{aligned}$$

se le conoce como el **polinomio de Taylor\*** de grado  $n$  para  $f$  alrededor del punto  $x_0$ . El argumento anterior indica que es el único polinomio de grado  $n$  que se aproxima a  $f$  cerca de  $x_0$  en el sentido de las ecuaciones 1. Nótese que el polinomio  $P_n$  de Taylor no sólo depende de la función  $f$ , sino también del punto  $x_0$ . A veces se indica la dependencia de  $x_0$  en forma explícita, escribiendo  $P_n(x; x_0)$  en lugar de  $P_n(x)$ , como lo hemos hecho aquí.

Obsérvese que el polinomio de Taylor de grado uno

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

\* Los polinomios de Taylor reciben el nombre del matemático inglés Brook Taylor (1685-1731), quien anotó la fórmula general de ellos en su libro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, que se publicó en 1715. Sin embargo, James Gregory conocía las mismas aproximaciones, o al menos unas muy semejantes, desde 1670, y Newton, Leibniz y Johann Bernoulli las conocían antes de 1700. Ninguno de ellos, incluyendo a Taylor, investigó el error en que se incurre al emplear los polinomios de Taylor.

simplemente es la aproximación lineal a  $f$  que hemos descrito en la sección 3.4. Como regla, un polinomio de Taylor da una aproximación excelente a  $f$  en alguna vecindad de  $x_0$ . Sin embargo, la calidad de la aproximación se pierde en general a medida que aumenta la distancia de  $x_0$  a  $x$ . Los ejemplos siguientes muestran que a veces es muy fácil determinar polinomios de Taylor empleando las ecuaciones 3 y 4.

### EJEMPLO 1

Determinar los polinomios de Taylor de grados uno, dos y tres, para  $f(x) = \ln x$  cerca de  $x_0 = 2$ .

Diferenciando  $f$  tres veces obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Así, como  $x_0 = 2$ ,

$$a_0 = f(2) = \ln 2,$$

$$a_1 = f'(2) = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{f''(2)}{2!} = -\frac{1/4}{2} = -\frac{1}{8},$$

$$a_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = \frac{2/8}{6} = \frac{1}{24}.$$

Por tanto, de la ecuación 4, los polinomios de Taylor que se desean son

$$P_1(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2),$$

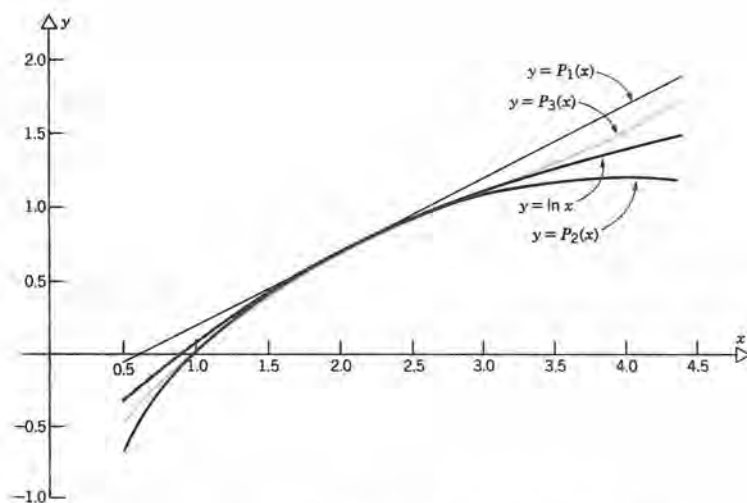
$$P_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2,$$

$$P_3(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{24}(x - 2)^3.$$

La tabla 13.1 da una idea de qué tan bien se aproximan estos polinomios a  $\ln x$ . Véanse

**Tabla 13.1.** Valores de  $\ln x$  y de los polinomios de aproximación de Taylor

$x$	$\ln x$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
1.0	0.0000	0.1931	0.0681	0.0265
1.5	0.4055	0.4431	0.4119	0.4067
2.0	0.6931	0.6931	0.6931	0.6931
2.5	0.9163	0.9431	0.9119	0.9171
3.0	1.0986	1.1931	1.0681	1.1098
4.0	1.3863	1.6931	1.1931	1.5265



**Figura 13.1.1** Aproximaciones polinomiales a  $y = \ln x$  cerca de  $x = 2$ .

en la figura 13.1.1 las gráficas de  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$  y  $\ln x$ . Por ejemplo, en  $P_3(x)$  el error afecta sólo a la tercera cifra decimal en el intervalo  $1.5 \leq x \leq 2.5$ . También la tabla muestra que para cada polinomio la exactitud disminuye cuando  $x$  se aparta más y más de  $x_0 = 2$ . ■

## EJEMPLO 2

Determinar el polinomio de Taylor de grado  $n$  para  $f(x) = e^x$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

Como  $f^{(k)}(x) = e^x$  y  $f^{(k)}(0) = 1$  para toda  $k$ , tenemos que

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!}.$$

Así, de acuerdo con la ecuación 4, el polinomio de Taylor que se desea es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}. \quad (5)$$

La figura 13.1.2 muestra las gráficas de  $e^x$  y de  $P_n(x)$  para  $n = 2, 4$  y  $8$  y para  $-4 \leq x \leq 4$ . Obsérvese que  $P_4(x)$  es una buena aproximación a  $e^x$  para  $-1.5 \leq x \leq 1.5$  y que  $P_8(x)$  se aproxima bien a  $e^x$  en casi todo el intervalo  $-4 \leq x \leq 4$ . ■



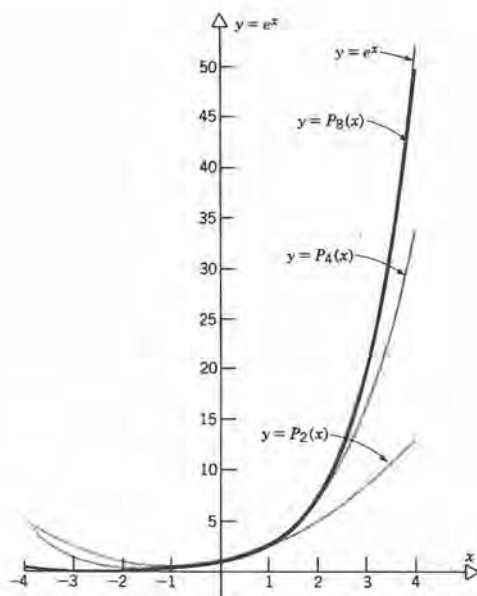


Figura 13.1.2 Aproximaciones polinómicas a  $y = e^x$  cerca de  $x = 0$ .

### EJEMPLO 3

Hallar el polinomio de Taylor de grado  $2n + 1$  para  $f(x) = \sin x$  alrededor de  $x_0 = 0$ .  
Las derivadas sucesivas de  $\sin x$  son

$$\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x, \dots$$

Al evaluarlas en  $x_0 = 0$ , obtenemos

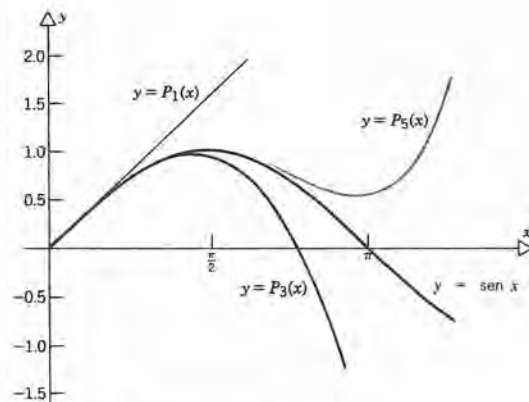
$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

Por tanto, los coeficientes de Taylor son

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{3!}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \dots$$

En general, todos los coeficientes de términos pares son cero, mientras que los coeficientes de términos impares están dados por

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



**Figura 13.1.3** Aproximaciones polinomiales a  $y = \sin x$  cerca de  $x = 0$ .

Así, el polinomio de Taylor de grado  $2n + 1$  es

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

La figura 13.1.3 muestra las gráficas de  $P_1(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $P_5(x)$  y  $\sin x$  para  $0 \leq x \leq \pi$ . En la figura se observa que  $P_5(x)$  da una aproximación razonablemente buena a  $\sin x$  en el intervalo  $0 \leq x \leq \pi/2$ . En efecto,  $P_5(\pi/2) \approx 1.0045$  y de este modo difiere de  $\sin(\pi/2) = 1$  en menos de la mitad del uno por ciento.

Este sencillo polinomio de aproximación se puede extender a otros valores de  $x$  empleando propiedades elementales de la función seno. Por ejemplo, para  $\pi/2 \leq x \leq \pi$  tenemos que

$$\sin x = \sin(\pi - x), \quad (6)$$

y entonces para  $\pi \leq x \leq 2\pi$  podemos usar

$$\sin x = -\sin(x - \pi). \quad (7)$$

Por último, podemos aproximar a  $\sin x$  para todos los valores de  $x$  a partir de su propiedad periódica,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x. \quad (8)$$

De este modo, el polinomio de aproximación  $P_5(x)$ , que es razonablemente exacto para  $0 \leq x \leq \pi/2$ , se puede emplear para obtener un valor aproximado de  $\sin x$  para cualquier  $x$  real. Si se necesita mayor exactitud, tan sólo será necesario emplear uno de los polinomios de Taylor de grado mayor. En efecto, este procedimiento, o alguno semejante, es el que emplean las computadoras para calcular los valores de la función seno. ■

En la próxima sección daremos una argumentación más sistemática del error en el que se incurre al usar un polinomio de Taylor para calcular el valor aproximado de determinada función.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 28 determinar el polinomio de Taylor del grado indicado para la función dada alrededor del punto dado.

1.  $f(x) = \sin x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , grado 3

2.  $f(x) = \ln(1 - x)$ ;  $x_0 = 0$ , grado 4

3.  $f(x) = \cos 2x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , grado 4

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $x_0 = 1$ , grado 3

5.  $f(x) = e^{-x^2}$ ;  $x_0 = 0$ , grado 4

6.  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ;  $x_0 = -1$ , grado 3

7.  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ;  $x_0 = 0$ , grado 3

8.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ ;  $x_0 = 1$ , grado 3

9.  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $x_0 = 1$ , grado 4

10.  $f(x) = (4-x)^{3/2}$ ;  $x_0 = 0$ , grado 3

11.  $f(x) = \arcsin x$ ;  $x_0 = 0$ , grado 3

12.  $f(x) = \cosh x$ ;  $x_0 = 0$ , grado 4

13.  $f(x) = \cos x$ ;  $x_0 = 0$ , grado 2n

14.  $f(x) = \sin \pi x$ ;  $x_0 = 0$ , grado 2n + 1

15.  $f(x) = \frac{1}{x-a}$ , donde  $a \neq 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado n

16.  $f(x) = \frac{1}{1-ax}$ , donde  $a \neq 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado n

17.  $f(x) = \ln(1-x)$ ;  $x_0 = 0$ , grado n

18.  $f(x) = e^{x/2}$ ;  $x_0 = 0$ , grado n

19.  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ;  $x_0 = 0$ , grado n

20.  $f(x) = e^{-2x}$ ;  $x_0 = -1$ , grado n

21.  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ;  $x_0 = 1$ , grado n

22.  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ;  $x_0 = \pi$ , grado 2n + 1

23.  $f(x) = \sin 2x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , grado 2n

24.  $f(x) = \sqrt{a-x}$ , donde  $a > 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado n

25.  $f(x) = \sinh x$ ;  $x_0 = 0$ , grado 2n + 1

26.  $f(x) = \cosh \frac{x}{a}$ , donde  $a > 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado 2n

\* 27.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ;  $x_0 = 0$ , grado 4

\* 28.  $f(x) = \arctan x$ ;  $x_0 = 0$ , grado 5

## 13.2 EL TEOREMA DEL RESIDUO DE TAYLOR Y LAS SERIES DE TAYLOR

A continuación examinaremos la cuestión de la estimación del error en la aproximación de una función dada  $f$  mediante un polinomio de Taylor  $P_n$  de grado  $n$ . En la última sección demostramos que  $P_n(x)$  tiene la forma

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (1)$$



en la cual  $x_0$  es el punto con respecto al cual se centra la aproximación. Nuestra meta consiste en estimar la diferencia  $|f(x) - P_n(x)|$  entre  $f$  y  $P_n$  para un valor arbitrario de  $x$ . En general, esta diferencia depende de  $n$ , del punto  $x_0$  en el cual se calculan los coeficientes de  $P_n(x)$  y del punto  $x$  en el que se calcula la diferencia. Encontraremos una ecuación para el error volviendo a derivar al polinomio de aproximación (1) de modo diferente, para llegar directamente a una fórmula para  $f(x) - P_n(x)$ . Suponemos que  $f$  tiene derivadas continuas de todos los órdenes que aparezcan en la derivación.

Comenzamos con la ecuación

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt. \quad (2)$$

Nuestro procedimiento no consiste más que en una integración por partes repetida, de la integral del lado derecho de la ecuación 2. Sea  $u = f'(t)$  y  $dv = dt$ . Entonces  $du = f''(t) dt$  y  $v = t + c$ , donde  $c$  es una constante de integración, relativa a la integración con respecto a  $t$ . Por tanto,  $c$  puede depender de  $x$ . De hecho, es esencial para nuestros fines que escojamos  $c = -x$ , para que  $v = t - x$ . Entonces, integrando por partes la ecuación 2, se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(t)(t - x) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x (t - x) f''(t) dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - t) f''(t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

A continuación integraremos de nuevo por partes, haciendo que  $u = f''(t)$  y  $dv = (x - t) dt$ . Entonces  $du = f'''(t) dt$ ,  $v = -(x - t)^2/2$ , y vemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - f''(t) \frac{(x - t)^2}{2} \Big|_{t=x_0}^{t=x} \\ &\quad + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^2}{2} f'''(t) dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 \\ &\quad + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^2}{2} f'''(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Repetiendo  $n$  veces el proceso de integración por partes, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &\quad + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= P_n(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Podemos enunciar el resultado que acabamos de demostrar, como sigue:

### Teorema 13.2.1

#### (Teorema de Taylor)

Sea  $f$  con derivadas continuas hasta el orden  $n + 1$  inclusive en un intervalo  $(a, b)$  que contiene al punto  $x_0$ . Si  $x$  es cualquier otro punto en  $(a, b)$ , entonces

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \quad (6)$$

en la cual

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (7)$$

y

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad (8)$$

Obsérvese que el teorema 13.2.1 da una fórmula explícita de la diferencia  $R_{n+1}(x)$  entre  $f(x)$  y  $P_n(x)$ , esto es, del error que se comete si se aproxima  $f(x)$  mediante  $P_n(x)$ . Es costumbre referirse a  $R_{n+1}(x)$  como el **residuo**. Como es difícil la evaluación de  $R_{n+1}(x)$  de acuerdo con la ecuación 8 (ya que implica  $n + 1$  derivaciones más una integración) es una fortuna que existan otras fórmulas para determinar este residuo  $R_{n+1}(x)$ . En el siguiente corolario\* se presenta la ecuación que más se usa para  $R_{n+1}(x)$ .

### Corolario

Bajo las condiciones del teorema 13.2.1 existe un punto  $c$  entre  $x_0$  y  $x$  tal que el residuo  $R_{n+1}$  está dado por

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) (x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \quad (9)$$

En el problema 38 aparece delineada la demostración del corolario. La forma (9) del residuo es fácil de recordar por su semejanza con los términos del mismo polinomio

\* La primera aparición del término del residuo en la fórmula de Taylor fue en 1797, en el libro de Lagrange *Théorie des Fonctions Analytiques*. La ecuación de  $R_{n+1}(x)$  que aparece en el corolario se conoce como la fórmula de Lagrange para el residuo. Las expresiones de Taylor son fundamentales en todas las ramas del análisis y también son de vital importancia en muchas aplicaciones. Por ejemplo, el control de los errores en muchos algoritmos numéricos contemporáneos se basa en estimar el error de una aproximación de Taylor.

de Taylor: el residuo es justamente como el siguiente término, excepto que se evalúa la derivada en  $c$ , en lugar de hacerlo en  $x_0$ . El punto  $c$  surge del empleo del teorema del valor medio y no se especifica con exactitud su ubicación. Como indicamos antes, el residuo depende de  $n$ ,  $x_0$  y  $x$ . En consecuencia,  $c$  depende también de estas tres cantidades.

Los dos ejemplos que siguen muestran el cálculo del residuo asociado con un polinomio de Taylor.

### EJEMPLO 1

Determinar el residuo  $R_4(x)$  cuando se usa el polinomio de Taylor de grado tres para la función  $f(x) = \ln x$  alrededor de  $x_0 = 2$ . Determinar una cota superior para  $|R_4(x)|$  en  $1 \leq x \leq 3$ .

Esto es una continuación del ejemplo 1 de la sección 13.1. Tenemos que  $f^{(4)}(x) = -6/x^4$ , y entonces de acuerdo con la ecuación 9, con  $n = 3$ ,

$$R_4(x) = -\frac{6}{c^4} \frac{(x-2)^4}{4!} = -\frac{(x-2)^4}{4c^4}, \quad (10)$$

en la cual  $c$  está entre 2 y  $x$ . Se obtiene una cota superior para

$$|R_4(x)| = \frac{|x-2|^4}{4c^4}$$

en el intervalo  $1 \leq x \leq 3$  usando los peores valores posibles para  $x$  y  $c$ . Son esos los valores de  $x$  y  $c$  los que hacen máximo el numerador de  $|R_4(x)|$  y mínimo a su denominador. Así, escogemos a  $c = 1$  y a  $x = 1$  para que, en el peor de los casos,

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{4}, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Es una estimación muy conservadora, porque los datos que se dieron en el ejemplo 1 de la sección 13.1 indican que, de hecho,  $|R_4(x)| \leq 0.03$  para  $1 \leq x \leq 3$ . ■

### EJEMPLO 2

Determinar el residuo  $R_{2n+2}(x)$  cuando se emplea el polinomio de Taylor de grado  $2n+1$  para  $f(x) = \sin x$  alrededor de  $x_0 = 0$ . Determinar también el grado necesario del polinomio para aproximar  $\sin x$  con un error de menos de 0.000001 para toda  $x$  en  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Es la continuación del ejemplo 3 de la sección 13.1, en el que se determinó que  $P_{2n+1}(x)$  era

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (11)$$



El residuo  $R_{2n+2}(x)$  se determina con facilidad mediante la ecuación 9. La  $(2n + 2)$ -ésima derivada de  $\sin x$  es  $(-1)^{n+1}\sin x$ , y entonces

$$R_{2n+2}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(\sin c)x^{2n+2}}{(2n + 2)!}. \quad (12)$$

Como  $|\sin c| \leq 1$  para toda  $c$ , entonces de acuerdo con la ecuación 12,

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n + 2)!}$$

para toda  $x$ . No se necesita el valor absoluto de  $x$  porque el exponente siempre es par. Para  $|x| \leq \pi/2$ , tenemos que

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{(\pi/2)^{2n+2}}{(2n + 2)!}. \quad (13)$$

Al probar con algunos valores de  $n$  en la ecuación 13 se obtienen los resultados que aparecen en la tabla 13.2. Así es seguro que si se selecciona  $n = 5$  se tendrá  $|R_{2n+2}(x)| \leq 0.000001$  en el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Para valores de  $x$  fuera de este intervalo podremos emplear las ecuaciones 6, 7 y 8 de la sección 13.1 para calcular valores aproximados de  $\sin x$ . ■

### Serie de Taylor

Supongamos ahora que la función  $f$  tiene derivadas continuas de todos los órdenes en un intervalo que contiene al punto  $x_0$ . Entonces será posible formar el polinomio de Taylor

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

para un valor arbitrariamente grande de  $n$ . Además, supongamos que para toda  $x$  en el intervalo dado es posible demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0. \quad (14)$$

**Tabla 13.2.** Estimaciones del residuo en la ecuación 13.

$n$	$(\pi/2)^{2n+2}/(2n + 2)!$
3	0.0009193
4	0.0000252
5	0.000000471

Entonces, tratándose de este intervalo, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \end{aligned} \quad (15)$$

donde la serie infinita de la derecha converge al valor de  $f(x)$  en cada punto. A esta serie infinita se le llama la **serie de Taylor**, para  $f$  alrededor de  $x_0$ , y con frecuencia da una representación conveniente de la función. Si  $x_0 = 0$ , entonces la ecuación 15 tiene la forma más sencilla siguiente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \quad (16)$$

En este último caso, a la serie (16) se le conoce como **serie de Maclaurin**.

### EJEMPLO 3

Hallar la serie de Taylor para  $f(x) = e^x$  alrededor de  $x_0 = 0$ . Determinar también dónde esta serie converge y representa a  $f(x)$ .

En el ejemplo 2 de la sección 13.1 vimos que el polinomio de Taylor de grado  $n$  para  $e^x$  alrededor de  $x_0 = 0$  es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \quad (17)$$

De acuerdo con la ecuación 9 el residuo asociado con  $P_n(x)$  es

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (18)$$

donde  $c$  es un punto entre 0 y  $x$ . Queremos ahora determinar los valores de  $x$  para los cuales  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Nótese que  $c$  puede depender de  $n$  y de  $x$ . Sin embargo, como  $c$  siempre está entre 0 y  $x$ , siempre es cierto que  $e^c \leq e^{|x|}$ , una cota que es independiente de  $n$ . Así,

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (19)$$

y sólo necesitamos determinar en dónde  $|x|^{n+1}/(n+1)! \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Un modo de deducir el resultado que se desea es considerar la serie infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (20)$$

si converge esta serie, entonces de acuerdo con el teorema 12.2.1 (el criterio del  $k$ ésimo término),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0. \quad (21)$$

Para demostrar la convergencia de la serie (20), nos conviene el criterio de la razón:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{k+2}}{(k+2)!} \frac{(k+1)!}{|x|^{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+2} = 0 \quad (22)$$

para toda  $x$ . Así, la serie (20) converge para toda  $x$ ; por tanto,  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para toda  $x$ , y como resultado,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (23)$$

es válida para toda  $x$ . Es la serie de Taylor que buscábamos para  $e^x$ .

En especial, para  $x = 1$ , la ecuación 23 da

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

Esta serie converge con rapidez y proporciona un buen método para calcular  $e$ ; en la ecuación 19 se presenta una estimación del error para cualquier número finito de términos, para  $x = 1$ .

Obsérvese que pudimos haber demostrado inmediatamente que la serie (23) converge empleando el criterio de la razón, más o menos igual que en la ecuación 22. Sin embargo, es posible que aunque la serie converja, su suma pudiera ser diferente de  $e^x$ . Un ejemplo de este caso se da en el problema 37. Para asegurarse de que la suma de la serie 23 es en realidad  $e^x$ , se debe demostrar que  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . ■

#### EJEMPLO 4

Hallar la serie de Taylor para  $f(x) = \sin x$  alrededor de  $x_0 = 0$ ; determinar si esta serie converge y representa a  $f(x)$ .

En el ejemplo 3 de la sección 13.1 demostramos que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x), \quad (24)$$

y en el ejemplo 2 de esta sección encontramos que

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \quad (25)$$



A través de un argumento semejante al que se empleó en el ejemplo 3,  $R_{2n+2}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para toda  $x$  dada. Así,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},\end{aligned}\quad (26)$$

y la serie converge para toda  $x$ .

De modo semejante se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}\quad (27)$$

y que esta serie también converge para toda  $x$ . ■

## EJEMPLO 5

Hallar la serie de Taylor para  $f(x) = (1-x)^{-1}$  alrededor de  $x_0 = 0$ . También, determinar dónde esta serie converge y representa a  $f(x)$ .

Para determinar los coeficientes de Taylor para  $f(x)$  en  $x_0 = 0$ , calculamos las derivadas sucesivas de  $f(x)$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= (1-x)^{-1}, \quad f'(x) = (1-x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3}, \\ &\dots, f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-k-1}, \dots\end{aligned}$$

y las evaluamos en el origen:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = k!, \quad \dots$$

Entonces  $a_k = f^{(k)}(0)/k! = 1$  para toda  $k$  y la serie de Taylor requerida para  $f(x)$  alrededor de  $x_0 = 0$  es

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \quad (28)$$

Veamos ahora el residuo

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}, \quad (29)$$

donde  $c$  está entre 0 y  $x$ . Si  $0 < x < \frac{1}{2}$ , entonces  $0 < c < x$  y se infiere que  $0 < x < 1 - c$ . En consecuencia,  $0 < x/(1-c) < 1$ , y por consiguiente

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{1-c} \left( \frac{x}{1-c} \right)^{n+1} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Por tanto, la serie (28) converge a  $f(x) = (1-x)^{-1}$  al menos para  $0 < x < \frac{1}{2}$ . Se puede ampliar esta investigación de  $R_{n+1}(x)$ , pero es mejor proceder de otro modo. Obsérvese que la serie (28) es nada menos que la serie geométrica con una razón  $x$ . De acuerdo con nuestro estudio de la serie geométrica en la sección 12.2, sabemos que la serie (28) converge para  $|x| < 1$  y su suma es  $(1-x)^{-1}$ . Ésta es la información que se requería. El hecho es que obtuvimos este resultado sin examinar directamente el residuo  $R_{n+1}$ . Con frecuencia es difícil tratar de demostrar directamente que  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y es importante tener en cuenta métodos indirectos, como el que hemos empleado, para deducir el mismo resultado. En las secciones 13.4 y 13.5 veremos muchos otros ejemplos de métodos indirectos para hallar series de Taylor para las funciones dadas. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20, hacer uso del corolario del teorema 13.2.1 para determinar el residuo asociado con el polinomio de Taylor del grado indicado, para la función dada alrededor del punto dado. El número de problema entre paréntesis indica el correspondiente problema de la sección 13.1.

1.  $f(x) = \sin x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , grado 3 (Problema 1)

2.  $f(x) = \ln(1-x)$ ;  $x_0 = 0$ , grado 4 (Problema 2)

3.  $f(x) = \cos 2x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , grado 4 (Problema 3)

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  $x_0 = 1$ , grado 3 (Problema 4)

5.  $f(x) = e^{-x^2}$ ;  $x_0 = 0$ , grado 4 (Problema 5)

6.  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ ;  $x_0 = -1$ , grado 3 (Problema 6)

7.  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ;  $x_0 = 0$ , grado 3 (Problema 7)

8.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ ;  $x_0 = 1$ , grado 3 (Problema 8)

9.  $f(x) = (4-x)^{3/2}$ ;  $x_0 = 0$ , grado 3 (Problema 10)

10.  $f(x) = \arcsen x$ ;  $x_0 = 0$ , grado 3 (Problema 11)

11.  $f(x) = \cos x$ ;  $x_0 = 0$ , grado  $2n$  (Problema 13)

12.  $f(x) = \frac{1}{x-a}$ , donde  $a \neq 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado  $n$  (Problema 15)

13.  $f(x) = \frac{1}{1-ax}$ , donde  $a \neq 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado  $n$  (Problema 16)

14.  $f(x) = \ln(1-x)$ ;  $x_0 = 0$ , grado  $n$  (Problema 17)

15.  $f(x) = e^{-2x}$ ;  $x_0 = -1$ , grado  $n$  (Problema 20)

16.  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ;  $x_0 = 1$ , grado  $n$  (Problema 21)

17.  $f(x) = \sin 2x$ ;  $x_0 = \frac{\pi}{4}$ , grado  $2n$  (Problema 23)

18.  $f(x) = \sqrt{a-x}$ , donde  $a > 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado  $n$  (Problema 24)

19.  $f(x) = \sinh x$ ;  $x_0 = 0$ , grado  $2n+1$  (Problema 25)

20.  $f(x) = \cosh \frac{x}{a}$ , donde  $a > 0$ ;  $x_0 = 0$ , grado  $2n$  (Problema 26)

21. Sea  $f(x) = x^{7/3}$ .

- Hallar los polinomios de Taylor de grados uno y dos, respectivamente, para  $f$  alrededor de  $x_0 = 0$ . ¿Cuál es el residuo en cada caso?
- ¿Tiene  $f$  un polinomio de Taylor de grado tres alrededor de  $x_0 = 0$ ?
- Hallar el polinomio de Taylor de grado tres para  $x$  alrededor de  $x_0 = 1$ .

22. En el problema 11 se requería la determinación del polinomio de Taylor de grado  $2n$ , para  $\cos x$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

- Determinar cuántos términos de este polinomio se necesitan para aproximar a  $\cos x$  en el intervalo  $0 \leq x \leq \pi$  con un error no mayor de  $10^{-6}$ .
- ¿Es posible alcanzar el mismo resultado que en (a), pero con menos términos desarrollando alrededor de  $x_0 = \pi/2$ ?

En los problemas 23 a 26, emplear un polinomio adecuado de Taylor para calcular lo que se pide con un error que no sea mayor que  $10^{-4}$ . Determinar cuántos términos se necesitan para alcanzar este resultado.

23.  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0.1\right)$       24.  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0.05\right)$

25.  $\ln(1.2)$       26.  $\sqrt{4.07}$

En los problemas 27 a 36 hallar la serie de Taylor para la función dada alrededor del punto dado. Determinar si la serie converge y representa a la función dada demostrando que el residuo tiende a cero cuando el número de términos crece sin cota.

27.  $f(x) = \cos x, x_0 = 0$

28.  $f(x) = \cosh x, x_0 = 0$

29.  $f(x) = \sinh x, x_0 = 0$

30.  $f(x) = \sin \frac{x}{2}, x_0 = 0$

31.  $f(x) = \cos 2x, x_0 = 0$

32.  $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{2}$

33.  $f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$       34.  $f(x) = e^{-2x}, x_0 = 0$

35.  $f(x) = e^{3x}, x_0 = 0$       36.  $f(x) = e^x, x_0 = 2$

\*37. Este problema muestra el caso en el que la serie de Taylor construida a partir de una función  $f$  converge para toda  $x$ , pero sólo converge a  $f(x)$  para  $x = 0$ . Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- Empleando el cociente de diferencias

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{e^{-1/h^2}}{h}$$

y la regla de L'Hospital, demostrar que  $f'(0) = 0$ .

- Calcular  $f'(x)$  para  $x \neq 0$ .
- Empleando el resultado de la parte (b), el cociente de diferencias  $[f'(h) - f'(0)]/h$ , y la regla de L'Hospital, demostrar que  $f''(0) = 0$ . De modo semejante, se puede demostrar que  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo valor entero positivo de  $n$ .
- Escribir  $f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$  y determinar  $P_n(x)$  y  $R_{n+1}(x)$ . Tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y demostrar que existe el  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$  para toda  $x$ , pero que no es igual a  $f(x)$  a menos que  $x = 0$ . En otras palabras,  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  sólo cuando  $x = 0$ .

\*38. Demostración del corolario del teorema 13.2.1.

- Si  $x > x_0$ , demostrar que

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

satisface las condiciones del problema del valor medio generalizado del problema 28, sección 6.3, si  $f^{(n+1)}(t)$  se identifica con  $f(t)$  y  $(x-t)^n/n!$  con  $g(t)$ . Por lo tanto, demostrar que

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt,$$

y que la ecuación 9 se infiere.

- Si  $x < x_0$ , demostrar que

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_x^{x_0} (t-x)^n f^{(n+1)}(t) dt,$$

y a continuación deducir la ecuación 9 como en la parte (a).



\*39. En la sección 10.3 se estableció que la fórmula del error local cuando se usa el método de Euler es proporcional a  $h^2$ , siendo  $h$  el tamaño del paso. Si  $y = \phi(t)$  es la solución exacta de

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

demostrar que

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \phi''(\bar{t}_n)\frac{h^2}{2},$$

en la cual  $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$ . Suponiendo que  $y_n = \phi(t_n)$ , demostrar que si  $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ , entonces  $\phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \phi''(\bar{t}_n)h^2/2$ .

### 13.3 SERIES DE POTENCIAS Y RADIO DE CONVERGENCIA

Hasta ahora siempre hemos adoptado el punto de vista de que se da una función  $f$  y el problema consiste en hallar sus polinomios de Taylor asociados, o la serie de Taylor, alrededor de un punto dado  $x_0$ . Nuestras herramientas principales para esta tarea son la fórmula

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (1)$$

para los coeficientes de Taylor y la ecuación para el residuo  $R_{n+1}(x)$  que se dio en el corolario del teorema 13.2.1.

Sin embargo, también es posible adoptar el punto de vista de que la serie misma es el objeto básico de nuestro estudio. Así, supongamos que tenemos una serie de la forma

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_k(x - x_0)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad (2)$$

donde se dan  $x_0$  y los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ . A la serie (2) se le llama **serie de potencias**, porque involucra a potencias sucesivas de  $(x - x_0)$ . Surgen varias preguntas, naturalmente, entre ellas las siguientes:

1. ¿Para qué valores converge la serie (2)?
2. Suponiendo que la serie (2) converge para  $x$  en determinado intervalo  $I$ , su suma es función de  $f$  en el dominio  $I$ . ¿Se puede decir algo interesante de  $f$ ? Por ejemplo, ¿es  $f$  continua o derivable, o tiene una serie de Taylor alrededor de  $x_0$ ?
3. Suponiendo que  $f$  tiene una representación en serie de Taylor alrededor de  $x_0$ , desde luego esa serie es una serie de potencias de la forma (2). ¿Es la serie de Taylor necesariamente idéntica a la serie (2)? o ¿puede una función tener dos o más representaciones en series de potencias alrededor del mismo punto?

Estudiaremos la primera pregunta en el resto de esta sección y veremos las demás en las secciones siguientes. Sin embargo, hay dos comentarios importantes que quisiéramos hacer aquí. Primero, parecería extraño comenzar con la serie infinita (2), en lugar de hacerlo con una función dada  $f$ . Sin embargo, con frecuencia es importante proceder

así. En muchas aplicaciones, en especial las que requieren de la solución de una ecuación diferencial, una técnica extremadamente útil consiste en buscar la solución en la forma de una serie de potencias y tratar de desarrollar un procedimiento para calcular los coeficientes. Una vez hecho lo anterior, el problema que sigue es interpretar los resultados, lo cual significa básicamente contestar a preguntas como las (1) y (2) de antes. En los problemas 26 y 27 de la sección 13.5 se dan algunos ejemplos de este procedimiento.

El otro comentario es que un resultado importante derivado de este punto de vista (comenzar con una serie en lugar de una función), es que se ampliará mucho el alcance de nuestros métodos para determinar la serie de Taylor que representa a una función determinada. Es importante porque la fórmula (1) con frecuencia es tediosa, ya que las derivadas sucesivas de  $f$  se pueden complicar más y más.

A continuación regresemos a la pregunta acerca de la convergencia. El siguiente ejemplo es típico.

### EJEMPLO 1

Determinar los valores de  $x$  para los cuales la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} = (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \cdots \quad (3)$$

converge.

Para estudiar la convergencia de una serie de potencias, en general es adecuado comenzar con el criterio de la razón, para investigar alguna convergencia absoluta posible. Para la serie (3) obtenemos

$$\left| \frac{(x-2)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{(x-2)^k} \right| = \frac{k}{k+1} |x-2| \rightarrow |x-2| \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Por tanto la serie (3) converge absolutamente para  $|x-2| < 1$  y diverge para  $|x-2| > 1$ . En otras palabras, la serie converge absolutamente para  $1 < x < 3$  y diverge para  $x < 1$  y para  $x > 3$ . El criterio de la razón no nos lleva a resultado alguno para  $x = 1$  y  $x = 3$  y se deben examinar por separado esos puntos. En efecto, para  $x = 1$  la serie (3) se reduce a la serie armónica alternante  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$  y por tanto converge condicionalmente en este punto. En el punto  $x = 3$  la serie se reduce a la serie armónica  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  y por tanto diverge allí. Resumiendo, la serie (3) converge absolutamente para  $1 < x < 3$ , converge condicionalmente para  $x = 1$  y diverge en los demás casos. Esta información se muestra en forma gráfica en la figura 13.3.1. ■

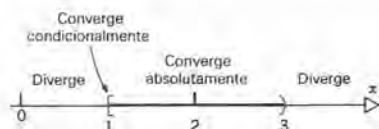


Figura 13.3.1

A continuación, abordamos la cuestión de la convergencia en forma más general. Por simplicidad haremos que  $x_0 = 0$  y consideramos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots \quad (5)$$

en lugar de la serie (2). Los resultados de la serie (5) se pueden aplicar también a la serie (2) reemplazando  $x$  por  $x - x_0$ . Es claro que la serie (5) converge para  $x = 0$ , porque en ese caso todo término después del primero es cero. Si la serie (5) converge para valores de  $x$  diferentes de cero, puede converger para toda  $x$ , o bien, como en el ejemplo 1, puede converger para algunos valores de  $x$  y ser divergente para otros. Clasificaremos las posibilidades en los siguientes tres teoremas; los primeros dos son preparatorios para el resultado principal que será el teorema 13.3.3.

### Teorema 13.3.1

Si la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge para  $x = \xi \neq 0$ , entonces converge absolutamente para toda  $x$  tal que  $|x| < |\xi|$ .

El teorema se muestra en la figura 13.2.2 para  $\xi > 0$ . Si la serie converge para  $x = \xi$ , entonces converge absolutamente para  $-\xi < x < \xi$ , como se ve en la figura.

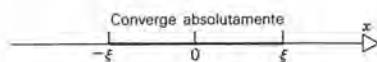


Figura 13.3.2

**Demostración.** Como converge  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ , sabemos del teorema 12.2.1 (el criterio del  $k$ ésimo término) que  $a_k \xi^k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por tanto, según el teorema 12.1.5 los términos  $a_k \xi^k$  deben ser acotados; esto es, hay un número  $M$  tal que

$$|a_k \xi^k| \leq M; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

A continuación sea  $x$  tal que satisface  $|x| < |\xi|$  y sea  $r = x/\xi$ , de modo que  $|r| < 1$ . Entonces

$$a_k x^k = a_k \xi^k \frac{x^k}{\xi^k} = a_k \xi^k r^k$$

y por tanto

$$|a_k x^k| = |a_k \xi^k| |r|^k \leq M |r|^k; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |r|^k$  es una serie geométrica convergente y se sigue del criterio de comparación (teorema 12.3.1), que  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$  converge también. Por tanto la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge absolutamente, y queda demostrado el teorema.  $\square$

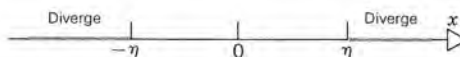


### Teorema 13.3.2

Si diverge la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  para  $x = \eta$ , entonces diverge para toda  $x$  tal que  $|x| > |\eta|$ .

Para  $\eta > 0$ , se ilustra el teorema en la figura 13.3.3. Si la serie diverge para  $x = \eta$ , entonces diverge para  $x > \eta$  y para  $x < -\eta$ .

Figura 13.3.3



**Demostración.** La demostración se hace por contradicción. Supongamos que la conclusión es falsa, esto es, que la serie converge para un punto  $x = \xi$ , donde  $|\xi| > |\eta|$ . Entonces, según el teorema 13.3.1, la serie converge para toda  $x$  tal que  $|x| < |\xi|$ , incluyendo por necesidad el punto  $x = \eta$ . Como esto contradice la hipótesis del teorema, queda completa la demostración.  $\square$

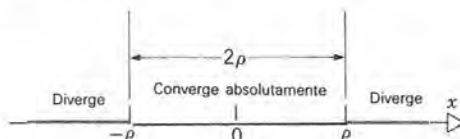
### Teorema 13.3.3

Para toda serie de potencias de la forma  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  es válida una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

- (a) La serie sólo converge para  $x = 0$ .
- (b) La serie converge (absolutamente) para todos los valores de  $x$ .
- (c) Existe un número  $\rho > 0$  tal que la serie converge (absolutamente) si  $|x| < \rho$  y diverge si  $|x| > \rho$ .

Al número  $\rho$  que se menciona en el teorema 13.3.3 se le conoce como el **radio de convergencia** de la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Si la serie sólo converge para  $x = 0$ , entonces su radio de convergencia es cero. Análogamente, si la serie converge siempre, entonces tiene un radio de convergencia infinito. Con una interpretación adecuada de los dos casos extremos en los que  $\rho$  es cero o infinito, el teorema 13.3.3 afirma que toda serie de potencias  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  converge en forma absoluta en el intervalo de longitud  $2\rho$  y con centro en el origen y diverge fuera de ese intervalo. Al intervalo abierto  $-\rho < x < \rho$  se le llama **intervalo de convergencia** (véase figura 13.3.4). El teorema no dice nada acerca de lo que sucede en los puntos extremos  $x = \pm \rho$  del intervalo de convergencia y se deben investigar por separado en cada serie.

Figura 13.3.4



Las mismas conclusiones valen para la serie de la forma (2), con la excepción de que el centro del intervalo de convergencia es  $x_0$ . Así, la serie (2) converge absolutamente en  $|x - x_0| < \rho$ , esto es, para  $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$ . Diverge para  $x < x_0 - \rho$  y para  $x > x_0 + \rho$ , y puede ser tanto convergente como divergente en  $x = x_0 \pm \rho$ .

Los teoremas 13.3.1 y 13.3.2 podrían hacer plausible la conclusión del teorema 13.3.3, cuando menos. En muchos casos se puede calcular el radio de convergencia  $\rho$  a partir del criterio de la razón. Si aplicamos este criterio a la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ , y suponemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L, \quad (8)$$

entonces obtendremos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x| = L|x|. \quad (9)$$

Por lo tanto  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge absolutamente para  $|x| < 1/L$  y diverge para  $|x| > 1/L$ . Entonces el radio de convergencia está dado por

$$\rho = \frac{1}{L} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \quad (10)$$

siempre que exista el límite del lado derecho, como número finito, o sea  $+\infty$ . Nótese que este argumento no es una demostración del teorema 13.3.3, porque hay series de potencias que no satisfacen la hipótesis acerca del límite en la ecuación 8. En el problema 22 se esboza una demostración. Pasaremos ahora a unos ejemplos más.

### EJEMPLO 2

Determinar los valores de  $x$  para los cuales converge la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots \quad (11)$$

Aplicando el criterio de la razón, obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} 2^{k+1} x^{k+1}}{(-1)^k 2^k x^k} \right| = 2|x|. \quad (12)$$

Por consiguiente la serie (11) converge para  $|x| < \frac{1}{2}$ , o para  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ . Diverge para  $|x| > \frac{1}{2}$ , esto es, para  $x < -\frac{1}{2}$  y para  $x > \frac{1}{2}$ . Entonces el radio de convergencia es  $\rho = \frac{1}{2}$  y el centro del intervalo de convergencia es  $x_0 = 0$ . En el extremo izquierdo  $x = -\frac{1}{2}$  la serie se reduce a  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k}$  y en el extremo derecho  $x = \frac{1}{2}$  se vuelve  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ . Ambas series divergen de acuerdo con el criterio del  $k$ -ésimo término (teorema 12.2.1).

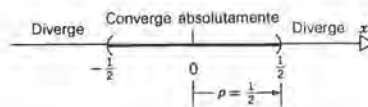


Figura 13.3.5

Por tanto, la serie converge absolutamente para  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$  y diverge en los demás casos, como se indica en la figura 13.3.5. ■

### EJEMPLO 3

Investigar si la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k^2 2^k} \quad (13)$$

es convergente o divergente.

A partir del criterio de la razón obtenemos

$$\left| \frac{(x+2)^{k+1}}{(k+1)^2 2^{k+1}} \frac{k^2 2^k}{(x+2)^k} \right| = \left( \frac{k}{k+1} \right)^2 \frac{|x+2|}{2} \rightarrow \frac{|x+2|}{2} \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Así, la serie converge absolutamente para  $|x+2| < 2$ , o bien para  $-4 < x < 0$ . Diverge si  $|x+2| > 2$ , esto es, si  $x < -4$  o si  $x > 0$ . El radio de convergencia es  $\rho = 2$  y el centro del intervalo de convergencia es  $x_0 = -2$ . En el extremo izquierdo  $x = -4$ , la serie es  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k^2$ , que converge en forma absoluta. Análogamente, en el extremo derecho  $x = 0$ , la serie es  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ , la que converge. Así, la serie dada converge absolutamente en  $-4 \leq x \leq 0$  y diverge en los demás casos (véase figura 13.3.6). ■

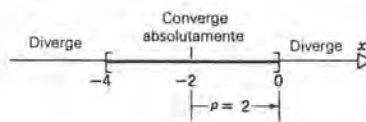


Figura 13.3.6

### EJEMPLO 4

Estudiar la convergencia y la divergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (15)$$

A partir del criterio de la razón tenemos



$$\left| \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \frac{(2k)!}{x^{2k}} \right| = \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \rightarrow 0 \quad (16)$$

cuando  $k \rightarrow \infty$  para toda  $x$ . Por tanto, la serie dada converge absolutamente para toda  $x$ ; su radio de convergencia es infinito y su intervalo de convergencia es  $-\infty < x < \infty$ . Esto se muestra en la figura 13.3.7. ■

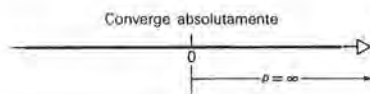


Figura 13.3.7

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20, determinar el radio de convergencia de la serie dada y el conjunto de puntos para el cual converge. Determinar si converge absoluta o condicionalmente en cada punto.

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad 2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{\sqrt{k}} \quad 3. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+3)^k}{2^k}$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} \quad 5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x-2)^k}{\sqrt{k} 2^{2k}}$$

$$6. \sum_{k=0}^{\infty} k! x^k \quad 7. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-\pi)^k}{(\pi/2)^k} \quad 9. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(k+1)^2}$$

$$10. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad 11. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (x-5)^k}{k!} \quad 13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^k}{k}$$

$$14. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad 15. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k! x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$* 16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} x^{2k}$$

$$17. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \quad * 18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 x^{2k}}{(2k)!}$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (3x+2)^k}{2^k} \quad 20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x+1)^{k+1}}{k^{3/2}}$$

- \*21. (a) Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! x^k}{k^k}$$

- (b) Determinar si la serie converge en los extremos del intervalo de convergencia.

*Sugerencia:* el lector quizá desee usar la aproximación de Stirling para  $k!$ , cuando  $k$  es grande:  $k! \approx \sqrt{\pi k} (k/e)^k$ .

- \*22. **Demostración del teorema 13.3.3.** Debe quedar en claro que no pueden ser válidas dos afirmaciones (a), (b) o (c) a la vez. Por tanto, sólo necesitamos demostrar que no existe ningún caso en el que las tres sean falsas, esto es, que no hay una cuarta posibilidad por considerar. En especial, supongamos que son falsas (a) y (b) y demostrar que en ese caso la afirmación (c) debe ser válida.

- (a) Definimos el conjunto  $S$  tal que

$$S = \{ \xi \mid \xi > 0 \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ converge para } |x| < \xi \}$$

Mostrar que  $S$  no es un conjunto vacío y que está acotado por arriba.

*Sugerencia:* si no es así, la afirmación (a) o la (b) deben ser ciertas.

- (b) De acuerdo con el principio de completación (véase la argumentación que precede al problema 29 de la sección 1.1),  $S$  tiene una mínima cota superior; sea  $p$  esa cota. Demostrar que entonces  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge para  $|x| < p$ .

*Sugerencia:* si no es así, emplear el teorema 13.3.2 para demostrar que  $\rho$  no es la *mínima* cota superior de  $S$ .

- (c) Demostrar que  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  diverge para  $|x| > \rho$ , con lo cual se completa la demostración.

*Sugerencia:* si no es así, emplear el teorema 13.3.1 para demostrar que  $\rho$  no es una cota superior de  $S$ .

## 13.4 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LAS SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencias son herramientas útiles en las matemáticas, en gran medida porque tienen muchas propiedades que las hacen convenientes para la manipulación de cálculos algebraicos y numéricos. Verdaderamente, dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias se comporta de manera muy semejante a la de un polinomio y se puede considerar, en forma intuitiva, como un “polinomio de grado infinito”. En esta sección veremos algunas de las propiedades algebraicas más importantes de las series de potencias. De paso mostraremos cómo con frecuencia se pueden emplear esas propiedades para determinar representaciones de funciones dadas en forma de series de potencias. Esto nos da una alternativa que con frecuencia es más sencilla y más eficaz que el empleo de la fórmula de Taylor para los coeficientes.

En cada ejemplo de esta sección puede surgir la pregunta de si la serie de potencias que obtenemos aquí con métodos algebraicos es la misma que la serie de Taylor para la misma función alrededor del punto dado. Al final de la sección 13.5 se da una respuesta general (afirmativa) a esta pregunta. Como todos los ejemplos de esta sección caen dentro del objetivo de ese resultado, omitiremos aquí una argumentación detallada.

### Sustituciones

Una de las manipulaciones más comunes es una transformación, o sustitución, que involucra a la variable independiente. Distinguiremos tres tipos específicos, que son traslaciones, escalamientos y sustituciones de potencias.

Una **traslación** mueve el centro del intervalo de convergencia de un punto a otro, pero no cambia su longitud. Supongamos que tenemos una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$  cuyo radio de convergencia es  $\rho$ . Si hacemos que  $f(t)$  represente la suma de esta serie, entonces

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < \rho, \quad (1)$$

en la cual  $\rho$  puede ser infinito. Si hacemos que  $t = x - x_0$ , entonces

$$f(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad (2)$$

donde la última serie converge para  $|x - x_0| < \rho$ , esto es, para  $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$ .

**EJEMPLO 1**

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = \sin x$  alrededor de  $x_0 = \pi$ . En otras palabras, expresar a  $\sin x$  como una serie de potencias de  $x - \pi$ .

En el ejemplo 4 de la sección 13.2 encontramos que, empleando provisionalmente a  $t$  como variable independiente,

$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (3)$$

Haciendo que  $t = x - \pi$ , obtenemos

$$\sin(x - \pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - \pi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (4)$$

y esta serie converge para  $-\infty < x - \pi < \infty$ , esto es, para todos los valores de  $x$ . Si observamos que

$$\sin(x - \pi) = -\sin x, \quad (5)$$

entonces, de acuerdo con la ecuación 4,

$$\sin x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x - \pi)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (6)$$

Así, hemos obtenido una representación para  $\sin x$  en serie de potencias alrededor del punto  $x_0 = \pi$ , y no alrededor del origen. ■

Un **escalamiento** multiplica el radio de convergencia  $\rho$  por un factor distinto de cero. Supongamos de nuevo que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < \rho. \quad (7)$$

Si hacemos que  $t = x/c$ , siendo  $c \neq 0$ , entonces

$$f\left(\frac{x}{c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{x}{c}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{c^k} x^k, \quad (8)$$

y esta serie converge para  $|x/c| < \rho$ , o sea para  $|x| < |c|\rho$ . La cantidad  $|c|$  se llama factor de escala. Si  $c < 0$ , entonces los extremos correspondientes del intervalo de convergencia se invierten, mientras que si  $c > 0$  no cambian.

**EJEMPLO 2**

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = 2/(x+2)$  alrededor de  $x_0 = 0$ .



Primero reformularemos  $f(x)$  como sigue:

$$\frac{2}{x+2} = \frac{1}{(x/2)+1} = \frac{1}{1-(-x/2)} = \frac{1}{1-t}, \quad (9)$$

en la que  $t = -x/2$ . De acuerdo con el ejemplo 5 de la sección 13.2 sabemos que

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad |t| < 1. \quad (10)$$

Por tanto, llevando a cabo la sustitución  $t = -x/2$  en la ecuación anterior obtenemos

$$\frac{2}{x+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{2^k}, \quad |x| < 2. \quad (11)$$

### EJEMPLO 3

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = 2/(x+2)$  alrededor de  $x_0 = 1$ .

Como la serie alrededor de  $x_0 = 1$  debe involucrar a potencias de  $x - 1$ , el paso clave será reformular  $f(x)$  para que aparezca la cantidad  $x - 1$ . Esto se puede hacer como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+2} &= \frac{2}{x-1+3} = \frac{2}{3} \frac{1}{1+[(x-1)/3]} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{1-\{ -[(x-1)/3] \}} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-t}, \end{aligned} \quad (12)$$

en la cual  $t = -(x-1)/3$ . Como en la ecuación 10, tenemos que

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad |t| < 1.$$

Entonces, al sustituir el valor de  $t$  obtenemos

$$\frac{2}{x+2} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} (x-1)^k, \quad |x-1| < 3. \quad (13)$$

Obsérvese que la sustitución que se empleó en este ejemplo es una combinación de una traslación y un escalamiento. ■

Supóngase de nuevo que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < \rho. \quad (14)$$

La sustitución  $t = x^m$ , en la cual  $m$  es un entero positivo, se llama **sustitución de**

**potencia.** Deja en el origen al centro del intervalo de convergencia y cambia el radio de convergencia a  $\rho^{1/m}$ . La serie (14) se transforma en

$$f(x^m) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{mk}, \quad |x| < \rho^{1/m}. \quad (15)$$

#### EJEMPLO 4

Hallar una serie de potencias para  $\operatorname{sen}(x^2)$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

Partiendo de la ecuación 3, hacemos que  $t = x^2$  y obtenemos de inmediato

$$\operatorname{sen}(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty. \quad (16)$$

En los tres ejemplos anteriores podríamos haber hallado el desarrollo deseado en serie al calcular los coeficientes de Taylor de la función dada en el punto dado. Este procedimiento hubiera sido bastante más difícil en este caso, porque las derivadas sucesivas de  $\operatorname{sen}(x^2)$  se complican cada vez más. Los métodos indirectos, como el que empleamos en este ejemplo, pueden ser muy útiles en tales casos. ■

#### EJEMPLO 5

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = 2/(x^2 + 2)$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

Para mostrar el empleo de una sustitución de potencia, emplearemos la serie (11) para  $2/(x + 2)$ . Cambiaremos primero a la variable a  $t$  de manera que tenemos

$$\frac{2}{t+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{2^k}, \quad |t| < 2.$$

A continuación la sustitución  $t = x^2$  produce

$$\frac{2}{x^2+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} + \cdots. \quad (17)$$

La misma sustitución en la desigualdad  $|t| < 2$  da  $x^2 < 2$ , o sea  $|x| < \sqrt{2}$ . Así, el radio de convergencia de la serie (17) es  $\sqrt{2}$ . Obsérvese que, a diferencia del ejemplo 4, el radio de convergencia en este ejemplo sí se altera por la sustitución de potencia.

La serie (17) se puede obtener también con facilidad si escribimos

$$\frac{2}{x^2+2} = \frac{1}{1+(x^2/2)} = \frac{1}{1-(-x^2/2)},$$

y haciendo que  $t = -x^2/2$  en la serie geométrica (10). ■

A veces puede ser necesario llevar a cabo varias sustituciones en sucesión para obtener un resultado deseado. Con la práctica, a menudo es posible combinar dos o más sustituciones sencillas en un solo paso.

### EJEMPLO 6

Hallar una serie de potencias alrededor de  $x_0 = 3$ , para la función

$$f(x) = e^{-(x-3)^2/2}.$$

De acuerdo con el ejemplo 3 de la sección 13.2, tenemos que

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (18)$$

Primero llevamos a cabo el escalamiento  $t = -u/2$  para obtener

$$e^{-u/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{u^k}{k!}, \quad -\infty < u < \infty. \quad (19)$$

La sustitución de potencia  $u = w^2$  produce

$$e^{-w^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{w^{2k}}{k!}, \quad -\infty < w < \infty. \quad (20)$$

Por último, llevamos a cabo la traslación  $w = x - 3$  con el resultado siguiente:

$$e^{-(x-3)^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(x-3)^{2k}}{k!}, \quad -\infty < x-3 < \infty. \quad (21)$$

Desde luego, se puede obtener la ecuación 21 en forma directa a partir de la ecuación 18, mediante la sustitución única  $t = -(x-3)^2/2$ . Hemos descompuesto el procedimiento en varios pasos para que quede aclarado que esa sustitución sólo es una combinación de una traslación, un escalamiento y una sustitución de potencia. ■

### Combinaciones lineales

Supongamos que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < \rho_1 \quad (22)$$

y que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < \rho_2. \quad (23)$$



En otras palabras, las series dadas tienen  $\rho_1$  y  $\rho_2$  como sus respectivos radios de convergencia y sus sumas respectivas  $f(x)$  y  $g(x)$  dentro de sus intervalos de convergencia. Sea  $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$  el menor de los radios de convergencia de las dos series. Entonces, para cualesquiera constantes  $\alpha$  y  $\beta$  y para toda  $x$  en el intervalo  $|x| < \rho$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha f(x) + \beta g(x) &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k, \quad |x| < \rho.\end{aligned}\quad (24)$$

Este resultado se demuestra inmediatamente aplicando el teorema 12.2.2 a las series (22) y (23) en cada  $x$  fija del intervalo  $|x| < \rho$ . En algunos casos, la serie resultante puede ser convergente en un intervalo mayor (véase problema 27).

## EJEMPLO 7

Hallar una serie de potencias para

$$h(x) = \frac{5x + 4}{(x + 2)(x - 1)} \quad (25)$$

que sea válida en algún intervalo con centro en el origen. Determinar el intervalo de validez.

Desarrollando a  $h(x)$  en fracciones parciales, vemos que

$$h(x) = \frac{2}{x + 2} + \frac{3}{x - 1}. \quad (26)$$

De acuerdo con el ejemplo 2, sabemos que

$$\frac{2}{x + 2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{2^k}, \quad |x| < 2, \quad (27)$$

y según la ecuación 10, sabemos que

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1. \quad (28)$$

Así, para  $|x| < 1$  podemos combinar las series (27) y (28) para obtener

$$\begin{aligned}h(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{2^k} - 3 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{2^k} - 3 \right] x^k, \quad |x| < 1. \quad \blacksquare\end{aligned}\quad (29)$$

### Multiplicación de series

También es posible multiplicar una serie de potencias por otra dentro de un intervalo común de convergencia. El procedimiento es semejante al de los productos de polinomios: formar todos los productos posibles de pares de términos, con un término de cada serie, para después reunir los términos que tengan los mismos exponentes. Así, si  $f$  y  $g$  tienen, de nuevo, las series de potencias (22) y (23), respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0) x^k + \cdots \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k + \cdots \end{aligned} \quad (30)$$

El coeficiente general en la serie del producto es

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0. \quad (31)$$

Obsérvese que  $c_k$  es una suma de  $k + 1$  términos; esta suma comprende todos los productos posibles de pares de coeficientes de las dos series originales cuyos índices suman  $k$ . Como los coeficientes de la serie de productos, en general, tienden a ser más complicados cuando  $k$  crece, con frecuencia se aconseja sólo calcular los términos suficientes para el fin que se persigue.

Como en el caso de las combinaciones lineales, la serie del producto converge al menos para  $|x| < \rho$ , donde  $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$ . En otras palabras, la serie del producto converge ciertamente en el intervalo de convergencia común de  $f$  y de  $g$ , y puede converger en un intervalo mayor (véase problema 28).

### EJEMPLO 8

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = e^x/(1-x)$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

Para obtener una serie para  $f(x)$  podemos multiplicar entre sí las series que se obtuvieron antes para  $e^x$  y para  $1/(1-x)$  (véanse las ecuaciones 18 y 10). El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1-x} &= \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \right) \\ &\quad \times (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots) \\ &= 1 + (1+1)x + \left( 1+1+\frac{1}{2!} \right) x^2 + \left( 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} \right) x^3 + \cdots \end{aligned}$$

$$+ \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} \right) x^k + \cdots \quad (32)$$

y esta última serie converge al menos para  $|x| < 1$ . ■

### Resumen

Para contar con una referencia sencilla, a continuación damos una lista de algunos de los desarrollos en serie más importantes, de las funciones elementales, que con frecuencia se emplean para construir desarrollos para otras funciones.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < \infty; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad -1 < x < 1,$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 20, hallar una representación de la función dada en serie de potencias cerca del punto dado. Emplear los métodos que se presentaron en esta sección y no la fórmula de Taylor para obtener los coeficientes. En cada caso decir si converge la serie.

1.  $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \pi$

2.  $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

3.  $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

4.  $f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x_0 = 0$

5.  $f(x) = \frac{1}{1+2x}, \quad x_0 = 0$

6.  $f(x) = \frac{1}{1+2x}, \quad x_0 = 1$

7.  $f(x) = \frac{3x+4}{(1+2x)(2-x)}, \quad x_0 = 0$

8.  $f(x) = \frac{2x+2}{(x-1)(x+3)}, \quad x_0 = 0$

9.  $f(x) = \frac{x-4}{(x-1)(x-2)}, \quad x_0 = 0$

10.  $f(x) = \operatorname{sen} 3x, \quad x_0 = 0$

11.  $f(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad x_0 = 0$

12.  $f(x) = e^{x/4}, \quad x_0 = 0$



13.  $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad x_0 = 0$

14.  $f(x) = e^{-x}, \quad x_0 = 0$

15.  $f(x) = e^{-x^2}, \quad x_0 = 0$

16.  $f(x) = \cosh x, \quad x_0 = 0$

17.  $f(x) = \cosh 3x, \quad x_0 = 0$

18.  $f(x) = \sinh \frac{x}{2}, \quad x_0 = 0$

19.  $f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x_0 = 3$

20.  $f(x) = e^{x-2}, \quad x_0 = 2$

En los problemas 21 a 24 emplear la multiplicación de series para determinar los primeros cuatro términos de una serie de potencias alrededor de  $x_0$ , que sean distintos de cero, para la función dada.

21.  $f(x) = \sin^2 x$

22.  $f(x) = e^{-x} \cos x$

23.  $f(x) = e^{-2x} \sin 3x$

24.  $f(x) = \frac{\sin x}{1-x}$

En los problemas 25 y 26, suponer que  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  para  $|x| < \rho$  y determinar los cinco primeros términos de una serie de potencias alrededor de  $x_0 = 0$ , para la función dada.

25.  $[f(x)]^2$

26.  $[f(x)]^3$

27. (a) A partir de la serie geométrica (10) para  $f(x) = 1/(1-x)$ , deducir una serie de potencias alrededor de  $x_0 = 0$ , para  $g(x) = x^2/(1-x)$ . Obsérvese que las series para  $f$  y  $g$  convergen sólo para  $|x| < 1$ .

(b) Hallar una serie de potencias alrededor de  $x_0 = 0$ , para  $h(x) = f(x) - g(x)$ . ¿Dónde converge la serie para  $h$ ?

28. (a) Recuerdese la serie (10) para  $f(x) = 1/(1-x)$ , que sólo converge para  $|x| < 1$ . Determinar también una serie de potencias para  $g(x) = x(1-x)$ , alrededor de  $x_0 = 0$ .

(b) Mediante una multiplicación de la serie de la parte (a), determinar una serie de potencias alrededor de  $x_0 = 0$ , para  $h(x) = f(x)g(x)$ . ¿Dónde converge esta serie para  $h(x)$ ?

## 13.5 DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE LAS SERIES DE POTENCIAS

El hecho de que se pueda derivar e integrar una serie de potencias término a término dentro de su intervalo de convergencia es notable y extremadamente útil. Esto significa que cualquier función representada por una serie convergente de potencias se puede derivar e integrar casi como si fuera un polinomio. Este hecho explica en gran parte el lugar importante que tienen las series de potencias, tanto en la teoría como en las aplicaciones en matemáticas.

### Teorema 13.5.1

Supóngase que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < \rho, \quad (1)$$

en la cual  $\rho > 0$ . Entonces

(a)  $f$  es una función derivable para  $|x| < \rho$ , y

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{d}{dx} \left[ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} a_k x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad |x| < \rho \quad (2)$$

(b)  $f$  es integrable en cualquier intervalo contenido en  $|x| < \rho$ , y

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x a_k t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}, \quad |x| < \rho. \end{aligned} \quad (3)$$

Acerca de este teorema tenemos algunas observaciones que merecen destacarse. En primer lugar, la serie que se obtiene por derivación o integración término a término tiene exactamente el mismo radio de convergencia que la serie original, aunque puede ser distinto el comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia. Además, estas series convergen a la derivada o a la integral de la suma de la serie original. Como el resultado de derivar o de integrar la ecuación 1 es otra serie convergente de potencias, el teorema se puede aplicar una y otra vez. Esto muestra, por ejemplo, que en realidad  $f$  tiene derivadas de todos los órdenes y que pueden calcularse derivando la serie (1) término a término un número adecuado de veces. Por último, nótese que esta derivación o integración término a término de una serie de potencias no es más difícil que la aplicación de las mismas operaciones a un polinomio. Así, las funciones que tienen desarrollos en series de potencias convergentes en algún intervalo  $|x| < \rho$  son particularmente bonitas desde un punto de vista analítico. Han sido escogidas para dedicarles un estudio amplio y se les ha dado el nombre especial de **funciones analíticas**.

La demostración del teorema 13.5.1 aparece en textos más avanzados como un caso especial de un resultado más general que depende de algunos conceptos que no hemos discutido. Por tanto la omitiremos. Los ejemplos siguientes muestran cómo se puede emplear.

### EJEMPLO 1

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = (1 - x)^{-2}$  alrededor de  $x_0 = 0$ , y determinar su radio de convergencia.

Obsérvese que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} \quad (4)$$

y recuérdese (ejemplo 5 de la sección 13.2) que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (5)$$

Así, se puede obtener la serie de potencias que se desea para  $f(x)$  al derivar la serie (5)

término a término; el resultado es

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (6)$$

El teorema 13.5.1 justifica la derivación término a término. Este teorema asegura también que el radio de convergencia de la serie (6) que resulta es el mismo que el de la serie (5). ■

## EJEMPLO 2

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = \ln(1+x)$  alrededor de  $x_0 = 0$ , y determinar su radio de convergencia.

Observemos que

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}, \quad (7)$$

y que la serie para  $(1+t)^{-1}$  se puede obtener de la serie (5) para  $(1-x)^{-1}$  con la sustitución de escalamiento  $t = -x$ . Así,

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots, \quad |t| < 1. \quad (8)$$

Sustituyendo la serie (8) en la ecuación 7 e integrando término a término, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (9)$$

De acuerdo con el teorema 13.5.1, el radio de convergencia de la serie (9) es el mismo que el de la serie original (8). Esto también se puede demostrar aplicando directamente el criterio de la razón a la serie (9).

Vale la pena hacer notar que en  $x = 1$  la serie (9) se convierte en la serie armónica alternante que, como sabemos, converge. Si es legítimo hacer que  $x = 1$  en la ecuación 9, entonces obtendremos

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots, \quad (10)$$

que es un resultado que se mencionó en la sección 12.6. Sin embargo, de ningún modo



es obvia la validez de hacer que  $x = 1$  en la ecuación 9, ya que esta ecuación se obtuvo de la ecuación 8 integrando desde 0 hasta  $x$ , y  $x = 1$  no queda dentro del intervalo de convergencia de la serie (8). De hecho, la ecuación 10 se infiere a partir de una propiedad de las series de potencias, conocida como el teorema de Abel, que se discute en textos más avanzados. Simplemente aceptaremos la ecuación 10, sin intentar más dar su justificación. ■

### EJEMPLO 3

Hallar una serie de potencias para  $f(x) = \arctan x$  alrededor de  $x_0 = 0$  y determinar su radio de convergencia.

Es útil notar que

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad (11)$$

y que una serie de potencias para  $(1+t^2)^{-1}$  se puede obtener de la ecuación 5 al hacer que  $x = -t^2$ . Esta sustitución es una combinación de una sustitución de potencia y una de escalamiento.

Tenemos entonces

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots, \quad |t| < 1. \quad (12)$$

Por último, integramos término a término esta serie y con ello obtenemos

$$\begin{aligned} \arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1. \end{aligned} \quad (13)$$

La serie (13) converge también en  $x = \pm 1$  según el criterio de la serie alternante. Como en el ejemplo 2, es posible justificar que  $x = \pm 1$  si se recurre al teorema de Abel. Para  $x = 1$ , el resultado es

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots, \quad (14)$$

que se conoce como la serie de Leibniz. Esta serie fue una de las primeras series infinitas con que se encontraron los matemáticos. En principio, da un medio para calcular  $\pi$  con cualquier grado de exactitud, pero en realidad converge demasiado lentamente para tener un uso práctico en computación (ver problemas 17 y 18). ■

**EJEMPLO 4**

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Evaluar

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx \quad (16)$$

con un error no mayor que  $0.000001 = 10^{-6}$ .

No podemos emplear el teorema fundamental del cálculo para evaluar la integral  $I$ , porque no disponemos de una antiderivada del integrando. Sin embargo, si pudiéramos hallar una serie de potencias para  $f(x)$ , podríamos emplear el teorema 13.5.1 para calcular  $I$  con la exactitud necesaria. De acuerdo con el ejemplo 4 de la sección 13.2 tenemos que

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \quad (17)$$

y esta serie converge para toda  $x$ . Si  $x \neq 0$ , podemos dividir la ecuación 17 entre  $x$  para obtener

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots, \quad x \neq 0. \quad (18)$$

Sin embargo, la serie del lado derecho de la ecuación 18 no sólo converge para toda  $x$ , sino que también tiene el valor 1 cuando  $x = 0$ . Así, representa la función  $f$  que da la ecuación 15, para toda  $x$ . Para calcular  $I$ , integramos término a término la ecuación 18 y con esto se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{2k} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \cdots \end{aligned} \quad (19)$$

El criterio de la serie alternante (teorema 12.6.1) establece que el error en el que se incurre al truncar la serie (19) es menor que la magnitud del primer término después

del truncamiento. Así, buscaremos una  $k$  tal que

$$\frac{1}{(2k+1)!(2k+1)} < \frac{1}{10^6}. \quad (20)$$

El valor mínimo de  $k$  que satisface la desigualdad (20) es  $k = 4$ . Por lo que sólo necesitamos emplear los términos que corresponden a  $k = 0, 1, 2$  y  $3$  en la ecuación 19 para evaluar a  $I$  con la exactitud deseada. El resultado es

$$I \cong 0.946083 \quad (21)$$

cuyo error no es mayor que uno en la última cifra decimal. ■

### Relación entre las series de potencias y la serie de Taylor

Trataremos ahora la cuestión de cómo se relaciona una serie de Taylor con una serie de potencias. Esta pregunta surgió primero al principiar la sección 13.4, en relación con los ejemplos en esa sección. Es claro que toda serie de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} \quad (22)$$

tiene la forma de una serie de potencias en las cercanías de  $x = x_0$ . Así, la pregunta es si una serie de potencias convergente debe ser una serie de Taylor para la función a la que converge. En otras palabras, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < \rho, \quad (23)$$

¿es necesariamente cierto que los coeficientes  $a_k$  están dados por la fórmula de Taylor

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots ? \quad (24)$$

Para contestar esta pregunta emplearemos el teorema 13.5.1 repetidamente para evaluar los coeficientes de la ecuación 23. Primero haremos que  $x = x_0$  en esa ecuación, lo cual da

$$f(x_0) = a_0.$$

A continuación, derivando la ecuación 23 y haciendo que  $x = x_0$ , obtenemos

$$f'(x_0) = a_1.$$

Aplicando el proceso por segunda vez se obtiene

$$\frac{f''(x_0)}{2!} = a_2.$$



De hecho, el teorema 13.5.1 justifica la derivación repetida de la ecuación 23. Haciendo que  $x = x_0$  después de cada derivación se obtiene la ecuación 24. Así, los coeficientes de la ecuación 23 son exactamente los coeficientes de Taylor para  $f$  en el punto  $x = x_0$ , y por tanto la serie (23) es la serie de Taylor para la suma  $f(x)$  alrededor de  $x_0$ . Llegamos a la conclusión que toda serie de potencias convergente, obtenida ya sea mediante sustituciones, derivación, integración u otras formas, es la serie de Taylor para la función a la cual converge. Este argumento se aplica a todos los ejemplos de esta sección y de la anterior.

Un caso especial importante de este resultado aparece si la suma  $f(x)$  es cero para todos los valores de  $x$  en un intervalo abierto que contenga a  $x_0$ . Como los coeficientes de la serie (23) deben estar dados por la ecuación 24, se sigue que cada coeficiente es cero. En otras palabras, si

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = 0$$

para toda  $x$  en  $|x - x_0| < \rho$ , entonces  $a_k = 0$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ . También, si

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$$

para toda  $x$  en  $|x - x_0| < \rho$ , entonces  $a_k = b_k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 16, obtener una serie de potencias para la función dada alrededor del punto dado. Emplear los métodos de esta sección y de la anterior en lugar de la fórmula de Taylor para obtener los coeficientes. En cada caso decir si converge la serie.

1.  $f(x) = \ln(1 - x)$ ,  $x_0 = 0$

2.  $f(x) = \ln(1 - 2x)$ ,  $x_0 = 0$

3.  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $x_0 = 0$

4.  $f(x) = \ln(1 + x)$ ,  $x_0 = 1$

5.  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ ,  $x_0 = 0$

6.  $f(x) = \frac{1}{(1 + 2x)^2}$ ,  $x_0 = 0$

7.  $f(x) = \frac{1}{(1 + 2x)^3}$ ,  $x_0 = 0$

8.  $f(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$ ,  $x_0 = 0$

9.  $f(x) = \arctan \frac{x}{2}$ ,  $x_0 = 0$

10.  $f(x) = \int_0^x \arctan t \, dt$ ,  $x_0 = 0$

11.  $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2) \, dt$ ,  $x_0 = 0$

12.  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad x_0 = 0$

13.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \end{cases} \quad x_0 = 0$

14.  $f(x) = \int_0^x \frac{\sinh t}{t} \, dt$ ,  $x_0 = 0$

## 734 APROXIMACIÓN DE TAYLOR Y SERIES DE POTENCIAS

$$15. f(x) = \int_0^{x/2} \frac{\ln(1+t)}{t} dt, \quad x_0 = 0$$

$$16. f(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2} dt, \quad x_0 = 0$$

17. (a) Emplear ocho términos de la serie de Leibniz (ecuación 14), para calcular un valor aproximado de  $\pi$ .

(b) Emplear el teorema 12.6.1 para calcular cuántos términos de la ecuación 14 se deben tomar en cuenta para obtener un valor de  $\pi$  cuyo error no sea mayor que  $10^{-2}$ .

18. (a) Emplear cuatro términos de la serie (13) para calcular un valor aproximado de  $\arctan \frac{1}{5}$ . Emplear el teorema 12.6.1 para determinar una cota del error  $E$ .

(b) Sea  $\theta = \arctan \frac{1}{5}$ . Emplear la identidad

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad (i)$$

para mostrar que  $\tan 2\theta = \frac{2}{11}$ ,  $\tan 4\theta = \frac{4}{119}$ , y que

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - 4\theta\right) = -\frac{1}{239}. \quad (ii)$$

(c) A partir de la ecuación (ii), demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}. \quad (iii)$$

(d) Emplear un término de la serie (13) para calcular un valor aproximado de  $\arctan \frac{1}{239}$ . Emplear el teorema 12.6.1 para determinar una cota del error  $|E|$ .

(e) Combinar los resultados de las partes (a), (c) y (d) para obtener un valor aproximado de  $\pi$ . Determinar la cota del error  $|E|$ .

En los problemas 19 a 23 hallar una representación en forma de serie para la integral dada. Determinar el número de términos que se necesitan para aproximar el valor de la integral con un error  $E$  que no sea mayor que la magnitud especificada. Calcular un valor aproximado de la integral empleando ese número de términos.

$$19. I = \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx; \quad |E| \leq 10^{-8}$$

$$20. I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx; \quad |E| \leq 10^{-6}$$

$$21. I = \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad |E| \leq 10^{-5}$$

$$22. I = \int_0^1 \sin(x^2) dx; \quad |E| \leq 10^{-8}$$

$$23. I = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx; \quad |E| \leq 10^{-4}$$

24. Determinar el valor de la trigésima derivada de  $\sin(x)^2$  para  $x = 0$ .

25. La función

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

es la función de Bessel de la primera especie de orden cero. Determinar el radio de convergencia de la serie para  $J_0$ . Demostrar que  $J_0(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$xJ_0'' + J_0' + xJ_0 = 0.$$

Son importantes las funciones de Bessel porque esta ecuación, y otras relacionadas con ella, se presentan con frecuencia en la física matemática; por ejemplo, en problemas donde intervienen vibraciones o conducción de calor en un cilindro circular.

\*26. Consideremos la ecuación polinomial

$$r^3 + r - (2 + \epsilon) = 0 \quad (i)$$

en la cual  $|\epsilon|$  es pequeño. Cuando  $\epsilon = 0$ , la ecuación se reduce a  $r^3 + r - 2 = 0$ . En este caso las raíces son  $r = 1$  y  $r = (-1 \pm i\sqrt{7})/2$ . Supongamos que deseamos examinar cómo depende de  $\epsilon$  la raíz real cerca de  $r = 1$  cuando  $\epsilon$  es pequeña, pero no es cero. En este problema indicaremos un método útil para casos como éste.

(a) Suponer que se puede representar  $r$  mediante una serie de potencias de  $\epsilon$ , esto es

$$r = a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + \cdots, \quad (ii)$$

en la cual se deben determinar los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots$  para que se satisfaga la ecuación (i). Demostrar que

$$r^3 = a_0^3 + 3a_0^2a_1\epsilon + (3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2)\epsilon^2 + \cdots, \quad (iii)$$

- (b) Sustituir las ecuaciones (ii) y (iii) en la ecuación (i) y agrupar los coeficientes de las potencias iguales de  $\epsilon$ . Demostrar que la ecuación (i) se satisface si y sólo si

$$(a_0^3 + a_0 - 2) + (3a_0^2a_1 + a_1 - 1)\epsilon + (3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2 + a_2)\epsilon^2 + \dots = 0. \quad (iv)$$

- (c) Para que sea válida la ecuación (iv) para una  $\epsilon$  lo suficientemente pequeña, es necesario que el coeficiente de cada potencia de  $\epsilon$  sea cero. ¿Por qué? Así

$$a_0^3 + a_0 - 2 = 0, \quad 3a_0^2a_1 + a_1 - 1 = 0, \\ 3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2 + a_2 = 0, \dots \quad (v)$$

Como estamos investigando la raíz cerca de  $x = 1$ , escojamos a  $a_0 = 1$  y despejamos a continuación  $a_1$  y  $a_2$ . Nótese que se podrían determinar más coeficientes manteniendo más términos en las ecuaciones (ii), (iii) y (iv).

- \*27. En este problema mostraremos cómo hallar una serie de potencias que represente a la función que satisface la relación

$$f'(x) - xf(x) - 1 = 0 \quad (i)$$

donde  $f(0) = 1$ .

- (a) Supongamos que para  $|x| < \rho$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots \quad (ii)$$

Demostrar que cuando  $a_0 = 1$ ,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + (k+1)a_{k+1} x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} x^k, \quad (iii)$$

y que

$$xf(x) = x + a_1 x^2 + \dots + a_{k-1} x^k + \dots = x + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^k. \quad (iv)$$

- (b) Sustituir las ecuaciones (iii) y (iv) en la ecuación (i) y agrupar los coeficientes de las potencias iguales de  $x$ . Demostrar que se satisface la ecuación (i) si y sólo si

$$(a_1 - 1) + (2a_2 - 1)x + (3a_3 - a_1)x^2 + \dots + [(k+1)a_{k+1} - a_{k-1}]x^k + \dots = 0. \quad (v)$$

- (c) Para que sea válida la ecuación (v) para toda  $x$  en  $|x| < \rho$  es necesario que el coeficiente de cada potencia de  $x$  sea cero. Así,  $a_1 - 1 = 0$ ,  $2a_2 - 1 = 0$ ,  $3a_3 - a_1 = 0$ , y en general

$$(k+1)a_{k+1} - a_{k-1} = 0, \\ k = 2, 3, \dots \quad (vi)$$

A este conjunto de ecuaciones se le conoce como una **relación de recurrencia**, porque expresa a cada coeficiente en términos de uno precedente. Resolver la relación de recurrencia y con ello determinar los coeficientes de la serie (ii).

- (d) Determinar el radio de convergencia para la serie (ii).

*Sugerencia:* considerar la serie (ii) como una suma de dos series que constan de los términos con potencias impares y pares, respectivamente.

## 13.6 LA SERIE BINOMIAL Y ALGUNAS OTRAS SERIES

En álgebra elemental se aprende que el desarrollo binomial de  $(1+x)^n$ , donde  $n$  un entero positivo, es

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$



$$+ \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} x^k + \cdots + x^n. \quad (1)$$

Deseamos ahora generalizar este desarrollo para el caso en el que el exponente  $n$  no es un entero positivo. Esto nos llevará a una serie infinita muy importante, que se conoce como la serie binomial.

Considere la función

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad (2)$$

en la cual  $\alpha$  es un número real arbitrario. Construiremos la serie de Taylor para  $f(x)$  alrededor del origen. Para hacerlo, calculamos los coeficientes de Taylor  $a_k$  mediante la fórmula

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Las derivadas sucesivas de  $f$  son

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad (4)$$

y en general son

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Así, de acuerdo con la ecuación 3 tenemos que

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \alpha, \quad a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}, \dots \quad (6)$$

La fórmula general para los coeficientes es

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

En consecuencia, empleando el teorema 13.2.1, teorema de Taylor, y su corolario, podemos escribir

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (8)$$

en el cual  $R_{n+1}(x)$  está dado ya sea por la ecuación 8 o por la ecuación 9 de la sección 13.2. Si podemos demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0 \quad (9)$$

para un intervalo  $|x| < \rho$ , entonces, de acuerdo con la ecuación 8, para ese intervalo

$$\begin{aligned}
 (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots \\
 &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + \cdots \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < \rho.
 \end{aligned} \tag{10}$$

A la serie 10 se le conoce como la **serie binomial** y a sus coeficientes se les llama **coeficientes binomiales**. En el último renglón de la ecuación 10 hemos empleado la notación convencional

$$\binom{\alpha}{0} = 1; \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1 \tag{11}$$

para los coeficientes binomiales. El término superior en la expresión  $\binom{\alpha}{k}$  es el exponente de  $(1+x)$ , mientras que el número inferior indica los términos individuales de la serie.

Obsérvese que si  $\alpha$  es un entero  $n$  no negativo, entonces el último término de la serie (10) es aquél para el cual  $k = n$ . Así, la serie infinita se reduce a un polinomio de grado  $n$  que es idéntico al polinomio de la ecuación 1. En este caso no surge la cuestión de la convergencia de la serie (10).

Nuestro interés principal es para el caso en el cual  $\alpha$  no es un entero no negativo, porque no se termina la serie, sino que es una serie infinita verdadera. Una manera de demostrar que la serie (10) converge a  $(1+x)^\alpha$  para un intervalo  $|x| < \rho$  es comprobar que la ecuación 9 es válida en ese intervalo. Sucede que esto es bastante difícil; en el problema 15 se dan algunas indicaciones de cómo se podría proceder. Un método alternativo, más de acuerdo con la sección 13.5, se describe en el problema 16. Nos contentaremos aquí con una determinación del radio de convergencia de la serie binomial (10).

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| &= \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)(\alpha-k)x^{k+1}}{(k+1)!} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{k!}{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)x^k} \right| \\
 &= \left| \frac{\alpha-k}{k+1} x \right| \\
 &= \frac{k-\alpha}{k+1} |x|, \quad \text{para } k > \alpha \\
 &\rightarrow |x|, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Así, la serie (11) tiene como radio de convergencia  $\rho = 1$ . La serie converge absolutamente para  $|x| < 1$  y diverge para  $|x| > 1$ . Es más difícil investigar su comportamiento cuando  $x = \pm 1$  y se omite esta discusión.

### EJEMPLO 1

Hallar la serie de Taylor para  $f(x) = (1+x)^{-1/2}$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

La serie requerida es la serie binomial (10) con  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} x^k, \quad |x| < 1. \quad (13) \end{aligned}$$

Los coeficientes de esta serie se pueden escribir de un modo algo más sencillo como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} &= \frac{(-1)^k (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1) \cdots (\frac{1}{2}+k-1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2k-1}{2}}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!}. \quad (14) \end{aligned}$$

Empleando esta ecuación, podemos reformular la serie (13) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} x^k \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (15) \end{aligned}$$

### EJEMPLO 2

Hallar la serie de Taylor para  $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

Se obtiene la serie deseada reemplazando a  $x$  por  $-x^2$  en la ecuación 15. Estas sustituciones se describieron en la sección 13.4. Se obtiene así

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} (-x^2)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} x^{2k} \end{aligned}$$



$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (16)$$

### EJEMPLO 3

Hallar la serie de Taylor para  $f(x) = \arcsen x$  alrededor de  $x_0 = 0$ .

Recordemos que

$$\arcsen x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (17)$$

Al usar la serie (16) y al integrar término a término de acuerdo con el teorema 13.5.1, encontramos que

$$\begin{aligned} \arcsen x &= \int_0^x \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} t^{2k} \right] dt \\ &= \int_0^x dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} \int_0^x t^{2k} dt \\ &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots, \quad |x| < 1. \quad (18) \end{aligned}$$

### PROBLEMAS

En los problemas 1 a 14, hallar la serie de Taylor para la función dada alrededor del punto dado. Determinar el radio de convergencia de la serie.

1.  $f(x) = (1+x)^{1/2}, \quad x_0 = 0$
2.  $f(x) = (1+x^2)^{-1/2}, \quad x_0 = 0$
3.  $f(x) = (4+x)^{-1/2}, \quad x_0 = 0$
4.  $f(x) = (1-4x)^{-1/2}, \quad x_0 = 0$
5.  $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x), \quad x_0 = 0$

*Sugerencia:* determinar  $f'(x)$ .

6.  $f(x) = \operatorname{arc} \sinh x, \quad x_0 = 0$
7.  $f(x) = \operatorname{arc} \sen \frac{x}{a}, \quad a > 0, \quad x_0 = 0$
8.  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, \quad x_0 = 0$

$$9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}, \quad x_0 = 0$$

$$10. f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0, \quad x_0 = 0$$

$$11. f(x) = \sqrt{3+x}, \quad x_0 = 1$$

$$12. f(x) = (3-x)^{-1/2}, \quad x_0 = 2$$

$$13. f(x) = (1+x)^{2/3}, \quad x_0 = 0$$

$$14. f(x) = (8-x)^{1/3}, \quad x_0 = 0$$

### Convergencia de la serie binomial

En los problemas 15 y 16 indicaremos dos métodos para demostrar la convergencia de la serie binomial. El problema 15 implica a una investigación directa del residuo, mientras que en el problema 16 se emplea un método indirecto.

- \*15. (a) Recordemos la forma integral para el residuo en el teorema de Taylor (ecuación 8 de la sección 13.2) con  $x_0 = 0$ :

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Sea  $f(t) = (1+t)^\alpha$ ; demostrar que

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!} \times \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1-\alpha}} dt.$$

- (b) Si  $0 \leq t \leq x$ , o si  $x \leq t \leq 0$ , y si  $|x| < 1$ , demostrar que

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leq |x|.$$

*Sugerencia:* ver por separado los casos en que  $x \geq 0$  y  $x \leq 0$ .

- (c) Sea  $0 \leq x < 1$ . Emplear el resultado de la parte (b) de la expresión para  $R_{n+1}$  que se obtuvo en la parte (a), y demostrar que

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)|}{n!} x^n \times \int_0^x (1+t)^{\alpha-1} dt. \quad (i)$$

- (d) Llevando a cabo la integración que se indicó en la ecuación (i), demostrar que

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{|\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)|}{n!} \times x^n |(1+x)^\alpha - 1|. \quad (ii)$$

- (e) A partir de la ecuación (ii), deducir que  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para  $0 \leq x < 1$ .

- (f) Repetir las partes (c), (d) y (e) para el caso  $-1 < x < 0$  y demostrar que  $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  también en este caso. Por tanto, la serie binomial converge para  $|x| < 1$ .

- \*16. Sea  $f(x)$  la suma de la serie binomial

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1. \quad (i)$$

Describiremos un método para mostrar que  $f(x) = (1+x)^\alpha$ .

- (a) Al derivar la ecuación (i) y al correr el índice de la suma, demostrar que

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k+1} (k+1) x^k, \quad |x| < 1. \quad (ii)$$

- (b) Mostrar que

$$(1+x)f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \binom{\alpha}{k+1} (k+1) + \binom{\alpha}{k} k \right] x^k, \quad |x| < 1. \quad (iii)$$

- (c) Mostrar que

$$\binom{\alpha}{k+1} (k+1) + \binom{\alpha}{k} k = \binom{\alpha}{k} \alpha. \quad (iv)$$

- (d) Sustituir la ecuación (iv) en la ecuación (iii) y mostrar que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1+x}. \quad (v)$$

- (e) Despejar  $f(x)$  de la ecuación (v). Nótese, de la ecuación (i) que  $f(0) = 1$ , y emplear esta condición para evaluar la constante de integración.

- \*17. **Longitud del arco de una elipse.** Este problema generaliza los resultados de los problemas 15 y 16 de la sección 7.3. Considerar la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (i)$$

donde  $a \geq b > 0$ .

- (a) Mostrar que el perímetro de la elipse está dado por la integral

$$s = 4a \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{1/2} dt = 4aE(k) \quad (ii)$$

donde  $k^2 = 1 - (b^2/a^2)$  es el cuadrado de la excentricidad de la elipse y  $0 \leq k^2 < 1$ . La integral de la ecuación (ii) se conoce como una **integral elíptica completa**. Nótese que cuando  $k = 0$  la elipse se transforma en un círculo y que  $E(0) = \pi/2$ .

- (b) Empleando la serie binomial para el integrando, demostrar que

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \frac{k^2 \sin^2 t}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} \times \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \, dt. \\
& \times k^{2n} \sin^{2n} t \Big] dt \\
& = \frac{\pi}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} k^{2n}
\end{aligned}
\tag{iii}$$

(c) Aproximar a  $E(k)$  para  $k$  pequeña evaluando los primeros tres términos de la serie (iii), esto es, incluyendo términos hasta que aparezca  $k^4$ .

(d) Emplear el resultado del problema 39 de la sección 9.2 para mostrar que

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}.$$

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 6, determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada. Determinar si la serie converge absolutamente, condicionalmente, o diverge, en cada punto extremo.

$$\begin{aligned}
1. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(2k+1)^2} & \quad 2. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^3} \\
3. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t+1)^{2k}}{2^k} & \quad 4. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)(2k+1)} \\
5. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)}{k^2+1} x^k & \quad 6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{6^k (k!)^2} x^k
\end{aligned}$$

En los problemas 7 a 12, determinar el radio de convergencia de la serie de potencias dada.

$$\begin{aligned}
7. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! x^k}{2^k} & \quad 8. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)! x^k}{(2k+1)!} \\
9. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\sqrt{k+1}} & \quad 10. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{1+\sqrt{k}} \\
11. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k(\ln k)^2} & \quad 12. \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{k^2}\right) x^k
\end{aligned}$$

En los problemas 13 a 20 hallar la representación en serie de potencias de la función dada alrededor de  $x_0$ . Establecer el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

$$\begin{aligned}
13. f(x) &= \frac{2}{2+x^3}, \quad x_0 = 0 \\
14. f(x) &= \cos^2 \frac{x}{2}, \quad x_0 = 0 \\
15. f(x) &= \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad x_0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16. f(x) &= \frac{4x}{(1-x^2)^2}, \quad x_0 = 0 \\
17. f(x) &= \ln(a+bx), \quad x_0 = 0 \\
18. f(x) &= \int_0^x \ln(1+t) \, dt, \quad x_0 = 0 \\
19. f(x) &= (1+x)^{1/3}, \quad x_0 = 0 \\
20. f(x) &= 1/\sqrt{4-x^2}, \quad x_0 = 0
\end{aligned}$$

En los problemas 21 a 24 determinar los primeros tres términos del desarrollo en serie de potencias para la función  $f(g(x))$  alrededor de  $x_0$ :

- (a) Hallando el polinomio de Taylor apropiado;  
 (b) Sustituyendo la serie para  $g(x)$  en la serie para  $f(x)$ .

$$\begin{aligned}
21. f(x) &= \sin\left(\frac{1}{1+x}\right), \quad x_0 = 0 \\
22. f(x) &= \frac{1}{1+\ln(x+1)}, \quad x_0 = 0 \\
23. f(x) &= e^{\sec x}, \quad x_0 = 0 \\
24. f(x) &= \sin(\sin x), \quad x_0 = 0
\end{aligned}$$

En los problemas 25 a 28 determinar el residuo asociado con el polinomio de Taylor  $P_n(x)$  de la función dada alrededor de  $x_0$ .

$$\begin{aligned}
25. f(x) &= (x-1)^{1/3}, \quad x_0 = 2, \quad n = 3 \\
26. f(x) &= \tanh x, \quad x_0 = 0, \quad n = 2 \\
27. f(x) &= \ln\left(\frac{1}{1+x}\right), \quad x_0 = 0, \quad n = 3 \\
28. f(x) &= e^{(\ln x)^2}, \quad x_0 = 1, \quad n = 1
\end{aligned}$$



## 742 APROXIMACIÓN DE TAYLOR Y SERIES DE POTENCIAS

29. Determinar los primeros cuatro términos distintos de cero en el desarrollo de Taylor para  $f(x) = \tanh x$  alrededor de  $x = 0$ .

*Sugerencia:*  $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$ .

30. Sumar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \quad -1 < x < 1.$$

31. Hallar los primeros tres términos de la serie de potencias para

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{1-x} \quad \text{alrededor de } x_0 = 0$$

multiplicando las series para  $1/(1-x)$  y para  $e^{x^2}$ .

32. Hallar los primeros cuatro términos de la serie de potencias para

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{e^x} \quad \text{alrededor de } x_0 = 0$$

multiplicando las series para  $e^{-x}$  y para  $\ln(x+1)$ .

33. Demostrar que

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{3} (2n+1)}$$

*Sugerencia:* considerar el desarrollo para  $\arctan x$ .

34. ¿Es cierto que

$$\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2n+1}?$$

*Sugerencia:* considerar el desarrollo para  $\arctan x$ .

En los problemas 35 a 38, emplear el método usado en el problema 27 de la sección 13.5 para construir una solución del problema dado con valor inicial.

$$35. y' - 2xy = 0, \quad y(0) = y_0$$

$$36. y' - y = x, \quad y(0) = -1$$

$$37. y' - y - e^x = 0, \quad y(0) = 1$$

$$38. (x+1)^2 y' + (x+1)y = 1, \quad y(0) = 0.$$

En los problemas 39 a 42 emplear el método usado en el problema 26 de la sección 13.5 para aproximar el cero del polinomio dado que queda cerca del valor dado. Tomar en cuenta los términos hasta del orden  $\epsilon^2$ .

$$39. x^3 + \epsilon x - 8 = 0; \quad x_0 = 2$$

$$40. x^2 - (5 + \epsilon)x + 6 + 3\epsilon = 0, \quad x_0 = 2$$

$$41. x^3 - \epsilon x^2 - 3x + 2 + 2\epsilon = 0, \quad x_0 = -2$$

$$42. x^2 + \epsilon x - (1 + 2\epsilon) = 0, \quad x_0 = 1$$

En los problemas 43 a 46, demostrar que existe la integral dada. Mediante una representación del integrando en serie de potencias, calcular el valor aproximado de la integral con un error cuya magnitud no sea mayor que  $10^{-6}$ .

$$43. \int_0^{0.1} \frac{\tan x}{x} dx$$

$$44. \int_0^{0.25} \frac{\arcsen x}{x} dx$$

$$45. \int_0^{0.1} \frac{\ln(\cos x)}{x} dx$$

$$46. \int_0^{0.1} \frac{2^x - 1}{x} dx$$

# CÁLCULO

## Capítulo 14

### Coordenadas polares

El tema de la geometría analítica, que relaciona al álgebra con la geometría, se basa en la capacidad de identificar puntos geométricos mediante números, y viceversa. Esta correspondencia depende a su vez de la definición de un sistema de coordenadas. Hasta ahora sólo hemos empleado coordenadas rectangulares, que son las más comunes. Sin embargo, también hay muchos otros sistemas de coordenadas posibles y en algunos casos uno de ellos puede ser más conveniente que las coordenadas rectangulares. En este capítulo estudiaremos el sistema de coordenadas polares.

---

#### 14.1 EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Para establecer un sistema de coordenadas polares\* se selecciona un punto  $O$  en el plano, como el **polo**, y se selecciona un rayo, o semirrecta, que parte de  $O$  y se conoce como **eje polar** (véase figura 14.1.1). Un punto  $P$  se identifica mediante un par de números  $(r, \theta)$ , donde  $r$  es la distancia de  $O$  a  $P$  y  $\theta$  es el ángulo que el segmento de recta  $OP$  forma con el eje polar. Por convención se consideran como positivos a los ángulos que se miden en sentido levógiro, y como negativos a los que se miden en sentido dextrógiro.

---

\* El primer empleo de las coordenadas polares lo llevó a cabo Isaac Newton en *De Methodis Serierum et Fluxionum*, escrito alrededor de 1671, pero que no se publicó sino hasta 1736. La primera referencia publicada de esas coordenadas se debió a Jacob Bernoulli en 1691.

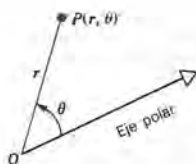


Figura 14.1.1

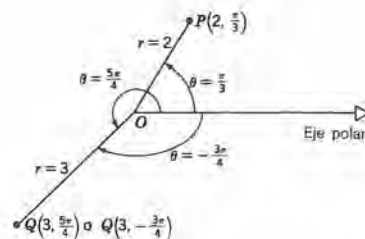


Figura 14.1.2

En la figura 14.1.2 hemos marcado varios puntos a partir de sus coordenadas polares. El punto  $P(2, \pi/3)$  está a dos unidades de distancia del polo, a lo largo del rayo, que forma un ángulo de  $\pi/3$  radianes con el eje polar. El punto  $Q(3, 5\pi/4)$  queda a tres unidades del polo y el segmento de recta  $OQ$  forma un ángulo de  $5\pi/4$  radianes con el eje polar. El mismo punto  $Q$  tiene también las coordenadas  $(3, -3\pi/4)$ . El ángulo  $-3\pi/4$  se mide en el sentido negativo dextrógiro desde el eje polar hasta el segmento de recta  $OQ$ .

También es deseable permitir que  $r$ , al igual que  $\theta$ , tome un valor negativo. Por ejemplo, en la figura 14.1.3 el punto  $Q(-3, \pi/4)$  se encuentra localizando el rayo que forma un ángulo de  $\pi/4$  radianes con el eje polar, para después medir una distancia de tres unidades desde el polo en la dirección *opuesta*. Es fácil de ver que este punto es el mismo que el punto  $Q$  de la figura 14.1.2.

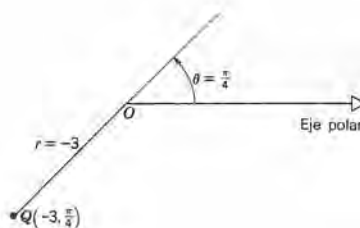


Figura 14.1.3

Normalmente, para localizar un punto a partir de sus coordenadas polares  $(r, \theta)$ , se aconseja determinar primero el rayo que forma el ángulo  $\theta$  con el eje polar. A continuación se marca la distancia  $|r|$  a lo largo del rayo, si  $r$  es positivo, o en dirección opuesta si  $r$  es negativo; así, en cada rayo hay una dirección negativa y además de una positiva.

De la discusión anterior debe quedar claro que cada par de coordenadas polares  $(r, \theta)$  determina sin ambigüedad un punto definido en el plano. Sin embargo, cada punto en el plano tiene más de un conjunto de coordenadas polares. En realidad, tiene un número infinito de ellas. Ya hemos visto que el punto  $Q$  de las figuras 14.1.2 y 14.1.3 tiene los conjuntos de coordenadas polares  $(3, 5\pi/4)$ ,  $(3, -3\pi/4)$  y  $(-3, \pi/4)$ . Otros



conjuntos serían  $(3, 5\pi/4 + 2\pi)$  y  $(3, -3\pi/4 - 2\pi)$ , en los cuales los términos  $2\pi$  y  $-2\pi$  surgen al girar un ciclo completo alrededor del polo en la dirección positiva o negativa, respectivamente. Como se puede girar más de un ciclo en cualquier dirección, todos los siguientes conjuntos de coordenadas polares se refieren al mismo punto geométrico,

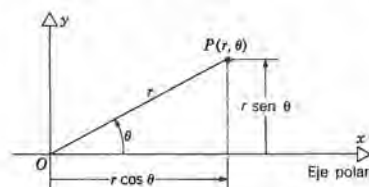
$$(r, \theta), \quad (-r, \theta \pm \pi), \quad (r, \theta \pm 2n\pi), \quad (-r, \theta \pm \pi \pm 2n\pi),$$

en los cuales  $n$  es un entero positivo.

El hecho de que un punto geométrico no corresponde a un conjunto de coordenadas polares determinado en forma única, es una diferencia importante entre los sistemas coordenados rectangular y polar. Sin embargo, si se restringe adecuadamente a  $r$  y a  $\theta$  es posible asociar un conjunto único de coordenadas polares con cada punto, excepto en el polo. Esto se hace con más frecuencia al especificar que  $r$  es positivo y que  $\theta$  pertenece a un intervalo de longitud  $2\pi$ , como por ejemplo  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Sin embargo, en el polo  $r = 0$  pero  $\theta$  está indeterminado, de manera que nada se puede hacer para eliminar esta ambigüedad allí.

## Coordenadas polares y rectangulares

En muchos casos deseamos tener tanto un sistema de coordenadas polares como uno de coordenadas rectangulares para el mismo plano. Se acostumbra reemplazar el polo del sistema polar por el origen del sistema rectangular, y escoger al eje  $x$  positivo como el eje polar, como se muestra en la figura 14.1.4. Entonces se pueden escribir inmediatamente las ecuaciones que relacionan a las coordenadas polares  $(r, \theta)$  de un punto  $P$



**Figura 14.1.4** Relación entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares.

con sus coordenadas rectangulares  $(x, y)$ . Conforme a la figura 14.1.4, y a partir de las definiciones de las funciones seno y coseno, para los puntos del primer cuadrante,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1)$$

El lector debe volver a trazar la figura 14.1.4 para colocar al punto  $P$  en cada uno de los otros tres cuadrantes, para convencerse de que las ecuaciones 1 son correctas independientemente de dónde se ubique  $P$ . Obsérvese que todos los pares de coordenadas polares que corresponden al mismo punto  $P$  dan los mismos valores de  $x$  y  $y$ . De acuerdo con las ecuaciones 1 se obtiene fácilmente

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

Se deben emplear las ecuaciones 2 con algo de cuidado, porque no determinan a  $r$  y a  $\theta$  de forma única y no todos los valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen las ecuaciones 2 son coordenadas polares del mismo punto.

Por ejemplo, tenemos el punto  $P$  cuyas coordenadas rectangulares son  $x = 3/\sqrt{2}$  y  $y = 3/\sqrt{2}$ . Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 2,

$$r = \pm 3, \quad \tan \theta = 1. \quad (3)$$

Como  $P$  está en el primer cuadrante, podemos seleccionar a  $r = 3$  y a  $\theta = \pi/4$  como coordenadas polares, y probablemente sean las que mejor se presten. Desde luego,  $r = 3$  y  $\theta = \pi/4 \pm 2n\pi$ , donde  $n$  un entero positivo, también son las coordenadas polares del punto dado. Por último, otras coordenadas del mismo punto son  $r = -3$  y  $\theta = 5\pi/4 \pm 2n\pi$ . Es importante observar que la ubicación de  $P$  marca restricciones sobre las soluciones de las ecuaciones 3. Por ejemplo, los valores de  $r = 3$  y  $\theta = 5\pi/4$ , o  $r = -3$ ,  $\theta = \pi/4$  satisfacen la ecuación 3, pero no son las coordenadas polares de  $P$ ; corresponden al punto que está a tres unidades de distancia del origen sobre la extensión de  $OP$  en el tercer cuadrante.

### Gráficas de las ecuaciones polares

Una ecuación polar tiene la forma

$$F(r, \theta) = 0 \quad (4)$$

en la cual aparecen como variables las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ . La mayor parte de las ecuaciones con que nos encontraremos estarán en la forma más simple

$$r = f(\theta). \quad (5)$$

Se dice que un punto está en la gráfica de una ecuación polar si *al menos uno de sus conjuntos de coordenadas polares satisface la ecuación*. Puede suceder que otros conjuntos de coordenadas polares del mismo punto no satisfagan la ecuación. A continuación veremos algunos ejemplos de gráficas de ecuaciones polares sencillas.

#### EJEMPLO 1

Dibujar la gráfica de la ecuación

$$\theta = \frac{2\pi}{3}. \quad (6)$$

La gráfica de esta ecuación contiene a todos los puntos cuya coordenada angular

$\theta$  es  $2\pi/3$  y cuya coordenada radial  $r$  puede ser positiva, negativa o cero. Así, la gráfica es la recta que pasa por el origen, que se ve en la figura 14.1.5.

Nótese que esta recta tiene muchas otras ecuaciones polares, como por ejemplo  $\theta = 5\pi/3$ ,  $\theta = -\pi/3$ , etcétera. Además, para cada punto de la recta, sólo uno de sus conjuntos infinitos de coordenadas polares  $(r, 2\pi/3 \pm 2n\pi)$ ,  $(-r, -\pi/3 \pm 2n\pi)$  satisface la ecuación 6. ■

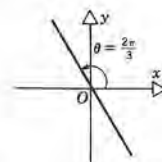


Figura 14.1.5

## EJEMPLO 2

Dibujar la gráfica de la ecuación

$$r = 4. \quad (7)$$

Esta gráfica contiene a todos los puntos cuya coordenada radial  $r$  es 4 y por tanto es el círculo con centro en el polo y con radio 4 (véase figura 14.1.6). Obsérvese que el mismo círculo también es la gráfica de la ecuación  $r = -4$ . ■

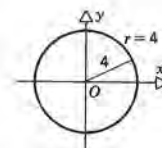


Figura 14.1.6

## EJEMPLO 3

Dibujar la gráfica de la ecuación

$$r = 4 \cos \theta. \quad (8)$$

Comenzaremos marcando algunos puntos que satisfacen la ecuación anterior. Si calculamos los valores de  $r$  de la ecuación 8, para algunos valores de  $\theta$ , obtendremos la tabla 14.1.

Tabla 14.1 Algunos valores de  $r$  y de  $\theta$  que satisfacen  $r = 4 \cos \theta$ .

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$r$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0	-2	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}$	-4

Para valores de  $\theta$  entre  $\pi$  y  $2\pi$  no obtenemos nuevos puntos de la gráfica. Por ejemplo, para  $\theta = 7\pi/6$ , tenemos  $r = -2\sqrt{3}$ , que es el mismo punto que se encontró para  $\theta = \pi/6$ . Así, la gráfica tan sólo se recorre por segunda vez cuando  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ .

En la figura 14.1.7 hemos marcado los puntos de la tabla 14.1 y los hemos unido con una curva. Esta curva parece un círculo, lo cual, desde luego, no se puede comprobar si sólo se marcan algunos puntos. Para estar seguros de la naturaleza de la gráfica de la ecuación 8 es útil emplear las ecuaciones 1 y 2 para transformar a la ecuación 8 en una ecuación en coordenadas rectangulares  $x$  y  $y$ . Sustituyendo  $x/r$  en



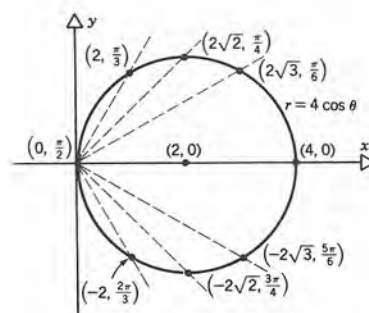


Figura 14.1.7

lugar de  $\cos \theta$ , multiplicando por  $r$  y a continuación reemplazando a  $r^2$  por  $x^2 + y^2$ , obtenemos la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4x.$$

Completamos el cuadrado en  $x$ , con lo cual llegamos a

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

o sea

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4. \quad (9)$$

Al llegar a la ecuación 9 reconocemos que corresponde a la de un círculo con centro en el punto cuyas coordenadas rectangulares son  $(2, 0)$  y cuyo radio es 2. ■

Del mismo modo que en el ejemplo 3, se puede demostrar que una ecuación con la forma

$$r = a \cos \theta, \quad (10)$$

en la cual  $a$  es una constante, tiene como gráfica un círculo con centro en el punto cuyas coordenadas rectangulares son  $(a/2, 0)$  y cuyo radio es  $|a|/2$ . El círculo queda a la derecha del eje  $y$  si  $a > 0$  y a la izquierda si  $a < 0$  (véase figura 14.1.8(a, b)).

Similarmente, la ecuación

$$r = b \sin \theta \quad (11)$$

corresponde al círculo con centro en el eje  $y$ , en el punto cuyas coordenadas rectangulares son  $(0, b/2)$  y cuyo radio es  $|b|/2$ . Queda arriba del eje  $x$  si  $b > 0$  y abajo de él si  $b < 0$  (véase figura 14.1.8(c, d)).

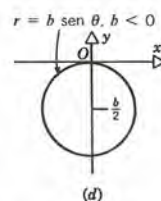
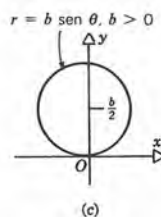
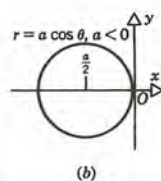
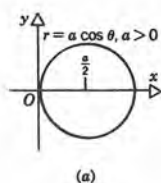


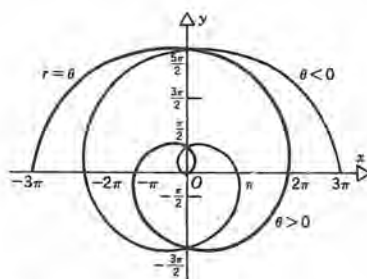
Figura 14.1.8

**EJEMPLO 4**

Dibujar la gráfica de la ecuación

$$r = \theta. \quad (12)$$

Veamos primero cuando  $\theta \geq 0$ . Si  $\theta = 0$ , entonces  $r = 0$  y por tanto la gráfica pasa por el origen. Acto seguido  $r$  crece cuando  $\theta$  crece, y entonces, para  $\theta$  positiva, la gráfica es la espiral que aparece en la curva más oscura de la figura 14.1.9. Cuando



**Figura 14.1.9**

$\theta < 0$  el ángulo  $\theta$  se mide en sentido dextrógiro y  $r$  se marca en la dirección opuesta al rayo que corresponde a  $\theta$ . Con ello obtenemos la espiral que se muestra más clara en la figura 14.1.9. La gráfica de la ecuación 12 consta de ambas curvas, la oscura y la clara, de la figura 14.1.9. La gráfica de

$$r = k\theta, \quad k \neq 0$$

es semejante y se conoce como la *espiral de Arquímedes*. ■

### **Transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa**

Si se conoce la ecuación de una curva en coordenadas rectangulares, se pueden emplear las ecuaciones 1 para transformarla a coordenadas polares. Esta transformación también se puede emplear en dirección opuesta, como ya lo hemos visto en el ejemplo 3. Como regla, para investigar una determinada curva, se debe seleccionar el sistema coordenado en el que se tenga una ecuación más sencilla.

**EJEMPLO 5**

Deducir la ecuación polar de la curva cuya ecuación en coordenadas rectangulares es

$$xy = 4. \quad (13)$$

## 750 COORDENADAS POLARES

Empleando las ecuaciones 1, obtenemos

$$(r \cos \theta)(r \sin \theta) = 4,$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta = 4,$$

o bien

$$r^2 = 8 \csc 2\theta, \quad \theta \neq \frac{n\pi}{2} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

En este ejemplo la ecuación en coordenadas rectangulares (13) es más sencilla que la correspondiente en coordenadas polares (14). ■

### EJEMPLO 6

En la sección 14.2 estudiaremos una curva, que se llama *cardioide*, cuya ecuación es

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0; \quad (15)$$

determinar la ecuación de esta curva en coordenadas rectangulares.

Empleando la primera de las ecuaciones 1 tenemos que

$$r = a \left( 1 + \frac{x}{r} \right);$$

entonces

$$r^2 = a(r + x)$$

o sea

$$r^2 - ax = ar.$$

Sustituyendo  $r$  de la primera de las ecuaciones 2 obtenemos

$$x^2 + y^2 - ax = \pm a\sqrt{x^2 + y^2},$$

y por tanto

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2). \quad (16)$$

En este caso la ecuación polar (15) es más sencilla que la ecuación rectangular (16). ■



## Las rectas en coordenadas polares

Hemos descrito ya la ecuación de una recta que pasa por el origen en coordenadas polares. Si una recta no contiene al origen, se puede deducir su ecuación en coordenadas polares transformando su ecuación en coordenadas rectangulares.

Por ejemplo, una recta paralela al eje  $x$  tiene la ecuación  $y = k$ , que se vuelve  $r \sin \theta = k$ , o sea

$$r = k \csc \theta, \quad \theta \neq n\pi \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Análogamente, la ecuación  $x = c$  de una recta paralela al eje  $y$  se transforma en

$$r = c \sec \theta, \quad \theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{2} \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por último, una recta inclinada con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , tiene una ecuación en coordenadas rectangulares que es

$$3x - 4y = 7.$$

Se deduce con facilidad su ecuación polar correspondiente empleando las ecuaciones

1. Se obtiene así

$$r(3 \cos \theta - 4 \sin \theta) = 7.$$

En todos estos casos la ecuación rectangular es más sencilla que la ecuación polar, y por tanto, es la que se prefiere usualmente.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 marcar el punto que tenga las coordenadas polares especificadas.

1.  $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

2.  $(3, \pi)$

3.  $(-3, \pi)$

4.  $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$

5.  $\left(-4, \frac{7\pi}{6}\right)$

6.  $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$

7.  $\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

8.  $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$

9.  $\left(-3, -\frac{3\pi}{4}\right)$

10.  $\left(3, -\frac{3\pi}{4}\right)$

En los problemas 11 a 18, se da un conjunto de coordenadas polares de un punto en el plano. Determinar un conjunto de coordenadas polares para el mismo punto en las cuales el signo de la coordenada  $r$  sea contrario al que se menciona. También, determinar un conjunto de coordenadas polares para el mismo punto, pero en las que el signo de la coordenada  $\theta$  sea opuesto al que aparece.

11.  $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

12.  $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$

13.  $\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$

14.  $\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$

## 752 COORDENADAS POLARES

15.  $\left(4, -\frac{\pi}{4}\right)$

16.  $(3, -\pi)$

17.  $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$

18.  $\left(-3, -\frac{2\pi}{3}\right)$

En los problemas 19 a 28 se da un conjunto de coordenadas polares de un punto en el plano. Determinar las coordenadas rectangulares del mismo punto.

19.  $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

20.  $\left(3, \frac{5\pi}{3}\right)$

21.  $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$

22.  $\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$

23.  $(5, \pi)$

24.  $\left(2, -\frac{3\pi}{2}\right)$

25.  $\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$

26.  $\left(-3, -\frac{\pi}{6}\right)$

27.  $\left(-4, \frac{4\pi}{3}\right)$

28.  $(-5, -3\pi)$

En los problemas 29 a 36 se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Determinar el conjunto de coordenadas polares del mismo punto, para el cual  $r \geq 0$ , y  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

29.  $(2\sqrt{3}, 2)$

30.  $(0, -3)$

31.  $(-2, -2\sqrt{3})$

32.  $(3, 0)$

33.  $(-2, 2\sqrt{3})$

34.  $(1, -\sqrt{3})$

35.  $(1, 2)$

36.  $(-3, -4)$

En los problemas 37 a 64 dibujar la gráfica de la ecuación polar que se da.

37.  $r = 3$

38.  $r = -2$

39.  $\theta = -\frac{\pi}{3}$

40.  $\theta = \frac{5\pi}{6}$

41.  $r = 3 \cos \theta$

42.  $r = 4 \sin \theta$

43.  $r = -6 \sin \theta$

44.  $r = -5 \cos \theta$

45.  $r = \frac{\theta}{2}$

46.  $r = \frac{|\theta|}{2}$

47.  $r = e^{|\theta|/2\pi}$

48.  $r = e^{-|\theta|/2\pi}$

49.  $r = 4 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

50.  $r = 6 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

51.  $r = 4 \sin\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right)$

52.  $r = 3 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

53.  $r = 2 \sec \theta$

54.  $r = -2 \sec \theta$

55.  $r = 2 \csc \theta$

56.  $r = -2 \csc \theta$

57.  $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 4$

58.  $r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2$

59.  $r = 3 \sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

60.  $r = 2 \sec\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

61.  $r = 2|\cos \theta|$

62.  $r = 3\left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

63.  $r|\cos \theta| = 2$

64.  $r\left|\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right| = 3$

En los problemas 65 a 68 deducir la ecuación polar del círculo que tenga las propiedades que se mencionan. En estos problemas se especifican los puntos mediante sus coordenadas rectangulares.

65. El círculo cuyo radio es 2 y que tiene su centro en  $(0, 2)$ .

66. El círculo cuyo radio es 3 y que tiene su centro en  $(-3, 0)$ .

67. El círculo cuyo radio es  $\sqrt{2}$  y que tiene su centro en  $(1, 1)$ .

68. El círculo cuyo radio es 2 y que tiene su centro en  $(-1, \sqrt{3})$ .

En los problemas 69 a 72 deducir la ecuación polar de la curva cuya ecuación rectangular se menciona.

69.  $2x - y = 5$

70.  $9x^2 + 4y^2 = 36$

71.  $x^2 - xy + y^2 = 3$

72.  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$

En los problemas 73 a 76 deducir la ecuación en coordenadas rectangulares de la curva que tiene la ecuación polar dada.

73.  $r = 2(1 - \sin \theta)$

74.  $r = 3 + \cos \theta$

75.  $r = 3 \sin 2\theta$

76.  $r^2 = 8 \cos 2\theta$

77. Deducir una fórmula para la distancia entre los puntos  $(r_1, \theta_1)$  y  $(r_2, \theta_2)$ .

## 14.2 DIBUJO DE CURVAS EN COORDENADAS POLARES

En esta sección estudiaremos algunas curvas relativamente sencillas cuyas coordenadas se expresan con mucha mayor facilidad en coordenadas polares, que en coordenadas rectangulares. Antes de examinar en forma individual a estas curvas, resulta de utilidad el observar cómo, a veces, se puede reconocer algunas propiedades de simetría en coordenadas polares.

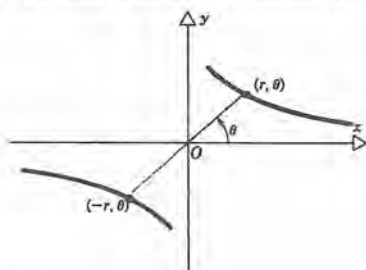
La gráfica de la ecuación

$$F(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

se dice que es **simétrica con respecto al polo** si el punto  $(-r, \theta)$  está en la gráfica siempre que  $(r, \theta)$  está (véase figura 14.2.1). Esto significa que

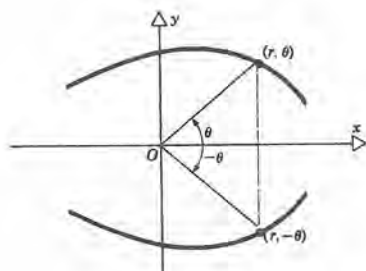
$$F(-r, \theta) = 0 \quad (2)$$

para todos los puntos  $(r, \theta)$  que satisfacen la ecuación 1.



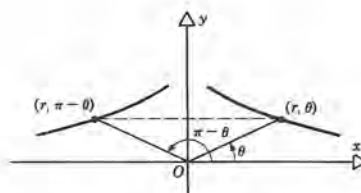
**Figura 14.2.1** Simetría con respecto al polo.

Análogamente, se dice que la gráfica de la ecuación 1 es **simétrica con respecto a la recta  $\theta = 0$**  (el eje  $x$ ) si el punto  $(r, \theta)$  está en la gráfica siempre que el punto  $(r, -\theta)$  está, como se ve en la figura 14.2.2. En este caso



**Figura 14.2.2** Simetría con respecto a  $\theta = 0$ .



Figura 14.2.3 Simetría con respecto a  $\theta = \pi/2$ .

$$F(r, -\theta) = 0 \quad (3)$$

para todos los puntos  $(r, \theta)$  que satisfacen la ecuación 1.

Por último, se dice que la gráfica de la ecuación 1 es **simétrica con respecto a la recta  $\theta = \pi/2$**  (el eje  $y$ ) si el punto  $(r, \pi - \theta)$  está en la gráfica siempre que el punto  $(r, \theta)$  está (véase figura 14.2.3). Así,

$$F(r, \pi - \theta) = 0 \quad (4)$$

para todos los puntos  $(r, \theta)$  que satisfacen la ecuación 1.

En los tres casos se comprueba la simetría reemplazando  $r$  por  $-r$ , o  $\theta$  por  $-\theta$ , o  $\theta$  por  $\pi - \theta$ , respectivamente. Si se mantiene inalterable la ecuación original después de llevar a cabo la sustitución, entonces la gráfica tiene la propiedad correspondiente de simetría. Sin embargo, se necesita tener cierto cuidado, debido a la ambigüedad de la representación de un punto en el plano mediante sus coordenadas polares. Como consecuencia, una curva puede tener una propiedad de simetría sin satisfacer una de las correspondientes ecuaciones 2, 3 ó 4. Como ejemplo tenemos la gráfica de la ecuación 15 que se estudia más adelante en esta sección.

El hecho de que un punto dado tenga muchos pares de coordenadas polares nos conduce al hecho relacionado de que una curva dada puede tener ecuaciones diferentes, pero equivalentes. Por ejemplo, las coordenadas  $(r, \theta)$  y  $(-r, \theta + \pi)$  corresponden al mismo punto. En consecuencia, la gráfica de

$$r = f(\theta)$$

es igual que la gráfica de

$$-r = f(\theta + \pi)$$

o que la gráfica de

$$r = -f(\theta + \pi).$$

Un poco más adelante examinaremos unos ejemplos específicos.

### Cardioides

Considere la ecuación

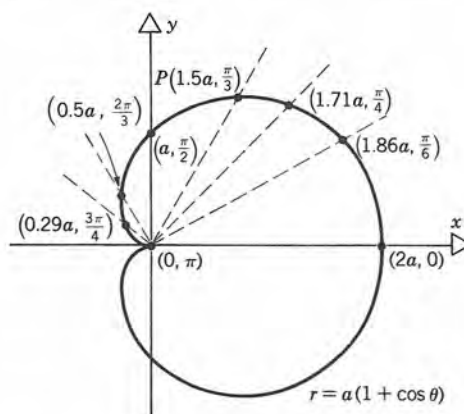
$$r = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0. \quad (5)$$

Como  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ , se sigue que la gráfica es simétrica con respecto a la recta  $\theta = 0$ . Por esto sólo necesitamos hacer el dibujo de la gráfica para  $0 \leq \theta \leq \pi$ , para después reflejarla con respecto a la recta  $\theta = 0$ . Por tanto, los valores de  $r$  que da la ecuación 5 decrecen uniformemente desde  $2a$  hasta 0. En la tabla 14.2 se muestran

**Tabla 14.2** Algunos valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen la ecuación  $r = a(1 + \cos \theta)$

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$r$	$2a$	$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$ $\cong 1.86a$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ $\cong 1.71a$	$\frac{3}{2}a$ $= 1.5a$	$a$	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$ $\cong 0.29a$	0

algunos pares de valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen la ecuación 15. Si se marcan esos puntos y se unen con una curva suave se obtiene la gráfica de la figura 14.2.4. Esta curva se conoce como *cardioide*, debido a su forma de corazón. El parámetro  $a$  es un factor de proporcionalidad que determina el tamaño de la figura.



**Figura 14.2.4**

Hay algunas otras ecuaciones que representan también cardioides. Por ejemplo, si reemplazamos  $(r, \theta)$  por  $(-r, \theta + \pi)$ , como se dijo antes, la ecuación 5 se transforma en

$$-r = a[1 + \cos(\theta + \pi)], \quad a > 0,$$

o sea

$$r = a(-1 + \cos \theta), \quad a > 0. \quad (6)$$

La gráfica de la ecuación 6 es igual a la de la ecuación 5. Desde luego, para cada punto

de la curva, las coordenadas polares que cumplen con la ecuación 5 son distintas de las coordenadas polares que satisfacen la ecuación 6.

Si cambiamos el signo del término del coseno, en las ecuaciones 5 y 6, obtendremos

$$r = a(1 - \cos \theta), \quad r = a(-1 - \cos \theta), \quad (7)$$

respectivamente. Cada una de esas ecuaciones tiene la gráfica que aparece en la figura 14.2.5.

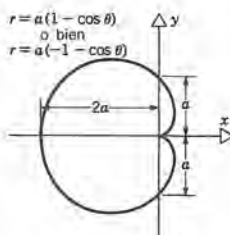


Figura 14.2.5

Por último, si se reemplaza  $\cos \theta$  por  $\sin \theta$  en las ecuaciones 5, 6 y 7, se obtienen las ecuaciones

$$r = a(1 + \sin \theta), \quad r = a(-1 + \sin \theta) \quad (8)$$

y

$$r = a(1 - \sin \theta), \quad r = a(-1 - \sin \theta) \quad (9)$$

cuyas gráficas también son cardioides. Cada una de las ecuaciones 8 tiene la gráfica que muestra la figura 14.2.6, mientras que cada una de las ecuaciones 9 tiene la gráfica que muestra la figura 14.2.7. La simetría de las gráficas con respecto al eje vertical procede del hecho de que  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ , y por tanto se satisface la condición (4).

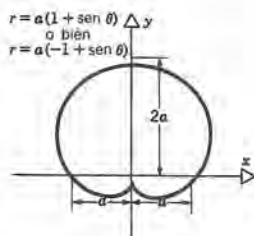


Figura 14.2.6

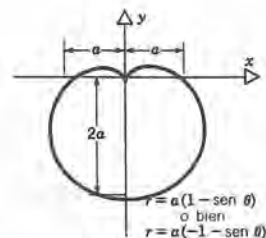


Figura 14.2.7



## Caracoles

La clase de curvas llamada *caracoles*, es una generalización de las cardioides. Hay dos tipos distintos de caracoles y daremos un ejemplo de cada uno.

Primeramente, consideremos la ecuación

$$r = a(1 + 0.5 \cos \theta), \quad a > 0. \quad (10)$$

De nuevo, la gráfica es simétrica con respecto a la recta  $\theta = 0$  y por tanto sólo necesitaremos considerar la parte de la gráfica de  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Cuando  $\theta$  pasa de 0 a  $\pi$ , el valor de  $r$  disminuye desde  $3a/2$  hasta  $a/2$ , como se indica en la tabla 14.3. Trazando

**Tabla 14.3** Algunos valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen la ecuación  $r = a(1 + 0.5 \cos \theta)$

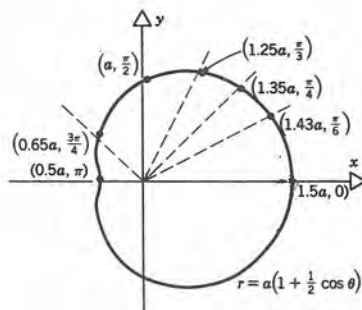
$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$r$	$\frac{3a}{2}$	$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a$ $\cong 1.43a$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)a$ $\cong 1.35a$	$\frac{5a}{4}$	$a$	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)a$ $\cong 0.65a$	$\frac{a}{2}$

una curva suave que pase por esos puntos y reflejándola a continuación con respecto a la recta  $\theta = 0$ , obtendremos la gráfica que se muestra en la figura 14.2.8.

A continuación consideremos la ecuación

$$r = a(1 + 1.5 \cos \theta), \quad a > 0. \quad (11)$$

Una vez más, debido a la simetría con respecto a la recta  $\theta = 0$ , es suficiente determinar la gráfica para  $0 \leq \theta \leq \pi$ . En la tabla 14.4 se muestran algunos valores de  $r$  y  $\theta$ . La diferencia más importante entre este caso y el anterior es que ahora se tiene un valor



**Figura 14.2.8**

**Tabla 14.4** Algunos valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen la ecuación  $r = a(1 + 1.5 \cos \theta)$ .

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$r$	$\frac{5a}{2}$	$\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)a$	$\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)a$	$\frac{7a}{4}$	$a$	$\frac{a}{4}$	$\left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)a$	$\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)a$	$-\frac{a}{2}$
		$\cong 2.30a$	$\cong 2.06a$				$\cong -0.06a$	$\cong -0.30a$	

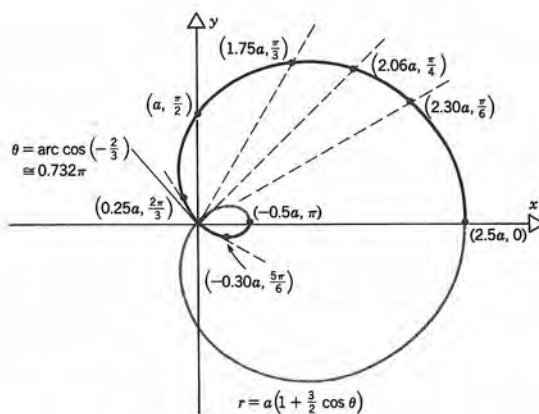
de  $\theta$  en el segundo cuadrante, para el cual  $\cos \theta = -\frac{2}{3}$ , y para este valor de  $\theta$ , se debe cumplir que  $r = 0$ . Cuando  $\theta$  sigue creciendo,  $r$  se hace negativo y tiene el valor  $a/2$  cuando  $\theta = \pi$ . Así, para  $0 \leq \theta \leq \pi$  obtenemos la gráfica que aparece con una línea más oscura en la figura 14.2.9. El resto de la gráfica, la parte más clara, se obtiene por simetría con respecto a la recta  $\theta = 0$ . Obsérvese que la gráfica tiene un rizo interior.

Las ecuaciones 10 y 11 son casos especiales de las ecuaciones más generales

$$r = a(1 + b \cos \theta), \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (12)$$

El tamaño del caracol que da la ecuación 12 está determinado por el parámetro  $a$  y su forma por el parámetro  $b$ . Para  $0 < b < 1$ , el caracol se asemeja al de la figura 14.2.8. Cuando  $b \rightarrow 0$ , el caracol tiende a un círculo  $r = a$ . Cuando  $b \rightarrow 1$ , se hace más y más semejante a la cardiode de la ecuación 5, que se ve en la figura 14.2.4. Para  $b > 1$  la gráfica de la ecuación 12 tiene un rizo interior, semejante al de la figura 14.2.9. Este rizo aumenta de tamaño cuando aumenta  $b$  pero nunca interseca a la parte exterior del caracol.

Los caracoles se pueden obtener con orientaciones diferentes si se modifica la ecuación 12 como en la discusión dada para las cardioides.



**Figura 14.2.9**

### Curvas con pétalos

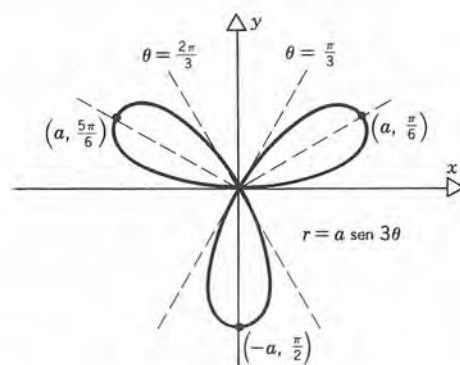
Consideremos la gráfica de la ecuación

$$r = a \sen 3\theta, \quad a > 0. \quad (13)$$

Como  $|\sen 3\theta| \leq 1$ , entonces  $|r| \leq a$ . Cuando  $\theta$  pasa por el intervalo de 0 a  $\pi/3$ ,  $3\theta$  va de 0 a  $\pi$ , y  $\sen 3\theta$  aumenta primero desde 0 hasta 1 y a continuación disminuye de nuevo hasta 0 (véase tabla 14.5). Para esta variación de  $\theta$  la gráfica es el rizo que aparece en el primer cuadrante, como se ve en la figura 14.2.10. Como la función seno es simétrica con respecto a  $\pi/2$ , el rizo es simétrico con respecto al rayo  $\theta = \pi/6$ ; la gráfica interseca a este rayo en el punto  $(a, \pi/6)$ .

**Tabla 14.5** Algunos valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen la ecuación  $r = a \sen 3\theta$

$\theta$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$r$	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$ $\cong 0.71a$	$a$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$ $\cong 0.71a$	0



**Figura 14.2.10**

De manera semejante, los valores de  $\theta$  en el intervalo  $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$  producen valores negativos de  $r$  y dan lugar al rizo del tercer y cuarto cuadrantes. Por último, el intervalo  $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$  produce el rizo del segundo cuadrante. Debido a la simetría y al carácter periódico de la función seno, los tres rizos son congruentes. Para valores de  $\theta$  fuera de  $0 \leq \theta \leq \pi$  se demuestra directamente que se vuelve a trazar la misma curva.

La curva de la figura 14.2.10 es un ejemplo de una curva con pétalos. En general, las ecuaciones de las curvas con pétalos son

$$r = a \sen n\theta \quad \text{o} \quad r = a \cos n\theta \quad (14)$$

en las cuales  $a \neq 0$ , y  $n$  es un entero mayor que uno.\* La magnitud de  $a$  determina la longitud de los pétalos, mientras que  $n$  determina su número y anchura. Si  $n$  es impar, entonces hay  $n$  pétalos, equidistantes, como en el caso que acabamos de ver. Si  $n$  es par, se puede demostrar que habrá  $2n$  pétalos, nuevamente equidistantes.

Para ver el efecto de un valor par de  $n$ , tenemos la ecuación

\* Si  $n = 1$ , la gráfica es un círculo tal como se estudió en la sección 14.1.

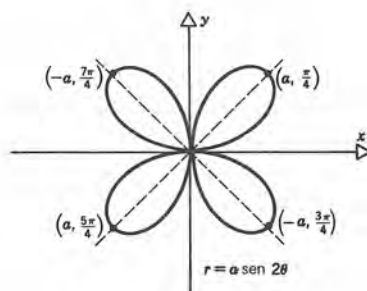


$$r = a \operatorname{sen} 2\theta. \quad (15)$$

Cuando  $\theta$  pasa de 0 a  $\pi/2$ ,  $2\theta$  va de 0 a  $\pi$ , y  $\operatorname{sen} 2\theta$  pasa de 0 a 1 y regresa a 0 (véase tabla 14.6). Esto da el pétalo que aparece en el primer cuadrante de la figura 14.2.11.

**Tabla 14.6** Algunos valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen la ecuación  $r = a \operatorname{sen} 2\theta$

$\theta$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$r$	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$ $\cong 0.71a$	$a$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$ $\cong 0.71a$	0



**Figura 14.2.11**

Análogamente, para  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ , obtenemos el pétalo en el cuarto cuadrante, ya que  $r$  es negativo;  $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ , y  $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$  dan los otros dos pétalos.

Obsérvese que la gráfica de la figura 14.2.11 es simétrica con respecto al origen y con respecto a las rectas  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$ , y sin embargo la ecuación 15 no satisface a ninguna de las condiciones de simetría (1), (2) o (3). Como se indicó antes, este caso es consecuencia de la multiplicidad de los pares de coordenadas polares para cada punto. Por ejemplo, el punto  $P(a, \pi/4)$  en el primer cuadrante queda en la curva y sus coordenadas satisfacen la ecuación 15. El punto  $Q$ , cuyas coordenadas son  $(-a, \pi/4)$  también queda en la curva. Sin embargo, las coordenadas de  $Q$  que satisfacen la ecuación 15 son  $(a, 5\pi/4)$  y no  $(-a, \pi/4)$ .

## Lemniscatas

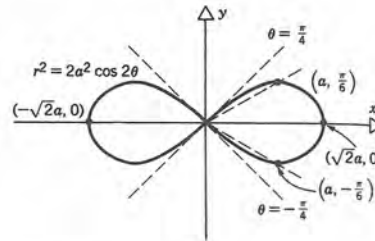
Consideremos ahora la ecuación

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta, \quad (16)$$

en la cual  $a > 0$ . Como esta ecuación satisface cada una de las condiciones de simetría (2), (3) y (4), se infiere que su gráfica es simétrica con respecto al polo y con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ . Además,  $r^2 > 0$ , y por tanto sólo necesitamos tomar en cuenta valores de  $\theta$  para los cuales  $\cos 2\theta \geq 0$ . Por ejemplo, es suficiente considerar al intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/4$  (véase tabla 14.7). Así,  $r$  varía desde  $\sqrt{2}a$  hasta 0 cuando  $\theta$  pasa por el intervalo de 0 a  $\pi/4$ . Con ello se produce la mitad superior del rizo del lado derecho de la figura 14.2.12. La simetría con respecto a  $\theta = 0$  produce la mitad inferior de este rizo, y la simetría con respecto al origen produce el rizo del lado izquierdo de la figura mencionada. A la gráfica de la ecuación 16 se le llama *lemniscata*.

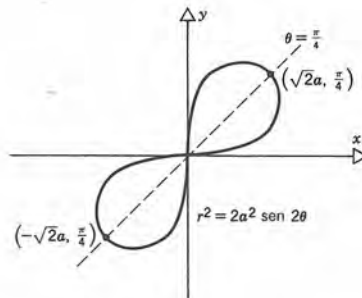
**Tabla 14.7** Algunos valores de  $r$  y  $\theta$  que satisfacen la ecuación  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

$\theta$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$r^2$	$2a^2$	$\sqrt{3} a^2$	$a^2$	0
$r$	$\sqrt{2} a$	$\sqrt[4]{3} a$	$a$	0
	$\cong 1.41a$	$\cong 1.32a$		



**Figura 14.2.12**

Si se sustituye  $\cos 2\theta$  por  $\sin 2\theta$  en la ecuación 16, entonces la gráfica será una lemniscata congruente con el de la figura 14.2.12, girado un ángulo de  $\pi/4$  radianes (véase figura 14.2.13).



**Figura 14.2.13**

### Intersecciones de curvas en coordenadas polares

Geoméricamente, un punto de la intersección de dos curvas es un punto que pertenece a ambas. Desde el punto de vista analítico, en coordenadas rectangulares, siempre se pueden localizar los puntos de intersección, al menos en principio, resolviendo en forma simultánea las ecuaciones que definen a las dos curvas. En coordenadas polares se hace el caso más complicado, por el hecho de que un punto de intersección dado tiene muchos conjuntos de coordenadas polares. Cuando menos uno de ellos debe satisfacer la ecuación de una de las curvas, y por lo menos uno de ellos debe satisfacer la de la otra curva. Pero puede suceder que no haya un solo conjunto de coordenadas que satisfaga ambas ecuaciones. Si sucede esto, entonces no se podrá hallar el punto de intersección al resolver simultáneamente las dos ecuaciones.

Esta dificultad se puede mostrar en algunos casos muy sencillos. Consideremos, por ejemplo, las dos ecuaciones

$$r = 4, \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \quad (17)$$

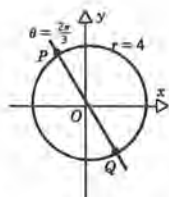


Figura 14.2.14

cuyas gráficas son, respectivamente, el círculo y la recta que aparecen en la figura 14.2.14. Es claro que hay dos puntos de intersección, que se representan en la figura mediante  $P$  y  $Q$ . La solución simultánea de las ecuaciones 17 da las coordenadas  $(4, 2\pi/3)$  de  $P$ ;  $Q$  puede tener las coordenadas  $(4, -\pi/3)$ , o bien  $(-4, 2\pi/3)$ , pero no hay coordenadas de  $Q$  que satisfagan las ecuaciones 17.

Cuando se buscan puntos de intersección de curvas representadas mediante ecuaciones en coordenadas polares, realmente se deben resolver en forma simultánea las ecuaciones, si es posible. Sin embargo, también se debe tener en cuenta la existencia posible de otros puntos de intersección que no se puedan localizar en esta forma. Si existen esos puntos, usualmente ayudará mucho hacer un buen dibujo para localizarlos. Para obtenerlos en forma algebraica podrá ser necesario cambiar una o las dos ecuaciones a una forma diferente, reemplazando  $(r, \theta)$  por un par equivalente de coordenadas polares.

Para tener una representación de la situación, será útil considerar a  $\theta$  como una variable de tiempo y a las dos curvas como las trayectorias que siguen dos partículas en movimiento. Si un punto de intersección tiene las mismas coordenadas en ambas curvas, entonces las dos partículas chocan ahí; alcanzan el mismo punto del plano al mismo tiempo. Si un punto de intersección tiene coordenadas distintas para las dos curvas, entonces las dos partículas pasan por ese punto en tiempos distintos, y por tanto, no chocan.

### EJEMPLO 1

Determinar los puntos de intersección de la cardioide

$$r = 1 + \sen \theta \quad (18)$$

y el círculo

$$r = 3 \sen \theta. \quad (19)$$

En la figura 14.2.15 aparecen las dos curvas. Si eliminamos a  $r$  de las ecuaciones 18 y 19, obtendremos

$$1 + \sen \theta = 3 \sen \theta$$

de donde se deduce que

$$\sen \theta = \frac{1}{2}. \quad (20)$$



Así, en el intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $\theta$  adquiere los valores  $\theta = \pi/6$  y  $\theta = 5\pi/6$ . El valor correspondiente de  $r$  es  $r = \frac{3}{2}$ . Estos resultados nos dan los dos puntos de intersección  $(3/2, \pi/6)$  y  $(3/2, 5\pi/6)$ , que en la figura 14.2.15 se identifican con  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Examinando la figura también se ve que el polo es un punto de intersección, pero no se puede encontrar resolviendo las ecuaciones 18 y 19. Para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  las coordenadas del polo son  $(0, 3\pi/2)$  en la cardioide, mientras que en el círculo sus coordenadas son  $(0, 0)$  y  $(0, \pi)$ . ■

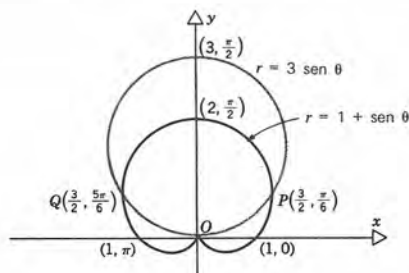


Figura 14.2.15

## EJEMPLO 2

Determinar los puntos de intersección del círculo

$$r = \cos \theta \quad (21)$$

con la curva con pétalos

$$r = \sqrt{3} \cos 2\theta. \quad (22)$$

Las curvas se presentan en la figura 14.2.16. Por eliminación de  $r$  de las ecuaciones 21 y 22, llegamos a

$$\sqrt{3} \cos 2\theta - \cos \theta = 0.$$

Mediante la identidad  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$  obtenemos

$$2\sqrt{3} \cos^2 \theta - \cos \theta - \sqrt{3} = 0, \quad (23)$$

que es una ecuación cuadrática en  $\cos \theta$ . La fórmula del discriminante da la siguiente solución:

$$\cos \theta = \frac{1 \pm 5}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

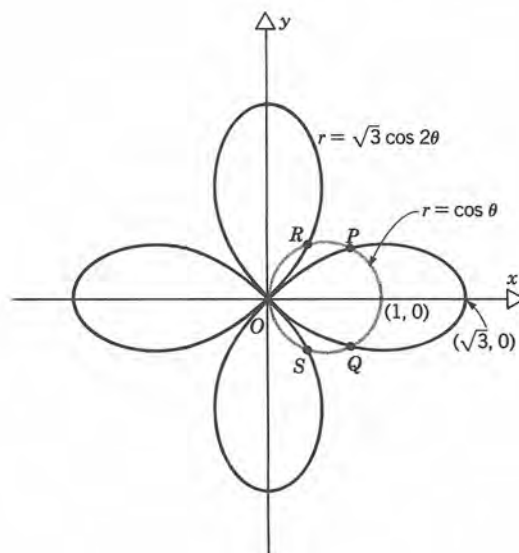


Figura 14.2.16

Para el intervalo  $0 \leq \theta < 2\pi$ , la primera solución,  $\cos \theta = \sqrt{3}/2$  corresponde a  $\theta = \pi/6$  y a  $\theta = 11\pi/6$ , con el valor asociado  $r = \sqrt{3}/2$ . Estos resultados determinan los puntos  $P$  y  $Q$  respectivamente, en la figura 14.2.16.

La segunda solución  $\cos \theta = -\sqrt{3}/3 \approx -0.57735$  produce valores de  $\theta$  en el segundo y tercer cuadrantes, dados por  $\theta \approx 2.18628$  radianes y  $\theta \approx 4.09691$  radianes. El valor correspondiente de  $r$  es  $-\sqrt{3}/3$ . Estos resultados dan los puntos  $S$  y  $R$  de la figura 14.2.16.

Sin embargo, nótese que el intervalo  $0 \leq \theta < 2\pi$  corresponde a dos recorridos alrededor del círculo  $r = \cos \theta$ . Los puntos  $P$  y  $S$  quedan en el primer ciclo, mientras que  $R$  y  $Q$  en el segundo. Si nos restringimos a un recorrido alrededor del círculo, pidiendo que  $\theta$  quede en el intervalo  $0 \leq \theta < \pi$ , por ejemplo, debemos entonces seleccionar las coordenadas  $(\sqrt{3}/3, 0.95532)$  para  $R$  y las coordenadas  $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$  para  $Q$ . En este caso los puntos  $R$  y  $Q$  tienen coordenadas distintas en la curva con pétalos y en el círculo.

Por último, debemos notar que el polo también es un punto de intersección, aunque no se obtiene al resolver las ecuaciones 21 y 22. Para  $0 \leq \theta < 2\pi$  el polo tiene coordenadas  $(0, \pi/2)$  y  $(0, 3\pi/2)$  en el círculo, mientras que para la curva con pétalos las coordenadas son  $(0, \pi/4)$ ,  $(0, 3\pi/4)$ ,  $(0, 5\pi/4)$  y  $(0, 7\pi/4)$ . ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 16 hacer un dibujo de la gráfica de la ecuación dada e identificar el tipo de curva.

1.  $r = 2 - 2 \cos \theta$
3.  $r = 1 - 2 \cos \theta$

2.  $r = 2 + \cos \theta$
4.  $r = 3 \cos \theta$

5.  $r = -3 + 3 \operatorname{sen} \theta$       6.  $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$   
 7.  $r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$       8.  $r = 2 + 3 \operatorname{sen} \theta$   
 9.  $r = 3 + 3 \operatorname{sen} \theta$       10.  $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$   
 11.  $r^2 = 4 \cos 2\theta$       12.  $r = 3 - 2 \operatorname{sen} \theta$   
 13.  $r = 4 \operatorname{sen} 4\theta$       14.  $r = 3 \cos 5\theta$   
 15.  $r = 2 - 4 \operatorname{sen} \theta$       16.  $r^2 = -4 \cos 2\theta$

En los problemas 17 a 29 determinar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones dadas.

17.  $r = 4(1 + \cos \theta)$ ,  $r = 6$   
 18.  $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$ ,  $r = \operatorname{sen} \theta$   
 19.  $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ ,  $r = 3 \cos \theta$   
 20.  $r = 4 \cos 2\theta$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$   
 21.  $r = 2 - \cos \theta$ ,  $r = 1 + \cos \theta$   
 22.  $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ ,  $r = 2 \operatorname{sen} \theta$   
 23.  $r = 2 + 3 \cos \theta$ ,  $\theta = \frac{2\pi}{3}$   
 24.  $r = 2 + 5 \cos \theta$ ,  $r = \cos \theta$   
 25.  $r = 2 \operatorname{sen} 3\theta$ ,  $r = \sqrt{2}$ , primer cuadrante  
 26.  $r^2 = 2 \cos 2\theta$ ,  $r = \cos \theta$   
 27.  $r = \frac{1}{\frac{3}{2} - \operatorname{sen} \theta}$ ,  $r = \frac{3}{2} - \operatorname{sen} \theta$   
 28.  $r = 2 + 2 \cos \theta$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$   
 29.  $r = 1 + 2 \cos \theta$ ,  $r = 4 \cos \theta$

### Secciones cónicas

En las secciones 5.2 a 5.4 estudiamos las secciones cónicas en un sistema de coordenadas rectangulares. En los problemas 30 a 32 trataremos la representación de las secciones cónicas, que no sean círculos ni rectas, en coordenadas polares. Sea un punto fijo  $F$  llamado foco y una recta fija  $l$ , que no contenga a  $F$ , llamada directriz. Una sección cónica es el conjunto de los puntos  $P$  para los cuales la razón de la distancia al foco  $F$  con respecto a la distancia a la directriz  $l$  es constante. La razón constante es la excentricidad y se representa mediante  $e$ . Si  $0 < e < 1$ , la sección cónica es una elipse; si  $e = 1$ , es una parábola, y si  $e > 1$  es una hipérbola. En los problemas 30 y 31 indicaremos cómo deducir las ecuaciones normales de las secciones cónicas en coordenadas polares.

30. Establecer un sistema de coordenadas polares en el que el polo coincida con el foco y el eje polar sea perpendicular a la directriz. Suponer que la directriz está a la izquierda del polo y a una distancia  $p$  de él (véase figura 14.2.17). La definición de una sección

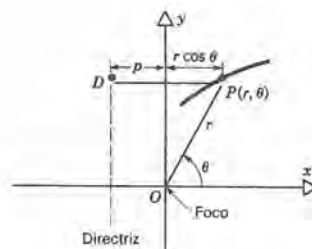


Figura 14.2.17

cónica dice que

$$|OP| = e|DP|. \quad (i)$$

- (a) Demostrar que la ecuación (i) requiere que

$$r = e(r \cos \theta + p)$$

y por tanto que

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}. \quad (ii)$$

- (b) Suponer ahora que la directriz está a una distancia  $p$  a la derecha del foco, pero que, aparte de ello, no cambia la situación (véase figura 14.2.18). De-

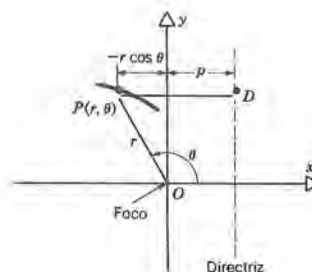


Figura 14.2.18



## 766 COORDENADAS POLARES

mostrar que en este caso la ecuación de una sección cónica es

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}. \quad (iii)$$

*Nota:* Las elipses y las hipérbolas tienen dos focos y dos directrices, y satisfacen tanto la ecuación (ii) como la (iii), dependiendo de qué foco se coloque en el polo. Los focos y las directrices están en lados opuestos a, y equidistantes de, el centro de la cónica. Una parábola sólo tiene un foco y una directriz, y por tanto sólo puede satisfacer una de las ecuaciones (ii) y (iii), dependiendo de si se abre hacia la izquierda o hacia la derecha.

31. (a) Suponer que el foco está en el polo y que la directriz es paralela al eje polar y que se encuentra a una distancia  $p$  por debajo de él. Demostrar que la ecuación de una sección cónica es

$$r = \frac{ep}{1 - e \sin \theta}. \quad (i)$$

- (b) Suponer ahora que la directriz es paralela al eje polar y que se encuentra a una distancia  $p$  arriba de él. Demostrar que la ecuación de una sección cónica es

$$r = \frac{ep}{1 + e \sin \theta}. \quad (ii)$$

32. Convertir la ecuación polar

$$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta} \quad (i)$$

de una sección cónica en una ecuación en coordenadas rectangulares.

- (a) Si  $0 < e < 1$ , demostrar que la ecuación resultante se puede llevar a la forma de la ecuación de una elipse

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (ii)$$

en la cual

$$h = \frac{pe^2}{1 - e^2},$$

$$a^2 = \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{p^2 e^2}{1 - e^2}. \quad (iii)$$

- (b) Si  $e > 1$ , demostrar que la ecuación resultante se puede llevar a la forma de la ecuación de una hipérbola

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (iv)$$

en la cual  $h$  y  $a^2$  están dadas por la ecuación (iii), y

$$b^2 = \frac{p^2 e^2}{e^2 - 1}. \quad (v)$$

- (c) Si  $e = 1$ , demostrar que la ecuación resultante se puede llevar a la forma de la ecuación de una parábola

$$x - h = \alpha y^2, \quad (vi)$$

en la cual

$$h = -\frac{p}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2p}. \quad (vii)$$

En los problemas 33 a 40 hacer un dibujo de la gráfica de la sección cónica que describe la ecuación dada. También determinar su excentricidad y ubicar sus focos y directrices.

$$33. r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$$

$$34. r = \frac{6}{1 + 2 \cos \theta}$$

$$35. r = \frac{4}{3 + 2 \cos \theta}$$

$$36. r = \frac{4}{1 - \cos \theta}$$

$$37. r = \frac{15}{2 - 3 \cos \theta}$$

$$38. r = \frac{6}{3 - 2 \sin \theta}$$

$$39. r = \frac{2}{1 + \sin \theta}$$

$$40. r = \frac{6}{1 + 3 \sin \theta}$$

41. Una sección cónica cuya excentricidad es  $\frac{3}{2}$  tiene un foco en el polo y  $x = 2$  es la directriz correspondiente. Escribir la ecuación de esta sección cónica y ubicar el otro foco y la otra directriz.

42. Una sección cónica tiene un foco en el polo y sus directrices son  $x = -2$  y  $x = 8$ . Determinar el otro foco y la excentricidad.

## 14.3 ÁREA Y LONGITUD DE ARCO EN COORDENADAS POLARES

En esta sección discutiremos el empleo de las coordenadas polares en dos aplicaciones importantes, que son el cálculo del área de una región dada y la longitud del arco de una curva dada. Hay un tercer punto de importancia, que es el determinar la dirección de una curva descrita por una ecuación polar, que se examina en el problema 32.

### Área

El problema básico que estamos describiendo es el de calcular el área de una región  $R$  como la que se ve en la figura 14.3.1: es una región acotada por la gráfica de una función continua  $r = f(\theta)$  y por los rayos  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$ . Esto corresponde al problema, en coordenadas rectangulares, de calcular el área de la región comprendida entre el eje  $x$  y la gráfica de una función continua  $y = f(x)$ , y entre las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ . Como hemos visto en el capítulo 6, este último problema se resuelve mediante la integral definida

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

También deseamos deducir una integral análoga en coordenadas polares que nos dé el área de la región  $R$  que se indica en la figura 14.3.1.

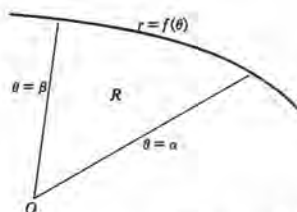


Figura 14.3.1

Recordemos primero la fórmula para el área  $A$  de un sector circular de radio  $r$  y ángulo central  $\theta$ , como se ve en la figura 14.3.2. Esta área es

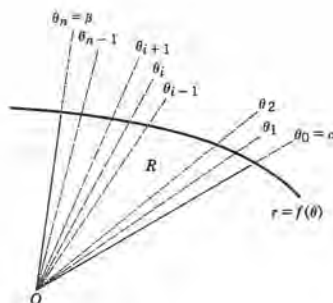
$$A = (\pi r^2) \left( \frac{\theta}{2\pi} \right) = \frac{r^2 \theta}{2}. \quad (2)$$



Figura 14.3.2

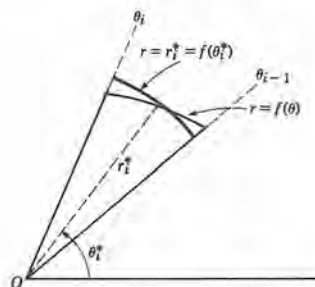
En el término que aparece en medio de la ecuación 2, el primer factor es el área de un círculo completo de radio  $r$ , mientras que el segundo factor es la proporción del círculo que está en el sector dado.

A continuación procedemos como en el capítulo 6, a formar una partición  $\Delta = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\}$  del intervalo  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , donde  $\theta_0 = \alpha$  y  $\theta_n = \beta$ . Esto corresponde a la



**Figura 14.3.3** Una partición de la región  $R$ .

subdivisión de la región  $R$  en cortes angostos como se ve en la figura 14.3.3. A continuación enfocaremos nuestra atención a estimar el área de un corte típico de éstos, por ejemplo, el que va desde  $\theta_{i-1}$  hasta  $\theta_i$ , que se ve en la figura 14.3.4. Seleccionaremos



**Figura 14.3.4**

un valor de  $\theta$  en el intervalo  $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ , lo llamaremos  $\theta_i^*$  y sea

$$r_i^* = f(\theta_i^*). \quad (3)$$

Aproximaremos el área de la porción de  $R$  comprendida entre  $\theta_{i-1}$  y  $\theta_i$  mediante el área del sector circular de radio  $r_i^*$ . De acuerdo con la ecuación 2, el área  $\Delta A_i$  de este sector circular es

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= (\pi r_i^{*2}) \left( \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} r_i^{*2} \Delta \theta_i, \end{aligned} \quad (4)$$

en la que hemos hecho que  $\Delta \theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ .

Procediendo del mismo modo para cada una de las rebanadas que se ven en la figura 14.3.3, y sumando entre sí los términos, obtenemos la siguiente estimación para el área de  $R$ :



$$\text{Área de } R \cong \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^{*2} \Delta \theta_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\theta_i^*)]^2 \Delta \theta_i. \quad (5)$$

La suma del lado derecho de la ecuación 5 es una suma de Riemann. Así, en el límite, cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\max |\Delta \theta_i| \rightarrow 0$ , la suma se aproxima a la integral correspondiente. Como en la sección 6.2, podemos entonces definir el área de  $R$  como la siguiente integral:

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta. \quad (6)$$

En forma más compacta, podemos escribir

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta \quad (7)$$

en la que debemos recordar que  $r = f(\theta)$ .

### EJEMPLO 1

Determinar el área  $A$  encerrada por un rizo del trébol

$$r = a \operatorname{sen} 3\theta. \quad (8)$$

La gráfica de la ecuación 8 se muestra en la figura 14.3.5. Consideremos el pétalo del primer cuadrante. Este pétalo queda comprendido entre los rayos  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/3$ ,

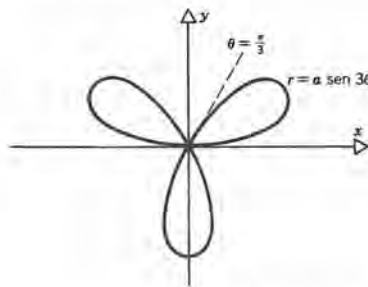


Figura 14.3.5

y por tanto, de acuerdo con la ecuación 6 obtenemos la fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (a \operatorname{sen} 3\theta)^2 d\theta.$$

Empleando la fórmula para la mitad del ángulo, e integrando después, vemos que

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 6\theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \left[ \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{12} \sin 6\theta \right] \bigg|_0^{\pi/3} \\
 &= \frac{\pi a^2}{12}. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{9}$$

## EJEMPLO 2

Determinar el área  $A$  de la región comprendida dentro de la cardioide

$$r = 2(1 + \cos \theta) \tag{10}$$

y fuera del círculo

$$r = 3. \tag{11}$$

La región aparece sombreada en la figura 14.3.6. De acuerdo con la simetría de la región sólo necesitamos calcular el área en el primer cuadrante y a continuación

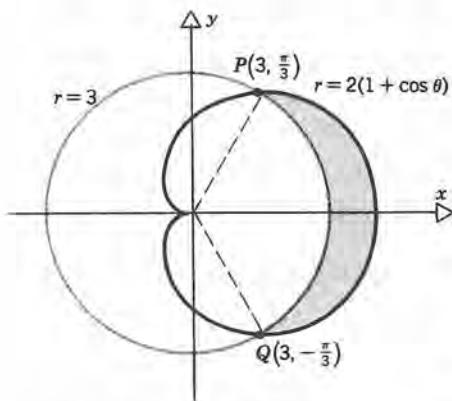


Figura 1

multiplicar por dos. Para localizar la coordenada  $\theta$  del punto  $P$  en donde se intersecan el círculo y la cardioide, eliminamos a  $r$  de las ecuaciones 10 y 11. Con ello se obtiene

$$2(1 + \cos \theta) = 3$$

o sea

$$\cos \theta = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

La solución en el primer cuadrante es  $\theta = \pi/3$ .

Determinaremos el área deseada restando el área del sector correspondiente del círculo, del área del mismo sector de la cardioide. Empleando la ecuación (6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} [4(1 + \cos \theta)^2 - 9] d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/3} (4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta - 9) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/3} (-5 + 8 \cos \theta + 2 + 2 \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/3} (-3 + 8 \cos \theta + 2 \cos 2\theta) d\theta \\
 &= (-3\theta + 8 \sin \theta + \sin 2\theta) \Big|_0^{\pi/3} \\
 &= -3 \frac{\pi}{3} + 8 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= -\pi + \frac{9}{2} \sqrt{3} \cong 4.65. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{13}$$

### Longitud de arco

Consideremos la ecuación de una curva en forma polar  $r = f(\theta)$  y recordemos que las coordenadas rectangulares y las polares se relacionan mediante las ecuaciones

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \tag{14}$$

Sustituyendo  $f(\theta)$  en lugar de  $r$  en las ecuaciones 14, obtenemos

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta. \tag{15}$$

Las ecuaciones 15 forman un conjunto de ecuaciones paramétricas de la curva en las que  $\theta$  es el parámetro. De la ecuación 11 en la sección 7.3, la longitud de arco entre  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$  está dada por

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \left( \frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta. \tag{16}$$

De acuerdo con las ecuaciones 15, tenemos que



$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos \theta - f(\theta)\sin \theta, \quad (17)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin \theta + f(\theta)\cos \theta. \quad (18)$$

Elevamos al cuadrado estas ecuaciones y sumamos los resultados. Obtenemos

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2, \quad (19)$$

Así, la integral que da la longitud del arco de la gráfica de  $r = f(\theta)$  es

$$\begin{aligned} s &= \int_{\alpha}^{\beta} \{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2\}^{1/2} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]^{1/2} d\theta. \end{aligned} \quad (20)$$

En forma diferencial podemos escribir

$$\begin{aligned} ds &= \left[ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]^{1/2} d\theta \\ &= [(rd\theta)^2 + (dr)^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (21)$$

que es análoga a la ecuación

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}$$

en coordenadas rectangulares. Se puede recordar la ecuación 21 aplicando el teorema de Pitágoras como se muestra en la figura 14.3.7.

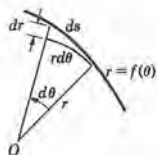


Figura 14.3.7

### EJEMPLO 3

Determinar la longitud de la cardioide

$$r = a(1 + \cos \theta) \quad (22)$$

que queda comprendida en los dos primeros cuadrantes (véase figura 14.3.8).

De acuerdo con la ecuación 20, tenemos que

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \left[ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right]^{1/2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} [a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2(-\sin \theta)^2]^{1/2} d\theta \end{aligned}$$

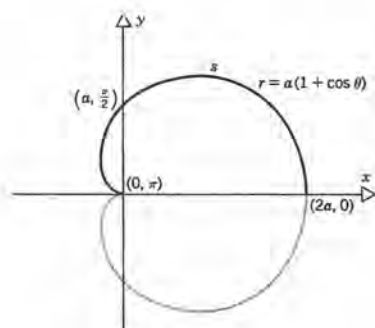


Figura 14.3.8

$$= \sqrt{2} a \int_0^{\pi} [1 + \cos \theta]^{1/2} d\theta.$$

Empleando la identidad para la mitad del ángulo, la última integral se transforma en

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2} a \int_0^{\pi} \left[ 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right]^{1/2} d\theta \\ &= 2a \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta. \end{aligned}$$

Se emplean las barras de valor absoluto porque es la raíz cuadrada no negativa la que se necesita. Sin embargo,  $\cos(\theta/2) \geq 0$  para  $0 \leq \theta \leq \pi$ , y por consiguiente se pueden quitar estas barras. De este modo llegamos a

$$\begin{aligned} s &= 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2a \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 4a. \end{aligned}$$

Por simetría de la cardioide con respecto a la recta  $\theta = 0$ , el perímetro de la cardioide completa es  $8a$ . ■

## PROBLEMAS

- Determinar el área dentro de un rizo de la lemniscata  $r^2 = 8 \cos 2\theta$ .
- Determinar el área de un pétalo de  $r = 4 \cos 2\theta$ .
- Determinar el área de la región comprendida dentro del caracol  $r = 1 + 0.5 \sin \theta$ .
- Determinar el área de la región interior de la cardioide  $r = a(1 + \cos \theta)$ .
- Determinar el área encerrada por la espiral  $r = 3\theta$ , para  $0 < \theta < \pi$  y por el rayo  $\theta = \pi$ .
- (a) Determinar el área de la región dentro del caracol  $r = 1 + b \cos \theta$ , donde  $0 < b < 1$ .

## 774 COORDENADAS POLARES

- (b) ¿Cuáles son los valores límite del área cuando  $b \rightarrow 0$  y cuando  $b \rightarrow 1$ , respectivamente? Nótese que cuando  $b \rightarrow 0$ , el caracol tiende al círculo  $r = 1$ .
7. Considerar el caracol  $r = 1 + 2 \cos \theta$ .
    - (a) Determinar el área total dentro del rizo exterior.
    - (b) Determinar el área dentro del rizo interior.
    - (c) Determinar el área comprendida entre los dos rizos.
  8. Determinar el área de la región comprendida entre el exterior del círculo  $r = 2$  y el interior de la cardioide  $r = 2(1 + \cos \theta)$ .
  9. Determinar el área de la región comprendida entre el interior de la cardioide  $r = a(1 + \sin \theta)$  y el exterior del círculo  $r = 3a/2$ .
  10. Determinar el área comprendida entre el exterior del círculo  $r = 1$  y el interior de uno de los pétalos del trébol  $r = 2 \sin 3\theta$ .
  11. Determinar el área comprendida entre el exterior del caracol  $r = 2 - \cos \theta$  y el interior de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ .
  12. Determinar el área comprendida dentro del caracol  $r = 2 - \cos \theta$  y fuera de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ .
  13. Determinar el área comprendida por los interiores del caracol  $r = 2 - \cos \theta$  y la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ .
  14. Determinar el área de la región interior de al menos una de las siguientes curvas: el caracol  $r = 2 - \cos \theta$  y la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$ .
  15. Determinar la longitud del arco de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$  en el primer cuadrante.
  16. Determinar la longitud de arco de la cardioide  $r = a(1 + \sin \theta)$ ,  $a > 0$ , para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .
  17. Determinar la longitud de arco del círculo  $r = a \cos \theta$ ,  $a > 0$ , para  $0 \leq \theta \leq \pi$ .
  18. Determinar la longitud de arco de la espiral  $r = k\theta$ ,  $k > 0$ , para  $0 \leq \theta \leq \pi$ .
  19. Determinar la longitud de arco de la gráfica de  $r = a \sec \theta$ ,  $a > 0$ , para  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ .
  20. Determinar la longitud de arco de la gráfica de  $r = \sin^3(\theta/3)$  para  $0 \leq \theta \leq 3\pi$ .
  21. Determinar la longitud de arco de la espiral  $r = e^{k\theta}$ ,  $k > 0$ , para  $0 \leq \theta \leq \pi$ .
  22. Determinar la longitud de arco de la espiral  $r = e^{k\theta}$ ,  $k > 0$ , para  $-\infty < \theta \leq 0$ .

23. Determinar la longitud del arco de la parte de la cardioide  $r = a(1 - \sin \theta)$ ,  $a > 0$ , que está en los cuadrantes primero y cuarto.
24. Formular, pero no evaluar, una integral que dé la longitud del arco de un pétalo de la gráfica de  $r = a \sin 3\theta$ ,  $a > 0$ .
25. Formular, pero no evaluar, una integral que dé la longitud del arco de una espira de la lemniscata  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ,  $a > 0$ .
26. Formular, pero no evaluar, una integral que dé la longitud de arco del caracol  $r = 1 + b \cos \theta$ ,  $b > 0$ , para  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

## Área de una superficie

Supongamos que la gráfica de  $r = f(\theta)$  para  $a \leq \theta \leq b$  se hace girar alrededor del eje  $x$  (véase figura 14.3.9). El área de la superficie que se forma de este modo se puede calcular mediante una integral semejante a la deducida en la sección 7.3, para el caso de coordenadas rectangulares. El elemento  $dS$  del área de la superficie de nuevo estará dado por  $dS = 2\pi r \, ds$ , donde  $ds$  es el elemento de la longitud de arco. Reformulando esta expresión en coordenadas polares, tenemos que

$$dS = 2\pi r \sin \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta, \quad (i)$$

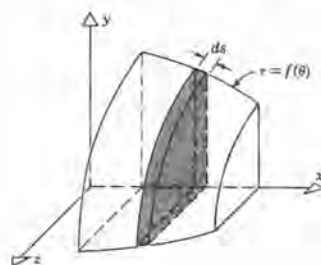


Figura 14.3.9

en la cual  $r = f(\theta)$ . Si sustituimos  $f(\theta)$  en lugar de  $r$  e integramos de  $\theta = a$  a  $\theta = b$ , obtendremos el área de la superficie requerida. Si la curva se hace girar en torno al eje  $y$ , entonces  $dS = 2\pi x \, ds$ , y en este caso

$$dS = 2\pi r \cos \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta, \quad (ii)$$



en donde de nuevo  $r = f(\theta)$ .

En los problemas 27 a 31, determinar el área de la superficie de revolución que se forma del modo indicado.

27. Girando el círculo  $r = a \cos \theta$  alrededor del eje  $x$ .
28. Girando el círculo  $r = a \cos \theta$  en torno al eje  $y$ .
29. Girando la cardioide  $r = a(1 + \cos \theta)$  en torno al eje  $x$ .
30. Girando la lemniscata  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  alrededor del eje  $x$ .
31. Girando la lemniscata  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  alrededor del eje  $y$ .

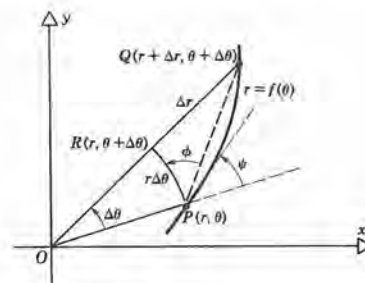


Figura 14.3.11

$$\tan \phi \equiv \frac{\Delta r}{r \Delta \theta}.$$

(b) Cuando  $\Delta \theta \rightarrow 0$ , demostrar que

$$\tan \phi \rightarrow \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}.$$

(c) Obsérvese que  $\phi + \psi \rightarrow \pi/2$  cuando  $\Delta \theta \rightarrow 0$ , y demuéstrese que

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}.$$

Entonces, por consiguiente

$$\text{pendiente} = \tan(\theta + \psi) = \frac{\tan \theta + \tan \psi}{1 - \tan \theta \tan \psi}.$$

### Tangentes y pendientes

Para una curva dada por la ecuación polar  $r = f(\theta)$ , la derivada  $dr/d\theta$  no es la pendiente de la curva, aunque da la razón de cambio de  $r$  con respecto a  $\theta$ . En el problema 32 describiremos someramente la deducción de una fórmula para la pendiente de una curva en coordenadas polares.

32. Se tiene el caso que se muestra en la figura 14.3.10. La pendiente de la gráfica de  $r = f(\theta)$  es la tangente del ángulo  $(\theta + \psi)$ , y por tanto queremos hallar un modo para determinar  $\psi$ .

- (a) Pasemos ahora a la figura 14.3.11. El punto  $P(r, \theta)$  es un punto arbitrario de la curva. Si variamos a  $\theta$  en una pequeña cantidad  $\Delta \theta$ , entonces  $r$  varía en  $\Delta r$  y obtenemos el punto  $Q(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$ . El arco  $PR$  es un arco del círculo de radio  $r$  cuyo centro es el polo. Sea  $\phi$  el ángulo entre el segmento de recta  $PQ$  y el arco  $PR$ . Demostrar que

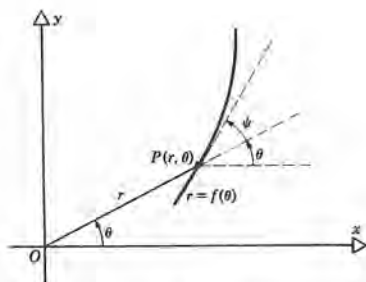


Figura 14.3.10

33. Determinar la pendiente de la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$  en el punto en el que  $\theta = \pi/4$ .
34. Determinar la pendiente del círculo  $r = 2 \sin \theta$  en el punto en el que  $\theta = 2\pi/3$ .
35. Determinar la pendiente del caracol  $r = 5 - 2 \cos \theta$  en el punto en el que  $\theta = \pi/3$ .
36. Determinar la pendiente del caracol  $r = 5 - 2 \cos \theta$  en el punto en el que  $\theta = -\pi/3$ .
37. Determinar la pendiente del círculo  $r = 3 \cos \theta$  en el punto en el que  $\theta = \pi/3$ .
38. Determinar la pendiente del trébol  $r = a \sin 3\theta$  en el punto en el que  $\theta = \pi/12$ .
39. Los círculos  $r = 3 \cos \theta$  y  $r = 3 \sin \theta$  se intersecan en el punto  $(3/\sqrt{2}, \pi/4)$ . Determinar el ángulo entre las tangentes respectivas en este punto.

## 776 COORDENADAS POLARES

40. El caracol  $r = 2 \cos \theta$  y la cardioide  $r = 1 + \cos \theta$  se intersecan en el punto  $(\frac{3}{2}, \pi/3)$ . Determinar el ángulo agudo entre sus tangentes respectivas en este punto.
41. Partiendo de las ecuaciones paramétricas (15), deducir una fórmula para la pendiente  $dy/dx$  y demostrar que este resultado concuerda con el que se obtuvo en el problema 32.
42. Demostrar que la cardioide  $r = a(1 + \cos \theta)$  tiene una tangente vertical para  $\theta = 0, 2\pi/3$  y  $4\pi/3$ , y que tiene una tangente horizontal para  $\theta = \pi/3, \pi$  y  $5\pi/3$ . Obsérvese que los puntos de tangencia horizontal y vertical se alternan y están uniformemente distribuidos con respecto a la variable angular  $\theta$ .
43. Sea  $r = ae^{-b\theta}$ , donde  $a > 0$  y  $b > 0$ . En la figura 14.3.12 aparece la gráfica de esta ecuación para  $\theta \geq$

0. La recta tangente a la gráfica en el punto  $P$  en el que  $\theta = 0$  interseca al eje  $y$  en  $Q$ . Demostrar que la longitud de arco de la curva para  $\theta \geq 0$  es igual a la longitud del segmento de recta  $PQ$ ; en otras palabras, si se desenrolla la espiral desde  $P$ , cubrirá exactamente al segmento  $PQ$ . Torricelli obtuvo este resultado en 1645.

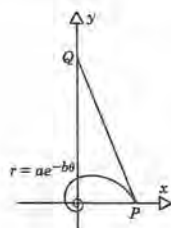


Figura 14.3.12

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 4, hallar un conjunto de coordenadas polares para el punto dado en las cuales el signo de la coordenada  $r$  sea opuesto al que se da y hallar un conjunto de coordenadas polares del punto dado en el cual el signo de la coordenada  $\theta$  sea contrario al que aparece.

1.  $(-2, \frac{5\pi}{2})$
2.  $(4, \frac{7\pi}{6})$
3.  $(3, -\frac{2\pi}{3})$
4.  $(-4, -\frac{\pi}{6})$

En los problemas 5 a 8, se da un conjunto de coordenadas polares de un punto en el plano. Determinar las coordenadas rectangulares del mismo punto.

5.  $(5, -\frac{\pi}{3})$
6.  $(4, \frac{7\pi}{6})$
7.  $(3, -\frac{2\pi}{3})$
8.  $(-2, \frac{3\pi}{4})$

En los problemas 9 a 12, se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Determinar el conjunto de coordenadas polares del mismo punto para las que  $r \geq 0$ , entre  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

9.  $(\sqrt{12}, 2)$
10.  $(3, \sqrt{27})$
11.  $(-2, 2\sqrt{3})$
12.  $(5\sqrt{2}, -\sqrt{150})$

En los problemas 13 a 20 hacer un dibujo de la gráfica de la ecuación polar dada, e identificar la curva.

13.  $r = 3 \sin(\theta - \frac{\pi}{6})$
14.  $r = 5 \csc \theta$
15.  $r = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
16.  $r = 2 \sin \theta + 3 \cos \theta$
17.  $r = 1 + \cos \theta$
18.  $r = 3 \sin 3\theta$
19.  $r^2 = -\sin 2\theta$
20.  $r = 2 - \cos \theta$

En los problemas 21 a 24, hacer un dibujo e identificar la gráfica de la sección cónica descrita por la ecuación dada. También determinar su excentricidad  $e$  y localizar sus focos y sus directrices.

21.  $r = \frac{9}{1 + 3 \sin \theta}$
22.  $r = \frac{3}{1 + \cos \theta}$
23.  $r = \frac{6}{4 - \cos \theta}$
24.  $r = 2(r \cos \theta + 3)$

En los problemas 25 a 28 deducir la ecuación polar de la curva a partir de la ecuación en coordenadas rectangulares.

25.  $3 = \frac{x \sqrt{x^2 + y^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
26.  $1 = \frac{x^3}{2y} + \frac{y^3}{2x} + xy$

27.  $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$

28.  $x^2 = \frac{y^4}{4-y^2}$

En los problemas 29 a 32, deducir la ecuación rectangular de la curva a partir de la ecuación en coordenadas polares.

29.  $\theta = \frac{11\pi}{6}$

30.  $r^2 = \sin 2\theta$

31.  $r = 2 \cot \theta$

32.  $r = \sec \theta - 2 \cos \theta$

En los problemas 33 a 36 localizar los puntos de intersección de las ecuaciones dadas.

33.  $r = 3 \sec \theta + 1, \quad r = 4$

34.  $r = 4 \sin \theta - 2 \cos \theta, \quad r = 2 - 2 \cos \theta$

35.  $r^2 = -\sin 2\theta, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$

36.  $r = \sec \theta - \cos \theta, \quad r = \cos \theta$

En los problemas 37 a 40 determinar el área de la región acotada por las ecuaciones dadas.

37.  $r = 2 + \sin \theta$

38.  $r = 1 + \sin \theta$

39. Un pétalo de  $r^2 = 4 \sin 2\theta$

40. Un pétalo de  $r = 7 \cos 5\theta$

En los problemas 41 a 44, formular una integral que exprese la longitud de arco de la curva dada para los límites dados de  $\theta$ .

41.  $r = 3 \csc \theta, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$

42.  $r = 5 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

43.  $r^2 = 4 \cos 2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$

44.  $r = 7 \sin 5\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En los problemas 45 a 48, determinar la pendiente de la tangente a la curva dada en el punto donde  $\theta = \pi/3$ .

45.  $r = 3 - \cos \theta$

46.  $r = 2 \cos \theta + 3 \sin \theta$

47.  $r = \sec \theta - \cos \theta$

48.  $r = 7 \cos 5\theta$





# CÁLCULO

## Capítulo 15

### Vectores y geometría analítica tridimensional

En la física y en la ingeniería hay muchas cantidades de importancia que tienen tanto magnitud como dirección. Por ejemplo, la fuerza, la velocidad, la aceleración y la cantidad de movimiento tienen este carácter. A estas cantidades se les llama **vectores**.<sup>\*</sup> En contraste, muchas otras cantidades físicas importantes como la temperatura, la presión, la masa y la energía, sólo tienen una magnitud, pero no dirección; estas cantidades se llaman **escalares**. Una cantidad escalar se describe en forma matemática mediante un número real, referido a alguna escala dada de medición y su variación con respecto al espacio o al tiempo se describe

---

<sup>\*</sup> Los vectores los desarrollaron Josiah Willard Gibbs y Oliver Heaviside alrededor de 1880, trabajando en forma independiente en la teoría de la electricidad y el magnetismo. Gibbs (1839-1903) fue profesor de física matemática en Yale, y también se le conoce por sus importantes contribuciones a la termodinámica. Heaviside (1850-1925), inglés, que carecía de educación universitaria, se interesó en la electricidad cuando, siendo joven, trabajaba como telegrafista. Se le conoce especialmente por el desarrollo del cálculo operacional y su aplicación a los problemas eléctricos. En su tratamiento de los vectores, tanto Gibbs como Heaviside emplearon mucho la teoría de los cuaterniones, que había desarrollado William Rowan Hamilton (1805-1865) a principios de 1843. También influyó en ambos James Clerk Maxwell (1831-1879), quien empleó los cuaterniones en su estudio de los fenómenos electromagnéticos, pero quien también llamó la atención de las desventajas de su empleo como medio de representar cantidades físicas. Después de la publicación del trabajo de Gibbs sobre los vectores, en 1881 y 1884, seguida por la de Heaviside en 1893, se desarrolló una agria controversia entre sus seguidores y los defensores de los cuaterniones. Ganaron los vectores por su simplicidad y eficacia y los cuaterniones quedaron relegados a la historia.

mediante una función cuyos valores son números reales. El principal objeto de este capítulo es desarrollar la base matemática adecuada para tratar con cantidades vectoriales. Para mantener las cosas tan sencillas como sea posible iniciaremos con los vectores en dos dimensiones. A partir de la sección 15.3 extenderemos el estudio para abarcar los vectores tridimensionales.

## 15.1 VECTORES EN DOS DIMENSIONES



Figura 15.1.1

Para distinguir entre vectores y escalares, emplearemos letras negritas, sea mayúsculas o minúsculas, para representar a los vectores; por ejemplo, **a**, **b**, **u**, **U**, etc. Como los vectores tienen magnitud y dirección, es conveniente representarlos en forma geométrica mediante flechas. Véase la figura 15.1.1, en donde se muestra el vector **a**. La magnitud de este vector es la longitud de la flecha y su dirección es la dirección de la flecha. Los puntos inicial y terminal del vector se identifican con *P* y *Q*, respectivamente en esa figura. A veces se necesitará que un vector ocupe un lugar fijo, por ejemplo, pidiendo que determinado punto sea el punto inicial de él. En otras ocasiones la ubicación de un vector podrá no especificarse. En todos los casos, independientemente de su ubicación en el plano, se dice que dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección.

A continuación colocaremos el vector **a**, o la flecha, de modo que su punto inicial quede en el origen *O* de un sistema de coordenadas rectangulares, como en la figura 15.1.2. El punto terminal de **a** coincide ahora con un punto *R* en el plano *xy* cuyas

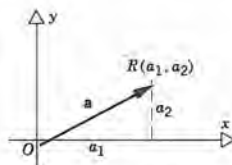


Figura 15.1.2

coordenadas son  $(a_1, a_2)$ . Cuando su punto inicial se coloca en el origen, el vector **a** sirve para identificar al punto *R*, y se dice que **a** es el **vector de posición** de *R*. Recíprocamente, el punto *R* o sus coordenadas  $(a_1, a_2)$  se puede emplear para identificar al vector que va del origen a *R*. De este modo, se escribe

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \quad (1)$$

para representar al vector de *O* a *R*, o a cualquier otro vector igual a éste, pero ubicado en otro lugar del plano. A los números  $a_1$  y  $a_2$  de la ecuación 1 se les conoce como la **componente x** y la **componente y**, respectivamente, del vector **a**.

De este modo se establece una correspondencia, expresada por la ecuación 1, entre los vectores y las coordenadas de sus puntos terminales, suponiendo que sus puntos iniciales están en el origen. Esta correspondencia nos permite representar a los vectores mediante pares de números reales, o viceversa.



La magnitud, o longitud, del vector  $\mathbf{a}$  es la distancia del origen al punto cuyas coordenadas son  $(a_1, a_2)$ . Representaremos la magnitud de  $\mathbf{a}$  mediante  $\|\mathbf{a}\|$ , y por consiguiente

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (2)$$

(véase figura 15.1.2). Para cualquier vector  $\mathbf{a}$  tenemos que  $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ ; además,  $\|\mathbf{a}\| = 0$  si y sólo si  $a_1 = a_2 = 0$ .

Por ejemplo, el vector  $\mathbf{a} = (2, 3)$  que se muestra en la figura 15.1.3a tiene una longitud

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Por otro lado, el vector  $\mathbf{a}$  de la figura 15.1.3b se representa mediante una flecha de 5

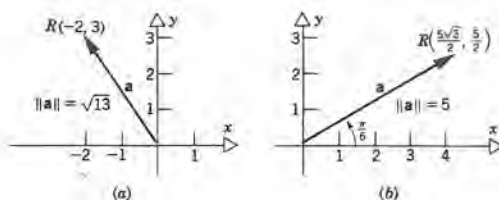


Figura 15.1.3

unidades de longitud que forma un ángulo de  $\pi/6$  radianes con el eje  $x$  positivo. El punto terminal  $R$  tiene coordenadas  $(5\sqrt{3}/2, 5/2)$ , y entonces se puede escribir

$$\mathbf{a} = \left( \frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \right).$$

Como hicimos notar, los vectores son importantes en la física y en la ingeniería debido a la importancia de las cantidades que representan. Con mucha frecuencia se aconseja representar a los vectores y a las relaciones entre ellos en forma geométrica, para obtener un máximo provecho de nuestra intuición geométrica. Una ventaja de este punto de vista es que no se necesita de un determinado sistema de coordenadas. Por tanto quedamos en libertad de concentrar nuestra atención en las relaciones vectoriales intrínsecas sin los detalles de notación y otros asociados con los sistemas coordenados.

Por otro lado, los vectores son cómodos desde el punto de vista de cómputo porque es posible formular un sistema algebraico en el cual se puedan llevar a cabo los cálculos en forma directa; para ello se necesita la presencia de un sistema coordenado. Como con frecuencia se tiene una mayor visión pensando desde un punto de vista geométrico, y casi siempre llevaremos a cabo cálculos en forma algebraica, es importante poder pasar rápidamente de un punto de vista a otro.

A continuación describiremos el álgebra de los vectores.

(a) **Igualdad.** Dos vectores  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  son iguales si y sólo si tienen

la misma magnitud y la misma dirección. Si sus puntos iniciales se colocan en el origen, sus puntos terminales también deben coincidir. Así,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ quiere decir que } a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2. \quad (3)$$

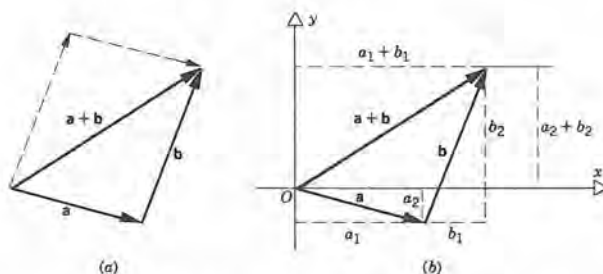
En palabras,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son iguales si y sólo si cada componente de  $\mathbf{a}$  es igual a la componente correspondiente de  $\mathbf{b}$ .

- (b) **Cero.** El vector cero, que se representa con  $\mathbf{0}$ , es el vector cuya longitud es igual a cero. Como resultado, si su punto inicial está en el origen, también estará allí su punto terminal, y entonces

$$\mathbf{0} = (0, 0). \quad (4)$$

Así, el vector  $\mathbf{0}$  es el vector cuyas componentes son cero. La dirección del vector cero es indeterminada.

- (c) **Suma.** La definición adecuada de la suma de dos vectores nos la sugiere la manera en la que se suman las fuerzas en la física o en la mecánica. Si el punto inicial de  $\mathbf{b}$  se coloca en el punto terminal de  $\mathbf{a}$ , como se ve en la figura 15.1.4a, entonces



**Figura 15.1.4** La regla del paralelogramo para la suma de vectores.

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$  es el vector que se traza desde el punto inicial de  $\mathbf{a}$  hasta el punto terminal de  $\mathbf{b}$ . A lo anterior se le llama a veces la regla del paralelogramo, ya que  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  es la diagonal del paralelogramo cuyos lados son  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

A continuación, obtendremos la fórmula para las componentes de  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Sean  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ . Entonces, de acuerdo con la figura 15.1.4b se puede ver que la coordenada  $x$  del punto terminal de  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  es  $a_1 + b_1$ . Igualmente, la coordenada  $y$  de este punto es  $a_2 + b_2$ , siendo  $a_2$  negativa en el caso de la figura. Al considerar otras combinaciones de los signos de las componentes de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , es posible demostrar en todos los casos que

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \quad (5)$$

En otras palabras, se lleva a cabo la suma de dos vectores sumando sus respectivas componentes rectangulares.

La suma vectorial tiene las siguientes dos propiedades importantes, que también las tiene la suma ordinaria:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{Ley conmutativa}) \quad (6)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{Ley asociativa}) \quad (7)$$

Es fácil deducir ambas propiedades. Por ejemplo,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  está dada por la ecuación 5, mientras que  $\mathbf{b} + \mathbf{a} = (b_1 + a_1, b_2 + a_2)$ . Como  $a_1 + b_1 = b_1 + a_1$ , y  $a_2 + b_2 = b_2 + a_2$  según la ley conmutativa de la suma de números reales, en consecuencia la ecuación 6 es válida. Se puede deducir la ecuación 7 de una manera semejante.

### EJEMPLO 1

Si  $\mathbf{a} = (-2, 3)$  y  $\mathbf{b} = (4, -1)$ , calcular  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

De acuerdo con la ecuación 5 obtenemos

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2, 3) + (4, -1) = (-2 + 4, 3 - 1) = (2, 2).$$

Los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  se muestran en la figura 15.1.5. ■

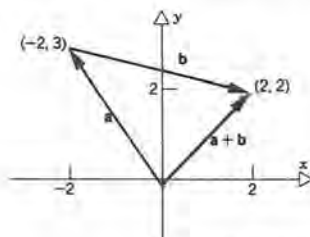


Figura 15.1.5

(d) **Multiplicación de un vector por un escalar.** Sea  $\mathbf{a}$  un vector dado distinto de cero y sea  $\lambda$  un escalar, o número real. Si  $\lambda > 0$ , entonces  $\lambda\mathbf{a}$  ó  $\mathbf{a}\lambda$  es el vector cuya dirección es la misma que la de  $\mathbf{a}$  y cuya longitud es  $\lambda$  veces la longitud de  $\mathbf{a}$  (véase figura 15.1.6a). Si  $\lambda < 0$ , entonces la dirección de  $\lambda\mathbf{a}$  es opuesta a la de  $\mathbf{a}$  y la longitud de  $\lambda\mathbf{a}$  es  $|\lambda|$  veces la longitud de  $\mathbf{a}$  (véase figura 15.1.6b). Si  $\lambda = 0$ , o si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , entonces  $\lambda\mathbf{a}$  es el vector cero.

Para determinar las componentes de  $\lambda\mathbf{a}$ , sea  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ , y considere la situación que aparece en la figura 15.1.7, en la cual  $\lambda > 0$ . Los dos triángulos son semejantes y sus hipotenusas tienen la razón  $\lambda$ . Así, los demás pares de lados correspondientes también tienen esta razón. Esto significa que las componentes de  $\lambda\mathbf{a}$  son  $\lambda a_1$  y  $\lambda a_2$ , y que podemos escribir

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2). \quad (8)$$

Un argumento semejante demuestra que la ecuación 8 también es válida cuando  $\lambda < 0$ .

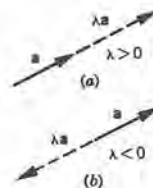


Figura 15.1.6  
Multiplicación de un vector por un escalar.



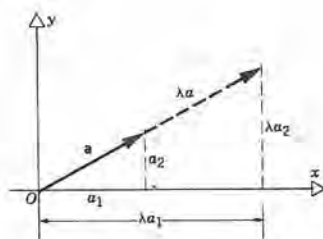


Figura 15.1.7

El tipo de multiplicación que define la ecuación 8 tiene las siguientes propiedades, ya familiares, de la multiplicación ordinaria:

$$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}), \quad (\text{Ley asociativa}) \quad (9)$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}, \quad (\text{Ley distributiva}) \quad (10)$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \quad (\text{Ley distributiva}) \quad (11)$$

Es fácil demostrar cada una de esas propiedades. Por ejemplo, para deducir la ecuación 10, nótese que

$$\begin{aligned} \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} &= (\lambda a_1, \lambda a_2) + (\mu a_1, \mu a_2) \\ &= (\lambda a_1 + \mu a_1, \lambda a_2 + \mu a_2) \\ &= ((\lambda + \mu)a_1, (\lambda + \mu)a_2) \\ &= (\lambda + \mu)\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Las demás propiedades se pueden demostrar de modo semejante.

### EJEMPLO 2

Si  $\mathbf{a} = (2, -1)$  y  $\lambda = 3$ , calcular  $\lambda\mathbf{a}$ .

De acuerdo con la ecuación 8,

$$\lambda\mathbf{a} = 3(2, -1) = (6, -3).$$

El vector  $\lambda\mathbf{a}$  tiene la misma dirección que  $\mathbf{a}$  y su longitud es el triple de la de  $\mathbf{a}$  (véase figura 15.1.8). ■

### EJEMPLO 3

Si  $\mathbf{a} = (2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (-3, 1)$  y  $\lambda = -2$ , calcular  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ .

Un modo de proceder es calcular la suma de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ ,

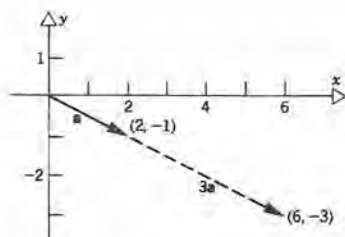


Figura 15.1.8

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2 - 3, 3 + 1) = (-1, 4).$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación 8, tenemos que

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = -2(-1, 4) = (2, -8). \quad (12)$$

Los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  y  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  se muestran en la figura 15.1.9.

En forma alternativa, podemos calcular  $\lambda\mathbf{a}$  y  $\lambda\mathbf{b}$  por separado, y a continuación sumarlos, de acuerdo con la ley distributiva (11). En este caso obtenemos

$$\lambda\mathbf{a} = -2(2, 3) = (-4, -6),$$

$$\lambda\mathbf{b} = -2(-3, 1) = (6, -2),$$

y entonces

$$\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = (-4, -6) + (6, -2) = (2, -8). \quad (13)$$

Obsérvese que este resultado concuerda con la ecuación 12, lo cual confirma la ley distributiva (11) en este caso. ■

(e) **Resta.** La diferencia  $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  de dos vectores  $\mathbf{a} = (a_1, b_1)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  se define pidiendo que el vector  $\mathbf{c}$  sea aquél que cuando se suma a  $\mathbf{b}$  dé como resultado el vector  $\mathbf{a}$  (véase figura 15.1.10). Así,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  es el vector que se traza desde el punto terminal de  $\mathbf{b}$  hasta el punto terminal de  $\mathbf{a}$ . Para determinar las componentes de  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , sea  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (c_1, c_2)$ , y obsérvese que (de acuerdo con la figura 15.1.10)

$$\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}. \quad (14)$$

Escribiendo la ecuación 14 en términos de las componentes, tenemos que

$$b_1 + c_1 = a_1, \quad b_2 + c_2 = a_2$$

o sea

$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = a_2 - b_2.$$

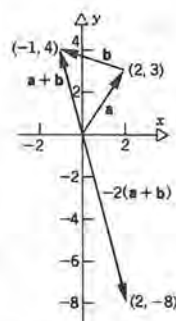


Figura 15.1.9

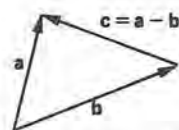


Figura 15.1.10  
Resta de vectores.

Entonces

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2), \quad (15)$$

### EJEMPLO 4

Si  $\mathbf{a} = (1, -2)$  y  $\mathbf{b} = (3, 1)$ , calcular  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

De acuerdo con la ecuación 15 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (1, -2) - (3, 1) = (1 - 3, -2 - [1]) \\ &= (-2, -1). \end{aligned}$$

La figura 15.1.11 muestra los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ .

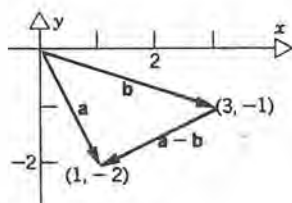


Figura 15.1.11

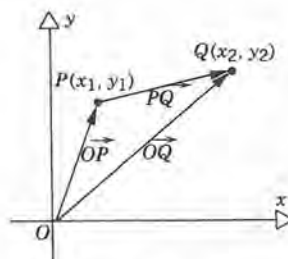


Figura 15.1.12

El vector cuyo punto inicial es  $P$  y cuyo punto terminal es  $Q$  se llama con frecuencia como el vector de  $P$  a  $Q$  y se puede representar mediante  $\overrightarrow{PQ}$ . Representaremos a este vector en forma geométrica trazando una flecha de  $P$  a  $Q$ , como se ve en la figura 15.1.12. Para calcular las componentes de  $\overrightarrow{PQ}$ , introduciremos los vectores de posición  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{OQ}$  de  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Entonces

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}. \quad (16)$$

Si  $(x_1, y_1)$  son las coordenadas de  $P$ , y  $(x_2, y_2)$  son las coordenadas de  $Q$ , entonces

$$\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1), \quad \overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2).$$

En consecuencia, según la ecuación 15,

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \quad (17)$$

Así, se calculan las componentes de  $\overrightarrow{PQ}$  restando las coordenadas de su punto inicial, de las coordenadas correspondientes del punto terminal.



**EJEMPLO 5**

Calcular las componentes del vector que va de  $P(-2, 1)$  a  $Q(4, -3)$ .

Los puntos  $P$  y  $Q$  y el vector  $\overrightarrow{PQ}$  se muestran en la figura 15.1.13. De acuerdo con la ecuación 17,

$$\overrightarrow{PQ} = (4, -3) - (-2, 1) = (4 + 2, -3 - 1) = (6, -4).$$

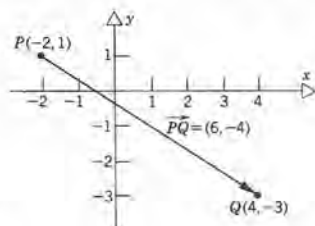


Figura 15.1.13

**PROBLEMAS**

En los problemas 1 a 4, calcular  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  y  $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ .

1.  $\mathbf{a} = (-2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (3, -2)$
2.  $\mathbf{a} = (1, 0)$ ,  $\mathbf{b} = (-2, 1)$
3.  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -1)$
4.  $\mathbf{a} = (2, -5)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 4)$

En los problemas 5 a 8 determinar el vector  $\overrightarrow{PQ}$ .

5.  $P = (2, 1)$ ,  $Q = (4, -2)$
6.  $P = (-1, -4)$ ,  $Q = (2, -2)$
7.  $P = (2, 4)$ ,  $Q = (-1, 0)$
8.  $P = (5, -2)$ ,  $Q = (1, 4)$
9. Si  $\mathbf{a} = (2, 1)$  es el vector de posición del punto  $P$ , y si  $\mathbf{b} = (3, 2)$  es el vector de posición del punto  $Q$ , calcular las componentes del vector de  $P$  a  $Q$ , y las del vector de  $Q$  a  $P$ .
10. Si  $\mathbf{a} = (2, -1)$  es el vector de posición del punto  $P$  y si el vector de  $P$  a  $Q$  es  $\overrightarrow{PQ} = (-3, 2)$ , determinar el vector de posición  $\mathbf{b}$  del punto  $Q$ .
11. Calcular  $x$  y  $y$  si los vectores  $\mathbf{a} = (x + y, x - y)$  y  $\mathbf{b} = (2, 3)$  son iguales.
12. Calcular  $x$  y  $y$  si  $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{a} = (x + y, 2)$  y  $\mathbf{b} = (3, x - 2y)$ .

En los problemas 13 a 18, determinar la longitud  $\|\mathbf{a}\|$  del vector dado.

13.  $\mathbf{a} = (2, 1)$
14.  $\mathbf{a} = (-1, 3)$
15.  $\mathbf{a} = (-3, -4)$
16.  $\mathbf{a} = (x, x)$ , donde  $x$  es un número real
17.  $\mathbf{a} = (x + y, x - y)$ , donde  $x$  y  $y$  son números reales
18.  $\mathbf{a} = (3x, 4x)$ , donde  $x$  es un número real
19. Determinar el vector  $\mathbf{b}$  cuya longitud es 5 y que es perpendicular al vector  $\mathbf{a} = (1, 2)$ .
20. Determinar el vector  $\mathbf{b}$  cuya longitud es 8 y que tiene la misma dirección que el vector que va de  $P(2, 1)$  a  $Q(-1, 4)$ .
21. Seleccionar a  $\lambda$  de tal modo que tengan la misma longitud los vectores  $(2, -3)$  y  $(\lambda, 1)$ .
22. Demostrar que  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  para cualesquiera vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ .
23. Demostrar que  $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$  para cualesquiera vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , y para cualquier escalar  $\lambda$  y  $\mu$ .
24. Demostrar que  $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$  para cualesquiera vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , y para cualquier escalar  $\lambda$ .
25. Un principio básico de la mecánica afirma que si un

cuerpo está en equilibrio, entonces la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo debe ser igual a cero. Si se suspende un peso  $W$  de un cable que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal, como se ve en la figura 15.1.14, determinar la fuerza  $T$  en el cable.

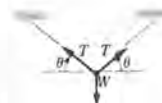


Figura 15.1.14

## 15.2 EL PRODUCTO ESCALAR

Continuaremos el estudio de las propiedades de los vectores en dos dimensiones. En esta sección nos enfocaremos a la multiplicación de un vector por otro.

### Producto escalar, o producto interior

Sucede que resulta útil definir dos modos distintos de multiplicar a dos vectores entre sí. El primer tipo de producto que describiremos siempre produce un escalar, o número real, y se llama por ello **producto escalar**. Como con frecuencia se le representa mediante un punto, también se llama **producto interior**. Si  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ , entonces el producto escalar, o producto interior de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  se define como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (1)$$

En palabras: las componentes correspondientes de los dos vectores se multiplican entre sí y a continuación se suman los resultados. El producto escalar tiene una interpretación geométrica importante que describiremos un poco más adelante.

### EJEMPLO 1

Si  $\mathbf{a} = (3, -2)$  y  $\mathbf{b} = (-1, 3)$ , calcular  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

De acuerdo con la ecuación 1 obtenemos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3)(-1) + (-2)(3) = -3 - 6 = -9. \blacksquare$$

El producto escalar tiene las propiedades siguientes:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad (\text{Ley conmutativa}); \quad (2)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (\text{Ley distributiva}); \quad (3)$$

y, si  $\lambda$  es un escalar,

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}), \quad (\text{Ley asociativa}). \quad (4)$$

Nótese que no tiene sentido escribir una expresión como  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ , porque el resultado de la primera multiplicación es un escalar, y no se puede formar el producto interior de un escalar  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  por un vector  $\mathbf{c}$ . Sin embargo, la expresión  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  está bien definida; la segunda multiplicación es el producto de un escalar por un vector, como se discutió en la sección 15.1.

Las propiedades (2), (3) y (4) se demuestran con facilidad. Por ejemplo, para deducir la ecuación 3 supongamos que  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  y  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) &= (a_1, a_2) \cdot [(b_1, b_2) \pm (c_1, c_2)] \\ &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 \pm c_1, b_2 \pm c_2) \\ &= a_1(b_1 \pm c_1) + a_2(b_2 \pm c_2) \\ &= a_1b_1 \pm a_1c_1 + a_2b_2 \pm a_2c_2 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2) \pm (a_1c_1 + a_2c_2) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},\end{aligned}$$

demostrando con ello la ecuación 3.

### Relación entre un producto escalar y la longitud de un vector

En la sección 15.1 hicimos notar que la longitud de un vector  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  está dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \quad (5)$$

Si formamos el producto escalar de  $\mathbf{a}$  por sí mismo, tenemos que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 = \|\mathbf{a}\|^2. \quad (6)$$

También, si  $\lambda$  es un escalar, entonces

$$\begin{aligned}\|\lambda\mathbf{a}\| &= \|(\lambda a_1, \lambda a_2)\| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda| \|\mathbf{a}\|.\end{aligned} \quad (7)$$

Nótese que se necesita  $|\lambda|$  en el lado derecho de la ecuación 7, porque  $\lambda$  puede ser negativa y  $\|\lambda\mathbf{a}\|$  y  $\|\mathbf{a}\|$  no lo son.

### Vectores unitarios

Cualquier vector cuya longitud sea igual a uno se llama vector unitario. A veces es de utilidad determinar a un vector unitario  $\mathbf{u}$  que tenga la misma dirección que un vector dado  $\mathbf{a}$  distinto de cero. Para hacerlo, simplemente dividimos  $\mathbf{a}$  entre su propia longitud, de modo que



$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad (8)$$

Como  $\|\mathbf{a}\| > 0$ ,  $\mathbf{u}$  tiene la misma dirección que  $\mathbf{a}$ , y como  $1/\|\mathbf{a}\|$  es un escalar, la longitud de  $\mathbf{u}$  es  $1/\|\mathbf{a}\|$  multiplicado por la longitud de  $\mathbf{a}$ , o sea uno. Por tanto,  $\mathbf{u}$  es el vector unitario en la dirección de  $\mathbf{a}$ .

## EJEMPLO 2

Determinar un vector unitario  $\mathbf{u}$  que tenga la misma dirección que  $\mathbf{a} = (2, -3)$ .

De acuerdo con la ecuación 5 tenemos que  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{13}$ , y entonces

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}} (2, -3) = \left( \frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} \right). \blacksquare$$

## Interpretación geométrica del producto escalar

Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  vectores arbitrarios distintos de cero que tengan el mismo punto inicial, y sea  $\theta$  el ángulo entre ellos, tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Consideremos el triángulo que muestra la figura 15.2.1, cuyos lados son  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ , respectivamente. Para comprender el significado geométrico del producto escalar emplearemos la ley de los cosenos, de la trigonometría, que, en forma vectorial, dice que

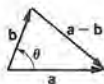


Figura 15.2.1

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta. \quad (9)$$

Introducimos el producto escalar en los primeros tres términos de la ecuación 9 de acuerdo con la ecuación 6, y obtenemos

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta. \quad (10)$$

Empleando las ecuaciones 2 y 3 para desarrollar el lado izquierdo de esta ecuación llegamos a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta, \quad (11)$$

de modo que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta. \quad (12)$$

La ecuación 12 es la relación fundamental que existe entre el producto escalar y las cantidades geométricas: las longitudes de los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  y el coseno del ángulo entre ellos.

Obsérvese que la ecuación 12 es independiente de sistema de coordenadas alguno, y expresa la propiedad geométrica intrínseca del producto escalar.

Otro método de describir el producto escalar es tomar como su definición la ecuación 12, e invertir el argumento que hemos presentado aquí y con ello deducir la expresión algebraica que se da en la ecuación 1.

Despejando a  $\cos \theta$  de la ecuación 12, obtenemos

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}, \quad (13)$$

lo que suministra una manera de determinar el ángulo entre los dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . También podemos escribir la ecuación 13 en la siguiente forma:

$$\cos \theta = \left( \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (14)$$

donde  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son vectores unitarios. En otras palabras, el producto escalar de dos vectores unitarios es el coseno del ángulo que forman.

### EJEMPLO 3

Calcular el ángulo  $\theta$  entre los vectores  $\mathbf{a} = (2, -1)$  y  $\mathbf{b} = (3, 1)$  (véase figura 15.2.2).

Según la ecuación 13, nos encontramos con que

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(2)(3) + (-1)(1)}{[(2)^2 + (-1)^2]^{1/2} [(3)^2 + (1)^2]^{1/2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\theta = \pi/4$  radianes. ■

Supongamos que  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores distintos de cero y que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Entonces, la ecuación 13 pide que  $\cos \theta = 0$ , o sea que  $\theta = \pi/2$ . Entonces, los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son perpendiculares, u **ortogonales**, entre sí. Recíprocamente, si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son ortogonales, entonces  $\cos \theta = 0$  y  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , de acuerdo con la ecuación 12. Por tanto, *los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  distintos de cero son ortogonales si y sólo si  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$* . Como es fácil calcular el producto escalar a partir de las componentes de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , resulta una manera conveniente de probar la ortogonalidad de dos vectores dados.

La ecuación 12 también nos proporciona un método para calcular la **proyección** de un vector  $\mathbf{b}$  sobre otro vector  $\mathbf{a}$ . Si  $\mathbf{u}$  es el vector unitario en la dirección de  $\mathbf{a}$ , entonces se define la proyección de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{a}$  como el producto del escalar  $\|\mathbf{b}\| \cos \theta$  por el vector unitario  $\mathbf{u}$ :

$$\text{proy}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \|\mathbf{b}\| (\cos \theta) \mathbf{u} \quad (15)$$

(véase figura 15.2.3). Nótese que la proyección de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{a}$  ( $\text{proy}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ ) es un vector que tiene la misma dirección que  $\mathbf{a}$ , cuando  $\cos \theta > 0$ , y tiene la dirección opuesta cuando  $\cos \theta < 0$ .

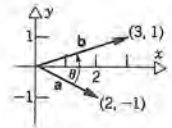


Figura 15.2.2

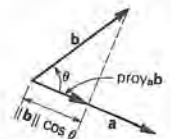


Figura 15.2.3  
Proyección de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{a}$ .

Empleando la ecuación 12 también podemos escribir  $\text{proy}_a \mathbf{b}$  como

$$\text{proy}_a \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{u} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}. \quad (16)$$

El coeficiente de  $\mathbf{u}$  en la ecuación 15 o la 16, que es  $\|\mathbf{b}\| \cos \theta$ , o  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$ , se llama la **componente de  $\mathbf{b}$  en la dirección de  $\mathbf{a}$** . Obsérvese que esta cantidad puede ser tanto positiva como negativa.

#### EJEMPLO 4

Determinar la componente de  $\mathbf{b} = (1, 3)$  en la dirección de  $\mathbf{a} = (2, 1)$ .

El vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección de  $\mathbf{a}$  es

$$\mathbf{u} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Así, de acuerdo con la ecuación 16, la componente de  $\mathbf{b}$  en la dirección de  $\mathbf{a}$  es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b}\| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} &= (1, 3) \cdot \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{(1)(2) + (3)(1)}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}. \blacksquare \end{aligned}$$

#### Vectores unitarios coordenados

Los vectores unitarios que siguen la dirección de los ejes  $x$  y  $y$  son lo suficientemente importantes como para que se les reserven los símbolos especiales  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ , respectivamente, para representarlos. Sus componentes son

$$\mathbf{i} = (1, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1). \quad (17)$$

Todas las reglas algebraicas que se desarrollan en esta sección se aplican a  $\mathbf{i}$  y a  $\mathbf{j}$  como casos especiales. En especial, se comprueba con facilidad que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (18)$$

Las dos primeras ecuaciones 18 confirman que  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  tienen longitud unitaria, mientras que la tercera expresa el hecho de que  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son ortogonales.

Con frecuencia es conveniente expresar un vector dado  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  en términos de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  (véase figura 15.2.4). Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) \\ &= a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}. \end{aligned} \quad (19)$$

A los vectores  $a_1\mathbf{i}$  y  $a_2\mathbf{j}$  se les llama a veces componentes vectoriales de  $\mathbf{a}$  en las



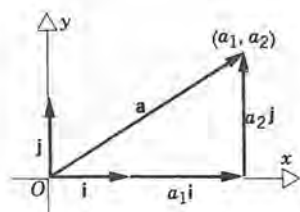


Figura 15.2.4

direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente, para diferenciarlos de las componentes escalares  $a_1$  y  $a_2$ .

Con frecuencia representaremos a los vectores en términos de los vectores coordenados  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  como en la ecuación 19. Todas las operaciones algebraicas se llevan a cabo con facilidad cuando los vectores están escritos de este modo. Por ejemplo, la suma y la resta se manejan agrupando los términos en  $\mathbf{i}$  y en  $\mathbf{j}$ , respectivamente.

### La desigualdad del triángulo

Examinemos el triángulo que muestra la figura 15.2.5, cuyos lados son los vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Un hecho bien conocido de la geometría plana es que la longitud de un lado de cualquier triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados, siendo válida la igualdad si y sólo si los tres lados son colineales y el triángulo es degenerado. En símbolos, este enunciado toma la siguiente forma:

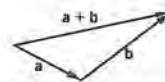


Figura 15.2.5

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|. \quad (20)$$

La ecuación 20 es importante en álgebra vectorial y se le conoce como la **desigualdad del triángulo**.

También se puede llegar al resultado (20) sin recurrir a la geometría. Para hacerlo, es más cómodo demostrar la desigualdad siguiente:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \leq [\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|]^2, \quad (21)$$

de acuerdo con la cual se llega a la ecuación 20 al extraer raíz cuadrada de ambos lados, y tomando los resultados no negativos. Para demostrar que la ecuación 21 es cierta, escribimos en la siguiente forma su lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Como  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ , y como  $\cos \theta \leq 1$ , se infiere que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$ . Incorporando esta relación en la ecuación 22 tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 &\leq \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 \\ &= [\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|]^2, \end{aligned}$$

que es la ecuación 21.

Se puede ampliar la desigualdad del triángulo a dos o más vectores. Por ejemplo, si  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son tres vectores cualesquiera, entonces

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}\|. \quad (23)$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, determinar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  y el coseno del ángulo entre ellos.

1.  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -3)$

2.  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1)$

3.  $\mathbf{a} = (1, -2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1)$

4.  $\mathbf{a} = (2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 2)$

5.  $\mathbf{a} = (1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (4, 1)$

6.  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

7.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

8.  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

En los problemas 9 a 14, determinar el vector unitario  $\mathbf{u}$  en la dirección del vector dado  $\mathbf{a}$ .

9.  $\mathbf{a} = (-3, -4)$

10.  $\mathbf{a} = (2, -5)$

11.  $\mathbf{a} = (3x, -4x)$ ,  $x$  es un número real

12.  $\mathbf{a} = (x, x)$ ,  $x$  es un número real

13.  $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$

14.  $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $x$  y  $y$  son números reales

En los problemas 15 a 18 determinar el vector unitario  $\mathbf{u}$  que se pide.

15. En la dirección opuesta a  $\mathbf{a} = (1, 3)$ .

16. En la dirección opuesta a  $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ .

17. Perpendicular a  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ .

18. Perpendicular a  $\mathbf{a} = (12, 5)$ .

En los problemas 19 a 24 determinar la componente de  $\mathbf{b}$  en la dirección de  $\mathbf{a}$ .

19.  $\mathbf{a} = (1, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1)$

20.  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1)$

21.  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -3)$

22.  $\mathbf{a} = (3, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -3)$

23.  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ,  $x$  es un número real

24.  $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ,  $x$  es un número real

En los problemas 25 a 28, determinar la proyección de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{a}$ .

25.  $\mathbf{a} = (2, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -3)$

26.  $\mathbf{a} = (-3, 4)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -1)$

27.  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

28.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = 2x\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ,  
 $x$  es un número real

29. Demostrar que  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  para cualesquiera vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

30. Demostrar que  $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$  para cualesquiera vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  y para cualquier escalar  $\lambda$ .

En los problemas 31 a 34, comprobar que se satisface la desigualdad del triángulo  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ .

31.  $\mathbf{a} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (3, -1)$

32.  $\mathbf{a} = (1, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 3)$

33.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

34.  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

35. Demostrar que, para cualesquiera vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  y para cualesquiera números  $c_1$  y  $c_2$ ,

$$\|c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}\| \leq |c_1| \|\mathbf{a}\| + |c_2| \|\mathbf{b}\|.$$

36. (a) Para dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  cualesquiera, escribir  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b})$  y trazar un dibujo para indicar esta relación.

(b) Mediante la desigualdad del triángulo demostrar que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|. \quad (i)$$

- (c) Mediante un argumento semejante, o intercambiando  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en la ecuación (i), demostrar que

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \geq \|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{a}\|. \quad (ii)$$

- (d) Nótese que  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ ; demostrar que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \geq \left| \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \right|. \quad (iii)$$

37. Sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , respectivamente, los vectores de posición de dos puntos diferentes  $P$  y  $Q$ .

- (a) Demostrar que el vector de posición de cualquier

punto  $R$  en el segmento de recta que une a  $P$  y  $Q$  está dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (i)$$

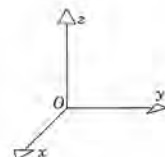
- (b) ¿Dónde están los puntos cuyos vectores de posición están dados por la ecuación (i) cuando  $t < 0$  ó  $t > 1$ ?

38. Demostrar que  $(\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$  es un vector unitario en la dirección que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  positivo.

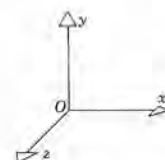
## 15.3 VECTORES EN TRES DIMENSIONES

La discusión de las secciones anteriores acerca de los vectores en dos dimensiones se amplía fácilmente al caso de tres dimensiones. Comenzaremos describiendo un sistema de coordenadas tridimensional rectangular, o cartesiano.

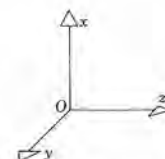
Seleccionemos un punto  $O$  como el origen del sistema de coordenadas y escojamos tres rectas mutuamente perpendiculares que se intersequen en  $O$  como ejes coordenados  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Designamos una dirección positiva y una unidad de medición en cada eje. En general conviene orientar los ejes como se ve en la figura 15.3.1a. Los ejes  $y$  y  $z$  están en el plano del papel, el eje  $x$  queda perpendicular a este plano y apunta hacia el lector. En esta orientación los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  forman lo que se llama sistema coordenado orientado según la mano derecha; si se giran los dedos de la mano derecha desde el eje  $x$  positivo hacia el eje  $y$  positivo, entonces el pulgar apunta hacia el eje  $z$  positivo. Si se hace girar el sistema coordenado de la figura 15.3.1a como si fuera un cuerpo rígido a posiciones como las que se muestra en las figuras 15.3.1b y 15.3.1c permanece como un sistema con orientación derecha. Sin embargo, si se intercambian dos de los ejes, como se indica en la figura 15.3.2, el sistema se vuelve de orientación izquierda: si se giran los dedos



(a)

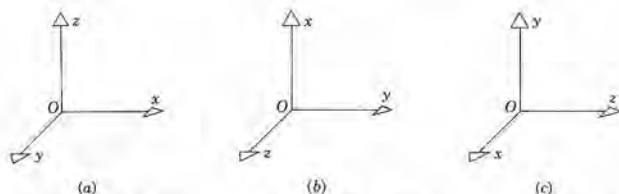


(b)

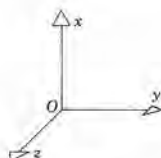


(c)

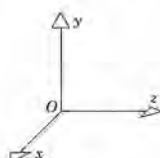
**Figura 15.3.1** Sistemas de coordenadas orientados hacia la derecha.



(a)



(b)



(c)

**Figura 15.3.2** Sistemas de coordenadas orientados hacia la izquierda.

de la mano izquierda a partir del eje  $x$  positivo hacia el eje  $y$  positivo, entonces el pulgar apunta en la dirección del eje  $z$  positivo. Se acostumbra emplear sistemas coordenados orientados hacia la derecha y a menos que se especifique otra cosa, en todos los casos nuestros sistemas coordenados serán orientados hacia la derecha.



Un plano que contenga a dos de los ejes coordenados se llama plano coordenado; el plano  $xy$  contiene a los ejes  $x$  y  $y$ , e igualmente para el plano  $xz$  y para el plano  $yz$ . Las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de un punto  $P$  en el espacio tridimensional se definen del siguiente modo (figura 15.3.3). La coordenada  $x$ ,  $a$  de  $P$  es la distancia dirigida desde

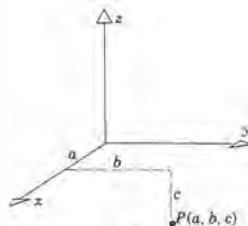


Figura 15.3.3

el plano  $yz$  hasta  $P$ . La coordenada es positiva si  $P$  está del mismo lado del plano  $yz$  en que se encuentra el eje  $x$  positivo, y es negativa si  $P$  queda del otro lado del plano  $yz$ . La coordenada  $y$ ,  $b$  de  $P$  y la coordenada  $z$ ,  $c$  de  $P$  se definen igualmente como las distancias dirigidas desde los planos  $xz$  y  $xy$ , respectivamente. En el caso que se muestra en la figura 15.3.3, las coordenadas  $x$  y  $y$  son positivas y la coordenada  $z$  es negativa. Si una o más de las coordenadas es cero, entonces  $P$  queda en el plano o planos correspondientes. Al igual que en el caso de dos dimensiones, si se da un sistema de coordenadas rectangulares, entonces un punto geométrico  $P$  determina de forma única sus coordenadas con respecto al sistema coordenado, y viceversa.

Un vector  $\mathbf{a}$  tridimensional se puede representar como una flecha en el espacio  $xyz$  tridimensional. Coloquemos el punto inicial de  $\mathbf{a}$  en el origen y entonces el punto terminal coincide con un punto  $P$ , como se ve en la figura 15.3.4, y se dice que  $\mathbf{a}$  es el

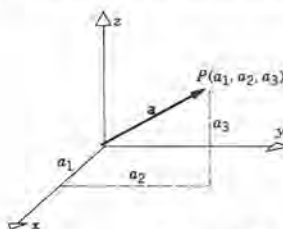


Figura 15.3.4

vector de posición de  $P$ . Si las coordenadas de  $P$  son  $(a_1, a_2, a_3)$  entonces a estos mismos números  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  se les llama las componentes de  $\mathbf{a}$  y se escribe

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3). \quad (1)$$

La longitud de  $\mathbf{a}$  se representa mediante  $\|\mathbf{a}\|$  y (véase figura 15.3.5) se puede calcular mediante

$$\|\mathbf{a}\| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Las operaciones algebraicas que se estudiaron en las dos secciones anteriores se transfieren de inmediato a los vectores en tres dimensiones. Así, sólo daremos un breve

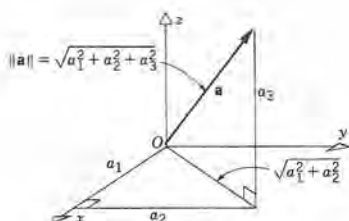


Figura 15.3.5

resumen de éstas. En lo que sigue  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  y  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  son tres vectores tridimensionales arbitrarios y  $\lambda$  y  $\mu$  son escalares arbitrarios.

**Igualdad.**  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  si y sólo si  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  y  $a_3 = b_3$ .

**Cero.**  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  si y sólo si  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  y  $a_3 = 0$ .

**Suma.**  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ . (3)

**Resta.**  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ . (4)

**Multiplicación por un escalar.**  $\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ , donde  $\lambda$  es un escalar. (5)

**Producto escalar.**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ . (6)

Las propiedades algebraicas siguientes de la suma vectorial, de la multiplicación de un vector por un escalar, y de la multiplicación escalar de dos vectores también se transfieren directamente de dos a tres dimensiones:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad (7)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad (8)$$

$$(\lambda \mu) \mathbf{a} = \lambda (\mu \mathbf{a}), \quad (9)$$

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a}, \quad (10)$$

$$\lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \quad (11)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad (12)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \pm \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (13)$$

$$\lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}). \quad (14)$$

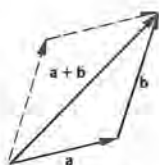
Las propiedades geométricas del producto escalar también se generalizan en forma inmediata a tres dimensiones:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta, \quad (15)$$

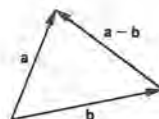
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \quad (16)$$

Por último, la longitud  $\|\mathbf{a}\|$  del vector  $\mathbf{a}$  tiene las mismas propiedades en tres dimensiones que en dos:

$$\|\mathbf{a}\| \geq 0, \quad (17)$$



**Figura 15.3.6**  
La regla del paralelogramo para la suma de vectores.



**Figura 15.3.7**  
Resta de vectores.

$$\|\mathbf{a}\| = 0 \text{ si y sólo si } \mathbf{a} = \mathbf{0}; \quad (18)$$

$$\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \|\mathbf{a}\|. \quad (19)$$

### Vectores unitarios

El vector unitario  $\mathbf{u}$  en la misma dirección que cualquier vector  $\mathbf{a}$  distinto de cero está dado por  $\mathbf{u} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ . En este caso tenemos tres vectores coordenados unitarios, que se representan mediante

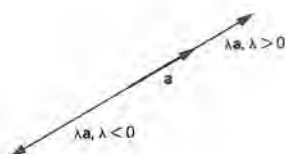
$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \text{y} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1), \quad (20)$$

que apuntan a las direcciones positivas de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. En términos de estos vectores podemos escribir el vector  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  en la siguiente forma:

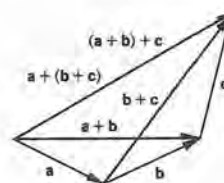
$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}. \quad (21)$$

### Interpretación geométrica

Las interpretaciones geométricas de las diversas operaciones vectoriales que acabamos de resumir también se generalizan de dos a tres dimensiones en una forma natural. La suma  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  se dirige a lo largo de la diagonal del paralelogramo cuyos lados son  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  (véase figura 15.3.6). La diferencia  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$  es el vector que va del punto terminal de  $\mathbf{b}$  al punto terminal de  $\mathbf{a}$  (véase figura 15.3.7). El producto  $\lambda \mathbf{a}$  es el vector cuya longitud es  $|\lambda|$  por  $\|\mathbf{a}\|$ , y cuya dirección es la misma que la de  $\mathbf{a}$  si  $\lambda > 0$  y contraria si  $\lambda < 0$  (véase figura 15.3.8). La ley asociativa de la suma (ecuación 8) se muestra en la figura



**Figura 15.3.8** Multiplicación de un vector por un escalar.



**Figura 15.3.9** La ley asociativa para la suma vectorial.

15.3.9. La ecuación 15, para el producto escalar, da un medio de calcular el coseno del ángulo entre dos direcciones en tres dimensiones. Es natural que, si sucede que  $\cos \theta$  es cero, entonces las dos direcciones son perpendiculares. Las componentes de  $\mathbf{b}$  en la dirección de  $\mathbf{a}$ , o viceversa, que resultan de  $\|\mathbf{b}\| \cos \theta$  y de  $\|\mathbf{a}\| \cos \theta$ , respectivamente, también se calculan fácilmente mediante la ecuación 15, exactamente igual que en el caso bidimensional. Por último, la desigualdad del triángulo

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \quad (22)$$



permanece válida en tres dimensiones. Todos estos resultados se pueden deducir empleando los mismos argumentos que en las secciones 15.1 y 15.2, y tomando en cuenta el hecho de que ahora los vectores tienen tres componentes en lugar de dos.

### EJEMPLO 1

Si

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

determinar  $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ .

Al agrupar los términos en  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} &= 2(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - 3(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) - (3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\ &= (4 - 3)\mathbf{i} + (-2 - 9)\mathbf{j} + (6 + 3)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 9\mathbf{k}. \blacksquare \end{aligned}$$

### EJEMPLO 2

Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son los mismos del ejemplo 1, calcular  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ .

Primero determinamos  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} - (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= (2 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 3)\mathbf{j} + (3 + 1)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

A continuación calculamos la longitud de este vector y obtenemos

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = [1^2 + (-4)^2 + 4^2]^{1/2} = \sqrt{33}. \blacksquare$$

### EJEMPLO 3

Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son los mismos vectores que en el ejemplo 1, calcular  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

De acuerdo con la ecuación 6 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= (2)(1) + (-1)(3) + (3)(-1) = -4. \blacksquare \end{aligned}$$

### EJEMPLO 4

Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son los mismos vectores que en el ejemplo 1 y si  $\theta$  es el ángulo entre ellos, calcular  $\cos \theta$ .

Primero calcularemos las longitudes de **a** y de **b**:

$$\|\mathbf{a}\| = [2^2 + (-1)^2 + 3^2]^{1/2} = \sqrt{14},$$

$$\|\mathbf{b}\| = [1^2 + 3^2 + (-1)^2]^{1/2} = \sqrt{11}.$$

A continuación, de acuerdo con la ecuación 15, y empleando el resultado del ejemplo 3, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \sqrt{11}} \\ &= -\frac{4}{\sqrt{154}} \cong -0.3223.\end{aligned}$$

Así,  $\theta \cong 1.899$  radianes  $\cong 108.80$  grados. Nótese que un valor negativo de  $\cos \theta$  corresponde a un ángulo  $\theta$  obtuso.  $\square$

### EJEMPLO 5

Si  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ , y  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , determinar la componente de **a** en la dirección de **b** (véase figura 15.3.10).

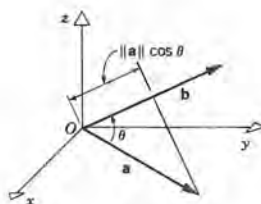


Figura 15.3.10

La cantidad que deseamos está dada por  $\|\mathbf{a}\| \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre **a** y **b**. De acuerdo con la ecuación 15, tenemos que

$$\|\mathbf{a}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|},$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\| \cos \theta &= \frac{(3)(-1) + (4)(3) + (1)(2)}{[(-1)^2 + 3^2 + 2^2]^{1/2}} \\ &= \frac{11}{\sqrt{14}} \cong 2.940.\end{aligned}$$

Del mismo modo, la componente de  $\mathbf{b}$  en la dirección de  $\mathbf{a}$  es

$$\|\mathbf{b}\|\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{11}{\sqrt{26}} \cong 2.157. \blacksquare$$

## EJEMPLO 6

Demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo debe ser un ángulo recto.

Este ejemplo muestra que muchos de los resultados conocidos de la geometría se pueden demostrar de modo eficiente empleando métodos vectoriales. Se tienen los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en la figura 15.3.11, que van desde un punto  $P$  de un círculo a los

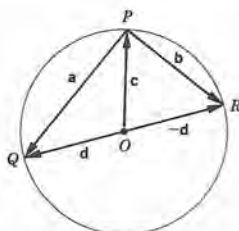


Figura 15.3.11

extremos de  $Q$  y  $R$  de un diámetro. Sean  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$  los vectores que van del centro  $O$  del círculo hasta  $P$  y  $Q$ , respectivamente, y notemos que  $\vec{OR} = -\mathbf{d}$ . Entonces

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{d} - \mathbf{c}.$$

Para determinar el ángulo entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , hacemos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot (-\mathbf{d} - \mathbf{c}) \\ &= (-\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{d}\|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que las longitudes tanto de  $\mathbf{c}$  como de  $\mathbf{d}$  son iguales al radio del círculo.  $\blacksquare$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 y 2 determinar al vector  $\vec{PQ}$ .

1.  $P(2, 1, -1)$ ,  $Q(3, -2, 4)$
2.  $P(3, 2, -4)$ ,  $Q(1, -3, 2)$
3. Si el vector de posición del punto  $P$  es  $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , y

si  $\vec{PQ} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ , determinar al vector de posición del punto  $Q$ .

4. Si el vector de posición del punto  $Q$  es  $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ , y si  $\vec{PQ} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ , determinar al vector de posición del punto  $P$ .



## 802 VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

En los problemas 5 a 8, determinar  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ .

5.  $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$

6.  $\mathbf{a} = (4, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -2, 3)$

7.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

8.  $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

En los problemas 9 a 14, calcular la magnitud del vector dado.

9.  $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$

10.  $\mathbf{a} = (2, -2, 3)$

11.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

12.  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

13. El vector de  $P(2, 1, -1)$  a  $Q(3, -2, 4)$ .

14. El vector de  $P(3, 2, -4)$  a  $Q(1, -3, 2)$ .

En los problemas 15 a 18, calcular  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  y el coseno del ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

15.  $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (2, -4, 1)$

16.  $\mathbf{a} = (4, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, -1, 1)$

17.  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

18.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

En los problemas 19 a 22 calcular la componente de  $\mathbf{b}$  en la dirección de  $\mathbf{a}$ .

19.  $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$

20.  $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (4, 0, 1)$

21.  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

22.  $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

En los problemas 23 y 24, seleccionar el número  $\lambda$  de modo que los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  sean perpendiculares (ortogonales).

23.  $\mathbf{a} = 3\lambda\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

24.  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\lambda\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \lambda\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

En los problemas 25 a 28, determinar todos los vectores unitarios  $\mathbf{u}$  que satisfagan la condición dada.

25. En la misma dirección que  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ .

26. En la dirección opuesta a  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ .

27. En la dirección de  $P(-2, 0, 4)$  a  $Q(1, -1, 1)$ .

28. Perpendicular (ortogonal) a  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

29. Emplear métodos vectoriales para demostrar que las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares si y sólo si el paralelogramo es un rombo, esto es, todos sus lados tienen la misma longitud.

30. Emplear métodos vectoriales para demostrar que para cualquier paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados.

31. Determinar el ángulo  $\theta$  formado entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

32. Determinar el ángulo  $\theta$  formado entre las diagonales de un paralelogramo cuyos lados son  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  y  $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .

33. Calcular el ángulo comprendido entre la diagonal de un cubo y la diagonal de una de sus caras.

34. Si  $A, B, C, D$  y  $E$  son puntos dados cualesquiera, demostrar que  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{0}$  si y sólo si  $E$  coincide con  $A$ . Se obtiene un resultado semejante para cualquier número de puntos.

## 15.4 EL PRODUCTO VECTORIAL

Anteriormente en el capítulo definimos el producto escalar de dos vectores. Este tipo de multiplicación produce siempre un escalar (número). En tres dimensiones hay otro modo de multiplicar dos vectores, en el cual el resultado es otro vector. Se usa el símbolo  $\times$  para indicar este tipo de multiplicación, y por tanto se le llama **producto vectorial**.

El producto vectorial se puede definir en forma geométrica o analítica. La definición geométrica es la siguiente. Primero, si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  ó  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . En general, sean  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  vectores distintos de cero, y sea  $\theta$  el ángulo entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  tal que  $0 \leq$

$\theta \leq \pi$  (véase figura 15.4.1). Entonces se define  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  como el vector que tiene las siguientes propiedades:

- (a)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  es perpendicular tanto a  $\mathbf{a}$  como a  $\mathbf{b}$ .
- (b) La magnitud de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  está dada por

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta.$$

- (c) La dirección de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  se escoge de modo que cuando  $\mathbf{a}$  se hace girar un ángulo  $\theta$  hacia  $\mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  forman un sistema de vectores orientado según la mano derecha (véase figura 15.4.2).

Esta definición geométrica de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  no depende de la introducción de un sistema de coordenadas. Desafortunadamente, tampoco es un modo muy adecuado para calcular el producto vectorial de un par dado de vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . Sin embargo, si lo introducimos, y si suponemos que

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$$

entonces será posible demostrar, partiendo de las propiedades (a), (b) y (c), que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  está dado por

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \quad (1)$$

La ecuación 1 da un método directo de calcular  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  si se conocen las componentes de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . En el problema 27 se describe la deducción de la ecuación 1 partiendo de (a), (b) y (c).

En este caso tomaremos el punto de vista contrario. Esto es, definiremos el producto vectorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  en forma analítica mediante la ecuación 1; a continuación deduciremos algunas de sus propiedades, incluyendo las (a), (b) y (c).

En primer lugar deduciremos una fórmula para  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  que se recuerde con más facilidad que la ecuación 1. Nótese que los coeficientes de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  en la ecuación 1 se pueden escribir como determinantes de orden dos, y entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

La ecuación 2 tiene la misma forma que el desarrollo de un determinante de orden tres, en cofactores de los elementos del primer renglón. Aprovechando la ventaja de esa observación, podemos escribir  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  en forma de un determinante:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$



Figura 15.4.1

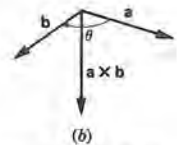
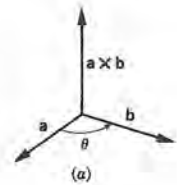


Figura 15.4.2

Por comodidad hemos usado la notación de determinantes en la ecuación 3. Sin embargo, debemos recordar que los determinantes son números, mientras que la expresión del lado derecho de la ecuación 3 debe ser el mismo vector que el de la ecuación 1, y por tanto, hablando con propiedad, el de la ecuación 3 no es un determinante. Esta inconsistencia no tiene consecuencias prácticas, y la notación (3) en forma de determinante es extremadamente útil para manejar productos vectoriales. Si alguna vez hay duda acerca de la interpretación adecuada de la ecuación 3, siempre podremos regresar a la ecuación 1.

### EJEMPLO 1

Si  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  y  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ , determinar  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

Aplicando la ecuación 3, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}. \blacksquare\end{aligned}$$

A continuación presentaremos una discusión de algunas de las propiedades del producto vectorial. La mayor parte de este estudio es acerca del caso en el que  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  son distintos de cero. Sin embargo, los resultados son válidos, quizá en un sentido degenerado, si cualquier vector es cero.

**Propiedad 1.** Si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  o si  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , entonces  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Por ejemplo, si  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , entonces  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , y todos los términos del lado derecho de la ecuación 1 son cero. El argumento es semejante en el caso de que  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

**Propiedad 2.**  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  es perpendicular tanto a  $\mathbf{a}$  como a  $\mathbf{b}$ . Para demostrar que  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  son perpendiculares, calcularemos el producto escalar de los dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . De acuerdo con la ecuación 1, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= 0,\end{aligned}$$

como los términos del lado derecho se anulan por pares. También, de acuerdo con la expresión (3) en determinantes, podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$



$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

porque el primer y segundo renglón son iguales. De modo semejante podemos demostrar que  $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ , y por tanto que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  también es perpendicular a  $\mathbf{b}$ .

La anterior es una de las propiedades más útiles del producto vectorial. Es una manera fácil para producir *un vector que sea perpendicular a dos vectores dados*.

## EJEMPLO 2

Determinar un vector unitario que sea perpendicular tanto a  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  como a  $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ .

En el ejemplo 1 encontramos que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ , y de acuerdo con la propiedad 2, sabemos que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  es perpendicular tanto a  $\mathbf{a}$  como a  $\mathbf{b}$ . Para determinar un vector unitario en la dirección de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , debemos dividir este producto entre su propia magnitud

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = [4^2 + (-7)^2 + (-5)^2]^{1/2} = \sqrt{90}.$$

Así, el vector unitario que se desea es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{90}} (4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}).$$

Nótese que  $-\mathbf{u}$  también es un vector unitario perpendicular a  $\mathbf{a}$  y a  $\mathbf{b}$ . ■

**Propiedad 3.** La magnitud de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  está dada por

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta, \quad (4)$$

en la cual  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , de tal modo que  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

La demostración de la ecuación 4 requiere de álgebra un poco complicada. Comenzaremos escribiendo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 \\ &\quad + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\ &\quad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Emplearemos el artificio de sumar y restar la cantidad

$$a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$$

al lado derecho de la ecuación 5 y reagrupar los términos en forma diferente. El resultado es

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.\end{aligned}\quad (6)$$

Empleando el hecho de que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta, \quad (7)$$

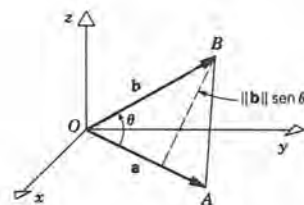
podemos reformular la ecuación 6 como sigue:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

que es equivalente a la ecuación 4.

En la figura 15.4.3 aparece una interpretación geométrica sencilla de la ecuación 4. Dos lados del triángulo  $OAB$  se representan mediante los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  y las

**Figura 15.4.3** Área del triángulo  $OAB = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| (\sin \theta)/2 = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|/2$ .



longitudes de esos lados son  $\|\mathbf{a}\|$  y  $\|\mathbf{b}\|$ , respectivamente. La longitud de la altura perpendicular a  $\mathbf{a}$  es  $\|\mathbf{b}\| \sin \theta$  y

$$\text{Área del triángulo } OAB = \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|. \quad (8)$$

En otras palabras, la magnitud del producto vectorial  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$  es el doble del área del triángulo definido por  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ . También,  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$  es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ .

### EJEMPLO 3

Calcular el área del triángulo cuyos vértices están en los puntos  $A(-1, 1, 1)$ ,  $B(1, 2, 3)$  y  $C(1, -1, -1)$ .

Primero formaremos los vectores

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -2, -2)$$

que quedan a lo largo de los lados del triángulo. A continuación,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k},$$

y

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = [(2)^2 + (8)^2 + (-6)^2]^{1/2} = \sqrt{104}.$$

Así, el área del triángulo es  $\sqrt{104}/2 = \sqrt{26} \cong 5.099$ . ■

**Propiedad 4.** Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son dos vectores distintos de cero, entonces  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  si y sólo si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son paralelos.

Como  $\|\mathbf{a}\| \neq 0$  y  $\|\mathbf{b}\| \neq 0$ , entonces de acuerdo con la ecuación 4,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  si y sólo si  $\sin \theta = 0$ .

Así,  $\theta = 0$  o bien  $\theta = \pi$ , en cuyo caso  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  tienen la misma dirección, o bien direcciones opuestas; en ambos casos son paralelos.

Esta propiedad da un criterio de paralelismo para dos vectores que es análoga al criterio de ortogonalidad basada en el producto escalar.

**Propiedad 5.** Si  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  ni son cero ni son paralelos. Sea el plano  $xy$  colocado de modo que contenga a  $\mathbf{a}$  y a  $\mathbf{b}$  y orientado de tal manera que  $\mathbf{a}$  apunte en la dirección de eje  $x$  positivo. Entonces  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}$ , donde  $a_1 > 0$ , y  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ . En consecuencia

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \mathbf{k}. \quad (9)$$

Si  $b_2 > 0$ , entonces  $\mathbf{b}$  queda en el primer o segundo cuadrante del plano  $xy$  (véase figura 15.4.4a). En este caso,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  queda a lo largo del eje  $z$  positivo, y  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  forman un sistema de orientación hacia la derecha.

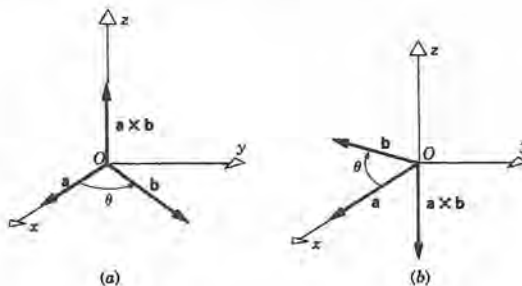


Figura 15.4.4

Por otro lado, si  $b_2 < 0$ , entonces  $\mathbf{b}$  queda en el tercero o cuarto cuadrante del plano  $xy$ , como se ve en la figura 15.4.4b. Entonces  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  queda a lo largo del eje  $z$  negativo, pero de nuevo  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  forman un sistema de orientación hacia la derecha.



Nótese que  $b_2$  no puede ser cero ya que  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  no son paralelos.

Obsérvese que con la deducción de las propiedades 1 a 5 hemos demostrado que cada parte de la definición geométrica del producto vectorial se puede establecer a partir de la definición analítica (1). También, sea  $\mathbf{n}$  el vector unitario perpendicular a  $\mathbf{a}$  y a  $\mathbf{b}$  de tal modo que  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{n}$  formen un sistema orientado hacia la derecha. Entonces se puede escribir

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| (\sin \theta) \mathbf{n} \quad (10)$$

(véase figura 15.4.5).

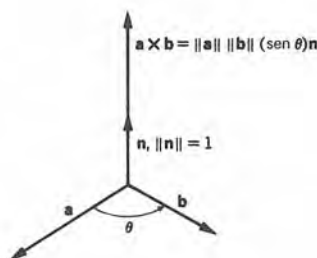


Figura 15.4.5

**Propiedad 6.** El producto vectorial no es conmutativo; de hecho

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}). \quad (11)$$

Se ve con mucha facilidad este resultado en la expresión (3) del determinante. Invertir el orden de los factores en  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  significa intercambiar el segundo y tercer renglones del determinante, con lo cual cambia de signo. También, las propiedades 3 y 5 implican que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  y  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  tienen la misma magnitud, pero direcciones opuestas, lo cual es equivalente a la ecuación 11.

**Propiedad 7.**  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Esto resulta de la expresión (3) del determinante. Si  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ , entonces los dos últimos renglones del determinante son idénticos y el determinante es cero. Esta propiedad también se deduce inmediatamente de la ecuación 4, ya que  $\theta = 0$  si  $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ .

**Propiedad 8.** La tabla de multiplicar para los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  es la siguiente:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad (12)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad (13)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Se pueden obtener las ecuaciones 12 sustituyendo  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  en la ecuación 1. Se pueden obtener las ecuaciones 13 y 14 del mismo modo o empleando las propiedades 6 y 7, respectivamente.

**Propiedad 9.** El producto vectorial satisface las leyes distributivas

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad (15a)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (15b)$$

Además, si  $\alpha$  es cualquier número, entonces

$$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (16a)$$

y

$$\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (16b)$$

La deducción de estos resultados involucra el empleo directo de la ecuación 1 y se deja al lector.

### Productos de tres vectores

Hay varias maneras de multiplicar tres vectores, mediante combinaciones de los productos escalares y vectoriales. Si  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son vectores arbitrarios, entonces a la cantidad  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  se le llama **triple producto escalar**; es el producto escalar de los dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ , y por tanto es un escalar. De acuerdo con la ecuación 2 tenemos que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

y por consiguiente podemos escribir

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (18)$$

La ecuación 17 es tan sólo el desarrollo del determinante (18) en cofactores de los elementos del primer renglón.

De modo semejante obtenemos

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad (19)$$

se necesitan dos intercambios de renglones para pasar del primer determinante al segundo en la ecuación 19, y esto deja inalterado el valor del determinante. Igualmente tenemos que

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (20)$$

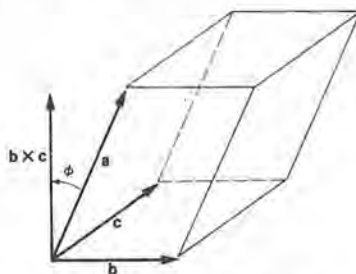
De las ecuaciones 18, 19 y 20 se ve que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (21)$$

Además, como el producto escalar es conmutativo, los productos  $(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}$ ,  $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$  y  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  también son iguales a los de la ecuación 21. Estos seis triples productos escalares tienen la propiedad de que sus factores aparecen en el orden “natural”  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  (o  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ , o  $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ). Si se invierte el orden de dos factores cualquiera, entonces también se invierte el signo del producto. Por ejemplo

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (22)$$

El triple producto escalar tiene una interpretación geométrica útil. Consideremos el paralelepípedo definido por los vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  (véase figura 15.4.6). Sea la base



**Figura 15.4.6** Volumen del paralelepípedo =  $|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$ .

del paralelepípedo el paralelogramo definido por  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$ ; su área es  $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$ . El vector  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  es perpendicular a  $\mathbf{b}$  y a  $\mathbf{c}$  y la altura del paralelepípedo es  $\|\mathbf{a}\| \cos \phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ . Entonces el valor absoluto del producto escalar de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  está dado por

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| &= \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \|\mathbf{a}\| |\cos \phi| \\ &= (\text{área de la base})(\text{altura}) \\ &= \text{volumen del paralelepípedo}. \end{aligned} \quad (23)$$

Si  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ , entonces el volumen del paralelepípedo es cero, lo cual significa que los vectores  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son coplanares.

## EJEMPLO 4

Determinar si los cuatro puntos  $P(-1, 1, 0)$ ,  $Q(2, 0, 3)$ ,  $R(1, 1, -1)$  y  $S(1, -1, -3)$  son coplanares. También, calcular el volumen del paralelepípedo cuyos lados son  $PQ$ ,  $PR$  y  $PS$ .



Primero definiremos los vectores

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \\ \vec{PR} &= 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \\ \vec{PS} &= 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

A continuación calculamos el triple producto escalar

$$\vec{PQ} \cdot (\vec{PR} \times \vec{PS}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -22.$$

Como  $\vec{PQ} \cdot (\vec{PR} \times \vec{PS}) \neq 0$ , los puntos no son coplanares. Además, de acuerdo con la ecuación 23, el volumen del paralelepípedo es igual a 22. ■

Una segunda manera de multiplicar tres vectores produce la expresión  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , que siempre es un vector, y se llama **triple producto vectorial de a, b y c**. En los problemas 25 y 26 se presentan algunas propiedades de este producto.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 determinar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

- $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
- $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$
- $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = b_3\mathbf{k}$

Sean  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ , y  $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Calcular la expresión dada en los problemas 7 a 12.

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$
- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

En los problemas 13 y 14 determinar un vector unitario  $\mathbf{u}$  que sea perpendicular a  $\mathbf{a}$  y a  $\mathbf{b}$ .

- $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
- $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

En los problemas 15 y 16, calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .

- $P(0, 0, 0)$ ,  $Q(0, 3, 0)$ ,  $R(2, 5, 8)$
- $P(-1, -2, 1)$ ,  $Q(2, 1, 3)$ ,  $R = (1, 4, 0)$

En los problemas 17 y 18, calcular el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son  $PQ$ ,  $PR$  y  $PS$ . También determinar si los puntos dados son coplanares.

- $P(0, 0, 0)$ ,  $Q(1, 1, 0)$ ,  $R(-1, 3, 0)$ ,  $S(1, 0, 4)$
- $P(-1, 2, 2)$ ,  $Q(2, 1, 4)$ ,  $R(-1, 4, 1)$ ,  $S(3, 0, 5)$

En los problemas 19 y 20 determinar el valor de  $\lambda$  para el cual los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  son coplanares.

- $P(2, 4, -1)$ ,  $Q(0, \lambda, 1)$ ,  $R(-2, 1, 2)$ ,  $S(1, 1, 0)$
- $P(0, 2, -3)$ ,  $Q(1, 1, 1)$ ,  $R(2, 0, -1)$ ,  $S(\lambda, 2\lambda, -\lambda)$

21. Considerar un triángulo en el plano  $xy$ , cuyos vértices están en los puntos  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  y  $P_3(x_3, y_3)$ . Demostrar que el área  $A$  de este triángulo es

## 812 VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

$$A = \frac{1}{2} \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

en la cual abs quiere decir que se debe emplear el valor absoluto del determinante.

## 22. Deducir las leyes distributivas del producto vectorial

$$(a) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

$$(b) (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

23. Si  $\alpha$  es cualquier número, demostrar que

$$(a) (\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$(b) \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

24. Demostrar que  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$  para dos vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  cualesquiera.\*25. Triple producto vectorial. El producto  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  siempre produce un vector, y por tanto se conoce como el triple producto vectorial. En este problema mostraremos cómo deducir una fórmula para este producto.

(a) Para vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  cualesquiera, demostrar que

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = c_1 \mathbf{b} - b_1 \mathbf{c}. \quad (i)$$

(b) Deducir ecuaciones semejantes a la de la parte (a) para  $\mathbf{j} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  y  $\mathbf{k} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ .

(c) Emplear los resultados de las partes (a) y (b) para demostrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{c} \quad (ii)$$

para cualquier vector  $\mathbf{a}$ .

\*26. No asociatividad del producto vectorial. En este problema trataremos de comparar  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  con  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .

(a) Consultar el problema 25 y deducir una ecuación para  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .

(b) Comparar el resultado de la parte (a) con el de la parte (c) del problema 25 y determinar cuándo  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .

\*27. En este problema partiremos de la definición geométrica del producto vectorial e indicaremos cómo deducir la fórmula (1) del texto. Sea  $\mathbf{d} = d_1 \mathbf{i} + d_2 \mathbf{j} + d_3 \mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Determinaremos  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  del siguiente modo:

(a) Como  $\mathbf{d}$  es perpendicular tanto a  $\mathbf{a}$  como a  $\mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{a} = 0$  y  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{b} = 0$ . A continuación demostrar que

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) d_1 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) d_2, \quad (i)$$

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2) d_3 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) d_1. \quad (ii)$$

(b) Como  $\|\mathbf{d}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ , demostrar que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2. \end{aligned} \quad (iii)$$

Obsérvese que este paso es esencialmente el inverso de la deducción de la propiedad 3 en el texto.

(c) Suponer que  $\|\mathbf{d}\| \neq 0$  y emplear los resultados de las partes (a) y (b) para demostrar que

$$d_1 = \pm (a_2 b_3 - a_3 b_2). \quad (iv)$$

Entonces, si  $d_1 \neq 0$ , emplear los resultados de la parte (a) para demostrar que

$$d_2 = \pm (a_3 b_1 - a_1 b_3), \quad (v)$$

$$d_3 = \pm (a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (vi)$$

Obsérvese que se debe emplear el signo más en las tres ecuaciones (iv), (v) y (vi), o bien se debe emplear el signo menos en las tres.

(d) Sean  $\mathbf{a} = \mathbf{i}$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ ; demostrar que la definición requiere que  $\mathbf{d} = \mathbf{k}$ . Demostrar que, en consecuencia, se debe emplear el signo más en las ecuaciones (iv), (v) y (vi), lo cual demuestra la ecuación 1.

(e) Modificar el argumento anterior si  $d_1 = 0$ , pero  $d_2$  ó  $d_3$  es distinto de cero. Obsérvese que si  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , entonces  $\mathbf{a}$  es paralelo a  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ .

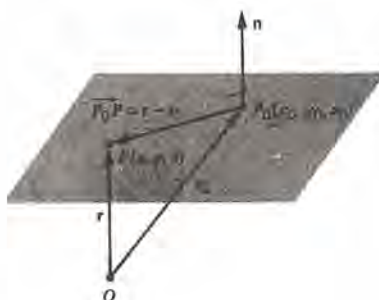
## 15.5 PLANOS Y RECTAS

El álgebra de los vectores que hemos desarrollado hasta aquí en este capítulo se puede emplear de modo muy eficiente para estudiar las propiedades de los planos y de las rectas en el espacio tridimensional.

### Planos

Se puede definir un plano del modo siguiente: sea  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  un punto dado y sea  $\mathbf{n}$  un vector dado que determina una dirección en  $P_0$ . Entonces el **plano** que contiene a  $P_0$  y que es perpendicular a  $\mathbf{n}$  consta de todos aquellos puntos  $P(x, y, z)$  tales que el vector de  $P_0$  a  $P$  es perpendicular a  $\mathbf{n}$ . Al vector  $\mathbf{n}$  se le conoce como un **vector normal** al plano.

Lo anterior se muestra en la figura 15.5.1. Sean  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{r}$  los vectores de posición de



**Figura 15.5.1** Plano que pasa por  $P_0$  y es perpendicular a  $\mathbf{n}$ .

$P_0$  y  $P$ , respectivamente. Entonces  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  es la suma vectorial de  $P_0$  y  $P$ . Los vectores  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{n}$  deben mutuamente ser perpendiculares, así que

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1)$$

La ecuación 1 es la ecuación vectorial básica del plano que pasa por  $P_0$  y es perpendicular a  $\mathbf{n}$ . Esta relación fundamental también es útil para deducir ecuaciones de planos que satisfacen otros conjuntos de condiciones geométricas. En esos casos se pueden necesitar algunos cálculos preliminares para hallar un vector normal  $\mathbf{n}$  o el vector de posición  $\mathbf{r}_0$  de un punto en el plano.

### EJEMPLO 1

Deducir una ecuación del plano perpendicular al vector  $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  y que contiene al punto  $P(4, 2, -3)$  (véase la figura 15.5.2).



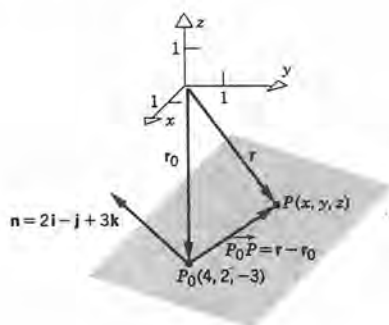


Figura 15.5.2

En este caso, el vector  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 &= \overrightarrow{P_0P} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \\ &= (x - 4)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z + 3)\mathbf{k}.\end{aligned}\quad (2)$$

Por tanto, la ecuación 1 se transforma en

$$\begin{aligned}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} &= [(x - 4)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z + 3)\mathbf{k}] \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= 2(x - 4) - (y - 2) + 3(z + 3) = 0,\end{aligned}$$

o sea

$$2x - y + 3z = -3. \quad \blacksquare \quad (3)$$

## EJEMPLO 2

Deducir una ecuación del plano que contiene los tres puntos  $A(1, 3, 3)$ ,  $B(3, 5, 0)$ , y  $C(2, 5, 2)$  (véase figura 15.5.3).

Para determinar un vector  $\mathbf{n}$  que sea normal (perpendicular) al plano requerido, primero determinaremos dos vectores en el plano, para después formar su producto vectorial. Por ejemplo, los vectores

$$\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{AC} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

quedan en el plano, de manera que

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad (4)$$

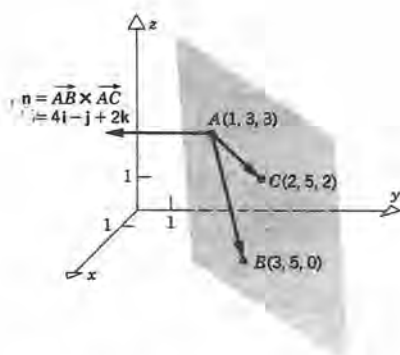


Figura 15.5.3

es un vector normal. Para  $\mathbf{r}_0$  podemos seleccionar el vector de posición de cualquier punto conocido del plano, por ejemplo el punto A; en este caso,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ . Con esta selección de  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{n}$ , la ecuación 1 se transforma en

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} &= [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}] \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \\ &= 4(x - 1) - (y - 3) + 2(z - 3) = 0, \end{aligned}$$

la cual se simplifica a

$$4x - y + 2z = 7. \quad \blacksquare \quad (5)$$

A continuación regresaremos a la ecuación 1. Se puede decir que

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} \quad (6)$$

y que

$$\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}. \quad (7)$$

Entonces de la ecuación 1 se obtiene

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0, \quad (8)$$

o sea

$$n_1x + n_2y + n_3z = c, \quad (9)$$

de donde

$$c = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \quad (10)$$

es una constante. La ecuación 9 indica que un plano tiene siempre una ecuación que es

lineal en  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Obsérvese que los coeficientes de  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la ecuación 9 son las componentes del vector normal  $\mathbf{n}$ .

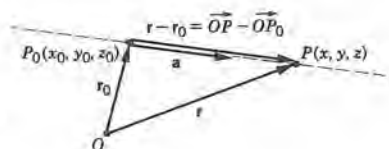
### EJEMPLO 3

Hallar un vector normal al plano  $3x + 2y - 4z = 8$ .

Las componentes de este vector se pueden obtener de los coeficientes de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, de la ecuación del plano. Así,  $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ , o cualquier múltiplo escalar de este vector es normal al plano dado. ■

### Rectas

Un método conveniente para describir una recta consiste en especificar un punto de ella y un vector paralelo a ella. Sea  $L$  la recta que pasa por el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  que tiene la misma dirección que el vector  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  (véase figura 15.5.4). Sea



**Figura 15.5.4** Recta que pasa por  $P_0$  en la dirección de  $\mathbf{a}$ .

$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$  el vector de posición de  $P_0$  y sea  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  el vector de posición de un punto  $P$  arbitrario de la recta  $L$ . Entonces, como se ve en la figura 15.5.4, la diferencia entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_0$  es proporcional a  $\mathbf{a}$ . Si representamos mediante  $t$  al factor de proporcionalidad, entonces

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = at \quad \text{o} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + at \quad (11)$$

es una **ecuación paramétrica vectorial** de la recta  $L$ . Todos los puntos de la recta se generan permitiendo que  $t$  tome todos los valores reales posibles. En relación a la ecuación 5 tenemos el conjunto de **ecuaciones paramétricas escalares**

$$\begin{aligned} x - x_0 &= a_1 t & x &= x_0 + a_1 t \\ y - y_0 &= a_2 t & y &= y_0 + a_2 t \\ z - z_0 &= a_3 t & z &= z_0 + a_3 t. \end{aligned} \quad (12)$$

Tanto en la ecuación 11 como en la 12, el factor de proporcionalidad  $t$  es el parámetro.

Si despejamos a  $t$  de las ecuaciones 12 e igualamos las expresiones que resultan, obtenemos

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (13)$$



A las ecuaciones 13 se les llama **ecuaciones simétricas**, o **cartesianas**, de la recta  $L$ . Obsérvese que al igualar cualquier par de términos de las ecuaciones 13 se obtiene la ecuación de un plano; por ejemplo, de los dos primeros términos de las ecuaciones 13 tenemos que

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0, \quad (14)$$

que corresponde a un plano paralelo al eje  $z$ . Podemos obtener tres ecuaciones de esas a partir de las ecuaciones 13; sin embargo, sólo dos de ellas son independientes. Así, las ecuaciones 13 describen a la recta  $L$  como la recta de la intersección de dos planos.

Al formular las ecuaciones 13 hemos supuesto que todos los números  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son distintos de cero. Si ello no es así, entonces se deben modificar las ecuaciones 13. Por ejemplo, supongamos que  $a_1 = 0$ . Entonces las ecuaciones 12 se transforman en

$$x = x_0, \quad y = y_0 + a_2 t, \quad z = z_0 + a_3 t, \quad (15)$$

y las ecuaciones 13 quedan sustituidas por

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (16)$$

El caso es semejante si  $a_2 = 0$ , o bien  $a_3 = 0$ .

Por último, supongamos que dos de los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son cero; por ejemplo, sean  $a_1 = a_2 = 0$ . Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 12,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  y  $z = z_0 + a_3 t$ , donde  $t$  es arbitraria. Como  $x$  y  $y$  son fijas, esto corresponde a una recta paralela al eje  $z$ .

#### EJEMPLO 4

Deducir ecuaciones paramétricas vectorial, paramétrica escalar y simétrica de la recta que pasa por el punto  $(1, -2, 3)$  y es paralela al vector  $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

La recta se muestra en la figura 15.5.5. De acuerdo con la ecuación 11, la ecuación paramétrica vectorial es

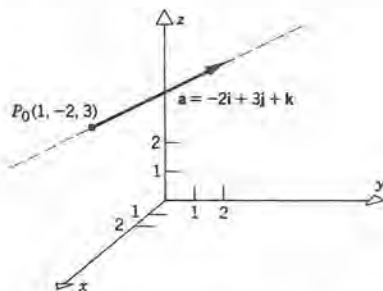


Figura 15.5.5

$$(x - 1)\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k} = (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})t. \quad (17)$$

Las ecuaciones escalares correspondientes son

$$x = 1 - 2t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 3 + t. \quad (18)$$

A continuación, despejando a  $t$  de esas ecuaciones, llegamos a las ecuaciones simétricas

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 3}{1}. \quad \blacksquare \quad (19)$$

### EJEMPLO 5

Deducir ecuaciones paramétrica y simétrica de la recta que contiene los dos puntos  $P(-2, 1, 5)$  y  $Q(2, 3, -2)$  (véase figura 15.5.6).

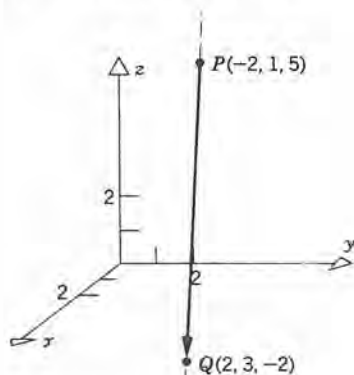


Figura 15.5.6

Para determinar las ecuaciones de la recta necesitamos conocer un punto de ella y un vector paralelo a ella. Tanto el punto  $P$  como el  $Q$  pueden servir como punto de la recta.  $\vec{PQ} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$  define a un vector paralelo a la recta. Si escogemos a  $P$  como punto de la recta, obtendremos las ecuaciones paramétricas

$$x = -2 + 4t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 5 - 7t, \quad (20)$$

y las ecuaciones simétricas

$$\frac{x + 2}{4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 5}{-7}. \quad \blacksquare \quad (21)$$

Obsérvese que tanto la ecuación vectorial (11) como las ecuaciones paramétricas (12) son lineales con respecto al parámetro  $t$ . Naturalmente, se pudo haber empleado cualquier otra letra en lugar de  $t$  para representar a la variable independiente. También, nótese que si se sustituye a  $\mathbf{a}$  por cualquier otro vector paralelo  $\lambda\mathbf{a}$ , siendo  $\lambda$  una

constante, entonces las ecuaciones de la recta no cambian. Esto queda claro de inmediato de acuerdo con las ecuaciones 13, en las cuales el efecto es multiplicar por  $\lambda$  el denominador en cada término, el cual a continuación se puede cancelar. Análogamente, en la ecuación 11, tendríamos  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}\lambda t$ ; si definimos un nuevo parámetro  $s = \lambda t$ , entonces  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}s$ , que tiene la misma forma que la ecuación 11.

A veces se necesita formar ecuaciones paramétricas o simétricas para la recta de la intersección de dos planos  $P_1$  y  $P_2$ . Para hacerlo necesitamos un vector paralelo a la recta. Para determinar este vector comenzamos escribiendo un vector  $\mathbf{u}$  que sea normal al plano  $P_1$  y un vector  $\mathbf{v}$  que sea normal al plano  $P_2$ . Entonces el vector  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es perpendicular a los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  y por tanto, es paralela a la recta de la intersección de los planos  $P_1$  y  $P_2$  (véase la figura 15.5.7). Empleando al vector  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  y las coordenadas de cualquier punto de la recta de la intersección, podemos formular de inmediato las ecuaciones para la recta requerida, como se muestra en el siguiente ejemplo.



Figura 15.5.7

### EJEMPLO 6

Determinar ecuaciones paramétrica y simétrica de la recta de la intersección de los dos planos

$$2x - 3y + z = 8, \quad x + 2y - z = -3. \quad (22)$$

Los vectores  $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$  son las normales respectivas a los planos dados. Por tanto, el producto vectorial

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \quad (23)$$

es paralelo a la recta de la intersección.

También necesitamos un punto a través del cual pase la recta, esto es, un punto cuyas coordenadas satisfagan las dos ecuaciones 22. Como es un conjunto de dos ecuaciones con tres variables, en general podemos asignar un valor arbitrario a una de las variables para despejar a continuación las otras dos. Por ejemplo, si  $z = 0$ , entonces tenemos que

$$2x - 3y = 8, \quad x + 2y = -3,$$

lo que da  $x = 1$ ,  $y = -2$ . Así, el punto  $(1, -2, 0)$  queda en la recta de la intersección. Empleando las coordenadas de este punto, y el vector (23), obtenemos las ecuaciones paramétricas

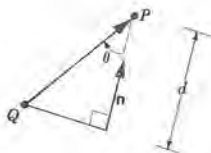
$$x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 7t. \quad (24)$$

Las ecuaciones simétricas correspondientes son



$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{7} \quad \blacksquare \quad (25)$$

Otro problema que se presenta con frecuencia es calcular la distancia  $d$  de un punto  $P$  a un plano. Ésta es la misma que la distancia más corta de  $P$  a cualquier punto del plano, o sea, la distancia medida a lo largo de la recta que pasa por el punto dado, que también es perpendicular al plano dado (véase figura 15.5.8). Esta distancia se calcula



**Figura 15.5.8** La distancia  $d = |\vec{QP} \cdot \mathbf{n}|$

con facilidad empleando métodos vectoriales. Sea  $Q$  cualquier punto del plano y sea  $\vec{QP}$  el vector que va de  $Q$  a  $P$ . Entonces, la distancia requerida  $d$  es la magnitud de la componente de  $\vec{QP}$  en la dirección normal al plano. En símbolos,

$$d = \|\vec{QP}\| \cos \theta = |\vec{QP} \cdot \mathbf{n}|, \quad (26)$$

en la cual  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal al plano. Obsérvese que  $\vec{QP} \cdot \mathbf{n}$  es positivo o negativo, dependiendo de si  $\mathbf{n}$  queda del mismo lado del plano que  $P$ , o no. Las barras de valor absoluto en la ecuación 26 toman en cuenta inmediatamente ambos casos, de manera que no importa qué vector normal unitario se use.

### EJEMPLO 7

Calcular la distancia del punto  $P(2, -1, 4)$  al plano  $3x + 4y - 2z = 6$ .

Se puede localizar un punto  $Q$  en el plano, por ejemplo, haciendo que  $x = 0$ ,  $y = 0$  y despejando a  $z$  de la ecuación del plano. Esto da  $z = -3$  y por tanto el punto  $Q(0, 0, -3)$  está en el plano. Entonces el vector  $\vec{QP}$  está dado por

$$\vec{QP} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

$3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  define a un vector normal al plano y entonces el vector unitario  $\mathbf{n}$  en esa dirección es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{29}} (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}).$$

De acuerdo con la ecuación 26, obtenemos

$$d = \frac{1}{\sqrt{29}} |6 - 4 - 14| = \frac{12}{\sqrt{29}}.$$

Nótese que  $\vec{QP} \cdot \mathbf{n} < 0$  en este caso, y que por tanto se necesita el valor absoluto para obtener la distancia del punto al plano. ■

## PROBLEMAS

1. Deducir una ecuación del plano que contiene al punto  $(2, -1, 3)$  y es perpendicular al vector  $\mathbf{n} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ .
2. Deducir una ecuación del plano que contiene al punto  $(3, 0, -4)$  y es perpendicular al vector  $\mathbf{n} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ .
3. Deducir una ecuación del plano que contiene a los puntos  $P(1, -2, 3)$ ,  $Q(-2, 0, 1)$ ,  $R(0, 3, 2)$ , y  $S(0, 3, 2)$ .
4. Deducir una ecuación del plano que contiene los puntos  $P(2, 1, -1)$ ,  $Q(4, 0, 2)$  y  $R(-1, -2, 1)$ .
5. Deducir una ecuación del plano que contiene al punto  $(3, 1, -2)$ , y que es paralelo al plano  $2x - y + 5z = 7$ .
6. Deducir una ecuación del plano que contiene al punto  $(4, -1, 3)$  y que es perpendicular a la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

7. Deducir una ecuación del plano que contiene las dos rectas

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$$

y

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}.$$

8. Deducir una ecuación del plano que contiene el punto  $(3, 2, -1)$  y que es perpendicular a los dos planos  $x - 2y + z = 4$ ,  $y - 2x + y + 3z = 7$ .
9. Hallar una ecuación del plano que contiene al punto  $(2, 2, -3)$  y a la recta

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

10. Deducir una ecuación del plano que contiene al punto  $(1, -3, 2)$  y que es perpendicular al segmento de recta que une a ese punto con  $(3, 0, -2)$ .

11. Deducir ecuaciones paramétricas escalares de la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}.$$

12. Hallar las ecuaciones simétricas de la recta  $x = -1 + 6t$ ,  $y = 2 - 3t$ ,  $z = 5 + 4t$ .
13. Hallar ecuaciones paramétricas escalares de la recta que pasa por el punto  $(2, -1, 3)$  y que es paralela al vector  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ .
14. Hallar ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto  $(-3, 2, 4)$  que es paralela al vector  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ .
15. Hallar ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos  $(4, 2, 3)$  y  $(2, -1, 6)$ .
16. Hallar ecuaciones paramétricas escalares de la recta que pasa por el punto  $(-1, 0, 3)$ , que es paralela a la recta

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{-1}.$$

17. Hallar ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto  $(-2, 6, 1)$  que es perpendicular al plano  $y + 2z = 7$ .
18. Hallar ecuaciones paramétricas escalares para la recta que pasa por el punto  $(3, -1, 4)$  que es perpendicular al plano  $2x + 3y - z = 9$ .
19. Hallar ecuaciones paramétricas escalares de la recta de la intersección de los planos  $x - 2z = 4$ , y  $3y + z = -9$ .
20. Hallar ecuaciones simétricas de la recta de la intersección de los planos  $x - y + z = 7$  y  $2x + 3y - 5z = 9$ .

## 822 VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

21. Calcular la distancia del punto  $(2, 1, -5)$  al plano  $x + y + z = 7$ .
22. Calcular la distancia del punto  $(-1, -3, 2)$  al plano  $2x + 3y - z = 12$ .
23. ¿Es paralela la recta  $x = 2 - 3t, y = 2t, z = -1 + 4t$  al plano  $2x - y + 2z = 20$ ?
24. ¿Es paralela la recta

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

al plano  $2x + 3y - z = 11$ ?

25. Localizar el punto en el que la recta

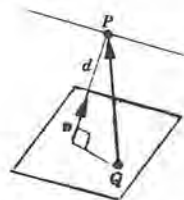
$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

interseca al plano  $2x + 3y - z = 11$ .

26. Si  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  son vectores que van del origen a tres puntos de un plano, demostrar que el vector  $(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{p})$  es normal al plano.

### Distancia de una recta a un plano

Si una recta es paralela a un plano, entonces la distancia  $d$  de ella al plano es la distancia de cualquier punto  $P$  de la recta al punto más cercano del plano, esto es, la distancia medida a lo largo de la recta que pasa por  $P$  y que es perpendicular al plano; véase la figura 15.5.9, en la cual  $Q$  es cualquier punto del plano y  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal a éste.



**Figura 15.5.9** Distancia de una recta a un plano.

27. Calcular la distancia de la recta

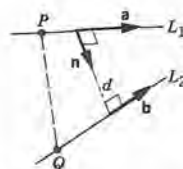
$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$$

al plano  $2x - y + 2z = 20$ .

28. Calcular la distancia de la recta  $x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 2 - 3t$  al plano  $5x - 4y + 2z = 12$ .

### Distancia entre dos rectas

En tres dimensiones, dos líneas rectas pueden no intersectarse y tampoco ser paralelas. La distancia entre dos rectas de éstas se define como la distancia mínima entre dos puntos, estando uno de ellos en cada una de las dos rectas. Esta distancia es la longitud del segmento de recta que une a las dos rectas y que es perpendicular a ambas (véase figura 15.5.10), donde  $P$  y  $Q$  son puntos de las dos rectas



**Figura 15.5.10**

Distancia entre dos rectas que no se intersectan.

y  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores paralelos a ellas. ¿Cómo se puede hallar un vector perpendicular tanto a  $\mathbf{a}$  como a  $\mathbf{b}$ ?

29. Calcular la distancia entre las dos rectas

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2}$$

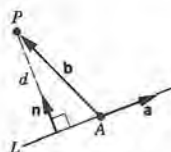
y

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}.$$

30. Calcular la distancia entre las rectas  $x = 2t, y = -1 - t, z = 3 + t$  y  $x = 2 - t, y = -1 + 3t, z = t$ .

### Distancia de un punto a una recta

La distancia  $d$  de un punto  $P$  a una recta  $L$  es la distancia desde  $P$  hasta el punto más cercano de la recta, esto es, la distancia medida a lo largo de una recta que pasa por  $P$  y que es perpendicular a  $L$ . La figura 15.5.11 muestra el punto  $P$  y la recta  $L$ , así como un vector  $\mathbf{n}$  a lo largo de la perpendicular a  $L$ . Obsérvese que  $\mathbf{n}$  está en el plano que determinan  $P$  y  $L$ .



**Figura 15.5.11**

Distancia de un punto a una recta.



31. Determinar la distancia que hay desde el punto  $(2, 1, 1)$  hasta la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}.$$

32. Calcular la distancia del punto  $(1, 3, -4)$  a la recta  $x = -2 + t, y = 4 - t, z = 1 + 3t$ .
33. Sea  $\mathbf{a}$  el vector de posición de un punto fijo  $A$  que no es el origen, y sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto  $P$ . Describir la superficie sobre la que está  $P$  si  $\mathbf{r}$  se sujeta a cada una de las condiciones siguientes:

$$(a) \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (c) (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$(b) |\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}| = c\|\mathbf{a}\|, \quad c > 0.$$

34. Demostrar que  $\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$  es un vector unitario que forma ángulos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , respectivamente, con los ejes coordenados positivos. Los coeficientes de  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  se conocen como los cosenos directores de cualquier recta paralela a este vector unitario.
35. Demostrar que las rectas  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a}$  y  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu \mathbf{b}$  se intersecan si, y sólo si  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ .

## 15.6 FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE

Como en la última sección, sea  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  el vector de posición del punto  $P(x, y, z)$ . Vimos que la ecuación de una recta en el espacio tridimensional se puede expresar como

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1)$$

en la cual  $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$  es el vector de posición de un punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  de la recta y  $\mathbf{a}$  es un vector paralelo a ella. El lado derecho de la ecuación 1 es una función valuada en los vectores, o simplemente, función vectorial, de la variable real simple  $t$ . Se llama función vectorial porque a cada valor de la variable independiente  $t$ , la ecuación 1 le asigna un vector  $\mathbf{r}$  único.

En esta sección veremos funciones vectoriales más generales, y comenzaremos a examinar cómo se les pueden aplicar las operaciones del cálculo. Supongamos que se nos da la función vectorial definida por

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad (2)$$

en la cual  $f, g$  y  $h$  son funciones escalares de la variable  $t$ . Como  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , se sigue que al igualar las componentes de  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , respectivamente, de la ecuación 2, que

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t). \quad (3)$$

Así, la ecuación vectorial (2) es equivalente al conjunto de las tres ecuaciones escalares (3). Estas ecuaciones 3 forman un conjunto de ecuaciones paramétricas en el espacio  $xyz$ ; si  $f, g$  y  $h$  son funciones lineales de  $t$ , entonces tendremos de nuevo las ecuaciones paramétricas de una recta, que aparecieron en la sección 15.5. Las ecuaciones 3 generalizan también los conjuntos de ecuaciones paramétricas en el plano  $xy$  que estudiamos en la sección 5.5. Gran parte de esa discusión anterior se puede aplicar al caso presente, pero en lugar de ello basaremos en esta ocasión nuestro tratamiento en la ecuación vectorial (2). Este método tiene algunas ventajas. Quizá la más importante es que da una base geométrica de la que se puede obtener provecho de la intuición

geométrica propia. Además, las ecuaciones vectoriales son las mismas en dos o en tres dimensiones y, por tanto se puede, en general, considerar los dos casos a la vez. Finalmente, la notación vectorial es compacta y conduce a una brevedad asombrosa de la expresión.

Es fácil ver el significado geométrico de la ecuación 2. Supongamos que  $t$  queda en un intervalo  $a \leq t \leq b$ . Entonces, para cada valor de  $t$  en el intervalo, la ecuación 2 determina un vector  $\mathbf{r}$  que se puede considerar como el vector de posición de un punto  $P$ . El conjunto de puntos obtenidos de esta manera forman un arco, o curva (véase figura 15.6.1). Si consideramos que  $t$  representa el tiempo, entonces la curva es la trayectoria

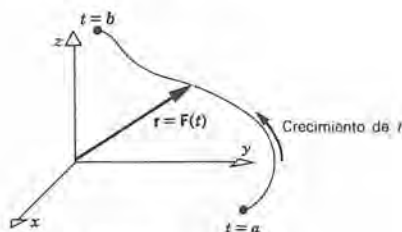


Figura 15.6.1

seguida por una partícula que se mueve conforme a la ecuación 2. La flecha de la figura 15.6.1 indica la dirección del movimiento. Los puntos  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(a)$  y  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(b)$  se llaman **punto inicial** y **punto terminal**, respectivamente, de la curva. Si coinciden, entonces se dice que la curva es **cerrada** (véase figura 15.6.2).

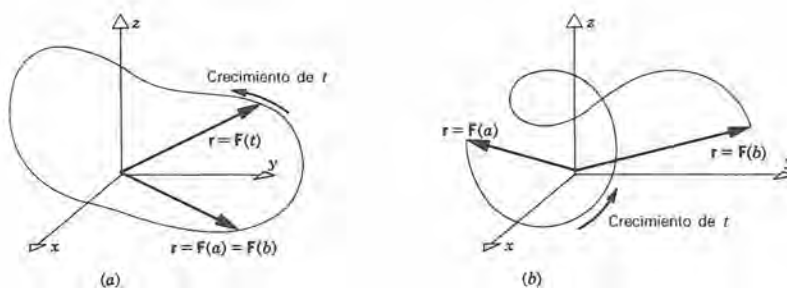


Figura 15.6.2 (a) Curva cerrada:  $\mathbf{F}(b) = \mathbf{F}(a)$ .  
(b) Curva no cerrada:  $\mathbf{F}(b) \neq \mathbf{F}(a)$ .

## EJEMPLO 1

Hacer un dibujo de la gráfica del arco

$$\mathbf{r} = -\frac{t}{2}\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi t}{2}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (4)$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

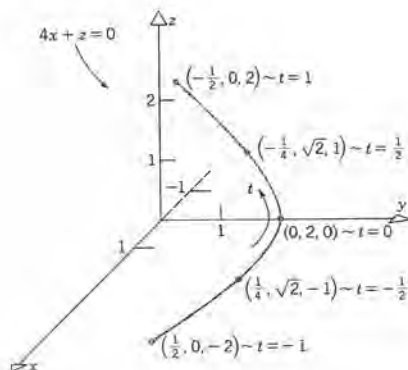
$$x = -\frac{t}{2}, \quad y = 2 \cos \frac{\pi t}{2}, \quad z = 2t.$$

Notamos, de acuerdo con la primera y tercera ecuación, que  $4x + z = 0$  para toda  $t$ ; así, el arco queda en el plano  $4x + z = 0$ . En la tabla 15.1 registramos las coordenadas

**Tabla 15.1** Algunos valores de  $t$  y  $r$  que satisfacen  $r = -(t/2)\mathbf{i} + 2 \cos(\pi t/2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$  para  $-1 \leq t \leq 1$ .

$t$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$r$	$(\frac{1}{2}, 0, -2)$	$(\frac{1}{4}, \sqrt{2}, -1)$	$(0, 2, 0)$	$(-\frac{1}{4}, \sqrt{2}, 1)$	$(-\frac{1}{2}, 0, 2)$

de los puntos que corresponden a diversos valores de  $t$ . A medida que  $t$  varía desde  $-1$  hasta  $1$ , la componente  $x$  de  $r$  disminuye, y aumenta la componente  $z$ ; la componente  $y$  aumenta para  $-1 \leq t \leq 0$ , y disminuye para  $0 \leq t \leq 1$ . Además, las componentes  $x$  y  $z$  son funciones impares de  $t$ , mientras que la componente  $y$  es una función par. Empleando esta información, podremos trazar el dibujo que se muestra en la figura 15.6.3. ■



**Figura 15.6.3**

## EJEMPLO 2

Hacer un dibujo de la curva

$$r = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}, \quad -\infty < t < \infty \quad (5)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\omega$  son números positivos dados.



A la ecuación 5 le corresponden las ecuaciones escalares

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt, \quad (6)$$

de donde se concluye que  $x^2 + y^2 = a^2$ . Así, todos los puntos de la curva están a una distancia  $a$  del eje  $z$ ; en consecuencia la curva queda en la superficie de un cilindro circular recto de radio  $a$  cuyo eje es el eje  $z$ . Cuando  $t$  crece, una partícula que sigue la trayectoria (5) se mueve uniformemente en la dirección del eje  $z$  positivo, y al mismo tiempo da vueltas y vueltas en la superficie cilíndrica en sentido levógiro, visto desde la dirección del eje  $z$  positivo. A la gráfica de la ecuación 5 se le llama **hélice** (circular) y se muestra en la figura 15.6.4. Por ejemplo, una partícula que se mueve a lo largo de

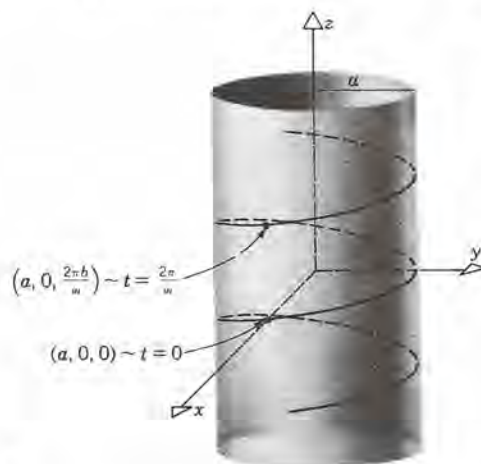


Figura 15.6.4

las cuerdas de un tornillo sigue una trayectoria helicoidal. Nótese que cuando  $t = 0$ , las coordenadas de la partícula son  $(a, 0, 0)$ , mientras que cuando  $t = 2\pi/\omega$  son  $(a, 0, 2\pi b/\omega)$ . Así, en las ecuaciones 5 y 6,  $\omega$  es la frecuencia del movimiento alrededor del eje  $z$  y  $b$  mide la inclinación de la curva en la dirección del eje  $z$ . ■

Se puede extender en forma directa el concepto de límite que se enunció en la definición 2.2.1 para las funciones escalares, al caso de las funciones vectoriales. El enunciado

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L} \quad (7)$$

quiere decir que cuando  $t$  tiende a  $t_0$ , el vector  $\mathbf{F}(t)$  tiende al vector  $\mathbf{L}$ . Más exactamente, la distancia  $\|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\|$  se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo que  $|t - t_0|$  sea lo suficientemente pequeño, sin ser cero. En símbolos, para toda  $\epsilon > 0$ , existe una  $\alpha > 0$  correspondiente, que tiene la propiedad de que si

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad (8)$$

entonces

$$\|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| < \epsilon. \quad (9)$$

Para ver con mayor claridad el significado de la desigualdad (9), expresemos a  $\mathbf{F}(t)$  y a  $\mathbf{L}$  en sus componentes:

$$\mathbf{F}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{L} = L_1\mathbf{i} + L_2\mathbf{j} + L_3\mathbf{k}. \quad (10)$$

Entonces

$$\mathbf{F}(t) - \mathbf{L} = [f(t) - L_1]\mathbf{i} + [g(t) - L_2]\mathbf{j} + [h(t) - L_3]\mathbf{k}$$

y

$$\|\mathbf{F}(t) - \mathbf{L}\| = \{[f(t) - L_1]^2 + [g(t) - L_2]^2 + [h(t) - L_3]^2\}^{1/2}. \quad (11)$$

En términos geométricos, la expresión de la ecuación 9 es la distancia desde el punto  $P_0$ , cuyo vector de posición es  $\mathbf{L}$ , hasta el punto  $P$ , cuyo vector de posición es  $\mathbf{F}(t)$

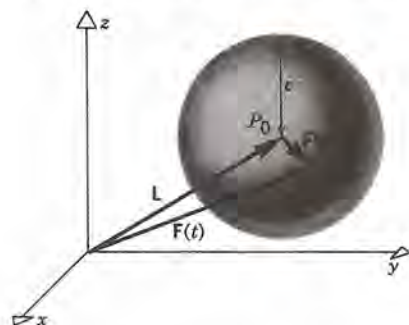


Figura 15.6.5

(véase figura 15.6.5). La ecuación 9 dice que esta distancia debe ser menor que  $\epsilon$ ; en otras palabras, si se ha de satisfacer la ecuación 9, entonces  $P$  debe estar dentro de la esfera cuyo centro está en  $P_0$  y tiene radio  $\epsilon$ . Si es cierta la ecuación 9, entonces también debemos tener

$$|f(t) - L_1| < \epsilon, \quad |g(t) - L_2| < \epsilon, \quad |h(t) - L_3| < \epsilon. \quad (12)$$

Como consecuencia, podemos asegurar que si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L}$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = L_3. \quad (13)$$

También es posible modificar el argumento que acabamos de presentar, para demostrar que también la ecuación 7 es consecuencia de la ecuación 13. Así, el límite 7 del vector es equivalente a los tres límites escalares (13). En otras palabras, *los límites de las funciones vectoriales se pueden tomar componente a componente*. En consecuencia, todas las cuestiones relacionadas con los límites de las funciones vectoriales se pueden reducir a las cuestiones correspondientes relacionadas con los límites de las funciones

escalares. En especial, los resultados familiares del teorema 2.3.1a, b y c acerca de los límites de sumas, restas y productos de funciones escalares se pueden aplicar a los límites de las funciones vectoriales. Omitiremos aquí la lista explícita de esas propiedades.

### EJEMPLO 3

Si  $\mathbf{F}(t) = (2 + t)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + \sin(\pi t/2)\mathbf{k}$ , determinar el  $\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{F}(t)$ .

De acuerdo con la discusión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{F}(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} (2 + t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow 1} (-t^2)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow 1} \sin \frac{\pi t}{2} \mathbf{k} \\ &= 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}. \blacksquare\end{aligned}$$

### EJEMPLO 4

Si  $\mathbf{F}(t)$  es la misma del ejemplo 3, y si  $\mathbf{G}(t) = (t/2)\mathbf{i} + \cos(\pi t/2)\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$ , determinar  $\lim_{t \rightarrow 1} [\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)]$ .

Tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 1} [\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)] = \lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{F}(t) + \lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{G}(t)$$

en la cual  $\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{F}(t)$  se determinó en el ejemplo 3, y

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{G}(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t}{2} \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow 1} \cos \frac{\pi t}{2} \mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow 1} (-2t)\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{i} - 2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Entonces, por consiguiente,

$$\lim_{t \rightarrow 1} [\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)] = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{k}\right) = \frac{7}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}. \blacksquare$$

La propiedad de continuidad (definición 2.5.2) también se traslada directamente de las funciones escalares a las vectoriales. La función vectorial  $\mathbf{F}$  es continua en  $t_0$  si  $\mathbf{F}$  está definida en  $t_0$  y si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0). \quad (14)$$

Esto significa ni más ni menos que el vector límite  $\mathbf{L}$  de la discusión anterior debe ser el mismo que  $\mathbf{F}(t_0)$ . Así, la ecuación 14 es equivalente a las tres ecuaciones escalares



$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = g(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = h(t_0), \quad (15)$$

de modo que  $\mathbf{F}$  es continua en  $t_0$  si y sólo si cada una de las tres funciones escalares  $f$ ,  $g$  y  $h$  son continuas allí. Las dudas acerca de la continuidad de las funciones vectoriales se pueden reducir por tanto a las cuestiones correspondientes a las de las funciones escalares, y con ello evitamos una discusión más complicada en este lugar.

Consideremos ahora la derivada de una función vectorial. Para una función dada  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$  formamos primero el cociente de diferencias

$$\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t}. \quad (16)$$

Nótese que  $\Delta \mathbf{F}$  es un vector y que  $\Delta t$  es un escalar, de modo que el cociente  $\Delta \mathbf{F}/\Delta t$  es un vector. A continuación pasamos al límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  para obtener la derivada, que representaremos mediante  $\mathbf{F}'(t)$ , o también por  $d\mathbf{F}/dt$ . Así,

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{F}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t}, \quad (17)$$

siempre que exista el límite.

Para comprender el significado geométrico de la derivada de una función vectorial veamos el caso que se presenta en la figura 15.6.6. Los vectores  $\mathbf{F}(t)$  y  $\mathbf{F}(t + \Delta t)$  son

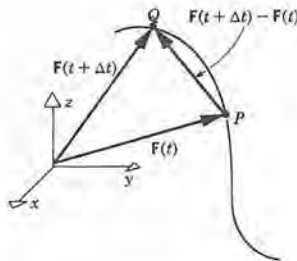


Figura 15.6.6

los vectores de posición de los puntos  $P$  y  $Q$ , respectivamente, en la curva definida mediante la función vectorial  $\mathbf{F}$ . El vector  $\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)$ , o sea  $\overrightarrow{PQ}$ , es el vector secante entre los dos puntos  $P$  y  $Q$  de la curva. El vector que aparece en el cociente de diferencias (16) es proporcional a  $\overrightarrow{PQ}$ , y de hecho está dado por  $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ . Si existe el límite en la ecuación 17, esto es, si  $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$  tiene un límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , y si el límite no es cero, entonces este vector límite  $\mathbf{F}'(t)$  es tangente a la curva  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$  en el punto  $P$  y apunta en dirección de crecimiento de  $t$  (véase la figura 15.6.7).

La recta tangente a la curva  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$  en un punto  $P$  que corresponde a  $t = t_0$  es la recta que pasa por  $P$  y que es paralela al vector  $\mathbf{F}'(t_0)$ . Análogamente, el plano normal a la curva en  $P$  es el plano que pasa por  $P$  y que es perpendicular a  $\mathbf{F}'(t_0)$ .

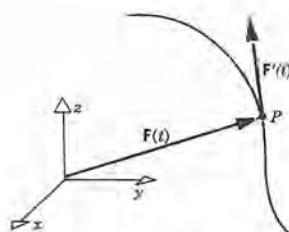


Figura 15.6.7

Alternativamente, si vemos a la ecuación  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$  como la que describe a la posición de una partícula en movimiento en el tiempo  $t$ , entonces  $\mathbf{F}'(t)$  es la razón de cambio de la posición de la partícula con respecto al tiempo. En otras palabras,  $\mathbf{F}'(t)$  es la **velocidad** de la partícula, y es tangente a la trayectoria en la que se mueve la partícula.

A continuación deduciremos una fórmula para  $\mathbf{F}'(t)$  en términos de las componentes de  $\mathbf{F}(t)$ . Expresando el cociente de diferencias (16) en términos de las componentes, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k} \right. \\ &\quad \left. - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}] \right\} \\ &= \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \mathbf{j} \\ &\quad + \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Se puede calcular el límite del lado derecho de la ecuación 18 cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  componente a componente. De este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t} \\ &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (19)$$

Así,  $\mathbf{F}'(t)$  es el vector cuyas componentes son las derivadas de las componentes correspondientes de  $\mathbf{F}(t)$ . En consecuencia, se puede calcular  $\mathbf{F}'(t)$  aplicando los métodos y fórmulas que ya se describieron para la derivación de las funciones escalares, a cada una de las componentes de  $\mathbf{F}(t)$ .

### EJEMPLO 5

Determinar la derivada de

$$\mathbf{F}(t) = 3 \cos \frac{\pi t}{2} \mathbf{i} + 3 \sin \frac{\pi t}{2} \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}. \quad (20)$$

También determinar el plano normal y la recta tangente en el punto  $(0, 3, 2)$ .

En la figura 15.6.8 se muestra la gráfica de la ecuación 20; véase el ejemplo 2;

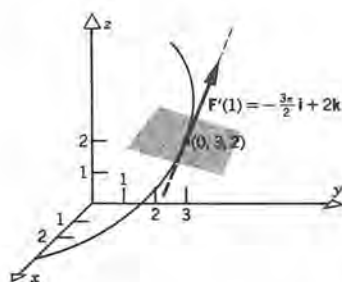


Figura 15.6.8

hagamos que  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $\omega = \pi/2$ . Al derivar la ecuación 20 componente a componente obtenemos

$$\mathbf{F}'(t) = -3 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2} \mathbf{i} + 3 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \quad (21)$$

El punto  $(0, 3, 2)$  corresponde a  $t = 1$ , y por tanto un vector tangente allí es

$$\mathbf{F}'(1) = -3 \frac{\pi}{2} \mathbf{i} + 2\mathbf{k}. \quad (22)$$

El plano normal tiene como ecuación

$$-3 \frac{\pi}{2} (x - 0) + 0(y - 3) + 2(z - 2) = 0$$

o bien

$$3\pi x - 4z = -8. \quad (23)$$

La recta tangente tiene como ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \left(-3 \frac{\pi}{2} \mathbf{i} + 2\mathbf{k}\right)\tau; \quad (24)$$

en forma escalar, las ecuaciones correspondientes son

$$x = -3 \frac{\pi}{2} \tau, \quad y = 3, \quad z = 2 + 2\tau. \quad (25)$$



Para evitar alguna posible confusión entre las representaciones paramétricas de la curva y de la recta tangente, hemos empleado  $\tau$  en lugar de  $t$  como parámetro en la recta tangente. También nos hubiera servido igualmente bien cualquier otro símbolo. Nótese que  $\tau = 0$  corresponde al punto  $(0, 3, 2)$ . ■

Si  $\mathbf{F}'(t)$  no está definida para determinado valor de  $t$  debido a que el límite de la ecuación 17 no existe, entonces la curva  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$  no tiene tangente allí, ni la partícula en movimiento tiene velocidad en ese punto. Esto corresponde al caso en el cual la derivada de una función escalar no existe. Sin embargo, si  $\mathbf{F}'(t) = \mathbf{0}$  para alguna  $t$ , entonces la tangente a la curva  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$  tampoco está determinada por  $\mathbf{F}'(t)$ , porque el vector cero no tiene una dirección única. En tal caso la partícula en movimiento tiene una velocidad igual a cero en ese punto, aunque la dirección del vector velocidad no se especifica. Este caso no tiene contraparte en las funciones escalares.

Como en la sección 5.5 para las curvas planas, se dice que el arco  $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$  para  $a \leq t \leq b$  es **suave** si tiene una recta tangente que varía en forma continua. Una condición de suficiencia para esto es que  $\mathbf{F}'(t)$  sea continua y que sea distinta de  $\mathbf{0}$  en todos los puntos del intervalo. Si una curva continua consta de un número finito de arcos suaves unidos extremo a extremo, entonces se dice que la curva es **suave por pedazos** (véase figura 15.6.9).

La derivación de las sumas, las restas o los productos de funciones vectoriales se lleva a cabo del mismo modo que con las funciones escalares. Tenemos entonces los siguientes resultados principales, en los cuales  $\mathbf{u}(t)$  y  $\mathbf{v}(t)$  son funciones vectoriales arbitrariamente derivables

$$\frac{d}{dt} [c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t)] = c_1 \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) + c_2 \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) \quad \text{para cualquier } c_1 \text{ y } c_2 \text{ constantes; (26)}$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t); \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t). \quad (28)$$

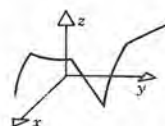
En la ecuación 28, el orden de los factores es importante, mientras que en la ecuación 27 no lo es. Se pueden comprobar las ecuaciones 26 a 28 escribiendo ambos lados de cada ecuación en términos de las componentes de  $\mathbf{u}(t)$  y  $\mathbf{v}(t)$ .

## EJEMPLO 6

Si

$$\mathbf{u}(t) = (2 + t) \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + \sin \frac{\pi t}{2} \mathbf{k}$$

y



**Figura 15.6.9**  
Curva suave por pedazos.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{t}{2} \mathbf{i} + \cos \frac{\pi t}{2} \mathbf{j} - 2t \mathbf{k},$$

determinar  $(d/dt)[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$  y evaluar esta expresión cuando  $t = 1$ .

Tenemos que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{i} - 2t \mathbf{j} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2} \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación 27, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \\ &= \left( \frac{t}{2} - 2t \cos \frac{\pi t}{2} - 2t \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi t}{2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{2+t}{2} - \frac{\pi}{2} t^2 \sin \frac{\pi t}{2} - 2 \sin \frac{\pi t}{2} \right) \\ &= 1 + t - 2t \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi t}{2} \\ &\quad - \left( \frac{\pi}{2} t^2 + 2 \right) \sin \frac{\pi t}{2}. \end{aligned}$$

Cuando  $t = 1$ , tenemos que

$$\left. \frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \right|_{t=1} = 1 + 1 - \left( \frac{\pi}{2} + 2 \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6, determinar el límite que se pide.

1.  $\lim_{t \rightarrow 0} [e^{-t} \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + (t^2 - 1) \mathbf{k}]$

2.  $\lim_{t \rightarrow \pi} (e^{2t} \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k})$

3.  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{1}{t} \mathbf{i} + \frac{t-2}{t+1} \mathbf{j} + \frac{2t}{t-1} \mathbf{k} \right)$

4.  $\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{1}{t} \mathbf{i} + \frac{t-2}{t+1} \mathbf{j} + \frac{t-1}{2t} \mathbf{k} \right)$

5.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\sin 2t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} + \tan t \mathbf{k})$

6.  $\lim_{t \rightarrow 2} \left( \frac{t^2 - 4}{t - 2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{t} - \sqrt{2}}{t - 2} \mathbf{j} \right)$

En los problemas 7 a 9, suponer que existen tanto  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t)$  como  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t)$ , y demostrar la relación dada.

7.  $\lim_{t \rightarrow t_0} [c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t)] =$

$c_1 \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t) + c_2 \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t)$  para toda  $c_1, c_2$

## 834 VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

$$8. \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \left[ \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t) \right] \cdot \left[ \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) \right]$$

$$9. \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \left[ \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t) \right] \times \left[ \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) \right]$$

En los problemas 10 a 12, sea  $\mathbf{u}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$ , y  $\mathbf{v}(t) = e^{2t}\mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ . Emplear los resultados de los problemas 7 a 9 para calcular cada uno de los límites dados.

$$10. \lim_{t \rightarrow 0} [3\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{v}(t)]$$

$$11. \lim_{t \rightarrow 0} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

$$12. \lim_{t \rightarrow 0} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

En los problemas 13 a 16 determinar  $\mathbf{F}'(t)$ .

$$13. \mathbf{F}(t) = t^2 \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2 \sin t \mathbf{k}$$

$$14. \mathbf{F}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + te^t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$$

$$15. \mathbf{F}(t) = 2t \sin 2t \mathbf{i} - 3 \cos t \mathbf{j} + 3(2t - 1)^2 \mathbf{k}$$

$$16. \mathbf{F}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} - 6t \mathbf{k}$$

En los problemas 17 a 19, suponer que  $\mathbf{u}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + (t^2 - 1)\mathbf{k}$ , y  $\mathbf{v}(t) = e^{2t}\mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ , y determinar la derivada que se pide.

$$17. \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)]$$

$$18. \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

$$19. \frac{d}{dt} [3\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{v}(t)]$$

En los problemas 20 a 24, suponer que  $\mathbf{u}(t) = 2t \mathbf{i} - t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ , y  $\mathbf{v}(t) = t^2 \mathbf{i} + 6t \mathbf{j} + 5t \mathbf{k}$  y determinar la derivada indicada.

$$20. \frac{d}{dt} [4\mathbf{u}(t) - 3\mathbf{v}(t)]$$

$$21. \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

$$22. \frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

$$23. \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$$

$$24. \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \times \mathbf{u}(t)]$$

$$25. \text{ Se tiene la curva definida por } \mathbf{r} = (2t - 3)\mathbf{i} - 4t^2 \mathbf{j}.$$

(a) Hacer un dibujo de la curva.

(b) Determinar un vector unitario que sea tangente a la curva en el punto donde  $t = -1$ .

(c) Deducir ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva en el punto donde  $t = -1$ .

(d) Determinar el plano normal a la curva en el punto en el que  $t = -1$ .

$$26. \text{ Se tiene la curva definida por } \mathbf{r} = \cosh t \mathbf{i} + 2 \sinh t \mathbf{k}.$$

(a) Hacer un dibujo de la curva.

(b) Determinar un vector unitario tangente a la curva en el punto en el que  $t = 0$ .

(c) Deducir ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el punto en el que  $t = 0$ .

(d) Determinar el plano normal a la curva en el punto en el que  $t = 0$ .

$$27. \text{ Se tiene la curva definida por } \mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}.$$

(a) Determinar un vector tangente a la curva en el punto en el que  $t = 0$ .

(b) Deducir ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el punto en el que  $t = 0$ .

(c) Determinar el plano normal a la curva en el punto en el que  $t = 0$ .

$$28. \text{ Se tiene la curva definida por } \mathbf{r} = (t^2 + 3)\mathbf{i} - 3t \mathbf{j} + 2t^2 \mathbf{k}.$$

(a) Determinar un vector unitario tangente a la curva en el punto  $(4, -3, 2)$ .

(b) Deducir ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en  $(4, -3, 2)$ .

(c) Determinar el plano normal a la curva en  $(4, -3, 2)$ .

$$29. \text{ Las curvas dadas por } \mathbf{r} = (t^2 + 3)\mathbf{i} - 3t \mathbf{j} + 2t^2 \mathbf{k} \text{ y } \mathbf{r} = 2\tau \mathbf{i} + (\tau - 5)\mathbf{j} + (\tau^2/2)\mathbf{k} \text{ se intersectan en el punto } (4, -3, 2). \text{ Determinar el ángulo formado entre las tangentes a las dos curvas en su punto de intersección.}$$

$$30. \text{ Las curvas } \mathbf{r} = \cos \pi t \mathbf{i} - 2 \sin \pi t \mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k} \text{ y } \mathbf{r} = (2\tau + 1)\mathbf{i} + 4\tau^2 \mathbf{j} + \cos \pi \tau \mathbf{k} \text{ se intersectan en el punto } (1, 0, 1). \text{ Determinar el ángulo } \theta \text{ formado entre las tangentes a las dos curvas en el punto de intersección.}$$

$$31. \text{ Suponer que la posición de una partícula en movimiento es, para el tiempo } t, \mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j} \text{ en la cual } a, b \text{ y } \omega \text{ son números positivos.}$$

(a) Hacer un dibujo de la curva.

(b) Determinar la velocidad de la partícula en cualquier momento.

(c) Determinar la componente de la velocidad que se dirige hacia el origen.

$$32. \text{ Si } \mathbf{u}(t) \text{ es un vector derivable de longitud constante, demostrar que } d\mathbf{u}/dt \text{ es perpendicular a } \mathbf{u} \text{ para toda } t.$$



33. Comprobar la ecuación 27 calculando primero  $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$  y a continuación derivando la expresión resultante.
34. Comprobar la ecuación 28 calculando primero  $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ , y a continuación derivando la expresión resultante.

## 15.7 LONGITUD DE ARCO Y CURVATURA

En esta sección trataremos algunas de las propiedades geométricas de las curvas en el espacio tridimensional. Nuestra explicación se basa en la descripción de esa curva mediante una función vectorial. Sea la función vectorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (1)$$

y sea  $C$  la curva correspondiente. En toda esta sección supondremos que las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  son derivables tantas veces como sea necesario, para que la demostración tenga sentido.

Primero, limitemos nuestra atención a la parte de la curva para la cual  $a \leq t \leq b$  y preguntémonos cómo podemos definir y calcular la longitud  $l(a, b)$  de este arco (véase figura 15.7.1). Ya hemos estudiado la longitud de arco en dos dimensiones en la sección

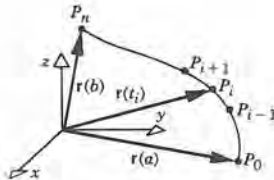


Figura 15.7.1

7.3 y en este caso el tratamiento será muy semejante. Comenzaremos dando una partición del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos, de modo que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b;$$

la norma de la partición es la longitud del subintervalo más grande. Para un punto  $t_i$  arbitrario de la partición, podemos evaluar  $\mathbf{r}(t_i)$  y determinar el punto  $P_i$  correspondiente en la curva. Como se indica en la figura 15.7.2, a continuación trazamos los segmentos de recta de  $P_0$  a  $P_1$ , de  $P_1$  a  $P_2$ , y así sucesivamente. Sumando las longitudes de todos esos segmentos de recta, obtenemos la longitud de una poligonal de aproximación a la curva dada. La longitud del segmento de recta que une a  $P_{i-1}$  con  $P_i$  es (véase figura 15.7.3)

$$\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \|\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})\|. \quad (2)$$

Por tanto, la longitud de la poligonal de aproximación es

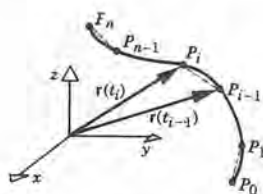


Figura 15.7.2

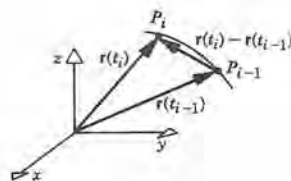


Figura 15.7.3

$$\sum_{i=1}^n \| \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \|. \quad (3)$$

Si la suma (3) tiende a un límite cuando la norma de la partición tiende a cero, entonces este valor límite se define como la longitud de la curva:

$$l(a, b) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \| \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1}) \|. \quad (4)$$

La expresión del lado derecho de la ecuación 4 se puede convertir entonces en una integral. Multiplicando y dividiendo el  $i$ ésimo término de la suma por  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$ , obtenemos

$$l(a, b) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})}{\Delta t_i} \right\| \Delta t_i. \quad (5)$$

Como en la sección 7.3, es posible demostrar que si  $\mathbf{r}'(t)$  es continua, entonces existe el límite de la ecuación 5, y la longitud  $l$  del arco está dada por la integral

$$l(a, b) = \int_a^b \| \mathbf{r}'(t) \| dt. \quad (6)$$

Ya que

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}, \quad (7)$$

la ecuación 6 se puede poner también en la forma

$$l(a, b) = \int_a^b [f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)]^{1/2} dt. \quad (8)$$

Para una curva en el plano  $xy$ , la ecuación 8 se reduce a

$$l(a, b) = \int_a^b [f'^2(t) + g'^2(t)]^{1/2} dt \quad (9)$$

que es una de las ecuaciones que se dedujeron en la sección 7.3. Como en el caso en

dos dimensiones que se estudió en la sección 7.3, se dice que una curva cuyo arco tiene longitud finita es **rectificable**.

### EJEMPLO 1

Determinar la longitud de arco de la curva

$$\mathbf{r}(t) = 2t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2} \mathbf{k} \quad (10)$$

entre el origen y el punto  $Q(2, 3, \frac{2}{3})$  (véase figura 15.7.4).

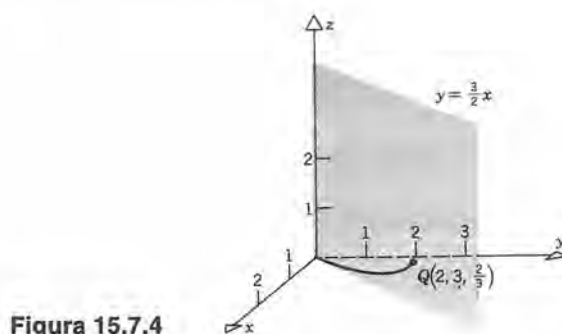


Figura 15.7.4

Nótese que la curva queda en el plano  $y = 3x/2$ ; esto se puede ver si se elimina  $t$  de entre las primeras dos componentes de  $\mathbf{r}$ . Obsérvese también que  $t = 0$  corresponde al origen y que  $t = 1$  corresponde al punto  $Q$ . Al derivar la ecuación 10 encontramos que

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \sqrt{t} \mathbf{k}$$

y así

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = (4 + 9 + t)^{1/2} = \sqrt{13 + t}.$$

De acuerdo con la ecuación 6, la longitud de arco que se pide es

$$\begin{aligned} l(0, 1) &= \int_0^1 \sqrt{13 + t} \, dt = \frac{2}{3} (13 + t)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} [(14)^{3/2} - (13)^{3/2}] \cong 3.674. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (11)$$

### EJEMPLO 2

Se tiene la curva representada por



$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{k}. \quad (12)$$

Determinar la longitud del arco que une a  $P_0(1, 0, 0)$  que corresponde a  $t = 0$ , con el punto  $Q(0, 1, \pi^2/8)$  que corresponde a  $t = \pi/2$  (véase figura 15.7.5). Además, determinar la longitud del arco desde  $P_0$  hasta el punto  $P$  que corresponde a un valor arbitrario de  $t$ .

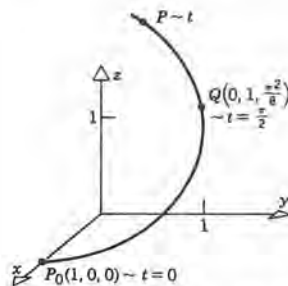


Figura 15.7.5

Al derivar la ecuación 12 obtenemos

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}; \quad (13)$$

así,

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = [(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + t^2]^{1/2} = \sqrt{1 + t^2}. \quad (14)$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación 6, la longitud de arco de  $P_0$  a  $Q$  es

$$l\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + t^2} dt. \quad (15)$$

La sustitución  $t = \tan \theta$  transforma esta integral en

$$l\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\arctan \pi/2} \sec^3 \theta d\theta,$$

que se puede evaluar como se describió en la sección 9.4. El resultado es

$$\begin{aligned} l\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2} [\sec \theta \tan \theta + \ln |\sec \theta + \tan \theta|] \Big|_0^{\arctan \pi/2} \\ &= \frac{1}{2} [t \sqrt{1 + t^2} + \ln |\sqrt{1 + t^2} + t|] \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} + \ln \left( \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \cong 2.079. \end{aligned} \quad (16)$$

Representemos la longitud de arco de  $P_0$  a  $P$  mediante  $s(t)$  para destacar que depende del valor de  $t$ . Entonces, empleando de nuevo la ecuación (6), tenemos que

$$\begin{aligned} s(t) &= l(0, t) = \int_0^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_0^t \sqrt{1 + \tau^2} d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Nótese que hemos cambiado la variable de integración a  $\tau$  para evitar confusiones con la variable independiente  $t$  en el límite superior de integración. Se puede evaluar la integral de la ecuación 17 del mismo modo que la de la ecuación 15, y el resultado es

$$s(t) = \frac{1}{2}[t\sqrt{1+t^2} + \ln(\sqrt{1+t^2} + t)]. \quad \blacksquare \quad (18)$$

Para una curva arbitraria  $C$  cuya ecuación es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

podemos definir una función longitud de arco  $s$  tal como en el ejemplo 2. Sea el punto  $P_0$  correspondiente a  $t = a$  el punto base al partir del cual se mide la longitud de arco y sea  $s(t)$  la longitud de arco desde  $P_0$  hasta el punto  $P$  que corresponde a un valor arbitrario de  $t$ . Entonces

$$s(t) = l(a, t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau. \quad (19)$$

Al derivar la ecuación 19 de acuerdo con el teorema 6.4.2, obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|. \quad (20)$$

Si se piensa en  $C$  como la trayectoria seguida por una partícula en movimiento cuyo vector de posición es  $\mathbf{r}(t)$ , entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$  es la velocidad de la partícula, y  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{r}'(t)\|$  es su rapidez. La ecuación 20 establece que la velocidad de la partícula es la razón de cambio de la distancia que se ha movido a lo largo de  $C$ , con respecto al tiempo:  $ds/dt = \|\mathbf{v}\|$ .

También recuérdese que  $\mathbf{r}'(t)$  es un vector tangente a la curva  $C$  en el punto  $P$ . Con frecuencia es conveniente pensar que  $\mathbf{r}$  es una función de la longitud de arco  $s$  en lugar de ser función de  $t$ . Si lo hacemos, y si  $ds/dt \neq 0$ , entonces, de acuerdo con la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \quad (21)$$

Así,  $d\mathbf{r}/ds$  es un vector unitario tangente a la curva  $C$ , y apunta en la dirección de crecimiento de  $s$  (o de  $t$ ). Emplearemos  $\mathbf{T}$  como símbolo del vector unitario tangente; así,

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \quad (22)$$

### EJEMPLO 3

Para la curva del ejemplo 2, determinar el vector unitario tangente  $\mathbf{T}$  en cualquier punto.

Antes determinamos  $\mathbf{r}'(t)$  y  $\|\mathbf{r}'(t)\|$ ; están dados por las ecuaciones 13 y 14, respectivamente. Así, de acuerdo con la ecuación 22, tenemos que

$$\mathbf{T} = \frac{-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}}{\sqrt{1+t^2}}. \quad \blacksquare$$

Se indica la dirección de la curva  $C$  en cualquier punto mediante los vectores tangentes  $\mathbf{r}'(t)$  y  $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ . A continuación pasaremos a la definición y al cálculo de una cantidad que mide la rapidez a la que cambia  $C$  de dirección en un punto dado; más precisamente, mediremos la rapidez a la cual cambia de dirección el vector  $\mathbf{T}$ . Obsérvese que  $\mathbf{T}$  no cambia de magnitud cuando se recorre la curva; en consecuencia  $d\mathbf{T}/ds$  es la razón de cambio de la dirección de  $\mathbf{T}$  con respecto a  $s$ . Se acostumbra definir a la **curvatura**  $\kappa$  de la curva  $C$  como la cantidad escalar no negativa

$$\kappa = \|d\mathbf{T}/ds\|. \quad (23)$$

Desafortunadamente, el vector de posición  $\mathbf{r}$  de los puntos de  $C$  se da usualmente en términos del tiempo  $t$  o de algún otro parámetro en lugar de hacerlo en términos de la longitud de arco  $s$ . En tales casos, la ecuación 23, aunque de apariencia sencilla, puede implicar bastantes cálculos. A partir de la ecuación 22, tenemos que, según la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \right], \end{aligned}$$

y puede ser tedioso el cálculo de la derivada que se indica.

Es posible que la curvatura también esté dada por la ecuación

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \quad (24)$$

en la cual  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  es el vector de posición de la curva  $C$ . Usualmente, la ecuación 24 es la manera más sencilla de determinar  $\kappa$  para una curva dada.

Hicimos notar antes que si  $C$  es la trayectoria de una partícula en movimiento cuyo vector de posición es  $\mathbf{r}(t)$ , entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t)$  es la velocidad de la partícula. Análogamente,  $\mathbf{a} = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$  es su **aceleración**. En términos de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$ , la expresión (24) para la curvatura  $\kappa$  asume la forma



$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} \quad (25)$$

En el problema 31 describimos una forma de deducir la ecuación 24.

### EJEMPLO 4

Determinar la curvatura de una recta.

Una recta tiene una ecuación de la forma

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t, \quad -\infty < t < \infty, \quad (26)$$

en la cual  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores constantes y  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ . Entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{r}''(t) = \mathbf{0},$$

y por tanto  $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = 0$ . En consecuencia la curvatura  $\kappa = 0$ . Ya que, de manera intuitiva, una recta debe tener una curvatura igual a cero, este resultado es una confirmación parcial de que es razonable la definición que hemos presentado. ■

### EJEMPLO 5

Determinar la curvatura de la curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}, \quad (27)$$

en la cual  $a$  y  $\omega$  son constantes positivas.

Como  $\mathbf{r}(t)$  no tiene componente  $\mathbf{k}$ , la curva está en el plano  $xy$ . Además,  $x = a \cos \omega t$  y  $y = a \sin \omega t$  y por tanto  $x^2 + y^2 = a^2$ . Así la curva es el círculo con centro en el origen y de radio  $a$ . Para determinar la curvatura  $\kappa$  de acuerdo con la ecuación 24, comenzaremos por calcular

$$\mathbf{r}'(t) = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j}, \quad (28a)$$

$$\mathbf{r}''(t) = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (28b)$$

Entonces

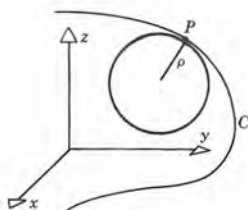
$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\omega \sin \omega t & a\omega \cos \omega t & 0 \\ -a\omega^2 \cos \omega t & -a\omega^2 \sin \omega t & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2\omega^3 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \mathbf{k} = a^2\omega^3 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (29)$$

En consecuencia,  $\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| = a^2\omega^3$ . También, de acuerdo con la ecuación 28a, tenemos que  $\|\mathbf{r}'(t)\| = a\omega$ . Sustituyendo estos resultados en la ecuación 24, obtenemos

$$\kappa = \frac{a^2 \omega^3}{(a\omega)^3} = \frac{1}{a}. \quad (30)$$

Así, como era de imaginarse, la curvatura de un círculo es constante, e igual al recíproco de su radio. Obsérvese que este resultado no depende de  $\omega$ , lo que se puede interpretar como la magnitud de la velocidad angular de una partícula que se mueve de acuerdo con la ecuación 27. ■

A veces es útil considerar una cantidad que se conoce como el **radio de curvatura**, que en general se representa mediante  $\rho$ . En un punto  $P$  arbitrario de la curva dada  $C$ , el radio de curvatura es el radio del círculo, que se conoce como el círculo de curvatura, que tiene la misma curvatura que la curva dada en el punto  $P$  (véase figura 15.7.6).



**Figura 15.7.6** El radio de curvatura  $\rho$ .

Naturalmente, para un círculo el radio de curvatura es justamente el radio del círculo mismo. Según el resultado del ejemplo 5,

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)}. \quad (31)$$

La ecuación 31 facilita la sustitución de una de las cantidades,  $\kappa$  o  $\rho$ , en términos de la otra, por lo que emplearemos la que sea más conveniente.

Para una curva plana la fórmula (24) para  $\kappa$  se puede escribir en una forma algo más sencilla. Supongamos que la curva queda en el plano  $xy$ , en cuyo caso la ecuación 1, se reduce a

$$\mathbf{r} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \quad (32)$$

y

$$\mathbf{r}' = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}'' = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j}.$$

Entonces

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f'(t) & g'(t) & 0 \\ f''(t) & g''(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)]\mathbf{k}.$$

En consecuencia, para la curva plana (32), la curvatura es

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)|}{[f'^2(t) + g'^2(t)]^{3/2}}. \quad (33)$$

La representación paramétrica (32) nos permite estudiar curvas que sean más generales que las que son gráficas de funciones. Sin embargo, la fórmula (33) para  $\kappa$  se puede simplificar más para una curva plana que es la gráfica de una función. En este caso, se puede describir a la curva mediante una ecuación de la forma

$$y = g(x). \quad (34)$$

Entonces,  $x = t$ ,  $y = g(t)$  y la ecuación 33 adquiere la forma

$$\kappa = \frac{|g''(x)|}{[1 + g'^2(x)]^{3/2}}. \quad (35)$$

## EJEMPLO 6

Determinar la curvatura  $\kappa$  en un punto arbitrario de la parábola

$$y = \alpha x^2, \quad \alpha > 0. \quad (36)$$

Además, hallar el radio de curvatura  $\rho$  en cada punto, y determinar el punto en el que  $\rho$  es mínimo.

La ecuación 36 tiene la forma de la ecuación (34) y por tanto podemos determinar a  $\kappa$  mediante la ecuación 35. Esto da

$$\kappa = \frac{2\alpha}{(1 + 4\alpha^2 x^2)^{3/2}}, \quad (37)$$

en la cual se han quitado las barras de valor absoluto porque  $\alpha$  es positiva. De acuerdo con la ecuación 31, tenemos que

$$\rho = \frac{(1 + 4\alpha^2 x^2)^{3/2}}{2\alpha}, \quad (38)$$

de donde queda claro que  $\rho$  es mínimo cuando  $x = 0$ , esto es, en el vértice de la parábola. En este punto  $\rho$  tiene el valor  $1/2\alpha$ .

En la sección 5.2 escribimos la ecuación de la parábola (36) como sigue:

$$x^2 = 4py, \quad (39)$$

en la cual  $p$  es la distancia del vértice al foco o a la directriz. De acuerdo con las



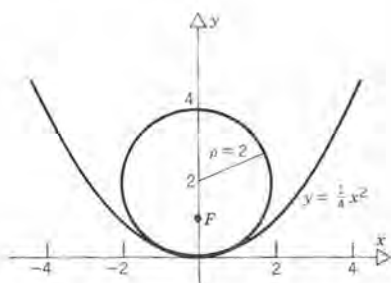


Figura 15.7.7

ecuaciones 36 y 39, tenemos que  $\alpha = 1/4p$ . Así, el valor mínimo de  $p$  es  $2p$ ; en el vértice el radio de curvatura es el doble de la distancia al foco. La figura 15.7.7 muestra la parábola (36) para cuando  $\alpha = \frac{1}{4}$ , junto con su círculo de curvatura en el vértice. ■

## PROBLEMAS

1. Calcular la longitud de la curva  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$  entre los puntos en los que  $t = 1$  y  $t = 4$ , respectivamente.
2. Calcular la longitud de la curva  $\mathbf{r} = 2 \sin 2t \mathbf{i} - 5t \mathbf{j} + 2 \cos 2t \mathbf{k}$  entre los puntos  $(0, 0, 2)$  y  $(2, -5\pi/4, 0)$ .
3. Calcular la longitud de la curva  $\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2} \mathbf{k}$  entre los puntos en los que  $t = 0$  y  $t = 5$ , respectivamente.
4. Calcular la longitud de la curva  $\mathbf{r} = \frac{4}{3}t^{3/2} \mathbf{i} + 3t \mathbf{j} - \frac{2}{3}t^{3/2} \mathbf{k}$  entre el origen y  $(\frac{32}{3}, 12, -\frac{16}{3})$ .
5. Calcular la longitud de la curva  $\mathbf{r} = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + \sqrt{2}t \mathbf{k}$  entre los puntos  $(1, 1, 0)$  y  $(e^2, e^{-2}, 2\sqrt{2})$ .
6. Calcular la longitud de la curva  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \cosh t \mathbf{k}$  entre los puntos en los que  $t = -\pi$  y  $t = \pi$ , respectivamente.

En los problemas 7 y 8, calcular la longitud de la parte indicada de la curva  $\mathbf{r} = 2\sqrt{2}/3 |t|^{3/2} \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{k}$ .

7. De  $(0, 0, 0)$  a  $(2\sqrt{2}/3, 1, \frac{1}{2})$
8. De  $(16\sqrt{2}/3, -4, 8)$  a  $(0, 0, 0)$ .

En los problemas 9 a 12 se da el vector de posición  $\mathbf{r}$  de una partícula en movimiento, en función del tiempo  $t$ . Determinar el vector de velocidad  $\mathbf{v}$ , la rapidez  $\|\mathbf{v}\|$  y la aceleración  $\mathbf{a}$  de la partícula en cualquier momento.

9.  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$
10.  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \cosh t \mathbf{k}$
11.  $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t^2 \mathbf{i} - 4t \mathbf{j} + 3t^3 \mathbf{k}$
12.  $\mathbf{r} = \sqrt{1+t^2} \mathbf{i} + (1+t^2)^{-1/2} \mathbf{j} + (1+t^2) \mathbf{k}$

En los problemas 13 a 16 determinar el vector unitario tangente  $\mathbf{T}$ .

13.  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$
14.  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \cosh t \mathbf{k}$
15.  $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t^2 \mathbf{i} - 4t \mathbf{j} + 3t^3 \mathbf{k}$
16.  $\mathbf{r} = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{k}, \quad t \geq 0$

En los problemas 17 a 20 determinar la curvatura  $\kappa$ . Refiérase a los problemas 13 a 16.

17.  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$
18.  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \cosh t \mathbf{k}$
19.  $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t^2 \mathbf{i} - 4t \mathbf{j} + 3t^3 \mathbf{k}$
20.  $\mathbf{r} = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{k}$

En los problemas 21 a 28, determinar la curvatura  $\kappa$  de la curva plana dada.

21.  $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$  (Elipse)

22.  $\mathbf{r} = a \cosh t \mathbf{i} + b \sinh t \mathbf{j}$  (Hipérbola)

23.  $\mathbf{r} = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$  (Cicloide)

24.  $y = \sin x$       25.  $y = e^{-x}$       26.  $y = \frac{x}{1+x^2}$

27.  $y = 1 - \frac{1}{x}$       28.  $y = a \cosh \frac{x}{a}$  (Catenaria)

29. Demostrar que, para una partícula que se mueve en una trayectoria circular, el vector de aceleración se dirige hacia el centro del círculo.

30. Suponer que una partícula se mueve de tal modo que su vector de velocidad  $\mathbf{v}$  tiene una longitud constante.

(a) Demostrar que el vector de aceleración  $\mathbf{a}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ .

(b) Deducir una ecuación para  $\kappa$  en términos de  $\|\mathbf{v}\|$  y de  $\|\mathbf{a}\|$ .

\*31. En este problema indicaremos cómo deducir la ecuación (24) de la curvatura  $\kappa$ .

(a) De acuerdo con las ecuaciones 21 y 22, observamos que

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{s'(t)}; \quad (i)$$

a continuación emplear la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{s'(t)} \left[ \frac{\mathbf{r}''(t)}{s'(t)} - \frac{\mathbf{r}'(t)s''(t)}{[s'(t)]^2} \right]. \quad (ii)$$

(b) Partiendo de  $\|\mathbf{r}'(t)\|^2 = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$ , demostrar que

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad (iii)$$

(c) Sustituir las ecuaciones 20 y (iii) en la ecuación (ii), y demostrar que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2} \left[ \mathbf{r}''(t) - \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2} \mathbf{r}'(t) \right]. \quad (iv)$$

(d) Calcular  $(d\mathbf{T}/ds) \cdot (d\mathbf{T}/ds)$  y con ello demostrar que

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{\{\|\mathbf{r}'(t)\|^2 \|\mathbf{r}''(t)\|^2 - [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)]^2\}^{1/2}}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \quad (v)$$

(e) Partiendo de la ecuación (v), demostrar que

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}. \quad (vi)$$

## 15.8 DINÁMICA DE LAS PARTÍCULAS

Algunas de las ideas que se han desarrollado en este capítulo se pueden emplear con mucha eficacia en el estudio de la dinámica de una partícula, o masa puntual, en movimiento. La dinámica es una rama fundamental de la mecánica y su desarrollo se relaciona estrechamente con el del cálculo en los siglos xvii y xviii. En esta sección y en la siguiente emplearemos métodos vectoriales para describir algunos aspectos del movimiento de una masa puntual en una trayectoria curva, haciendo énfasis en el movimiento de los satélites y en el movimiento planetario.

### Aceleración tangencial y normal

Suponemos que una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de una curva  $C$  y que su posición en cualquier momento  $t$  está dada por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1)$$

Como se hizo notar en la sección 15.7, los vectores de velocidad y de aceleración están dados por

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (2)$$

respectivamente, y  $\mathbf{v}$  es tangente a la curva  $C$ . Además, la longitud de arco  $s$  satisface la relación

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \|\mathbf{v}\|. \quad (3)$$

Así, el vector unitario tangente  $\mathbf{T}$  está dado por cualquiera de las expresiones

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}. \quad (4)$$

Recuérdese también que la curvatura  $\kappa$  se define como

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|. \quad (5)$$

En lugar de descomponer los vectores de velocidad y de aceleración en componentes a lo largo de los ejes coordenados, con frecuencia es mejor tomar las componentes en las direcciones tangente y normal a la trayectoria de la partícula en movimiento. Desde luego, estas direcciones cambian en general a medida que la partícula se mueve a lo largo de la curva.

Para determinar las componentes normales de  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$ , necesitamos hallar un vector normal a la curva  $C$ . Lo podemos hacer a partir de la ecuación

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1, \quad (6)$$

que dice tan sólo que  $\mathbf{T}$  es un vector unitario. Deseamos derivar la ecuación 6 y elegiremos derivar con respecto a  $s$ , en lugar de hacerlo con respecto a  $t$ , ya que  $\kappa$  está dada en términos de  $d\mathbf{T}/ds$  en la ecuación 5. Así, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0,$$

o bien

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0,$$

ya que el producto escalar es conmutativo. En consecuencia,  $d\mathbf{T}/ds$  es un vector perpendicular a  $\mathbf{T}$ , lo que significa que es normal a la curva  $C$ . El vector unitario  $\mathbf{N}$  en la dirección de  $d\mathbf{T}/ds$  es



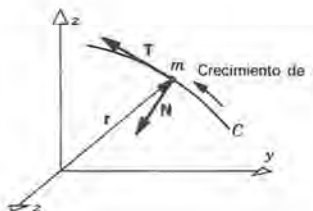
$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{\|d\mathbf{T}/ds\|}. \quad (7)$$

Al vector  $\mathbf{N}$  se le llama en general **vector normal principal unitario** (véase figura 15.8.1). Como  $\|d\mathbf{T}/ds\| = \kappa$  de acuerdo con la ecuación 5, podemos escribir la ecuación 7 en la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}. \quad (8)$$

La ecuación 8 expresa los dos hechos: que  $d\mathbf{T}/ds$  es normal a  $C$  y que tiene una magnitud igual a la curvatura.

**Figura 15.8.1** Vectores tangente y normal principal unitarios.



De acuerdo con la ecuación 4 podemos representar al vector de velocidad en la siguiente forma:

$$\mathbf{v}(t) = \|\mathbf{v}(t)\| \mathbf{T} = \frac{ds}{dt} \mathbf{T}. \quad (9)$$

Entonces, el vector de aceleración  $\mathbf{a}(t)$  es

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt}. \quad (10)$$

Para completar el cálculo de  $\mathbf{a}$  debemos determinar  $d\mathbf{T}/dt$ . Empleando la regla de la cadena y la ecuación 8 llegamos a

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa \frac{ds}{dt} \mathbf{N}. \quad (11)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación 10, obtenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}. \quad (12)$$

A los coeficientes de  $\mathbf{T}$  y de  $\mathbf{N}$  de la ecuación 12 se les conoce como las aceleraciones tangencial y normal, respectivamente, y se representan mediante  $a_t$  y  $a_n$ , en ese orden. Así,

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_n = \kappa \left( \frac{ds}{dt} \right)^2. \quad (13)$$

Introduciendo el radio de curvatura  $\rho$ , ecuación 31 de la sección 15.7, podemos escribir también

$$a_n = \frac{1}{\rho} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{\rho}. \quad (14)$$

### EJEMPLO 1

La posición de una partícula que sigue una trayectoria helicoidal está dada por

$$\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}, \quad (15)$$

en la cual  $a$ ,  $b$  y  $\omega$  son positivos. Determinar la velocidad  $\mathbf{v}$ , la aceleración  $\mathbf{a}$ , la componente tangencial  $a_t$  y la componente normal  $a_n$  de la aceleración.

Al derivar la ecuación 15 obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j} + b \mathbf{k} \quad (16)$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - a\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (17)$$

A continuación

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{v}\| = (a^2\omega^2 \sin^2 \omega t + a^2\omega^2 \cos^2 \omega t + b^2)^{1/2} = (a^2\omega^2 + b^2)^{1/2}. \quad (18)$$

Como  $ds/dt$  es constante, se infiere que

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = 0. \quad (19)$$

Así,  $\mathbf{a} = a_n \mathbf{N}$ , y como  $a_n \geq 0$  de acuerdo con la ecuación 13, entonces, según la ecuación 17,

$$a_n = \|\mathbf{a}\| = (a^2\omega^4 \cos^2 \omega t + a^2\omega^4 \sin^2 \omega t)^{1/2} = a\omega^2. \quad (20)$$

### Aceleración centrípeta y movimiento de los satélites

A la aceleración normal  $a_n$  también se le conoce como la **aceleración centrípeta**, y la fuerza que la origina es la **fuerza centrípeta**. Por ejemplo, la fuerza centrípeta es la

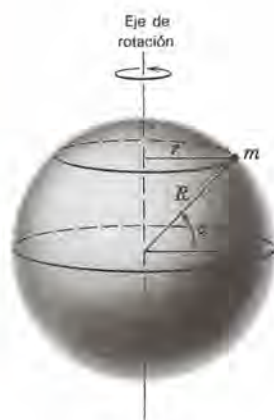


Figura 15.8.2

que mantiene a los objetos sobre la superficie de la Tierra, evitando que salgan volando hacia el espacio debido a la rotación terrestre.

Determinaremos la aceleración centrípeta de un objeto sobre la superficie de la Tierra. Suponemos que ésta es una esfera de radio  $R$  y que hay un punto de masa  $m$  ubicado en el nivel del mar a una latitud  $\alpha$  (véase figura 15.8.2). Al girar la Tierra alrededor de su eje el objeto recorre una trayectoria circular de radio

$$r = R \cos \alpha. \quad (21)$$

De acuerdo con la ecuación 14, la aceleración centrípeta de la masa  $m$  es

$$a_n = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{r}. \quad (22)$$

Además, la Tierra gira a una velocidad constante y por tanto,  $\|\mathbf{v}\|$  es constante. Así, la podemos calcular dividiendo la distancia  $2\pi r$  recorrida por la masa  $m$  en una revolución completa, entre el periodo  $T$  de rotación. Entonces

$$\|\mathbf{v}\| = \frac{2\pi r}{T} \quad (23)$$

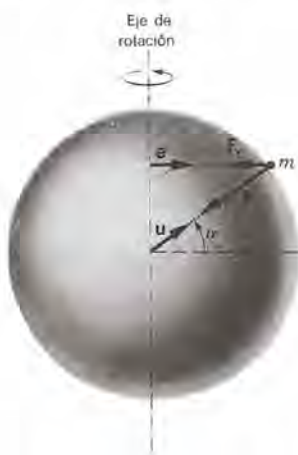
y

$$a_n = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 R \cos \alpha}{T^2}. \quad (24)$$

Obsérvese que la aceleración centrípeta depende de la latitud. Es máxima en el ecuador ( $\alpha = 0$ ) y disminuye hasta cero en los polos ( $\alpha = \pm\pi/2$ ).

A continuación demostraremos cómo es que la variación de la aceleración centrípeta con respecto a la latitud ocasiona una variación del peso. La fuerza de la gravedad





**Figura 15.8.3** Fuerza de gravedad  $\mathbf{F}$  y fuerza centrípeta  $\mathbf{F}_c$ .

$\mathbf{F}$  que actúa en la masa puntual  $m$  se dirige hacia el centro de la Tierra, como se ve en la figura 15.8.3. Si  $\mathbf{u}$  es un vector unitario dirigido hacia afuera desde el centro de la tierra hacia la masa puntual, entonces

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{R^2} \mathbf{u}, \quad (25)$$

en la cual  $G$  es la constante de gravitación universal y  $M$  es la masa de la Tierra. Los valores de éstas y de otras constantes que aparecen en nuestra discusión aparecen en la tabla 15.2.

**Tabla 15.2** Valores de algunas constantes físicas

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2 (\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{seg}^2)$
$M = 5.983 \times 10^{24} \text{ kg}$
$R = 6.378 \times 10^6 \text{ m}$ (ecuatorial)
$R = 6.357 \times 10^6 \text{ m}$ (polar)
$T = 8.64 \times 10^4 \text{ seg}$ (= 1 día)

La fuerza centrípeta  $\mathbf{F}_c$  que corresponde a la aceleración centrípeta  $a_n$  queda en el plano en el que se mueve la masa puntual, y se dirige hacia el eje de rotación. Si  $\mathbf{e}$  es un vector unitario en este plano, en la dirección que va del eje de rotación hasta la masa puntual, entonces

$$\mathbf{F}_c = -ma_n \mathbf{e} = -\frac{4\pi^2 m R \cos \alpha}{T^2} \mathbf{e}. \quad (26)$$

Para ver el efecto de la aceleración centrípeta sobre el peso de la masa puntual,

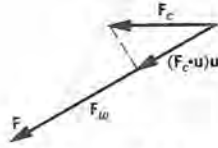


Figura 15.8.4

expresaremos a la atracción gravitacional  $\mathbf{F}$  como una suma de dos términos (véase figura 15.8.4):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_w + (\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}. \quad (27)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación 27 es la componente de  $\mathbf{F}_c$  en la dirección de  $\mathbf{u}$  y, por tanto, es la parte de  $\mathbf{F}$  que se necesita para crear la aceleración centrípeta  $a_n$ . La parte restante de  $\mathbf{F}$ , representada por  $\mathbf{F}_w$ , da su peso a la masa  $m$ . Sustituyendo las ecuaciones 25 y 26 en la 27, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_w &= \mathbf{F} - (\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \\ &= -\frac{GMm}{R^2} \mathbf{u} - \left[ -\frac{4\pi^2 m R \cos \alpha}{T^2} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) \right] \mathbf{u} \\ &= -m \left[ \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2 R \cos^2 \alpha}{T^2} \right] \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (28)$$

ya que  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{u} = \cos \alpha$ . La magnitud del vector  $\mathbf{F}_w$  es el peso  $w$  de la masa  $m$ . Así, siguiendo la costumbre, podemos escribir

$$w = mg, \quad (29)$$

en la cual  $g$  es la cantidad entre los paréntesis rectangulares de la ecuación 28:

$$g = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2 R \cos^2 \alpha}{T^2}. \quad (30)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación 30 es la corrección a la aceleración gravitacional debida a la rotación de la Tierra. De acuerdo con las ecuaciones 29 y 30, el peso de un objeto es máximo en los polos y mínimo en el ecuador. Este efecto se acentúa ligeramente debido a que la Tierra no es una esfera perfecta;  $R$  es ligeramente mayor en el plano ecuatorial que en el eje polar, como se ve en la tabla 15.2.

Para calcular el efecto de la aceleración centrípeta sobre  $g$ , podemos calcular los términos del lado derecho de la ecuación 30; suponemos que la masa está en el ecuador ( $\alpha = 0$ ), por lo que el término de corrección es máximo. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{GM}{R^2} &= 9.810 \text{ m/seg}^2, \\ \frac{4\pi^2 R}{T^2} &= 0.03373 \text{ m/seg}^2, \end{aligned}$$

de manera que la razón del término de corrección con respecto al término principal es cuando mucho 0.00344, aproximadamente un tercio del uno por ciento.

Se puede aplicar el mismo tipo de análisis al movimiento de los satélites. Para hacerlo sólo es necesario remplazar a  $R$  por  $R + h$ , siendo  $h$  la altitud del satélite sobre la Tierra (véase figura 15.8.5). Por ejemplo, para un satélite en el plano ecuatorial de

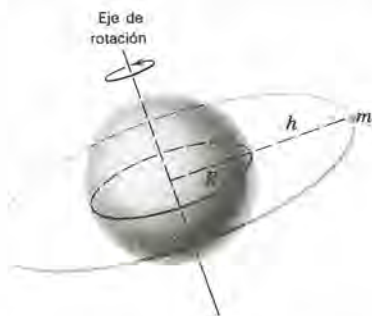


Figura 15.8.5

la Tierra remplazamos  $R$  por  $R + h$  en la ecuación 30 y hacemos que  $\alpha = 0$ . Entonces

$$g = \frac{GM}{(R + h)^2} - \frac{4\pi^2(R + h)}{T^2}. \quad (31)$$

Para que el satélite permanezca en una órbita circular estable, debe *carecer de peso*, esto es,  $\mathbf{F}_w = \mathbf{0}$  y, por tanto,  $g = 0$ . Haciendo  $g = 0$  en la ecuación 31, se obtiene

$$GMT^2 = 4\pi^2(R + h)^3, \quad (32)$$

que es la relación entre  $T$  y  $h$ . Se puede fijar ya sea el periodo o la altitud de un satélite y a continuación emplear la ecuación 32 para calcular la otra cantidad. Por ejemplo, supongamos que el satélite está en una órbita en el plano ecuatorial a una altura de  $1.609 \times 10^5$  m (100 millas) sobre la Tierra. Entonces  $R + h = 6.539 \times 10^6$  m y, de acuerdo con la ecuación 32, vemos que

$$T = 87.65 \text{ min.} \quad (33)$$

Un satélite cuyo periodo es el mismo que el de la Tierra (un día) permanece siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre. Se dice que estos satélites son **geosincrónicos**; tienen aplicaciones importantes en las comunicaciones a larga distancia. Para calcular la altura sobre la superficie terrestre que debe tener un satélite geosincrónico en el plano ecuatorial, hacemos que  $T = 8.64 \times 10^4$  seg en la ecuación 32 y despejamos a  $h$ . El resultado es

$$h \approx 35.88 \times 10^6 \text{ m} \approx 22,300 \text{ mi.} \quad (34)$$



## PROBLEMAS

1. Demostrar que la componente normal de la aceleración es

$$a_n = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

2. Demostrar que si una partícula se mueve a lo largo de una curva con una rapidez constante, entonces  $a_n = \|\mathbf{a}\|$ .
3. La posición de una partícula que se mueve en una trayectoria elíptica está dada por

$$\mathbf{r} = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j},$$

en la cual  $a > b > 0$ . Determinar la velocidad, la aceleración y las componentes tangencial y normal de la aceleración.

4. La trayectoria de una partícula en movimiento es

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} - \cos 2t \mathbf{k}.$$

Determinar la velocidad, la aceleración y las componentes tangencial y normal de la aceleración.

5. La trayectoria de una partícula que se mueve es

$$\mathbf{r} = (\cos t + \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{4})\mathbf{i} + (\sin t + \frac{1}{4} \sin 2t)\mathbf{j}.$$

Hallar la velocidad, la aceleración y las componentes tangencial y normal de la aceleración.

6. Suponer que la posición de una partícula que se mueve en una trayectoria parabólica es  $\mathbf{r} = f(t)\mathbf{i} + [f(t)]^2\mathbf{j}$ . Determinar una condición que deba satisfacer  $f$  para que el vector de aceleración siempre sea normal a la trayectoria del movimiento.

7. Considerar una partícula que se mueve en una trayectoria cicloidal. De acuerdo con el ejemplo 6 de la sección 5.5, la posición de la partícula está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

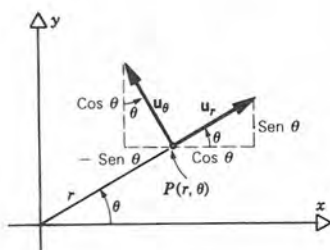
en las cuales  $a$  es el radio del círculo que rueda y  $\theta$  es su desplazamiento angular. Suponer que el círculo rueda con una velocidad constante; entonces  $\theta = \omega t$ , donde  $\omega$  es una constante. Para considerar un arco completo de la cicloide, hagamos que  $0 \leq \omega t \leq 2\pi$ .

- (a) Determinar el vector de velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula. ¿En dónde se mueve la partícula con más rapidez?
- (b) Determinar el vector de aceleración  $\mathbf{a}$  y su magnitud. ¿Qué dirección tiene el vector de aceleración?
- (c) Demostrar que si  $0 < \omega t < \pi$ , entonces  $\mathbf{v}$  apunta hacia el punto más alto del círculo que rueda.
- (d) Determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

8. Calcular la altitud de un satélite en el plano ecuatorial terrestre cuando su periodo  $T$  es de 120 minutos.
9. Calcular la altitud de un satélite geosincrónico sobre un punto de la superficie terrestre cuya latitud es (a) 30 grados; (b) 45 grados.
10. Generalizar la ecuación 32 determinando una relación correspondiente entre el periodo  $T$  y la altitud  $h$  para un satélite cuyo vector de posición desde el centro de la Tierra forma un ángulo  $\alpha$  con el plano ecuatorial.

## 15.9 LAS LEYES DE KEPLER

El tema principal de esta sección es estudiar el movimiento planetario y las leyes de Kepler. Es conveniente dar un paso preliminar para expresar a los vectores de velocidad y de aceleración en términos de coordenadas polares.



**Figura 15.9.1**  
Vectores unitarios  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{u}_\theta$ .

### Velocidad y aceleración en coordenadas polares

Sea  $P(r, \theta)$  un punto arbitrario del plano, que no sea el origen. Primero definiremos los vectores unitarios  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{u}_\theta$  en las direcciones radial y circunferencial, respectivamente, en  $P$ . De la figura 15.9.1 vemos que

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\theta &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} \\ &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Además, al derivar las ecuaciones 1 y 2, nos encontramos con que

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \mathbf{u}_\theta, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} = -\mathbf{u}_r. \quad (4)$$

Pronto tendremos necesidad de suponer que  $\theta$  depende de  $t$ , en cuyo caso  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{u}_\theta$  también son funciones de  $t$ . Para calcular las derivadas de  $\mathbf{u}_r$  y  $\mathbf{u}_\theta$ , emplearemos la regla de la cadena y así obtenemos

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta, \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r. \quad (6)$$

El vector de posición  $\mathbf{r}$  de una partícula que se mueve en el plano se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = r(t) \cos \theta(t)\mathbf{i} + r(t) \sin \theta(t)\mathbf{j} \\
 &= r(t)[\cos \theta(t)\mathbf{i} + \sin \theta(t)\mathbf{j}] \\
 &= r(t)\mathbf{u}_r(t).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Entonces la velocidad de la partícula es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \\
 &= \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta,
 \end{aligned} \tag{8}$$

donde hemos empleado la ecuación 5. La ecuación 8 es la resolución del vector velocidad en las componentes  $r$  y  $\theta$ . Esto se ve en la figura 15.9.2. Al derivar la ecuación

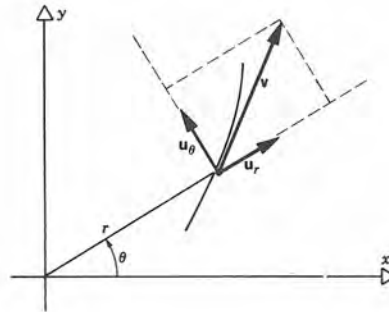


Figura 15.9.2

8 con respecto a  $t$  obtenemos la aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u} + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}.$$

Empleando las ecuaciones 5 y 6 para sustituir a  $d\mathbf{u}_r/dt$  y  $d\mathbf{u}_\theta/dt$ , respectivamente, vemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{u}_r \\
 &= \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[ r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{u}_\theta.
 \end{aligned} \tag{9}$$

El primer paréntesis rectangular del lado derecho de la ecuación 9 da la componente radial  $a_r$  del vector de aceleración, mientras que el segundo paréntesis rectangular da la componente circunferencial  $a_\theta$ .



### Las leyes de Kepler y el movimiento planetario

Un hito en la historia de la ciencia ocurrió a principios del siglo xvii, cuando Johannes Kepler\* enunció las tres leyes siguientes del movimiento planetario:

1. Cada planeta se mueve en una órbita elíptica estando el Sol en uno de los focos de la elipse (descubierta en 1605, publicada en 1609).
2. El vector de posición que va del Sol a un planeta barre áreas con una rapidez constante (descubierta en 1602, publicada en 1609).
3. El cuadrado del periodo de cada planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol (descubierta en 1618, publicada en 1619). Para Kepler, la “distancia media” era el promedio aritmético de las distancias máxima y mínima del Sol al planeta, que es justamente la longitud del semieje mayor de la elipse.

Durante muchos siglos antes de Kepler, los astrónomos habían tratado de explicar el comportamiento de los cinco planetas conocidos, además de la Tierra, con base en órbitas que consistían en círculos o que se derivaban de movimientos circulares. A medida que las observaciones se hicieron más exactas, las teorías sencillas de ese tipo perdieron defensores, y se elaboraron hipótesis de construcciones cada vez más complejas. Por ejemplo, Copérnico\*\* empleó cinco círculos para tratar de describir el movimiento de Marte. Después de largos y arduos años de examinar las observaciones llevadas a cabo por Tycho Brahe†, Kepler llegó a la conclusión de que se explicaban mejor los datos al suponer que los planetas se mueven en órbitas elípticas. Después de varios años más de cálculos laboriosos, Kepler propuso las tres conocidas leyes, antes enunciadas como descripción empírica del movimiento planetario y que resultaba coherente con todos los datos disponibles en la época.

Las leyes de Kepler, elegantes y sencillas, echaron por tierra tradiciones y teorías

---

\* Johannes Kepler (1571-1630) nació en Alemania y estudió astronomía y teología en la Universidad de Tübinga. Huyendo de la persecución religiosa, llegó a Praga en 1600, y fue uno de los ayudantes de Tycho Brahe durante el último año de vida de éste. Con ello Kepler tuvo acceso al cúmulo de datos que Brahe había reunido acerca de los planetas y basó en ellos los cálculos que condujeron a las leyes de Kepler. Éste permaneció en Praga y disfrutó de la protección del emperador Rodolfo II de Bohemia hasta la muerte de éste en 1612. A partir de entonces, en que ya no gozó de buena aceptación en Praga, pasó la mayor parte del resto de sus días en Linz. Su trabajo más importante fue *Tabulae Rudolphinae*, publicado en 1627, que contiene las tablas perpetuas para el cálculo de las posiciones planetarias en cualquier fecha pasada o futura. La disponibilidad de estas tablas originó la amplia aceptación de las leyes de Kepler del movimiento planetario.

\*\* Nicolás Copérnico (1473-1543), nacido en Polonia, estudió leyes y medicina en las universidades de Bolonia, Padua y Ferrara. Regresó a Polonia, y durante los últimos cuarenta años de su vida fue canónigo de la catedral de Frombork. Su teoría revolucionaria, según la cual el Sol es el centro del sistema solar y no la Tierra circuló entre sus amigos antes de 1514. Temiendo el ridículo y el rechazo, demoró su publicación hasta el último año de su vida. Su libro *De Revolutionibus Orbium Coelestium* contiene una explicación detallada de la teoría heliocéntrica copernicana. Este libro apareció en 1542 y es uno de los trabajos clásicos de la literatura científica.

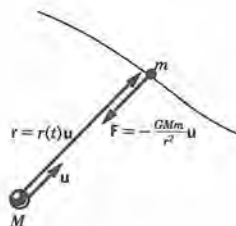
† Tycho Brahe (1546-1601), noble danés, fue el último de los grandes astrónomos anteriores a la invención del telescopio. Construyó y trabajó en un observatorio en la isla de Hven, de 1576 a 1597, e hizo observaciones extensas de los movimientos de la Luna, de los planetas y de los cometas. Por diferencias políticas abandonó su patria y pasó los dos últimos años de su vida cerca de Praga, donde Kepler fue durante corto tiempo uno de sus ayudantes.

que habían perdurado durante siglos. Resulta sorprendente que no fueran adoptadas de inmediato por otros astrónomos. En particular, la idea de que los planetas se mueven en elipses y no en círculos fue recibida con gran escepticismo. Sin embargo, la aceptación se generalizó a medida que aumentó la precisión de las predicciones de los movimientos planetarios gracias a las leyes de Kepler.

Unos cincuenta años después, Newton se sintió fuertemente motivado por las leyes de Kepler para formular su teoría de la gravitación universal y sus leyes del movimiento. Ciertamente, al suponer la segunda ley del movimiento de Newton, se puede deducir la ley de la gravedad a partir de las leyes de Kepler, o viceversa. Aunque el trabajo de Kepler es históricamente el primero, en este libro procederemos al revés, esto es, supondremos las leyes del movimiento de Newton y la de la gravitación universal del mismo y estudiaremos cómo se pueden deducir las leyes de Kepler a partir de ellas.

En consecuencia, veamos el caso que se muestra en la figura 15.9.3. El Sol, cuya

**Figura 15.9.3** Un planeta de masa  $m$  en órbita alrededor del Sol, cuya masa es  $M$ .



masa es  $M$ , está en el origen. Un planeta de masa  $m$  se mueve alrededor del Sol bajo la influencia sólo de la gravedad. La fuerza de gravedad  $\mathbf{F}$  está dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}, \quad (10)$$

en la cual  $r(t)$  es la distancia actual del planeta al Sol,  $\mathbf{u}(t)$  es un vector unitario que va del Sol al planeta y  $G$  es la constante de gravitación universal. El vector de posición  $\mathbf{r}$  del planeta está dado por

$$\mathbf{r} = r(t)\mathbf{u}(t) \quad (11)$$

y su velocidad  $\mathbf{v}$  y su aceleración  $\mathbf{a}$  se obtienen al derivar la ecuación 11 con respecto a  $t$ .

Se pueden deducir rápidamente algunas propiedades importantes del movimiento planetario. En primer lugar, la segunda ley del movimiento de Newton dice que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ; en consecuencia, de la ecuación 10,

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{u}, \quad (12)$$

de manera que, *el vector de aceleración siempre se dirige hacia el Sol.*

A continuación, consideremos el vector

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}); \quad (13)$$

$\mathbf{h}$  se conoce como el **momento angular** del planeta. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{h}}{dt} &= m \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= m \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right) \\ &= m(\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\ &= m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (14)$$

ya que  $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  para toda  $\mathbf{v}$ . Sin embargo, de acuerdo con las ecuaciones 11 y 12, sabemos que  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{a}$  son paralelos, y por tanto  $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$  también. Así,

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

por lo que

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{c}, \quad (16)$$

donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante, lo cual significa que *se conserva el momento angular*.

De la ecuación 13 se concluye que  $\mathbf{h}$  es perpendicular tanto a  $\mathbf{r}$  como a  $\mathbf{v}$ . Así, en particular, el vector de posición siempre es perpendicular al vector constante  $\mathbf{c}$ , lo cual demuestra que *la órbita de un planeta está en un plano*.

Para proseguir introduciremos un sistema de coordenadas polares en el plano del movimiento con el origen en el Sol; así, el vector  $\mathbf{u}$  se identifica entonces con  $\mathbf{u}_r$ , tal como se definió antes. Entonces,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{a}$  están dados por las ecuaciones 7, 8 y 9, respectivamente, y la ley de movimiento  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  se transforma en

$$-\frac{GM}{r^2} \mathbf{u}_r = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[ r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{u}_\theta, \quad (17)$$

en la cual hemos cancelado a  $m$  de ambos lados de la ecuación 17.

Podemos deducir la segunda ley de Kepler a partir de la componente circunferencial de la ecuación 17. Tenemos que

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (18)$$

Si multiplicamos por  $r$  a la ecuación 18 obtenemos

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (19)$$



que es la misma que

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0; \quad (20)$$

por consiguiente

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}. \quad (21)$$

En coordenadas polares, el elemento de área  $dA$  está dado por

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta; \quad (22)$$

véase la ecuación 7 de la sección 14.3. Combinando las ecuaciones 21 y 22, obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}, \quad (23)$$

con lo cual se demuestra la segunda ley de Kepler.

La constante de la ecuación 23 se puede interpretar en términos del momento angular  $\mathbf{h}$ . De acuerdo con las ecuaciones 13, 7 y 8, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\ &= mr\mathbf{u}_r \times \left( \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) \\ &= mr^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (24)$$

en las que  $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta$  es un vector unitario perpendicular al plano del movimiento. Por tanto

$$\|\mathbf{h}\| = mr^2 \left| \frac{d\theta}{dt} \right|, \quad (25)$$

y por consiguiente

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| = \frac{\|\mathbf{h}\|}{2m}. \quad (26)$$

Los resultados que se han deducido hasta este punto son válidos siempre que  $\mathbf{F}$  sea proporcional a  $\mathbf{u}$ , esto es, cuando  $\mathbf{F}$  es una **fuerza central**. La magnitud de  $\mathbf{F}$  y su dependencia de  $r$  no han entrado hasta ahora. Sin embargo, para deducir la primera y la tercera leyes de Kepler, necesitamos suponer que la atracción gravitacional tiene la forma del inverso de la distancia al cuadrado, como en la ecuación 10.

Para demostrar la primera ley de Kepler partimos de la componente radial de la ecuación del movimiento, la ecuación 17, esto es

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2}. \quad (27)$$

El procedimiento consiste en obtener una expresión para  $r$  en términos de  $\theta$  que se pueda reconocer como una ecuación de la elipse en coordenadas polares, a partir de la ecuación anterior. Los cálculos son demasiado largos como para presentarlos aquí, pero algunos de los detalles de esa deducción se delinean en el problema 5.

Pasaremos ahora a la tercera ley de Kepler. Para el caso especial de órbitas circulares hemos obtenido ya la tercera ley de Kepler en la ecuación 32 de la sección 15.8. Para examinar el caso más general de órbitas elípticas supondremos que el planeta se mueve en dirección del crecimiento de  $\theta$ , de modo que  $d\theta/dt > 0$  y, por tanto,  $dA/dt > 0$ . Podemos entonces quitar las barras de valor absoluto de la ecuación 26 y escribir

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\|\mathbf{h}\|}{2m}. \quad (28)$$

Integrando la ecuación 28 con respecto al tiempo  $T$  requerido para que el planeta haga una revolución completa, obtenemos

$$\text{Área de la elipse} = \frac{\|\mathbf{h}\|}{2m} T. \quad (29)$$

Si  $a$  y  $b$  son los semiejes mayor y menor, respectivamente, de la órbita elíptica, entonces el área de la elipse es  $\pi ab$ , y entonces

$$\pi ab = \frac{\|\mathbf{h}\|}{2m} T. \quad (30)$$

Recuérdese (problema 19 de la sección 5.3) que

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad (31)$$

Donde  $\epsilon$  es la excentricidad de la elipse. Sustituyendo  $b$  de la ecuación 31 en la ecuación 30, tenemos que

$$\pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{\|\mathbf{h}\|}{2m} T. \quad (32)$$

Para completar la deducción de la tercera ley de Kepler, debemos calcular  $\|\mathbf{h}\|$ . Es posible demostrar (véase problema 6) que

$$\frac{\|\mathbf{h}\|}{m} = [(1 - \epsilon^2)GMa]^{1/2}. \quad (33)$$

Por último, si sustituimos  $\|\mathbf{h}\|$  en la ecuación 32, elevamos al cuadrado y despejamos a  $T^2$ , obtenemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \quad (34)$$

Obsérvese que el factor de proporcionalidad  $4\pi^2/GM$  de la ecuación 34 sólo depende de las constantes absolutas  $G$  y  $M$ ; en especial, no depende de la excentricidad  $e$ . Por tanto, la ecuación 34 es la misma para todas las órbitas.

Se debe tener en cuenta que las leyes de Kepler son idealizaciones del movimiento planetario real, porque en su deducción se supone que el Sol está fijo y que la órbita del planeta sólo está determinada por la atracción gravitatoria del Sol y ninguna de estas hipótesis es cierta. Sin embargo, los efectos del movimiento solar y de la atracción gravitatoria de otros cuerpos celestes son relativamente pequeños y las leyes de Kepler son, por tanto, aproximaciones de gran precisión. Es una fortuna que en la época de Kepler los datos astronómicos tuvieran la suficiente precisión como para desacreditar a las teorías anteriores, y no la suficiente precisión, por otra parte, que pusiera de manifiesto las pequeñas desviaciones que en realidad se presentan, con respecto a las leyes de Kepler. Si no hubiera sido así, el desarrollo de las teorías de la atracción gravitacional y de la mecánica newtoniana hubieran sido bastante más difíciles de alcanzar.

## PROBLEMAS

1. Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de la curva  $r = b \sin \theta$  con una rapidez angular  $\omega$  constante. Determinar las componentes radial y circunferencial de la aceleración; además, determinar el momento angular.
2. Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de la curva  $r = k(1 + \cos \theta)$  con una rapidez angular  $\omega$  constante. Determinar las componentes radial y circunferencial del vector de aceleración; además, determinar el momento angular.
3. Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de la curva  $r = f(\theta)$  con una rapidez angular constante  $\omega$ . Determinar las componentes radial y circunferencial del vector de aceleración y también determinar el momento angular.
4. Una partícula de masa  $m$  se mueve en el círculo  $r = R$  con una rapidez angular  $\omega$  variable; esto es,  $\omega = d\theta/dt$  depende de  $t$ . Determinar las componentes radial y circunferencial del vector de aceleración, y también determinar el momento angular.

5. En este problema describiremos una manera de resolver la ecuación 27 del texto,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad (i)$$

con lo cual se deduce la primera ley de Kepler.

- (a) Partiendo de la segunda ley de Kepler, demostrar que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{r^2}, \quad (ii)$$

en la cual  $H$  es una constante. De acuerdo con la ecuación 25 del texto obsérvese que  $H$  es la magnitud del momento angular por unidad de masa:

$$H = \frac{\|\mathbf{h}\|}{m} \quad (iii)$$

- (b) Introducir la nueva variable dependiente  $u = 1/r$ , y empleando la regla de la cadena demostrar que



$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -H \frac{du}{d\theta}, \quad (iv)$$

De modo semejante demostrar que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -H^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (v)$$

- (c) Empleando los resultados de las partes (a) y (b), demostrar que la ecuación (i) se puede replantear en la forma

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{H^2}. \quad (vi)$$

- (d) Comprobar que

$$u = C \cos(\theta - \alpha) + \frac{GM}{H^2}, \quad (vii)$$

donde  $C$  y  $\alpha$  son constantes arbitrarias, es solución de la ecuación (vi). De hecho, es posible demostrar que la ecuación (vi) no tiene otras soluciones.

- (e) Es posible seleccionar el eje polar de modo que  $\alpha = 0$ . Si se lleva a cabo esto, demostrar que la ecuación (vii) se transforma en

$$r = \frac{\epsilon p}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (viii)$$

donde

$$\epsilon = \frac{H^2 C}{GM}, \quad p = \frac{1}{C}. \quad (ix)$$

La ecuación (viii) es la ecuación polar de una sección cónica (véase el problema 30(b) de la sección 14.2), donde  $\epsilon$  es la excentricidad y  $p$  es la distancia del foco a la directriz. Como las órbitas planetarias son cerradas, la sección cónica debe ser una elipse. Esto significa que  $0 < \epsilon < 1$ , e impone una restricción para  $C$ . En este caso la gráfica de la ecuación (viii) se muestra en la figura 15.9.4.

6. En este problema indicaremos cómo completar la demostración de la tercera ley de Kepler, demostrando la ecuación 33 del texto.

- (a) Acerca de la ecuación (viii) del problema 5, y a la figura 15.9.4, obsérvese que  $r = a - c$  cuando  $\theta = 0$ , y que  $r = a + c$  cuando  $\theta = \pi$ . Demostrar entonces que

$$a = \frac{\epsilon p}{1 - \epsilon^2}. \quad (i)$$

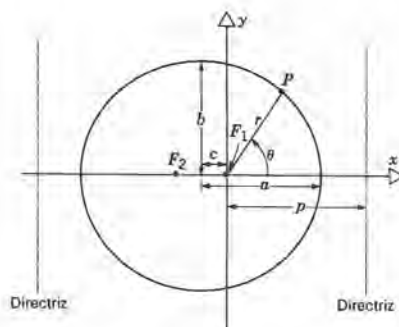


Figura 15.9.4

- (b) Emplear las ecuaciones (iii) y (ix) del problema 5 para demostrar que

$$\epsilon p = \frac{\|\mathbf{h}\|^2}{GMm^2},$$

y demostrar entonces que la ecuación 33 es válida.

7. En este problema indicaremos cómo deducir la ley de la gravitación a partir de las leyes de Kepler y de la segunda ley del movimiento de Newton.

- (a) Demostrar que la segunda ley de Kepler implica que la aceleración  $\mathbf{a}$  está a lo largo de la recta que une al Sol con el planeta; esto es, que la componente circunferencial de  $\mathbf{a}$  en la ecuación 9 es cero.

- (b) A partir de la primera y segunda leyes de Kepler, respectivamente, se deduce que

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{\epsilon p} \quad (i)$$

y que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{r^2} \quad (ii)$$

en donde  $\epsilon$ ,  $p$  y  $H$  son constantes (véase problema 5). Emplear las ecuaciones (i) y (ii) para demostrar que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{H}{p} \sin \theta, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{H^2}{r^3} - \frac{H^2}{r^2 \epsilon p}. \quad (iii)$$

- (c) De acuerdo con la ecuación 9 del texto, demostrar que la componente radial  $a_r$  de la aceleración es

$$a_r = -\frac{(H^2/\epsilon p)}{r^2}. \quad (iv)$$

Así, el vector de aceleración  $\mathbf{a}$  se dirige hacia el Sol y su magnitud es inversamente proporcional a  $r^2$ . Lo mismo es válido para el vector de fuerza  $\mathbf{F}$ , ya que  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Para completar el argumento, debemos demostrar que el factor de proporcionalidad  $H^2/\epsilon p$  es el mismo para todos los planetas.

(d) La tercera ley de Kepler se puede expresar como:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{MG}. \quad (v)$$

Considerando la segunda ley de Kepler, demostrar que

$$H = \frac{2\pi ab}{T}. \quad (vi)$$

Emplear las ecuaciones

$$b^2 = a^2(1 - \epsilon^2), \quad \epsilon p = a(1 - \epsilon^2) \quad (vii)$$

para demostrar que

$$\frac{H^2}{\epsilon p} = MG; \quad (viii)$$

en otras palabras, el factor de proporcionalidad en la ecuación (iv) es el mismo para todos los planetas. Con esto se completa la deducción de la ley de gravitación, que varía de acuerdo con el inverso del cuadrado de la distancia.

## 15.10 CILINDROS, SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN Y SUPERFICIES CUÁDRICAS

En dos dimensiones, la gráfica de una ecuación

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

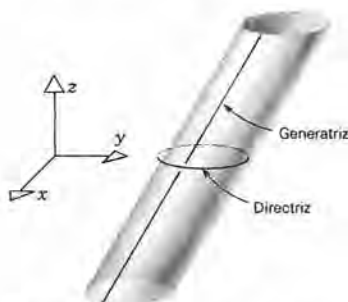
es una curva, siempre que se eviten los casos degenerados. Análogamente, en tres dimensiones, la gráfica de

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

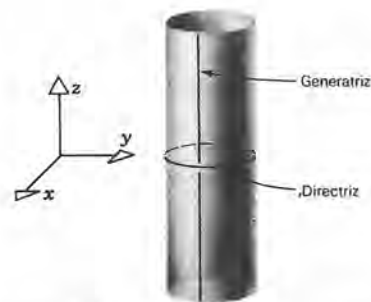
es una superficie, esto es, el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación 2. En la sección 5.1 dedicamos mucha atención a dibujar las gráficas de ecuaciones de la forma (1). En esta sección consideraremos las gráficas de ecuaciones con tres variables. Como el problema de hacer un dibujo de una gráfica se complica bastante en tres dimensiones, en comparación con el caso de dos dimensiones, nos limitaremos a algunos tipos de ecuaciones que se presentan con frecuencia y para las cuales se pueden dibujar con bastante facilidad las superficies correspondientes.

### Cilindros

Sea  $C$  una curva plana dada y sea  $l$  una recta que no está en el plano de  $C$ . Por cada punto de  $C$  tracemos una recta paralela a  $l$ . El conjunto de puntos que está en la familia de rectas construidas de este modo se conoce como un **cilindro**. La curva plana dada es la **directriz** del cilindro y las rectas paralelas son sus **generatrices** (véase figura



**Figura 15.10.1** Un cilindro.



**Figura 15.10.2** Cilindro circular recto.

15.10.1). Si las generatrices son perpendiculares al plano de la directriz (figura 15.10.2), entonces se trata de un cilindro recto. Si la directriz es un círculo, entonces se trata de un cilindro circular. Cotidianamente se emplea la palabra “cilindro” para designar a un “cilindro circular recto”, pero hacemos notar que la definición matemática de “cilindro” es tal como la hemos presentado.

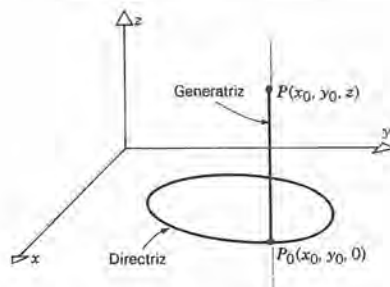
Sólo estudiaremos los cilindros circulares rectos cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados. Así, la directriz de un cilindro de éstos es una curva en un plano paralelo a uno de los planos coordenados. Por ejemplo, supóngase que la directriz es una curva en el plano  $xy$  que tiene la ecuación

$$f(x, y) = 0. \quad (3)$$

Considere un punto  $P_0(x_0, y_0, 0)$  de la directriz (véase figura 15.10.3). Como  $P$  está en la directriz, sus coordenadas satisfacen la ecuación 3:

$$f(x_0, y_0) = 0. \quad (4)$$

Sea  $P$  un punto arbitrario de la generatriz que pasa por  $P_0$ ; entonces las coordenadas de  $P$  son  $(x_0, y_0, z)$ , donde  $z$  es arbitraria. Como  $z$  no aparece en la ecuación 3, las coordenadas de  $P$  satisfacen también a esta ecuación, al igual que las coordenadas de  $P_0$ . Así, considerada como una ecuación con tres variables a la que le falta la variable



**Figura 15.10.3**



$z$ , la ecuación 3 es la del cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje  $z$ . La directriz del cilindro en el plano  $xy$  está dada por la ecuación 3, que se considera como una ecuación con las dos variables  $x$  y  $y$ . Análogamente, una ecuación de la forma

$$g(x, z) = 0$$

corresponde a un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje  $y$ , y una ecuación de la forma

$$h(y, z) = 0$$

corresponde a un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje  $x$ .

### EJEMPLO 1

Describir el dibujo de la gráfica de

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad (5)$$

en tres dimensiones.

Como falta la variable  $y$  en la ecuación 5, la gráfica es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje  $y$ . La directriz es la elipse en el plano  $xz$  que tiene la ecuación (5). En la figura 15.10.4 se muestra un dibujo de una parte de la superficie cilíndrica. ■

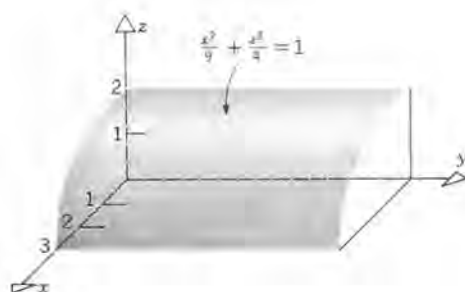


Figura 15.10.4

### EJEMPLO 2

Describir y hacer un dibujo de la gráfica de

$$y = x^3. \quad (6)$$

Falta la variable  $z$  y, por tanto, la gráfica de la ecuación 6 es un cilindro cuyas generatrices son paralelas al eje  $z$ . La directriz es la gráfica de la ecuación 6 en el plano

$xy$ . En la figura 15.10.5 se muestra una parte de la superficie. Obsérvese que la directriz de un cilindro no necesita ser una curva cerrada. ■

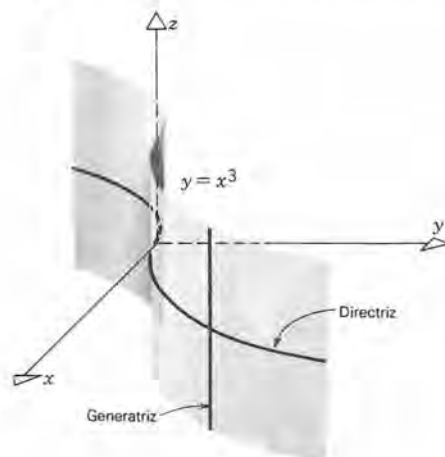


Figura 15.10.5

### Superficies de revolución

Una superficie de revolución se forma haciendo girar a una curva plana alrededor de una recta en el plano de la curva. A la recta se le llama eje de rotación o eje de revolución. Si el eje de rotación es uno de los ejes coordenados, entonces la ecuación de la superficie tendrá una forma que se puede identificar con facilidad.

Por ejemplo, supóngase que la gráfica de

$$z = y^2, \quad (7)$$

que aparece en la figura 15.10.6a se hace girar en torno al eje  $z$ . Durante la rotación, un punto arbitrario  $P_0(0, y_0, z_0)$  de la curva (7) se mueve en un círculo, en el plano  $z = z_0$  cuyo centro es  $(0, 0, z_0)$  y cuyo radio es  $|y_0|$  (véase figura 15.10.6b).

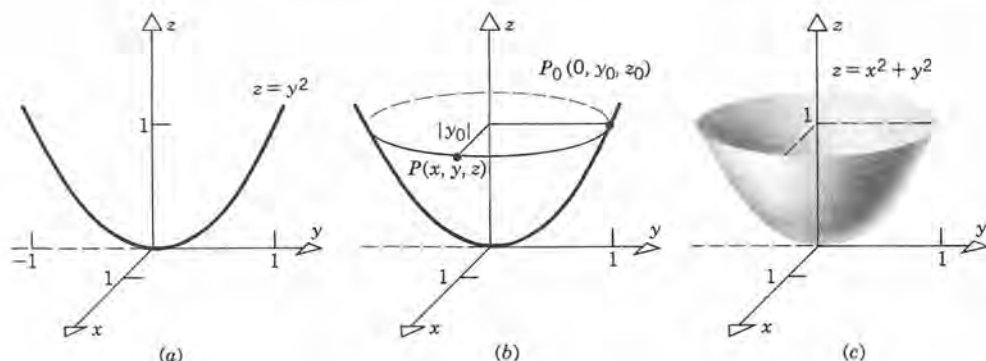


Figura 15.10.6

El círculo se describe mediante las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = y_0^2, \quad z = z_0. \quad (8)$$

Como  $z_0 = y_0^2$ , las coordenadas de cualquier punto  $P(x, y, z)$  en el círculo deben satisfacer la ecuación

$$z = x^2 + y^2. \quad (9)$$

Por último, como la ecuación 9 no contiene a  $y_0$  ni a  $x_0$ , permanece igual independientemente de qué punto  $P_0$  se haya escogido al principio. Así, la ecuación 9 es la de la superficie de revolución que se muestra en la figura 15.10.6c. Se obtiene el mismo resultado si la curva

$$z = x^2 \quad (10)$$

se hace girar alrededor del eje  $z$ . Comparando la ecuación 9 con la 7 o con la 10, se ve que en efecto,  $y^2$  o  $x^2$  han sido sustituidos por  $x^2 + y^2$ .

Generalizando este argumento a otras curvas, llegamos a la conclusión de que la ecuación de una superficie de revolución alrededor del eje  $z$  no depende de  $x$  ni de  $y$  por separado, sino sólo de la combinación de  $x^2 + y^2$ . En otras palabras, una superficie de éstas tiene una ecuación de la forma

$$F(x^2 + y^2, z) = 0. \quad (11)$$

La superficie se obtiene al girar a la curva

$$F(x^2, z) = 0$$

en el plano  $xz$  alrededor del eje  $z$ , o a la curva

$$F(y^2, z) = 0$$

en el plano  $yz$  alrededor del eje  $z$ .

De manera similar, las gráficas de las ecuaciones

$$G(x^2 + z^2, y) = 0 \quad (12)$$

y

$$H(y^2 + z^2, x) = 0 \quad (13)$$

son superficies de revolución alrededor del eje  $y$  y del eje  $x$ , respectivamente.

### EJEMPLO 3

Describir y dibujar la gráfica de

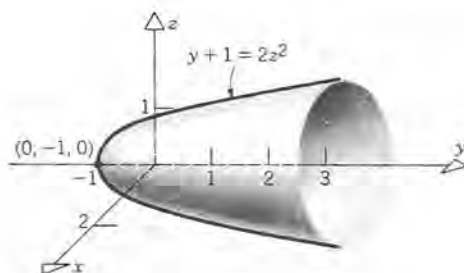
$$y + 1 = 2(x^2 + z^2). \quad (14)$$



La ecuación 14 tiene sólo las variables  $x$  y  $z$  en la combinación  $x^2 + z^2$ , por tanto, su gráfica es una superficie de revolución alrededor del eje  $y$ . La superficie se puede generar haciendo girar a la curva

$$y + 1 = 2z^2 \quad (15)$$

en el plano  $yz$  alrededor del eje  $y$ . La curva es una parábola con vértice en el punto  $y = -1, z = 0$ . Véase un dibujo de esta superficie en la figura 15.10.7. ■



**Figura 15.10.7**  
Gráfica de  $y + 1 = 2(x^2 + z^2)$ .

#### EJEMPLO 4

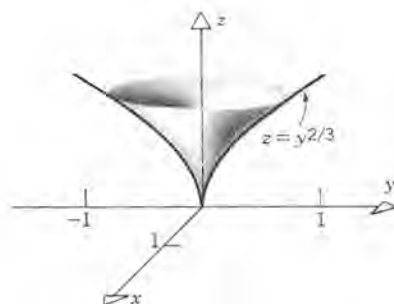
Describir y dibujar la gráfica de

$$z = (x^2 + y^2)^{1/3}. \quad (16)$$

Como las variables  $x$  y  $y$  aparecen sólo en la combinación  $x^2 + y^2$ , la ecuación anterior describe a la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva

$$z = y^{2/3} \quad (17)$$

en el plano  $yz$  alrededor del eje  $z$ . En la figura 15.10.8 se muestra un dibujo de esta superficie. ■



**Figura 15.10.8**  
Gráfica de  $z = (x^2 + y^2)^{1/3}$ .

## Superficies cuádricas

Las ecuaciones cuadráticas en el plano corresponden a las secciones cónicas, como se discutió en las secciones 5.2 a 5.4. Análogamente, en tres dimensiones, la gráfica de una ecuación cuadrática con tres variables es una superficie que se conoce como **superficie cuádrlica**. Sin tomar en cuenta los casos degenerados, hay seis tipos distintos de superficies cuádrlicas. Para cada caso daremos una forma estándar de la ecuación y un dibujo de la superficie correspondiente. La forma exacta de la superficie, y su orientación, dependen de las magnitudes de los coeficientes y del arreglo de los signos algebraicos en la ecuación. La herramienta más importante para hacer un dibujo consiste en encontrar la sección transversal, o **traza**, de la superficie en cada plano coordenado. Una vez hecho esto, no es difícil, con algo de práctica, hacer un dibujo reconocible. El lector debe tratar de desarrollar esta destreza, en lugar de tratar de memorizar los diversos casos que se puedan presentar.

Al hacer esquemas de superficies, sirve de mucho emplear cualesquiera propiedades de simetría que pueda tener la superficie. La simetría con respecto a un plano coordenado se reconoce con facilidad. Si la ecuación no se altera cuando se sustituye  $x$  por  $-x$ , entonces la superficie correspondiente es simétrica con respecto al eje  $yz$ . Esto es así, por ejemplo, si  $x$  sólo aparece como  $x^2$ . Similarmente, si la ecuación no cambia cuando se reemplaza  $y$  por  $-y$ , o cuando  $z$  se reemplaza por  $-z$ , entonces la superficie correspondiente es simétrica con respecto al plano  $xz$  o al plano  $xy$ , respectivamente.

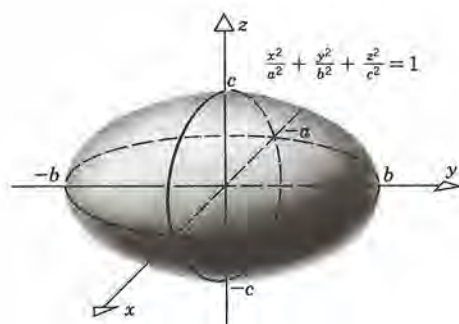
(a) **Elipsoide**. Esta superficie corresponde a una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (18)$$

La traza en cada plano coordenado corresponde a una de las elipses

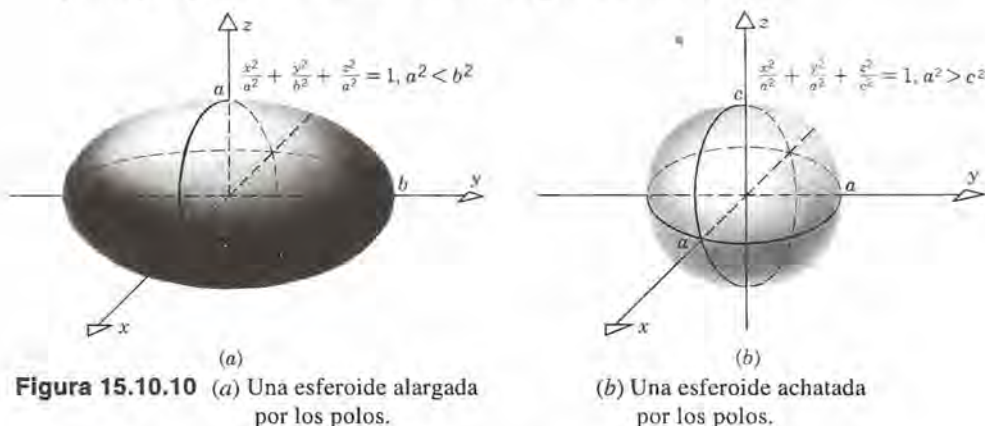
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

y la superficie tiene forma ovalada como se ve en la figura 15.10.9. Si  $a^2 = b^2 = c^2$ , entonces la elipsoide pasa a ser una esfera. Si cualesquiera dos de las tres cantidades  $a^2$ ,  $b^2$  o  $c^2$  son iguales, entonces la elipsoide es una superficie de



**Figura 15.10.9** Una elipsoide.

revolución alrededor del otro eje, y se llama **esferoide**. Si los coeficientes iguales son menores que el restante, por ejemplo  $a^2 = c^2 < b^2$ , entonces la superficie es una **esferoide alargada** en los polos, y se asemeja a un balón de fútbol americano (véase figura 15.10.10a). Si los coeficientes iguales son mayores que el restante, por ejemplo,  $a^2 = b^2 > c^2$ , entonces la superficie es una **esferoide achatada** por los polos, y se parece a una calabaza (véase figura 15.10.10b).



(b) **Hiperboloide de un manto.** La ecuación de esta superficie tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (19)$$

Las trazas en los planos  $xz$  y  $yz$  son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

respectivamente, mientras que la traza en el plano  $xy$  es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Obsérvese que en el plano  $z = z_0$ , la ecuación 19 se transforma en

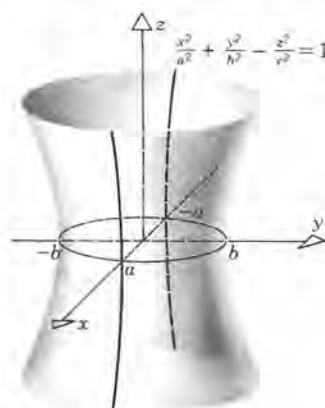
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Así, en cualquier plano paralelo al plano  $xy$ , la sección transversal de la superficie 19 es una elipse; además, esta elipse se agranda cuando aumenta  $|z_0|$ . En la figura 15.10.11 se muestra el esquema de esta superficie. Si  $a^2 = b^2$ , entonces la hiperboloide es una superficie de revolución alrededor del eje  $z$ .

(c) **Hiperboloide de dos mantos.** La ecuación de esta superficie tiene la forma

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (20)$$





**Figura 15.10.11** Hiperboloide de un manto.

En los planos  $xz$  y  $yz$ , las trazas son las hipérbolas

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

respectivamente. Sin embargo, en el plano  $xy$  no hay traza, ya que cuando  $x = 0$ , la ecuación 20 se transforma en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Más generalmente, si  $z = z_0$ , entonces la ecuación 20 se transforma en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} - 1. \quad (21)$$

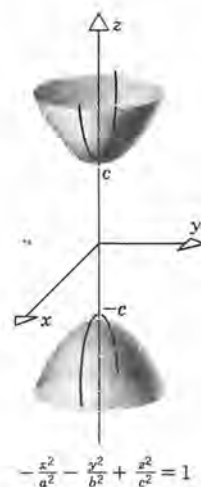
Si  $z_0^2 < c^2$ , no hay puntos que satisfagan la ecuación 21, y entonces no hay puntos de la superficie para estos valores de  $z$ . Sin embargo, si  $z_0^2 \geq c^2$ , entonces la ecuación 21 corresponde a una elipse que aumenta cuando  $|z_0|$  aumenta. Así, la superficie está en dos partes no conectadas, como se muestra en la figura 15.10.12. Si  $a^2 = b^2$ , entonces la hiperboloide es una superficie de revolución alrededor del eje  $z$ .

(d) **Cono.** Se tiene la ecuación

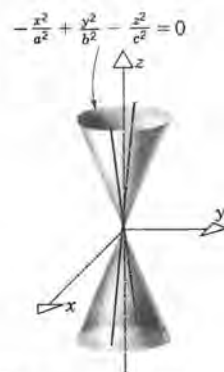
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (22)$$

En el plano  $yz$ , la traza de la superficie está dada por

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0$$



**Figura 15.10.12** Hiperboloide de dos mantos.



**Figura 15.10.13** Cono.

y por tanto se compone de las rectas  $y = \pm(b/c)z$ . Similarmente, la traza en el plano  $xz$  es el par de rectas  $x = \pm(a/c)z$ . En el plano  $xy$  la traza tan sólo es el origen, pero la intersección de la superficie (22) con cualquier plano horizontal  $z = z_0$  es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2},$$

que se expande cuando  $|z_0|$  crece. La gráfica de la ecuación 22 aparece dibujada en la figura 15.10.13. Si  $a^2 = b^2$ , entonces el cono es una superficie de revolución y se llama cono circular. En cualquier otro caso es un cono elíptico.

(e) **Paraboloide elíptico.** Esta superficie se puede representar mediante la ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (23)$$

En los planos  $xz$  y  $yz$ , las trazas son las parábolas

$$z = \frac{x^2}{a^2}, \quad z = \frac{y^2}{b^2},$$

respectivamente. En el plano  $xy$  la traza consiste sólo del origen, y como  $z$  no puede ser negativa, la gráfica no se extiende por abajo del plano  $xy$ . La intersección de la superficie (23) con un plano horizontal  $z = z_0 > 0$  es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z_0,$$

que se expande a medida que crece  $z_0$ . En la figura 15.10.14 se muestra la gráfica de la ecuación 23. Si  $a^2 = b^2$ , entonces el paraboloide es una superficie de revolución y tiene secciones transversales circulares; en este caso se llama paraboloide circular.

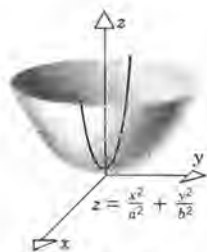
(f) **Paraboloide hiperbólico.** Se tiene la ecuación

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (24)$$

En el plano  $yz$  la traza es

$$z = \frac{y^2}{b^2},$$

que corresponde a una parábola que se abre hacia arriba, mientras que en el plano  $xz$  la traza es la parábola que se abre hacia abajo



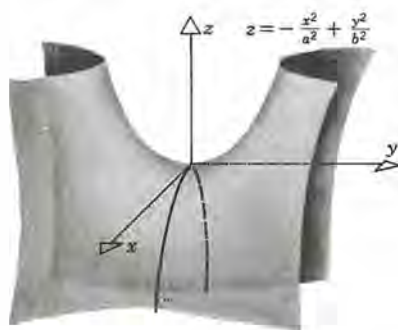
**Figura 15.10.14**  
Paraboloide elíptico.

$$z = -\frac{x^2}{a^2}.$$

En el plano  $xy$  la traza consta de las dos rectas  $y = \pm bx/a$ , pero la intersección de la ecuación 24 con cualquier plano horizontal  $z = z_0 \neq 0$  es la hipérbola

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z_0. \quad (25)$$

Obsérvese que la orientación de la hipérbola (25) depende del signo de  $z_0$ . Si  $z_0 > 0$ , las intersecciones se dan cuando  $y = \pm b\sqrt{z_0}$ , mientras que si  $z_0 < 0$ , las intersecciones se dan cuando  $x = \pm a\sqrt{|z_0|}$ . La gráfica de la ecuación 24 se presenta en la figura 15.10.15.



**Figura 15.10.15**  
Paraboloides hiperbólico.

Como hicimos notar, la traza en el plano  $xz$  es una parábola que se abre hacia abajo y, por tanto, el origen (vértice) es un punto máximo. Por otro lado, la traza en el plano  $yz$  es una parábola que se abre hacia arriba y, por tanto, el origen es un punto mínimo. Cerca del origen la superficie tiene una forma que se asemeja a una silla de montar, o a un paso de montaña. Con frecuencia la superficie se conoce como una superficie silla, y el origen punto silla.

## EJEMPLO 5

Identificar y hacer un dibujo de la gráfica de

$$-36x^2 + 9y^2 - 16z^2 = 144. \quad (26)$$

Dividiendo la ecuación 26 entre 144 se obtiene

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1,$$



que es una ecuación cuadrática en forma estándar. Las trazas en los planos  $xy$  y  $yz$ , respectivamente, son las hipérbolas

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1.$$

La superficie interseca un plano  $y = y_0$  sólo si  $|y_0| \geq 4$ , en cuyo caso la curva de intersección es la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{y_0^2}{16} - 1.$$

La superficie es una hiperboloide de dos mantos y se muestra en la figura 15.10.16. ■

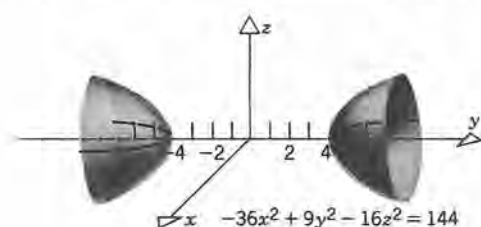


Figura 15.10.16

## EJEMPLO 6

Identificar y hacer un dibujo de la gráfica de

$$4x^2 + 4y^2 - 16y - 9z^2 = 20. \quad (27)$$

Para reducir la ecuación 27 a una de las formas estándar, debemos completar primero el cuadrado en  $y$ . Con ello obtenemos

$$4x^2 + 4(y^2 - 4y + 4) - 9z^2 = 20 + 16,$$

o bien

$$4x^2 + 4(y - 2)^2 - 9z^2 = 36; \quad (28)$$

dividiendo ambos lados de esta ecuación entre 36, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1. \quad (29)$$

Por último, sea  $v = y - 2$ , lo cual equivale a trasladar el sistema coordenado  $xyz$  dos

unidades en la dirección del eje  $y$  positivo. En términos de  $x$ ,  $v$  y  $z$ , la ecuación 29 se transforma en

$$\frac{x^2}{9} + \frac{v^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \quad (30)$$

que es la forma estándar de una superficie cuádrica. La traza en el plano  $xv$  es el círculo  $x^2 + v^2 = 9$ , mientras que en los planos  $xz$  y  $vz$ , las trazas son hipérbolas. La gráfica es una hiperboloide de un manto, y aparece en la figura 15.10.17. Como los coeficientes de  $x^2$  y  $v^2$  en la ecuación 30 son iguales, la superficie es una de revolución alrededor de la recta  $x = 0$ ,  $y = 2$ . ■



Figura 15.10.17

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 24, describir y hacer un dibujo de la gráfica de la ecuación dada.

1.  $y^2 + z^2 = 4$
2.  $z = 4x^2 + 4y^2$
3.  $x^2 - y^2 = 1$
4.  $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
5.  $x - \sin z = 0$
6.  $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 36$
7.  $9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 0$
8.  $9x^2 - 4y^2 - 36z^2 = 36$
9.  $9x^2 - 2y^2 - z = 0$
10.  $x^2 + 2z^2 - 4 = 0$
11.  $4x^2 + y + 9z^2 = 0$
12.  $y^2 - (x^2 + z^2)^{3/2} = 0$
13.  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$
14.  $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 9$
15.  $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$
16.  $x^2 - 4y^2 + 9z^2 = -36$
17.  $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$
18.  $4x^2 + 8y^2 - z = 3$
19.  $6x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 24x - 4z = -20$
20.  $x^2 + 2y - z^2 = 4$
21.  $y^2 - 2z - 6 = 0$
22.  $x^2 - 3y + z^2 - 9 = 0$
23.  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z = -10$
24.  $-2x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 8x - 8y + 54z = 121$

En los problemas 25 a 32, escribir una ecuación para la

## 876 VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

superficie que se forma al girar la curva dada alrededor del eje especificado.

25.  $y = 1 - x^2$ ; eje  $y$       26.  $y = 1 - x^2$ ; eje  $x$

27.  $y = \sqrt{x}$ ; eje  $y$       28.  $y = \sqrt{x}$ ; eje  $x$

29.  $y = \frac{z^2}{1 + z^2}$ ; eje  $z$       30.  $z = x^{2/3}$ ; eje  $x$

31.  $z = x^{2/3}$ ; eje  $z$       32.  $z = \log |y|$ ; eje  $z$

33. Se tiene la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  para  $0 \leq x \leq 4$ . Deseamos deducir la ecuación de la superficie que se forma al girar esta curva alrededor de la recta  $y = 3$  (véase figura 15.10.18).

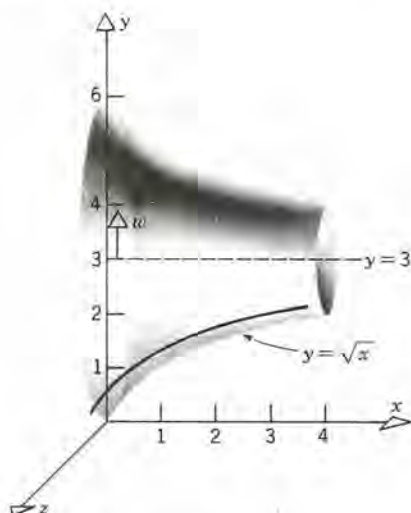


Figura 15.10.18

- Introducir una nueva variable  $u = y - 3$ . Expresar a la ecuación  $y = \sqrt{x}$  en términos de  $u$  y  $x$ .
- Obsérvese que si se hace girar a la gráfica alrededor de la recta  $y = 3$ , equivale a girarla alrededor de la recta  $u = 0$ . Deducir la ecuación de la superficie de revolución en términos de  $x$ ,  $u$  y  $z$ .
- Expresar la ecuación de la superficie de revolución en términos de  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

En los problemas 34 a 37, deducir la ecuación de la superficie que se forma al girar la curva dada alrededor de la recta que se especifica. Si es necesario, consultar en el problema 33.

34.  $y = \sqrt{x}$  alrededor de  $x = -2$

35.  $y = -x^2$  alrededor de  $y = 1$

36.  $z = 1 + x^4$  alrededor de  $z = -3$

37.  $z = \arctan y$  alrededor de  $z = \pi$

38. La curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = 2t \cos 3t \mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2} \mathbf{j} - 5t \sin 3t \mathbf{k}$$

queda en una superficie cuádrica. Identificar esta superficie y deducir su ecuación.

39. La curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = 2\sqrt{t} \cosh t \mathbf{i} + 3\sqrt{t} \sinh t \mathbf{j} + 4\sqrt{1 - t} \mathbf{k}$$

queda en una superficie cuádrica. Identificar la superficie y deducir su ecuación.

40. (a) Sea  $\mathbf{a}$  el vector de posición de un punto fijo  $A$  distinto del origen y sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto  $P$ . Describir la superficie en la que queda  $P$  si  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{r}\| = p\|\mathbf{a}\|$ , donde  $p > 0$ .

(b) Deducir una ecuación del cilindro circular recto cuyo eje es la recta que pasa por el origen y el punto  $A(a, b, c)$ , y cuyo radio es  $p$ .

41. (a) Sea  $\mathbf{a}$  el vector de posición de un punto fijo  $A$  distinto del origen y sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto  $P$ . Describir la superficie sobre la que queda  $P$  si  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{r}\| = \lambda \|\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\|$ , donde  $\lambda > 0$ .

(b) Deducir una ecuación para el cono cuyo eje es la recta que pasa por el origen y el punto  $A(a, b, c)$  y cuyo ángulo en el vértice es  $\alpha$ .

En los problemas 42 a 44 indicaremos cómo extender las definiciones geométricas de las secciones cónicas en el plano, a las superficies en tres dimensiones.

42. Sea  $P(x, y, z)$  un punto tal que la suma de sus distancias a dos puntos dados es constante. Deducir una ecuación para la superficie sobre la cual queda  $P$  e identificar la superficie. *Sugerencia:* escoger un sistema coordenado tal que los dos puntos dados estén en  $(c, 0, 0)$ , y sea  $2a$  la suma de las distancias.

43. Sea  $P(x, y, z)$  un punto tal que la diferencia de sus distancias con respecto a dos puntos dados es constante. Deducir una ecuación para la superficie en la cual queda  $P$  e identificar dicha superficie. *Sugerencia:* escoger un sistema coordenado tal que los dos puntos dados sean  $(c, 0, 0)$ , y  $(-c, 0, 0)$  y sea  $2a$  la diferencia de las distancias.



44. Sea  $P(x, y, z)$  un punto cuyas distancias a un punto dado y a un plano dado que no contiene al punto, son iguales. Deducir una ecuación para la superficie en la

cual queda  $P$  e identificar dicha superficie. *Sugerencia:* escoger un sistema coordenado tal que el punto dado quede en  $(c, 0, 0)$  y el plano dado sea  $x = -c$ .

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 6 llevar a cabo las operaciones que se piden donde  $\mathbf{a} = (3, -2, 4)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 0, -5)$  y  $\mathbf{c} = (1, 3, -2)$ .

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$       2.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$       3.  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$

4.  $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$     5.  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$     6.  $\|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\|$

En los problemas 7 a 10 determinar un escalar  $\lambda$  que satisfaga la condición que se pide.

7. Que  $\mathbf{a} = (2\lambda, 2, -3)$  y  $\mathbf{b} = (7, 1, \lambda)$  tengan la misma longitud.  
 8. Que  $\mathbf{a} = (\lambda, 2, -3)$  y  $\mathbf{b} = (7, -1, \lambda)$  sean perpendiculares.  
 9. Que  $\mathbf{a} = (1, 0)$  y  $\mathbf{b} = (5, \lambda)$  formen un ángulo de  $\pi/4$  radianes.  
 10. Que  $P(2, 3, 1)$ ,  $Q(\lambda, 3, 4)$ ,  $R(0, 2, 1)$  y  $S(1, 0, 0)$  sean coplanares.

En los problemas 11 a 14, determinar el límite que se pide, donde  $\mathbf{u} = [(t^2 - 1)/(t - 1), t, \ln(t + 1)]$  y  $\mathbf{v} = (\sin \pi t, \cos 2\pi t, e^t)$ .

11.  $\lim_{t \rightarrow 1} (3\mathbf{u} + 4\mathbf{v})(t)$       12.  $\lim_{t \rightarrow 0} (2\mathbf{u} - 3\mathbf{v})(t)$

13.  $\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(t)$       14.  $\lim_{t \rightarrow 1} (2\mathbf{u} \times \mathbf{v})(t)$

En los problemas 15 a 18 determinar las derivadas que se indican, donde  $\mathbf{u}(t) = (\cos t, 0, e^{3t^2})$ ,  $\mathbf{v}(t) = (0, 3t^4, \ln t)$ .

15.  $\frac{d}{dt} (\mathbf{u} + \mathbf{v})(t)$       16.  $\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(t)$

17.  $\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|$       18.  $\frac{d}{dt} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})(t)$

En los problemas 19 a 22, (a) determinar al vector unitario tangente a la curva dada en cualquier punto arbitrario; (b) formar una integral que dé la longitud de la curva para el intervalo dado.

19.  $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} + \cos^2 t \mathbf{j}$ ,     $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

20.  $\mathbf{r}(t) = \tan^2 t \mathbf{i} + t^2 e^t \mathbf{j} - \sqrt{1 + t^2} \mathbf{k}$ ,  
 $0 \leq t \leq 1$

21.  $\mathbf{r}(t) = \ln \sin t \mathbf{i} + t \mathbf{j}$ ,     $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}$

22.  $\mathbf{r}(t) = (1 - t^2) \mathbf{i} + \ln t \mathbf{j} + \sinh t \mathbf{k}$ ,     $3 \leq t \leq 5$

En los problemas 23 a 26 identificar y hacer un dibujo de la superficie dada.

23.  $x^2 - 8x + 3y - z^2 + 2z = 6$

24.  $4x^2 + 8x + 9y^2 + 18y - z = 87$

25.  $25x^2 - 50x - 4y^2 + 16y = z^2 + 91$

26.  $x^2 - 6x + 2y + y^2 = 10z - z^2 + 9$

En los problemas 27 a 30, escribir una ecuación para la superficie generada cuando se hace girar la curva dada alrededor de la recta dada (véase problema 33, sección 15.10).

27.  $2y^2 + 5x^2 = 10$     alrededor de eje  $y$

28.  $x = \cos y$     alrededor de eje  $y$      $-\pi \leq y \leq \pi$

29.  $z = x^3$     alrededor de  $z = 1$ ,     $0 \leq x \leq 1$

30.  $y = e^z$     alrededor de  $z = -1$ ,     $0 \leq z \leq 5$

31. Demostrar que la recta  $(x - 1)/6 = y/3 = z$  interseca al plano  $x - 2y + 3z = 1$  y localizar el punto de intersección.

32. Determinar la distancia del punto  $(1, 1, 1)$  a:

(a) La recta  $x = 1 + t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 3t$ ;

(b) El plano  $2x + 3y - z = 2$ .

33. Deducir la ecuación del plano que contiene los puntos  $P(1, 2, 3)$ ,  $Q(1, 0, 1)$ , y  $T(0, 3, 4)$ .

34. Deducir la ecuación del plano que pasa por  $P(1, 1, 1)$  y una de cuyas normales es  $(6, -1, 2)$ .

**878** VECTORES Y GEOMETRÍA ANALÍTICA TRIDIMENSIONAL

35. Deducir la ecuación del plano que pasa por  $P(-1, 0, 1)$  y que contiene a la recta  $(x - 2)/3 = (y - 1)/2 = z/4$ .
36. Deducir la ecuación simétrica de la recta que pasa por  $P(1, 2, 3)$  y es paralela a  $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .
37. Deducir la ecuación del plano que contiene a las rectas  $(x - 2)/3 = (y - 1)/2 = z/4$ , y  $(x - 1)/1 = (y + 2)/3 = (z - 6)/2$ .
38. Deducir las ecuaciones simétrica y paramétrica de la recta de la intersección de los planos  $6x + y - 3z = 2$ , y  $x + z = 3$ .
39. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son  $(1, 0, 0)$ ,  $(2, 3, 4)$  y  $(5, 1, 0)$ .
40. Una partícula se mueve a lo largo de la curva  $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t^{1/2}\mathbf{k}$ .
  - (a) Determinar la velocidad y la rapidez de la partícula.
  - (b) Determinar las componentes normal y tangencial de la aceleración.
  - (c) Determinar la curvatura de la trayectoria de la partícula.
41. Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de la curva  $r = a \cos \theta$ , con una velocidad angular  $\omega$  constante.
  - (a) Determinar las componentes radial y circunferencial de la aceleración.
  - (b) Determinar el momento angular.
  - (c) Determinar la curvatura de la trayectoria de la partícula.
42. Una carga de 575 newton está colgada de dos cuerdas. Cuando las cuerdas forman un ángulo de  $24^\circ$  y  $42^\circ$  con la vertical, respectivamente, la carga está en equilibrio. Determinar la magnitud de la tensión en cada cuerda.
43. Un piloto va a volar en un avión 6000 km hacia el oeste. Cuando se encuentra el aire tranquilo, el aeroplano tiene una velocidad de 800 km/hr. Cuando sopla un viento de 110 km/hr en dirección  $S45^\circ E$ , ¿en qué dirección debe volar el piloto para mantenerse en dirección oeste? ¿Cuánto durará el viaje?

# CÁLCULO

## Capítulo 16

### Derivación de funciones de varias variables

Hasta ahora hemos examinado los procesos fundamentales del cálculo, que son la derivación y la integración, y cómo se relacionan con problemas en los que tan sólo interviene una variable independiente. Para avanzar mucho más allá, necesitamos generalizar los conceptos de función, de derivada y de integral que abarquen más variables. Si bien esto es deseable e interesante desde un punto de vista matemático, es esencial para quien se interesa en las aplicaciones del cálculo, simplemente porque muchos problemas físicos en lo intrínseco requieren para su descripción de más de una variable. Por ejemplo, el movimiento de un objeto en el espacio se describe mediante funciones que dependen de tres coordenadas espaciales y del tiempo. Si es importante la orientación del objeto, entonces podrán necesitarse tres variables más.

Comenzaremos nuestra discusión ampliando la definición de función para abarcar dos o más variables independientes, para después enfocarnos a la cuestión de lo que significa derivar una función de más de una variable.

---

### 16.1 FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

#### Funciones

La idea de función, que se introdujo en la sección 1.4, se puede generalizar con facilidad. Para hacerlo, sea  $X$



algún conjunto de puntos del plano  $xy$  y sean  $(x, y)$  las coordenadas de un punto típico de  $X$ . Sea  $Z$  el conjunto de todos los números reales, o posiblemente uno de sus subconjuntos. Entonces, una **función**  $f$  de dos variables reales es una regla, o transformación, que asigna un número  $z$  y sólo uno del conjunto  $Z$ , a cada punto  $(x, y)$  de  $X$ . En este caso se escribe

$$z = f(x, y). \quad (1)$$

Como antes, el conjunto  $X$  es el **dominio** de  $f$  y  $Z$  es el **codominio**. El número  $z$  que está asociado con un determinado punto  $(x, y)$  de  $X$  es la **imagen** de  $(x, y)$ , y el conjunto de todos esos puntos imagen es la **imagen** de  $f$ , y se representa mediante  $f(X)$ . Con frecuencia no se especifica en forma explícita el dominio de una función. En tales casos se sobreentiende que consta de todos los puntos para los que tiene sentido la expresión  $f(x, y)$ . Además, para la función definida mediante la ecuación 1, se dice que  $x$  y  $y$  son las **variables independientes**, y que  $z$  es la **variable dependiente**.

Por ejemplo, sea  $X$  todo el plano  $xy$ , y sea

$$f(x, y) = x^2 + y^2. \quad (2)$$

Esta función asigna un determinado número no negativo a cada punto del plano. En realidad el número es tan sólo el cuadrado de la distancia desde el origen hasta el punto dado. Así, el valor de  $f$  que corresponde al punto  $(3, -2)$  es  $f(3, -2) = (3)^2 + (-2)^2 = 13$ . La imagen de  $f$  es  $f(X) = [0, \infty)$ .

Como otro ejemplo, considere el área de la superficie de una lata cilíndrica de radio  $r$  y altura  $h$ , expresada por

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh. \quad (3)$$

Se requiere que  $r \geq 0$  y que  $h \geq 0$ , para que el dominio de esa función sea el primer cuadrante del plano  $rh$ . De nuevo, la imagen es el conjunto de todos los números no negativos.

De igual forma, podemos definir una función de tres variables

$$w = f(x, y, z), \quad (4)$$

o una función de  $n$  variables

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (5)$$

## EJEMPLO 1

Determinar el dominio de la función

$$f(x, y) = \ln(4 - x^2 - 4y^2). \quad (6)$$

Como la función logaritmo está definida sólo para los valores positivos de su argumento, se infiere que el dominio de  $f$  es

$$4 - x^2 - 4y^2 > 0,$$

o sea

$$x^2 + 4y^2 < 4. \quad (7)$$

Por tanto, el dominio de  $f$  es el interior de la elipse que se muestra en la figura 16.1.1. ■

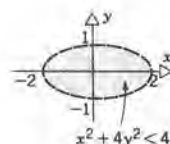


Figura 16.1.1

## EJEMPLO 2

Determinar el dominio de la función

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \quad (8)$$

Como cada uno de los radicandos debe ser no negativo, debemos tener que

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4. \quad (9)$$

Así, el dominio de  $g$  consta de aquellos puntos que satisfacen ambas desigualdades de la ecuación 9, esto es, los puntos de la región en forma de anillo, o anular, que aparece en la figura 16.1.2. ■

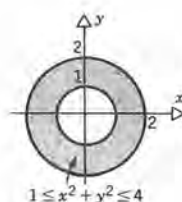


Figura 16.1.2

Se puede representar en forma geométrica una función de dos variables como una superficie en el espacio tridimensional. Por ejemplo, si

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad (10)$$

entonces  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y, z \geq 0$ . Así, la superficie que corresponde a esta función es el hemisferio que se muestra en la figura 16.1.3. La superficie que corresponde a la función

$$z = f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} \quad (11)$$



Figura 16.1.3

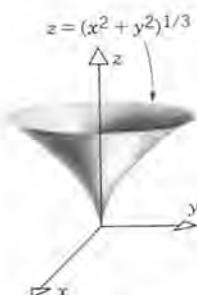


Figura 16.1.4

se ve en la figura 16.1.4. En la sección 15.10 se dibujaron algunas de las superficies que corresponden a los polinomios cuadráticos en  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Desafortunadamente, para muchas funciones que sólo son moderadamente complicadas, puede ser bastante difícil hacer el dibujo de la superficie correspondiente. En realidad, aun para los polinomios cuadráticos que se describieron en la sección 15.10, a veces es difícil obtener la perspectiva correcta. Hay programas de computación muy útiles para graficar superficies en tres dimensiones que han tenido aplicaciones importantes en problemas tales como el diseño de carrocerías de automóviles, o diseño de aeroplanos. Sin embargo, para los problemas que trataremos sólo se necesitará un dibujo aproximado de la superficie.

Un procedimiento alternativo que nos ayuda a representar una superficie  $z = f(x, y)$  consiste en trazar las **curvas de nivel** de la superficie. Éstas son la familia de curvas en el plano  $xy$  que corresponde a diferentes valores constantes de  $z$ :  $f(x, y) = \text{constante}$ . Si pensamos que el plano  $xy$  representa el nivel del mar y que  $z$  es la altitud arriba ( $z > 0$ ) o abajo ( $z < 0$ ) de ese nivel en el punto  $(x, y)$ , entonces las curvas de nivel de la superficie nos dan un mapa topográfico del terreno. Se acostumbra construir los mapas topográficos empleando una diferencia constante de altitud entre las curvas de nivel adyacentes. Así, las regiones en las que las curvas de nivel están más próximas entre sí son zonas en las que la altitud (valor de la función) cambia con rapidez. Un mapa topográfico típico podría tener el aspecto de la figura 16.1.5, que muestra dos colinas y el camino entre ellas.



Figura 16.1.5 Mapa topográfico típico.

### EJEMPLO 3

Dibuje las curvas de nivel para la función

$$z = \ln(4 - x^2 - 4y^2).$$

Es la función que se estudió en el ejemplo 1. Si hacemos que  $z = z_0 = \ln c$ , donde  $c$  es una constante positiva, entonces las curvas de nivel están dadas por

$$c = 4 - x^2 - 4y^2.$$

Éstas son las elipses

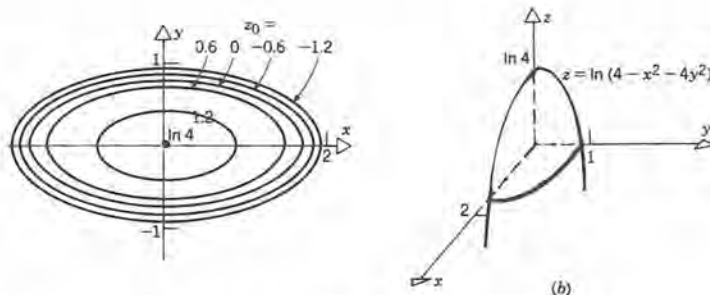


$$\frac{x^2}{4(1 - \frac{1}{4}c)} + \frac{y^2}{1 - \frac{1}{4}c} = 1$$

donde  $0 < c < 4$ . Como  $z_0 = \ln c$ , podemos escribir también la ecuación de las curvas de nivel en la forma

$$\frac{x^2}{4(1 - \frac{1}{4}e^{z_0})} + \frac{y^2}{1 - \frac{1}{4}e^{z_0}} = 1,$$

en la cual  $-\infty < z_0 < \ln 4$ . Estas curvas de nivel se dibujan en la figura 16.1.6a para varios valores de  $z_0$ ; el dibujo de la superficie aparece en la figura 16.1.6b. ■

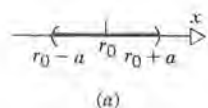


**Figura 16.1.6** (a) Curvas de nivel de  $z = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$ .  
(b) La superficie  $z = \ln(4 - x^2 - 4y^2)$ .

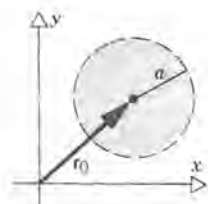
Para una función de tres o más variables ya no es posible trazar un dibujo realista de la gráfica de la función. Sin embargo, las principales dificultades conceptuales para aumentar las ideas del cálculo a mayores dimensiones se presentan cuando se pasa de funciones de una variable a funciones de dos variables. Para llevarlo a cabo, haremos uso de la intuición geométrica tanto como sea posible. Una vez que se hace esa transición, hay poca dificultad intrínseca para pensar en una mayor cantidad de dimensiones. En realidad, nuestra intuición nos permite imaginar y representar relaciones en más dimensiones aun cuando no podamos hacer su representación geométrica exacta. La mayor parte de nuestra discusión será acerca de las funciones de dos o tres variables independientes.

## Límite de una función

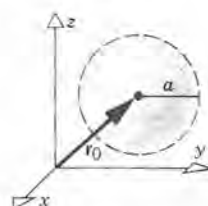
El estudio de los límites, en el capítulo 2, involucró a la distancia  $|x - x_0|$  entre dos puntos  $P_0$  y  $P$  cuyas coordenadas sean  $x_0$  y  $x$ , respectivamente, en el eje  $x$ . En dos dimensiones, la distancia correspondiente entre  $P_0(x_0, y_0)$  y  $P(x, y)$  es  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Análogamente, en tres dimensiones, la distancia entre  $P_0(x_0, y_0, z_0)$



(a)



(b)



(c)

**Figura 16.1.7**

(a) Intervalo abierto.

(b) Disco abierto.

(c) Bola abierta.

y  $P(x, y, z)$  es  $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ . La notación se puede unificar si se emplean vectores. Sean  $\mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{r}$  los vectores de posición de los dos puntos  $P_0$  y  $P$ , respectivamente. Entonces, la distancia entre los puntos siempre está dada por  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$ , independientemente de la dimensión. Si  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| \rightarrow 0$ , entonces se dice que  $P$  tiende a  $P_0$ , o que  $\mathbf{r}$  tiende a  $\mathbf{r}_0$  y se escribe  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ . Si deseamos hacer énfasis sobre las variables de las coordenadas, a veces podemos escribir  $x \rightarrow x_0$ , o  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ , o bien  $(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ , en lugar de  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ .

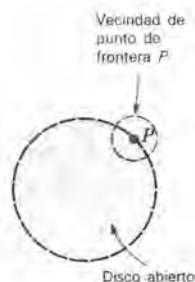
En la sección 1.2 empleamos la palabra “vecindad” para indicar un intervalo abierto  $(x_0 - a, x_0 + a)$  centrado en el punto  $x_0$ . En dos dimensiones, la entidad geométrica correspondiente es el interior de un círculo de radio  $a$  y con centro en  $P_0(x_0, y_0)$ , mientras que en tres dimensiones es el interior de una esfera de radio  $a$  y con centro en  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ . A veces es útil emplear la notación  $N_a(\mathbf{r}_0)$  para denotar a la vecindad del punto  $P_0(\mathbf{r}_0)$  de radio  $a$ . Entonces, en símbolos,

$$N_a(\mathbf{r}_0) = \{\mathbf{r} \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < a\}, \quad (12)$$

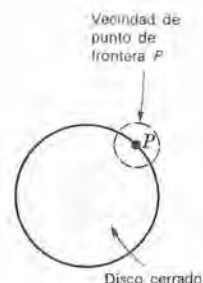
donde  $\mathbf{r}_0$  es el vector de posición del punto  $P_0$  y  $a$  es cualquier número positivo.

Como se mencionó antes, una vecindad en una dimensión es un **intervalo abierto**. En dos dimensiones es un **disco abierto**, y en tres dimensiones es una **esfera abierta**, o **bola abierta**. Esto se muestra en la figura 16.1.7. Si se introduce la igualdad en la ecuación 12, entonces tendremos un **intervalo cerrado**, o un **disco cerrado**, o bien una **esfera**, o **bola cerrada**, de acuerdo con las dimensiones del espacio. La **frontera** de un intervalo, un disco o una bola abiertos o cerrados, es el conjunto de puntos  $\{\mathbf{r} \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = a\}$ . Nótese que cualquier vecindad de un punto de la frontera contiene tanto a los puntos del intervalo, del disco o de la bola abiertos, como también a todos sus puntos de la frontera.

Se pueden extender estas observaciones a conjuntos arbitrarios de puntos. El punto  $P$  se llama **punto interior** de un conjunto  $S$  si  $P$  está en  $S$  y si existe alguna vecindad de  $P$  que contenga sólo puntos de  $S$ . El punto  $P$  se conoce como un **punto frontera**, de  $S$ , si toda vecindad de  $P$  contiene puntos que están en  $S$  y también puntos que no están en  $S$ ; nótese que el punto  $P$  mismo puede estar o no en  $S$ . Entonces un conjunto de puntos que sólo contiene puntos interiores, o sea, que no contiene a ninguno de sus puntos frontera, se dice que es un **conjunto abierto**, mientras que un conjunto de puntos que contiene a todos sus puntos frontera se dice que es un **conjunto cerrado**. Muchos conjuntos de puntos contienen a algunos, pero no todos, sus puntos frontera y, por tanto, no son abiertos ni son cerrados. Mostraremos estas ideas mediante varios ejemplos.



Disco abierto



Disco cerrado

**Figura 16.1.8**

1. Sea  $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4, y > 0\}$  (véase figura 16.1.9a). La frontera de  $S$  es el conjunto de puntos  $x^2 + y^2 = 4, y > 0, y - 2 \leq x \leq 2, y = 0$  (véase figura 16.1.9b). Como  $S$  no contiene a ninguno de sus puntos frontera, es un conjunto abierto. Todos los puntos del conjunto son puntos interiores.
2. Sea  $S = \{(x, y) \mid 4 < x^2 + y^2 \leq 16\}$  (véase figura 16.1.10). La frontera de  $S$  son los dos círculos  $x^2 + y^2 = 4$ , y  $x^2 + y^2 = 16$ . Como  $S$  contiene a algunos de sus puntos frontera, pero no a todos, no es conjunto cerrado ni abierto.
3. Sea  $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$  (véase figura 16.1.11a). La frontera de  $S$  es la superficie del cilindro  $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2$ , y las partes de los planos



$z = 0$ , o  $z = 2$  en las cuales  $x^2 + y^2 \leq 4$  (véase figura 16.1.11b). Como  $S$  contiene a todos sus puntos frontera, es un conjunto cerrado.

Supongamos ahora que  $f$  es una función de una o más variables, y que  $f$  está definida en alguna vecindad de un punto  $\mathbf{r}_0$ , quizá con excepción del mismo punto  $\mathbf{r}_0$ . Entonces  $f(\mathbf{r})$  tiene el límite  $L$  cuando  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ , si  $f(\mathbf{r}) \rightarrow L$  cuando  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ , pero no es igual a  $\mathbf{r}_0$ . La definición precisa es la siguiente:

**DEFINICIÓN 16.1.1** (*Límite de una función*). Sea  $f$  una función de una o más variables que está definida en alguna vecindad de un punto  $\mathbf{r}_0$ , excepto quizá en el propio  $\mathbf{r}_0$ . Entonces se dice que  $L$  es el límite de  $f(\mathbf{r})$ , cuando  $\mathbf{r}$  tiende a  $\mathbf{r}_0$ , y se escribe

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = L, \quad (13)$$

si para cada número  $\epsilon > 0$  existe un número correspondiente  $\delta > 0$  tal que si

$$0 < \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |f(\mathbf{r}) - L| < \epsilon. \quad (14)$$

Es útil comparar esta definición con la definición 2.2.1 del límite de una función de una variable, y notar cómo se ha llevado a cabo la generalización. De nuevo subrayamos que el concepto de límite no depende del valor de  $f(\mathbf{r}_0)$  ni siquiera de si  $f$  está definida en  $\mathbf{r}_0$ .

## Funciones continuas

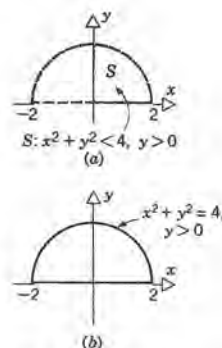
Exactamente como en el caso de una sola variable, se relacionan estrechamente los conceptos de límite y de continuidad para una función de dos o más variables.

**DEFINICIÓN 16.1.2** (*Continuidad de una función*). Se dice que una función de una o más variables es continua en  $\mathbf{r}_0$  si  $f(\mathbf{r}_0)$  está definida y si

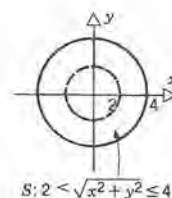
$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0). \quad (15)$$

La mayor parte de los resultados que se dedujeron para límites y para la continuidad de funciones de una variable se pueden enunciar y demostrar para funciones de varias variables simplemente cambiando la redacción del enunciado y de la demostración. Éstos incluyen resultados como los teoremas de límite y de continuidad para sumas, productos y cocientes. Además, la mayor parte de las funciones con que se trabaja son continuas, con la posible excepción de un denominador que es cero o de una función que no está definida. Como ejemplos de funciones continuas tenemos los siguientes:

1. Funciones polinomiales, que son las funciones que se forman como combinaciones lineales finitas de potencias enteras no negativas de las variables independientes.



**Figura 16.1.9**  
(a) Conjunto abierto  $S$ .  
(b) La frontera de  $S$ .

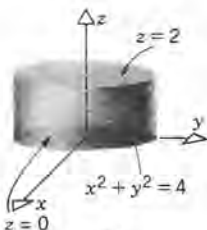


**Figura 16.1.10**  
Conjunto que no es abierto ni es cerrado.





(a)



(b)

**Figura 16.1.11**

(a) Conjunto cerrado  $S$ .

(b) La frontera de  $S$ .

Por ejemplo,

$$P(x, y, z) = 3 + 2xy + 6z^2 - xy^2z + 4x^2yz^2$$

es una función continua para toda  $x, y$  y  $z$ .

2. Funciones racionales, que son cocientes de funciones polinomiales, excepto en los ceros del denominador. Por ejemplo,

$$R(x, y) = \frac{3 - 2x + xy^2}{4 - x^2 - 2y^2}$$

es una función continua, excepto en los puntos de la elipse  $x^2 + 2y^2 = 4$ .

3. Funciones que se obtienen extrayendo raíces, funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, excepto cuando las funciones no están definidas. Algunos ejemplos de funciones continuas son los siguientes:

$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2 + z^2)}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;$$

$$g(x, y) = \sin \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0);$$

$$h(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}, \quad \text{toda } (x, y, z);$$

$$\phi(x, y) = \ln|x - y|, \quad y \neq x.$$

Queda implícito en las definiciones del límite de una función y de la continuidad de una función en un punto, que existe una vecindad de  $\mathbf{r}_0$  que está dentro del dominio de  $f$ . Para una función de una variable esto significa que  $\mathbf{r}_0$  es un punto interior, o un punto de un intervalo abierto  $(a, b)$ . Se puede entonces extender los conceptos de límite y de continuidad a los puntos de los extremos al considerar límites laterales. Para funciones de más de una variable podemos discutir los límites y la continuidad en un punto frontera de modo semejante, esto es, sólo tomando en cuenta a los puntos que están en la vecindad del punto frontera y que también queden en el dominio de la función.

En el ejemplo siguiente y en varios de los problemas mostraremos algunas de las dificultades que pueden surgir al tratar con funciones de más de una variable, debido a las muchas formas en las que es posible acercarse a un punto.

## EJEMPLO 4

Demostrar que la función

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (16)$$

no tiene límite en el origen y que, por tanto, no es continua allí.

Observe que  $f(x, 0) = 0$  en el eje  $x$ , excluyendo al origen, y que en el eje  $y$ , también excluyendo al origen,  $f(0, y) = 0$ . Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

En estos casos especiales nos encontramos con que 0 es el valor límite cuando nos acercamos al origen a lo largo de los ejes coordenados, pero ello no basta para afirmar que  $f$  tiene un límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Si pasamos a las coordenadas polares  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ , entonces tendremos que, para  $r \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Así,  $f$  toma todos los valores entre  $-\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2}$  cuando rodeamos cualquier círculo que encierre al origen. En consecuencia, sin importar qué tan pequeña escojamos una vecindad del origen, habrá un círculo o círculos dentro de la vecindad en los cuales  $f$  toma valores entre  $-\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{2}$ , y es imposible hacer que  $f$  se aproxime a cualquier número  $L$  a medida que  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

También podríamos demostrar que  $f$  no tiene límite en  $(0, 0)$  si demostramos que obtenemos diferentes valores del límite cuando nos acercamos a  $(0, 0)$  por dos trayectorias distintas. Consideremos el conjunto de trayectorias que corresponden a las rectas  $\theta = \text{constante}$  con  $r \rightarrow 0$ , o bien  $y = mx$  tendiendo  $x$  a 0. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}. \quad (18)$$

Al observar que  $m = \tan \theta$ , podemos demostrar que esto es equivalente al resultado que se dio en la ecuación 17. Como obtenemos límites diferentes cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  siguiendo distintas trayectorias rectas, llegamos a la conclusión de que  $f$  no tiene un límite en  $(0, 0)$ . Subrayamos que si el resultado de la ecuación 18 hubiera sido independiente de  $m$ , esto no nos habría garantizado que existe el límite; hay otras trayectorias de acercamiento a  $(0, 0)$  además de las líneas rectas.

Las curvas de nivel para esta función, donde  $(x, y) \neq (0, 0)$  están representadas por

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = z_0 = \text{constante}.$$

De acuerdo con la ecuación 17, las curvas de nivel están dadas por

$$\sin 2\theta = 2z_0 \text{ o bien } \theta = \frac{1}{2} \arcsin 2z_0.$$

Por tanto, son rectas que pasan por el origen. Como las curvas de nivel corresponden a diferentes valores de  $z_0$  y como todas ellas se juntan en el origen, queda claro que la función no tiene límite en el origen. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 4 evaluar la función dada en los puntos dados.

1.  $f(x, y) = |x + 1| \sqrt{1 - y}$ ; (a)  $(-1, 0)$   
(b)  $(0, 1)$  (c)  $(-3, -3)$

2.  $g(x, y) = \frac{3x}{x + y}$ ; (a)  $(a^2, b)$   
(b)  $(a, b^2)$  (c)  $(a^{-1}, b^{-1})$

3.  $f(x, y) = 2y^4 + x\sqrt{y^3}$ ; (a)  $(-2, 2)$   
(b)  $(a, a^2)$  donde  $a > 0$  (c)  $(\frac{1}{5}, 8)$

4.  $h(x, y, z) = \frac{x + y + z}{|x + y + z|}$ ; (a)  $(1, 1, 1)$   
(b)  $(-1, 0, -1)$  (c)  $(0, 0, -1)$

5. Sea  $f(x, y) = x \sin y$ . Determinar (a)  $f\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$ ,  
(b)  $f(x, x)$ , (c)  $f(y, x)$ , (d)  $f(r, s)$

6. Sea  $f(x, y) = 3x^2\sqrt{y} + 1$ . Determinar (a)  $f(2, 4)$ ,  
(b)  $f(a + b, a - b)$ , (c)  $f\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{y^2}\right)$  para  $x \neq 0$ ,  
 $y \neq 0$

7. Sea  $F(x, y, z) = xyz/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .  
Determinar (a)  $F(a, a, a)$ ,  $a > 0$ ,  
(b)  $F(a^{-1}, a^{-1}, a^{-1})$ ,  $a > 0$

8. Sea  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$ . Si  $x = f(t) = \sin \pi t$ ,  $y = g(t) = \cos \pi t$ ,  $z = h(t) = 3t$ ,  
determinar (a)  $F[f(t), g(t), h(t)]$ ,  
(b)  $F[f(\frac{1}{2}), g(\frac{1}{2}), h(\frac{1}{2})]$ ,  
(c)  $F[f(2t), g(2t), h(2t)]$

En los problemas 9 a 16 determinar el dominio de la función dada.

9.  $\phi(x, y) = \sqrt{9 - 2(x^2 + y^2)}$

10.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$

11.  $\phi(x, y) = 6x^3 - 7y^3 + 4xy$

12.  $g(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2)}$

13.  $\phi(x, y, z) = \sqrt{z} e^{-xyz}$

14.  $g(x, y) = \sqrt{x(1 - |y|)}$

15.  $\phi(x, y) = \ln xy$

16.  $f(x, y) = \frac{(1 - x)^{y^3}}{\sqrt{2 + y} - \sqrt{x}}$

En los problemas 17 a 22 hacer el dibujo de varias de las curvas de nivel de la función dada.

17.  $f(x, y) = x^2 + y^2$

18.  $f(x, y) = 1 - 4x^2 - y^2$

19.  $f(x, y) = x^2 - y$

20.  $f(x, y) = ye^{-|x|}$

21.  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

22.  $f(x, y) = e^{y^2 - x^2}$

Los problemas 23 a 34 son acerca de límites y continuidad para funciones de dos variables. Al contestar las preguntas, serán adecuados argumentos semejantes a los que se dieron en el ejemplo 4. Para contestar las preguntas acerca de límites y de continuidad en  $(0, 0)$ , con frecuencia es útil pasar a las coordenadas polares  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ , para estudiar lo que sucede cuando  $r \rightarrow 0$ ; también es útil estudiar lo que sucede en los rayos  $x = \alpha t$ ,  $y = \beta t$  cuando  $t \rightarrow 0$ .

En los problemas 23 a 28, determinar dónde es discontinua la función, si es el caso.

23.  $\phi(x, y, z) = \sin(3x + 7y + 2z)$

24.  $\phi(x, y) = \ln|1 - xy|$

25.  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

26.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

27.  $g(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2 - (x^2 + y^2), & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

28.  $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

29. ¿Es la función

$$g(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{x}{y}, & x \neq 0 \text{ y } y \neq 0 \\ 1, & x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

continua en el origen?

30. Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



es continua en  $(0, 0)$ .

31. ¿Cómo se puede definir a la función

$$f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

en el origen para que  $f$  sea continua allí?

32. ¿Puede estar definida la función

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}, \quad y \neq x$$

en la recta  $y = x$  de tal manera que la función resultante sea continua para todos los puntos del plano?

33. ¿Para qué valores de  $\alpha > 0$  puede definirse la función

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^\alpha}{x^2 + y^2}$$

en el origen para que sea continua allí? ¿Cuál es el valor de  $f(0, 0)$  en estos casos?

34. Considerar la función

$$\phi(x, y, z) = \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

- (a) Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x, 0, 0) \\ = \lim_{y \rightarrow 0} \phi(0, y, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \phi(0, 0, z) = 1.$$

- (b) Sin importar cómo se define  $\phi(0, 0, 0)$ , demostrar que  $\phi$  no puede ser continua en el origen.

*Sugerencia:* considerar el límite a lo largo de los rayos  $x = \alpha t$ ,  $y = \beta t$  y  $z = \gamma t$  cuando  $t \rightarrow 0$ , para valores arbitrarios de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

## 16.2 DERIVADAS PARCIALES

En esta sección ampliaremos las reglas de cálculo que hemos desarrollado hasta aquí para determinar derivadas de funciones de más de una variable. Por ejemplo, para el área  $S$  de la superficie de una lata cilíndrica circular de radio  $r$  y altura  $h$ ,

$$S = 2(\pi r^2) + 2\pi r h = 2\pi r(r + h),$$

deseamos conocer la razón de cambio de  $S$  con respecto a  $r$  o con respecto a  $h$ , mientras la otra permanece fija. Se presentan con frecuencia otros ejemplos en las aplicaciones a la física; por ejemplo, en problemas de flujo de fluidos las componentes  $u$ ,  $v$  y  $w$  de la velocidad del fluido son funciones de las coordenadas de posición  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , y del tiempo  $t$ . Para deducir las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido es necesario introducir las razones de cambio de cada componente de la velocidad con respecto a cada una de las coordenadas de posición y del tiempo.

Comenzaremos con una función de dos variables

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

para  $(x, y)$  en un dominio  $\Omega$  en el plano  $xy$ . Preguntamos cuál es la razón de cambio de  $z$  sólo con respecto a  $x$ , o sólo con respecto a  $y$ , en determinado punto  $(x_0, y_0)$ . Para determinar la razón de cambio de  $z$  con respecto a  $y$ , mantenemos constante a  $x$ , esto es, pedimos que  $x = x_0$ . Análogamente, para determinar la razón de cambio de  $z$  con respecto a  $x$ , pedimos que  $y = y_0$ .

Desde un punto de vista geométrico, la gráfica de la ecuación 1 es una superficie en el espacio  $xyz$  y la gráfica de  $x = x_0$  es un plano paralelo al plano de coordenadas  $yz$  (véase figura 16.2.1). La curva de la intersección de esta superficie con este plano está dada por una función de una variable

$$z = f(x_0, y). \quad (2)$$

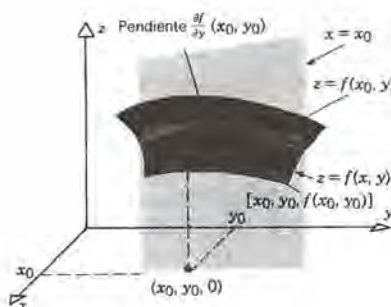


Figura 16.2.1

La razón de cambio de  $z$  con respecto a  $y$  en el punto  $(x_0, y_0)$  simplemente es la pendiente de esta curva, la cual podemos determinar formando el cociente de diferencias

$$\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \quad (3)$$

y pasando al límite cuando  $k \rightarrow 0$ . Si existe este límite, lo representamos mediante

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \quad (4)$$

La función  $\partial f / \partial y$  cuyo valor en  $(x_0, y_0)$  está dado por la ecuación 4, se conoce como la **derivada parcial** de  $f$  con respecto a  $y$ . Se usa el símbolo  $\partial$  en lugar de  $d$  para distinguir las derivadas parciales de las derivadas ordinarias.

De igual modo se define a la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$ . Manteniendo  $y$  constante, o sea  $y = y_0$ , se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}. \quad (5)$$

Si existe este límite, entonces se tiene el valor de la función  $\partial f / \partial x$  en el punto  $(x_0, y_0)$ , que es la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$ . La cantidad  $(\partial f / \partial x)(x_0, y_0)$  es la razón de cambio de  $f$  con respecto a  $x$  en  $(x_0, y_0)$ , o sea la pendiente de la curva de la intersección de la superficie  $z = f(x, y)$  con el plano  $y = y_0$  paralelo al plano  $xz$  (véase figura 16.2.2).

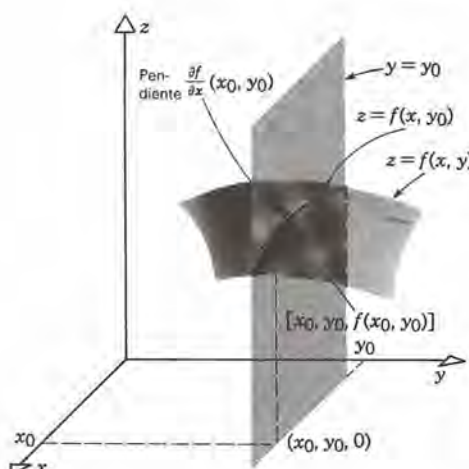


Figura 16.2.2

Ya que se define a las derivadas parciales exactamente como a las derivadas ordinarias, con la única excepción de que sólo se permite cambiar a una variable mientras la otra se mantiene constante, se infiere que siguen vigentes las reglas de cálculo que hemos desarrollado, para el caso de las derivadas parciales, siempre y cuando recordemos que en realidad sólo cambia una variable y que la otra permanece fija durante el cálculo. Esto se ve en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 1

Si  $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + 3xy^3$ , determinar las derivadas parciales  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$ .

Para calcular  $\partial f/\partial x$  mantenemos constante a  $y$  y derivamos a  $f$  con respecto a  $x$ , empleando la regla para las potencias y la regla para derivar sumas. Obtenemos así

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^4) + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(2x^2) \right] y^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(3x) \right] y^3 \\ &= 4x^3 + 4xy^2 + 3y^3.\end{aligned}\quad (6)$$

Similarmente, si mantenemos constante a  $x$  y derivamos con respecto a  $y$ , veremos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^2y + 9xy^2. \quad \blacksquare \quad (7)$$

Con frecuencia se emplea la notación de subíndice o bien el operador  $D$  con un subíndice para indicar una derivada parcial. Así,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f. \quad (8)$$



Por tanto, los resultados del ejemplo 1 se pueden expresar en las siguientes formas:

$$D_x f(x, y) = f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 + 3y^3,$$

$$D_y f(x, y) = f_y(x, y) = 4x^2y + 9xy^2.$$

Sin embargo, el símbolo para prima, como en  $f'(x)$ , no se utiliza en las derivadas parciales.

Si  $f$  es función de más de dos variables, se amplía el concepto de derivada parcial de manera natural. Por ejemplo, supongamos que  $f$  es una función de tres variables

$$w = f(x, y, z). \quad (9)$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}, \quad (10)$$

siempre que exista el límite, es el valor de la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Esta cantidad es la razón de cambio de  $f$  con respecto a  $x$  en este punto. Análogamente, las derivadas parciales de  $f$  con respecto a  $y$  y a  $z$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k} \quad (11)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + m) - f(x_0, y_0, z_0)}{m}, \quad (12)$$

siempre y cuando existan estos límites. Obsérvese que en cada caso sólo se permite que varíe una variable independiente, mientras que las otras dos se mantienen constantes. La definición de derivadas parciales para funciones de más de tres variables es completamente análoga.

## EJEMPLO 2

Si  $f(x, y, z) = (x^2 - 2y)(3x + z^2)$ , determinar las derivadas parciales de  $f$  con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Para determinar  $D_x f(x, y, z)$ , mantenemos constantes a  $y$  y a  $z$ , y empleamos la regla para el producto para derivar a  $f$  con respecto a  $x$ . Así obtenemos

$$\begin{aligned} D_x f(x, y, z) &= (x^2 - 2y)D_x(3x + z^2) + (3x + z^2)D_x(x^2 - 2y) \\ &= (x^2 - 2y)(3) + (3x + z^2)(2x) \\ &= 9x^2 - 6y + 2xz^2, \end{aligned} \quad (13)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} D_y f(x, y, z) &= (3x + z^2)D_y(x^2 - 2y) \\ &= (3x + z^2)(-2) = -2(3x + z^2), \end{aligned} \quad (14)$$

y

$$\begin{aligned} D_z f(x, y, z) &= (x^2 - 2y)D_z(3x + z^2) \\ &= (x^2 - 2y)(2z) = 2z(x^2 - 2y). \end{aligned} \quad (15)$$

Nótese que podríamos haber obtenido estos resultados escribiendo

$$f(x, y, z) = 3x^3 - 6xy + x^2z^2 - 2yz^2$$

prosiguiendo después de modo muy semejante al del ejemplo 1. ■

### EJEMPLO 3

Determinar  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$  si

$$z = x^2 \sin(xy^2). \quad (16)$$

Manteniendo constante a  $y$  y empleando la regla para el producto, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x^2) \right] \sin(xy^2) + x^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \sin(xy^2) \right]. \quad (17)$$

Como  $y$  se mantiene constante, se aplica la regla de la cadena (sección 3.5) a  $\sin(xy^2)$ , con lo que se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin(xy^2) + x^2 [\cos(xy^2)] \frac{\partial}{\partial x} (xy^2)$$

de modo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin(xy^2) + x^2 y^2 \cos(xy^2). \quad (18)$$

Procediendo de modo muy semejante, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y} [\sin(xy^2)]$$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 [\cos(xy^2)] \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) \\
 &= 2x^3 y \cos(xy^2). \blacksquare
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

A veces es conveniente indicar no sólo la variable con respecto a la que se determina la derivada parcial, sino también aquéllas que se mantienen constantes durante el proceso. Esto se puede hacer con la notación

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$

para indicar la derivada parcial con respecto a  $x$ , manteniendo constante a  $y$ . Con esta notación nos encontramos con frecuencia en la termodinámica, como en el ejemplo siguiente:

#### EJEMPLO 4

En el estudio de la termodinámica se deduce la relación

$$C_p - C_v = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{20}$$

En esta ecuación,  $p$ ,  $V$  y  $T$  representan la presión, el volumen y la temperatura de un gas, mientras que  $C_p$  y  $C_v$  son los calores específicos del gas a presión constante y a volumen constante, respectivamente. La cantidad  $(\partial p / \partial T)_v$  quiere decir que  $p$  es una función de  $T$  y de  $V$ , y que la derivada de  $p$  con respecto a  $T$  se determina manteniendo constante a  $V$ . Análogamente,  $(\partial V / \partial T)_p$  quiere decir que  $V$  es función de  $T$  y de  $p$ , y que se debe calcular la derivada de  $V$  con respecto a  $T$  manteniendo constante a  $p$ . Para un gas perfecto, la ecuación de estado es

$$pV = RT, \tag{21}$$

en la cual  $R$  es una constante. Deducir una ecuación para  $C_p - C_v$  en este caso.

Manteniendo constante a  $V$  y derivando la ecuación 21 con respecto a  $T$ , obtenemos

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{R}{V}. \tag{22}$$

Similarmente, manteniendo constante a  $p$  y derivando la ecuación 21 con respecto a  $T$ , obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}. \tag{23}$$



Sustituimos las ecuaciones 22 y 23 en la ecuación 20, y, al emplear la ecuación 21, encontramos que

$$\begin{aligned} C_p - C_v &= T \frac{R}{V} \frac{R}{p} \\ &= R. \blacksquare \end{aligned}$$

### Derivadas de orden superior

Exactamente igual que podemos calcular derivadas de orden superior de una función de una sola variable, en general es posible calcular derivadas parciales de orden superior a uno para funciones de dos o más variables. Así, si  $z = f(x, y)$  entonces las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

también en general son funciones tanto de  $x$  como de  $y$ , como podemos ver en los ejemplos 1 y 3. Resulta lógico entonces hablar de las derivadas de  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$  con respecto a  $x$  o a  $y$ . Se escribe

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = D_x^2 z \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = D_x^2 f, \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} = D_{xy}^2 z \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = D_{xy}^2 f, \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} = D_{yx}^2 z \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = D_{yx}^2 f, \quad (26)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = D_y^2 z \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = D_y^2 f. \quad (27)$$

Así, para una función  $f$  de dos variables hay cuatro derivadas parciales de segundo orden. Nótese que  $\partial^2 f/\partial y \partial x$  se obtiene al derivar a  $f$  primero con respecto a  $x$  y después con respecto a  $y$ , mientras que  $\partial^2 f/\partial x \partial y$  se obtiene llevando a cabo las mismas operaciones en el orden inverso. En ambos casos se determina el orden de derivación leyendo de derecha a izquierda. Sin embargo, en expresiones como  $z_{xy}$  se indica el orden de derivación con el orden de los subíndices, leyendo de izquierda a derecha. Se puede pensar en esta operación como si hubiera paréntesis,  $(z_x)_y$ , en cuyo caso es natural leer a  $z_{xy}$  como la función  $z_x$  derivada con respecto a  $y$ .

De igual modo es posible calcular derivadas de orden mayor que dos. Por ejemplo,  $f_{xyy} = \partial^3 f / \partial y^2 \partial x$  se obtiene al derivar a  $f$  una vez con respecto a  $x$  y a continuación dos veces con respecto a  $y$ . El cálculo de las derivadas parciales de orden dos y mayor que dos se puede extender a funciones de más de dos variables, de un modo natural.

### EJEMPLO 5

Si  $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + 3xy^3$ , determinar las cuatro derivadas parciales de  $f$  de orden dos.

Se trata de la misma función que vimos en el ejemplo 1; por tanto, sus primeras derivadas parciales están dadas por las ecuaciones 6 y 7. Al derivar a la ecuación 6 con respecto a  $x$  y a  $y$ , obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 8xy + 9y^2.$$

Análogamente, al derivar a la ecuación 7 con respecto a  $x$  y a  $y$ , encontramos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 8xy + 9y^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = f_{yy}(x, y) = 4x^2 + 18xy. \blacksquare$$

### EJEMPLO 6

Si  $z = x^2 \sin(xy^2)$ , como en el ejemplo 3, determinar  $D_{xy}^2 z$  y  $D_{yx}^2 z$ .

Hemos calculado ya  $D_x z$  y  $D_y z$ ; están dadas por las ecuaciones 18 y 19, respectivamente. Para determinar las segundas derivadas que se requieren, debemos derivar a  $D_x z$  con respecto a  $y$  y a  $D_y z$  con respecto a  $x$ . Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} D_{xy}^2 z &= 2x D_y [\sin(xy^2)] + x^2 [D_y(y^2)] \cos(xy^2) + x^2 y^2 D_y [\cos(xy^2)] \\ &= (2x) 2xy \cos(xy^2) + x^2 (2y) \cos(xy^2) + (x^2 y^2) (2xy) [-\sin(xy^2)] \\ &= 6x^2 y \cos(xy^2) - 2x^3 y^3 \sin(xy^2). \end{aligned}$$

Análogamente, al derivar a la ecuación 19 con respecto a  $x$ , obtenemos  $D_{yx}^2 z$ :

$$\begin{aligned} D_{yx}^2 z &= [D_x(2x^3 y)] \cos(xy^2) + 2x^3 y D_x [\cos(xy^2)] \\ &= 6x^2 y \cos(xy^2) + 2x^3 y (y^2) [-\sin(xy^2)] \end{aligned}$$

$$= 6x^2y \cos(xy^2) - 2x^3y^3 \operatorname{sen}(xy^2). \blacksquare$$

Nótese que en el ejemplo 5,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

y que en el ejemplo 6

$$D_{xy}^2 z = D_{yx}^2 z.$$

En otras palabras, en estos ejemplos son iguales las segundas derivadas parciales mixtas, independientemente del orden en el cual se determinan las derivadas. De hecho, éste es casi siempre el caso. Sin embargo, hay casos raros en los que se obtienen resultados distintos si se invierte el orden en el que se deriva.

Con frecuencia es deseable intercambiar el orden en el que se deriva, y para asegurarnos de que ello es permisible, debemos imponer condiciones de continuidad en la función  $f$  y en sus derivadas parciales. En el siguiente teorema se dan las condiciones de suficiencia para ello.

### Teorema 16.2.1

Considere una función de dos variables,  $z = f(x, y)$ . Si  $f$ ,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xy}$  y  $f_{yx}$  son continuas en alguna vecindad de un punto  $(x_0, y_0)$ , entonces

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \quad (28)$$

Omitiremos la demostración de este teorema. Para una función de tres variables, la generalización de ese teorema supone la continuidad de  $f$ , de las tres primeras derivadas parciales, y de las segundas derivadas parciales mixtas. En el resto de este libro supondremos que se puede cambiar el orden de la derivación a voluntad.

En el estudio de la física matemática con frecuencia es importante investigar las soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales parciales, esto es, ecuaciones que contienen derivadas parciales de la función desconocida. Una ecuación de especial importancia es la *ecuación de onda*,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (29)$$

que es fundamental en el estudio de los fenómenos ondulatorios. La constante positiva  $c$  se puede identificar como la velocidad de propagación de la onda. Por ejemplo,  $u(x, t)$  podría indicar el desplazamiento transversal de una cuerda vibrante, como por ejemplo una cuerda de violín (véase figura 16.2.3); entonces  $c$  es la velocidad a la cual se





Figura 16.2.3 Cuerda vibrante.

mueven las ondas a lo largo de la cuerda. Si bien es demasiado difícil presentar aquí una discusión sistemática de las ecuaciones diferenciales parciales, con frecuencia es relativamente sencillo determinar si una función dada satisface una ecuación diferencial parcial.

### EJEMPLO 7

Demostrar que la función

$$u(x, t) = \sin 2x \cos 2ct \quad (30)$$

es una solución de la ecuación de onda (29).

Para comprobar que  $u(x, t)$  satisface la ecuación 29, sólo necesitaremos determinar  $u_{xx}$  y  $u_{tt}$ . Encontramos que

$$u_x(x, t) = 2 \cos 2x \cos 2ct,$$

$$u_{xx}(x, t) = -4 \sin 2x \cos 2ct.$$

Análogamente,

$$u_t(x, t) = -2c \sin 2x \sin 2ct,$$

$$u_{tt}(x, t) = -4c^2 \sin 2x \cos 2ct.$$

Por tanto,  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , lo que se tenía que demostrar. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 18, determinar las derivadas parciales que se indican.

1.  $z = 2x^2 - 3xy + y^2$ ;  $z_x, z_y$

2.  $z = (x^2 - y^2)(x^2 + 2y^2)$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

3.  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + 1}$ ;  $f_x(x, y)$

4.  $w = (2u - v)^2(u + 3v)^3$ ;  $\frac{\partial w}{\partial v}$

5.  $f(x, y) = x^3 + 4x^2y - 6xy^2 + y^3$ ;  $D_i f(x, y), D_j f(x, y)$

6.  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $f_y(x, y)$

7.  $u = rs \cos(r - s)$ ;  $D_r u, D_s u$

8.  $z = [(2x - y)(x^2 + 2y^2)]^{1/3}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y}$

9.  $f(x, y) = x^2y^2 \sin(x^2y^2)$ ;  $f_x(x, y)$
10.  $w = (xy - 2yz + 3xz)^2$ ;  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial z}$
11.  $f(x, y, z) = \frac{(x - 2y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ ;  $f_y(x, y, z)$
12.  $f(x, y, z) = xy \ln(xyz)$ ;  $f_y(x, y, z)$ ,  $f_z(x, y, z)$
13.  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ ;  $f_x(x, y, z)$
14.  $z = e^{x+y^2}$ ;  $z_x, z_y$
15.  $z = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ;  $z_x, z_y$
16.  $z = x^y$ ,  $x > 0$ ;  $z_x, z_y$
17.  $z = \arctan \frac{y}{x}$ ;  $z_x, z_y$
18.  $w = \tan(x^2 + y^3 + z^4)$ ;  $w_x, w_z$

En los problemas 19 a 22 comprobar que  $z_{xy} = z_{yx}$

19.  $z = 2x^2 - 3xy + y^2$
20.  $z = (x^2 + xy + y^2)^{1/2}$     21.  $z = x^2y^2 \sin(x^2y^2)$
22.  $z = \sin(x + y) + \cos(x - y)$
23. Si  $z = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ , demostrar que  $xz_x + yz_y = 1$ .
24. Si  $w = f(x, y) + g(y, z) + h(x, z)$ , demostrar que  $\partial^3 w / \partial x \partial y \partial z = 0$ .

En los problemas 25 a 28 comprobar que la función dada satisface la ecuación diferencial parcial también dada.

25.  $u(x, t) = \cos 2x \sin 4t$ ;  $4u_{xx} = u_{tt}$
26.  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ;  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$
27.  $u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ;  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ,  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$
28.  $u(r, \theta) = r^n \cos n\theta$ ;  $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$ ,  $r \neq 0$
29. Sea  $w = f(x, y, z)$

(a) ¿Cuántas segundas derivadas parciales tiene  $w$ ? Suponiendo que no tiene importancia el orden en el que se deriva, ¿cuántas segundas derivadas distintas se tienen?

(b) ¿Cuántas derivadas parciales de orden  $n$  tiene  $w$ ? Suponiendo que no importa el orden en el que se deriva, ¿cuántas derivadas parciales de orden  $n$  se tienen?

\*30. La ecuación de estado para el aire es, con mayor exactitud, la siguiente:

$$pV = RT + p(b - cT^n) \quad (i)$$

en comparación con  $pV = RT$ . En la ecuación (i), que se conoce como ecuación de Callendar, las cantidades  $b, c$  y  $n$  son constantes que se deben ajustar de acuerdo con factores tales como por ejemplo la humedad atmosférica. Procediendo como en el ejemplo 4, determinar una ecuación para  $C_p - C_v$ .

En los problemas 31 a 34, demostrar que

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{y} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y).$$

A estas ecuaciones se les llama de Cauchy- Riemann, y son muy importantes en el estudio de las funciones de variable compleja.

31.  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $v(x, y) = 2xy$
32.  $u(x, y) = e^{nx} \cos ny$ ,  $v(x, y) = e^{nx} \sin ny$
33.  $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$
34.  $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ ,  $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

En los problemas 35 a 40, determinar una función  $z = f(x, y)$  que tenga la propiedad que se muestra.

35.  $z_x = \frac{1}{y}$     36.  $z_y = \frac{1}{y} + 2 \sin x$
37.  $z_y = e^{xy} + \ln x + yx^2$     38.  $z_x = e^{x+y} + x^2y$
39.  $z_x = (xy)^2 + x^y$
40.  $z_y = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \cos(x - y)$

### 16.3 FUNCIONES DIFERENCIABLES Y LA REGLA DE LA CADENA

Nuestro siguiente objetivo consiste en desarrollar un enunciado de lo que significa que una función de dos variables sea diferenciable. Sucede que esto no es tan simple como podríamos esperar. Por ejemplo, podríamos pensar que si  $f(x, y)$  tiene derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  en el punto  $f(x_0, y_0)$ , entonces podríamos decir que  $f$  es diferenciable allí. Sin embargo, esto no sería satisfactorio debido a varias razones. Una es que para preservar la relación entre la derivabilidad y la continuidad, que prevalece para funciones de una variable, deseamos que una función diferenciable de dos variables sea continua. Por otro lado, ejemplos como el del problema 39 muestran que una función  $f(x, y)$  puede tener derivadas parciales en el punto  $(x_0, y_0)$ , pero que no son continuas allí. En consecuencia, el concepto de diferenciability de funciones de dos variables debe implicar más que la existencia de las derivadas parciales.

La clave reside en el concepto de una función localmente lineal, como se describió en la sección 3.4 para funciones de una variable. Dijimos allí que una función continua  $f$  es localmente lineal en  $x_0$  si existen constantes  $A$  y  $B$  tales que

$$f(x_0 + h) = A + Bh + r(h, x_0)h, \quad (1)$$

en la cual

$$r(h, x_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h \rightarrow 0. \quad (2)$$

En consecuencia,  $f$  también es diferenciable en  $x_0$  y las constantes  $A$  y  $B$  están dadas por

$$A = f(x_0), \quad B = f'(x_0). \quad (3)$$

También demostramos en la sección 3.4 que si  $f$  es derivable en  $x_0$ , esto es, si existe

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (4)$$

entonces  $f$  cumple con

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h, x_0)h, \quad (5)$$

para la cual

$$\lim_{h \rightarrow 0} r(h, x_0) = 0. \quad (6)$$

En consecuencia, para que una función de una variable sea derivable debe ser localmente lineal, y viceversa. Así, la derivabilidad y la linealidad local son propiedades equivalentes, en el sentido de que una función que tiene una propiedad también tiene



la otra. Esta equivalencia da un medio de ampliar el concepto de derivabilidad a funciones de dos variables. En lugar de tratar de generalizar la ecuación 4, que es el límite de un cociente de diferencias, generalizaremos el enunciado de la linealidad local para ampliar el concepto de derivabilidad a funciones de dos variables.

Sea  $z = f(x, y)$  continua en  $(x_0, y_0)$ . Se dice entonces que  $f$  es **localmente lineal** en  $(x_0, y_0)$  si

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = A + Bh + Ck + r(x_0, y_0, h, k)\sqrt{h^2 + k^2}, \quad (7)$$

en la cual  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes,  $r \rightarrow 0$  cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  y, como de costumbre,  $h = x - x_0$  y  $k = y - y_0$ . Se puede determinar como sigue las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ : si hacemos que  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  en la ecuación 7, y hacemos uso del hecho de que  $f$  es continua en  $(x_0, y_0)$ , entonces

$$A = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0). \quad (8)$$

A continuación hacemos que  $k = 0$  en la ecuación 7, sustituimos  $A$  de la ecuación 8, despejamos a  $B$  y hacemos que  $h \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} B &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - r(x_0, y_0, h, 0) \frac{|h|}{h} \right] \\ &= f_x(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (9)$$

De igual modo encontramos que

$$C = f_y(x_0, y_0). \quad (10)$$

Así, si  $z = f(x, y)$  es continua y localmente lineal en  $(x_0, y_0)$ , entonces deben existir  $f_x(x_0, y_0)$  y  $f_y(x_0, y_0)$ . Así la ecuación 7 se transforma en

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h \\ &\quad + f_y(x_0, y_0)k + r(x_0, y_0, h, k)\sqrt{h^2 + k^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

en la cual

$$r(x_0, y_0, h, k) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad (h, k) \rightarrow (0, 0). \quad (12)$$

El argumento que acabamos de dar hace plausible la siguiente definición de diferenciabilidad para una función de dos variables. Obsérvese que esta definición no dice nada acerca de la posible continuidad de la función.

**DEFINICIÓN 16.3.1** Se dice que una función  $f$  de dos variables, definida en alguna vecindad de  $(x_0, y_0)$ , es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  si satisface las ecuaciones 11 y 12.

La relación entre diferenciabilidad y continuidad es una consecuencia inmediata de esta definición.

### Teorema 16.3.1

Si  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ , entonces es continua allí.

**Demostración.** Para demostrar este resultado simplemente determinamos el límite de la ecuación 11 cuando  $h$  y  $k$  tienden a cero; obtenemos entonces

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0),$$

lo cual significa que  $f$  es continua en  $(x_0, y_0)$ .  $\square$

Ya hemos indicado que la mera existencia de las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  no es suficiente para garantizar que una función  $f(x, y)$  de dos variables sea diferenciable. Sin embargo, si las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  son continuas, entonces *es cierto* que la función es diferenciable. Es un resultado útil, porque puede ser bastante más sencillo determinar que  $f_x$  y  $f_y$  son continuas que calcular la función  $r$  en la ecuación 11 y determinar su límite cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

### Teorema 16.3.2

Si  $f$  es una función de dos variables, si existen  $f_x$  y  $f_y$  en alguna vecindad de  $(x_0, y_0)$ , y si  $f_x$  y  $f_y$  son continuas en  $(x_0, y_0)$ , entonces  $f$  satisface las ecuaciones 11 y 12 y, por tanto, es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ .

En el problema 40 se delinea la demostración de este teorema.

## La diferencial

Regresando a la ecuación 11 y siguiendo el comportamiento establecido en la sección 3.4, definiremos a la **diferencial** de  $f$ , representada por  $df$ , o quizá por  $dz$ , como los términos que son lineales en los incrementos  $h$  y  $k$ . Así, en un punto  $(x, y)$  arbitrario,

$$df = dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy, \quad (13)$$

en la cual hemos seguido la práctica normal de remplazar a  $h$  por  $dx$  y a  $k$  por  $dy$ . Consideramos a  $df$  como una aproximación al incremento real  $\Delta f = f(x + h, y + k) - f(x, y)$ . En realidad,

$$\Delta f - df = r(x, y, h, k) \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0 \quad (14)$$

cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . En la sección 16.5 veremos que  $df$  corresponde a aproximar la superficie  $z = f(x, y)$  mediante el plano tangente en el punto  $[x, y, f(x, y)]$ .

## EJEMPLO 1

Sea

$$z = f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2. \quad (15)$$

En un punto arbitrario  $(x, y)$ , determinar el incremento  $\Delta z$  y la diferencial  $dz$ . También, determinar  $r$  y demostrar que  $f$  es diferenciable; para ello demostrar que  $r \rightarrow 0$  cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) &= 2(x + h)^2 - 3(x + h)(y + k) + (y + k)^2 \\ &= 2x^2 - 3xy + y^2 + (4x - 3y)h + (-3x + 2y)k \\ &\quad + 2h^2 - 3hk + k^2, \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + h, y + k) - f(x, y) \\ &= (4x - 3y)h + (-3x + 2y)k + 2h^2 - 3hk + k^2. \end{aligned} \quad (16)$$

También,

$$f_x(x, y) = 4x - 3y, \quad f_y(x, y) = -3x + 2y,$$

y así

$$dz = (4x - 3y) dx + (-3x + 2y) dy. \quad (17)$$

Por tanto,

$$\Delta z - dz = 2h^2 - 3hk + k^2 = \frac{2h^2 - 3hk + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \sqrt{h^2 + k^2},$$

entonces

$$r(x, y, h, k) = \frac{2h^2 - 3hk + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \quad (18)$$

Nótese que en este caso  $r$  es independiente de  $x$  y de  $y$ . Para demostrar que  $r \rightarrow 0$  cuando



$(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , es útil introducir las coordenadas polares  $\rho$  y  $\theta$  de modo que  $h = \rho \cos \theta$  y  $k = \rho \sin \theta$ . Entonces

$$r = \rho(2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta).$$

Cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , entonces  $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$  y en consecuencia  $r \rightarrow 0$  también. Así,  $f$  es diferenciable en todos los puntos  $(x, y)$ . Desde luego, esto también es consecuencia del teorema 16.3.2, ya que  $f_x$  y  $f_y$  son continuas dondequiera. ■

La definición de diferenciabilidad que hemos dado para funciones de dos variables se generaliza en forma inmediata a funciones de tres o más variables. Igualmente, los teoremas 16.3.1 y 16.3.2 y el concepto de la diferencial también tienen sus extensiones directas a funciones de más de dos variables.

### La regla de la cadena

Pasaremos ahora al desarrollo de la regla de la cadena para las derivadas parciales de funciones compuestas. Por ejemplo, supongamos que  $w = f(x, y)$ , donde

$$x = g(r, s), \quad y = h(r, s),$$

de modo que  $w = F(r, s) = f[g(r, s), h(r, s)]$ . Desearíamos deducir fórmulas para  $\partial w / \partial r$ , y  $\partial w / \partial s$  en donde intervinieran las funciones originales  $f$ ,  $y$  y  $h$  sin calcular realmente la función  $F$ . Suponemos que las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  son diferenciables. En esta deducción emplearemos  $\Delta$  para indicar un incremento en cualquiera de las variables que aparezcan.

Para calcular  $\partial w / \partial r$  debemos calcular  $\Delta w$  que corresponde a un incremento  $\Delta r$  para entonces determinar el límite de  $\Delta w / \Delta r$  cuando  $\Delta r \rightarrow 0$ . Notemos primero que, correspondiendo al incremento  $\Delta r$  se tienen los incrementos

$$\Delta x = g(r + \Delta r, s) - g(r, s), \quad \Delta y = h(r + \Delta r, s) - h(r, s).$$

Como las funciones  $g$  y  $h$  son diferenciables, podemos escribir

$$\Delta x = g_r(r, s) \Delta r + \eta_1 \Delta r, \quad \Delta y = h_r(r, s) \Delta r + \eta_2 \Delta r, \quad (19)$$

en las que  $\eta_1 \rightarrow 0$  y  $\eta_2 \rightarrow 0$ . Correspondiendo al incremento  $\Delta r$  hay un incremento  $\Delta w$  que está dado por

$$\begin{aligned} \Delta w &= F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \end{aligned}$$

Como también  $f$  es una función diferenciable, entonces

$$\Delta w = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \eta_3(x, y, \Delta x, \Delta y) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad (20)$$

en la cual  $\eta_3 \rightarrow 0$  cuando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ . A continuación sustituimos las ecuaciones 19 en la ecuación 20. Al omitir, para abreviar, las variables independientes de las diversas funciones, obtenemos de este modo

$$\Delta w = (f_x g_r + f_y h_r) \Delta r + f_x \eta_1 \Delta r + f_y \eta_2 \Delta r + \eta_3 [(g_r + \eta_1)^2 + (h_r + \eta_2)^2]^{1/2} |\Delta r|. \quad (21)$$

Dividiendo entre  $\Delta r$  y pasando al límite cuando  $\Delta r \rightarrow 0$ , obtenemos finalmente

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta r} = f_x(x, y)g_r(r, s) + f_y(x, y)h_r(r, s). \quad (22)$$

Este resultado se recordará con mayor facilidad si lo escribimos en la forma

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}. \quad (23)$$

De igual manera obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial s} = f_x(x, y)g_s(r, s) + f_y(x, y)h_s(r, s) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (24)$$

Las fórmulas (22), (23) y (24) de la regla de la cadena se pueden generalizar fácilmente para cualquier combinación de las variables:  $w$  puede ser función de una, de dos o de más variables, cada una de las cuales puede ser función de una, de dos o de más variables. Una vez comprendido el comportamiento de acuerdo con el cual se determinan las derivadas  $\partial w/\partial r$  y  $\partial w/\partial s$  mediante las ecuaciones 22, 23 y 24, no debe ser difícil extender el proceso a otros casos.

## EJEMPLO 2

Sea  $z = 3x^2y^3$ , en la cual  $x = 2r^2 - s^2$ , y  $y = 3rs$ . Determinar  $\partial z/\partial r$  y  $\partial z/\partial s$ .

Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = (6xy^3)(4r) + (9x^2y^2)(3s). \quad (25)$$

De igual modo,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (6xy^3)(-2s) + (9x^2y^2)(3r). \quad (26)$$

Los resultados se pueden expresar completamente en términos de  $r$  y  $s$  si se sustituye  $2r^2 - s^2$  en lugar de  $x$  y  $3rs$  en lugar de  $y$  en las ecuaciones 25 y 26. ■

**EJEMPLO 3**

Supongamos que  $z = 2x^2 - xy - y^2$ , donde  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ . Determinar  $\partial z / \partial \theta$  y evaluarla cuando  $r = 2$  y  $\theta = \pi/3$ .

Por la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= (4x - y)(-r \sin \theta) - (x + 2y)(r \cos \theta).\end{aligned}\quad (27)$$

Para  $r = 2$  y  $\theta = \pi/3$ ,  $x = 1$  y  $y = \sqrt{3}$ . Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = (4 - \sqrt{3})(-\sqrt{3}) - (1 + 2\sqrt{3})(1) = 2 - 6\sqrt{3} \cong -8.392. \blacksquare$$

**EJEMPLO 4**

Suponer que  $w = f(x, y, z)$  y que

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Determinar  $\partial w / \partial \phi$  cuando  $\rho = 2$ ,  $\phi = \pi/6$ ,  $\theta = \pi/4$  si  $f_x(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}) = -1$ ,  $f_y(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}) = 3$ , y  $f_z(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \sqrt{3}) = 2$ .

Tenemos que  $w = F(\rho, \phi, \theta) = f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$ , y por tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \phi} &= \frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \sin \phi \cos \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \sin \phi \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \cos \phi) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (\rho \cos \phi \cos \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (\rho \cos \phi \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial z} (-\rho \sin \phi).\end{aligned}$$

Como  $x = \sqrt{2}/2$ ,  $y = \sqrt{2}/2$ ,  $z = \sqrt{3}$  corresponde a  $\rho = 2$ ,  $\phi = \pi/6$  y  $\theta = \pi/4$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \phi} &= (-1) \left( 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 3 \left( 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2 \left( -2 \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2} + 3 \frac{\sqrt{6}}{2} - 2 \\ &= \sqrt{6} - 2 \cong 0.4495 \quad \text{cuando} \quad \rho = 2, \phi = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{4}. \blacksquare\end{aligned}$$



**EJEMPLO 5**

Demostrar que si  $f$  es una función derivable, entonces  $u = f(x - ct)$  es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

en la cual  $c$  es una constante.

Sea  $\xi = x - ct$ . Entonces  $u = f(\xi)$  es una función de una variable,  $\xi$ , la cual a su vez es función de las variables  $x$  y  $t$ . Tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(\xi) (1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = f'(\xi)(-c).$$

Sumando  $c$  veces la primera ecuación a la segunda se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -cf'(\xi) + cf'(\xi) = 0. \blacksquare$$

Se pueden calcular las segundas derivadas o de orden mayor de las funciones compuestas mediante la aplicación repetida de la regla de la cadena. Los siguientes ejemplos son típicos. El principal problema es organizar el trabajo de tal modo que no se omita algún término en forma inadvertida.

**EJEMPLO 6**

Si  $z = 3x^2y^3$ , donde  $x = 2r^2 - s^2$  y  $y = 3rs$ , determinar  $\partial^2 z / \partial s^2$ .

Esto es una continuación del ejemplo 2. De acuerdo con la ecuación 26 tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -12xy^3s + 27x^2y^2r; \quad (28)$$

por tanto lo que tenemos que hacer es derivar esta ecuación con respecto a  $s$ . Obsérvese que en el primer término del lado derecho de la ecuación aparece en forma explícita la variable  $s$  y que en ambos términos está presente debido a la dependencia de  $x$  y  $y$  con respecto a  $s$ . Comenzaremos empleando las reglas para derivar sumas y productos; así,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = -12 \frac{\partial x}{\partial s} y^3 s - 12x \left[ \frac{\partial}{\partial s}(y^3) \right] s - 12xy^3 \frac{\partial s}{\partial s}$$

$$+ 27 \left[ \frac{\partial}{\partial s} (x^2) \right] y^2 r + 27 x^2 \left[ \frac{\partial}{\partial s} (y^2) \right] r. \quad (29)$$

A continuación empleamos la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial}{\partial s}(y^3) = 3y^2 \frac{\partial y}{\partial s} = (3y^2)(3r) = 9y^2 r.$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(x^2) = 2x \frac{\partial x}{\partial s} = (2x)(-2s) = -4xs.$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(y^2) = 2y \frac{\partial y}{\partial s} = (2y)(3r) = 6yr.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 29, y empleando el hecho adicional de que  $\partial s/\partial s = 1$ , obtenemos finalmente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 24y^3 s^2 - 108xy^2 rs - 12xy^3 - 108xy^2 rs + 162x^2 yr^2. \quad (30)$$

De nuevo, podremos expresar el resultado enteramente en términos de  $r$  y  $s$ , si lo deseamos, sustituyendo las ecuaciones adecuadas para  $x$  y  $y$  en la ecuación 30. ■

## EJEMPLO 7

Demostrar que

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (31)$$

es una solución de la ecuación de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (32)$$

para funciones arbitrarias  $f$  y  $g$  que tengan segundas derivadas continuas.

Sea  $\xi = x - ct$  y  $\eta = x + ct$ . Entonces  $u = F(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ . Tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = f'(\xi)(-c) + g'(\eta)c.$$

Aplicando de nuevo la regla de la cadena a la función  $\partial u/\partial t$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \xi}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \eta}{\partial t} = [-cf''(\xi)](-c) + [cg''(\eta)]c \\ &= c^2[f''(\xi) + g''(\eta)]. \end{aligned} \quad (33)$$

Análogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = f'(\xi)(1) + g'(\eta)(1),$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} = f''(\xi) + g''(\eta). \quad (34)$$

Sustituyendo a  $u_{\eta}$  y  $u_{\eta\eta}$  de las ecuaciones 33 y 34, respectivamente, en la ecuación 32, se obtiene el resultado que se busca. ■

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 expresar a  $f(x+h, y+k)$  en la forma de la ecuación 11. Determinar  $r(x, y, h, k)$  y demostrar que  $r \rightarrow 0$  cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . En los problemas 5 y 6 podrá ser útil un desarrollo de Taylor.

1.  $f(x, y) = x^2 + 3xy$       2.  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$

3.  $f(x, y) = xy^2$       4.  $f(x, y) = x^4 + y^4$

5.  $f(x, y) = x \sin y$       6.  $f(x, y) = y^2 e^x$

En los problemas 7 a 14, calcular la diferencial de la función dada.

7.  $z = \ln(3x^2 - y + 2)$       8.  $z = e^x \sin y$

9.  $z = x^y, \quad x > 0$       10.  $z = e^{1+xy}$

11.  $z = \arctan \frac{y}{x}$       12.  $w = z \tan xy^2$

13.  $w = x \cos 2y + 3yz^{1/2}$

14.  $w = \sin x \cos 2y \sin 3z$

15. Determinar la diferencial  $dV$ , donde  $V = \pi r^2 h/3$  es el volumen de un cono de radio  $r$  y altura  $h$ .

16. Determinar la diferencial  $dV$ , donde  $V = \pi(R^2 + rR + r^2)h/3$  es el volumen del cono truncado de altura  $h$  y cuyos radios son  $r$  y  $R$  de las dos bases.

17. Si  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , demostrar que

$$xd\left(\frac{x}{r}\right) + yd\left(\frac{y}{r}\right) + zd\left(\frac{z}{r}\right) = 0, \quad r \neq 0.$$

18. Si

$$w = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n},$$

demostrar que

$$\frac{dw}{w} = p_1 \frac{dx_1}{x_1} + p_2 \frac{dx_2}{x_2} + \cdots + p_n \frac{dx_n}{x_n}.$$

De aquí que el cambio relativo en  $w$  es la suma (proporcionada) de los cambios relativos en las  $x$ .

En los problemas 19 a 24 emplear la regla de la cadena para determinar  $dz/dt$  o bien  $dw/dt$ .

19.  $z = 3x^2 + 2xy^3, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t^2$

20.  $z = \sin(2x - 3y), \quad x = t + t^{-1},$   
 $y = t - t^{-1}$

21.  $z = e^{1+xy}, \quad x = t^2, \quad y = \sin t$

22.  $z = \ln(2y + \sqrt{1-x^2}), \quad x = t^2, \quad y = t^4$

23.  $w = 2x^2 + 3y^3 - 6xyz, \quad x = t^{-1},$   
 $y = \sqrt{t}, \quad z = t^{1/3}$

24.  $w = xe^{2y} \cos 4z, \quad x = \sqrt{1-t},$   
 $y = t, \quad z = 1 - t^2$

En los problemas 25 a 28, emplear la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales que se indican.

25.  $z = 6xy^2, \quad x = r^2 - s^2, \quad y = 2rs; \quad \frac{\partial z}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial s}$

26.  $z = \ln(3x^2 + 4y^2), \quad x = r + s,$   
 $y = r - s; \quad \frac{\partial z}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial s}$



# 910 DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

27.  $z = \arctan(x^2 + y^2)$ ,  $x = e^t \cos t$ ,

$$y = e^t \sin t; \quad \frac{\partial z}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

28.  $w = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $x = e^r \cos s$ ,  $y = e^r \sin s$ ,

$$z = sr; \quad \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \frac{\partial w}{\partial s}$$

29. Si  $w = f(x - y, y - x)$ , demostrar que  $w_x + w_y = 0$ .

30. Si  $w = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ , demostrar que  $xw_x + yw_y = 0$ .

31. Si  $w = f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ , demostrar que  $xw_x + yw_y + zw_z = 0$ .

32. Si  $w = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$ , demostrar que  $yw_x + xw_y = 0$ .

33. Sea  $u = f(x, y)$  y  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Calcular  $\partial u / \partial r$  y demostrar que

$$(a) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r},$$

$$(b) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

(c) Emplear los resultados de las partes (a) y (b) para demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

34. Si  $u = f(x, y)$ , y  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , demostrar que si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (i)$$

entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (ii)$$

Las ecuaciones (i) y (ii) son la ecuación de Laplace, o la ecuación del potencial, en coordenadas cartesianas y polares, respectivamente.

35. Si  $z = f(x, y)$  y  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ , demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

36. Si  $w = f(x)$  y  $x = \xi^2 - \eta^2$ ,  $y = \xi^2 + \eta^2$ , calcular

$$(a) w_{\xi} \quad (b) w_{\eta} \quad (c) w_{\xi\xi} \quad (d) w_{\eta\eta} \quad (e) w_{\xi\eta}.$$

37. Suponer que  $w = f(x, y, z)$  y que  $z = g(x, y)$ , de modo que  $w = F(x, y) = f[x, y, g(x, y)]$ . Determinar  $\partial f / \partial x$  y  $\partial F / \partial y$  en términos de las derivadas parciales de  $f$  y  $g$ .

38. Suponer que  $w = f(x, y, u, v)$  y que  $u = g(x)$ ,  $v = h(x, y)$ , de modo que  $w = F(x, y) = f[x, y, g(x), h(x, y)]$ . Determinar  $\partial F / \partial x$  y  $\partial F / \partial y$  en términos de las derivadas parciales de  $f$ ,  $g$  y  $h$ .

39. En este problema daremos un ejemplo de una función  $f$  cuyas derivadas parciales  $f_x(0, 0)$  y  $f_y(0, 0)$  existen, pero que no es diferenciable y ni siquiera continua en  $(0, 0)$ . Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

En el ejemplo 4 de la sección 16.1, se demostró que esa función es discontinua en  $(0, 0)$ . De acuerdo con el teorema 16.3.1, tampoco es diferenciable allí.

(a) Empleando la definición de derivada parcial, demostrar que  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ .

(b) Demostrar que

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) \\ &= \frac{hk}{h^2 + k^2}. \end{aligned}$$

(c) Como  $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ , se sigue de la ecuación 11 que  $r = hk/(h^2 + k^2)^{3/2}$ . Demostrar que  $r$  no tiende a cero cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , y con ello confirmar que  $f$  no es diferenciable en el origen.

40. **Demostración del teorema 16.3.2.** Supongamos que  $f_x$  y  $f_y$  existen en una vecindad de  $(x_0, y_0)$  y que son continuas allí.

(a) Escribir  $\Delta f$  en la forma

$$\begin{aligned} \Delta f &= [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] \\ &+ [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned}$$

(b) Aplicar el teorema del valor medio (teorema 4.1.3) a cada una de las expresiones que se encuentran

entre paréntesis rectangulares de la parte (a) para demostrar que

$$\Delta f = f_x(\bar{x}, y_0 + k)h + f_y(x_0, \bar{y})k,$$

donde  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son determinados números que satisfacen  $|\bar{x} - x_0| < |h|$  y  $|\bar{y} - y_0| < |k|$ .

(c) Hacer uso de la continuidad de  $f_x$  y  $f_y$  en  $(x_0, y_0)$  para demostrar que

$$\begin{aligned}\Delta f &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \\ &\quad + \zeta_1(x_0, y_0, h, k)h \\ &\quad + \zeta_2(x_0, y_0, h, k)k,\end{aligned}$$

en las cuales  $\zeta_1 \rightarrow 0$  y  $\zeta_2 \rightarrow 0$  cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

(d) Demostrar que  $r = (\zeta_1 h + \zeta_2 k)/\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$  cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , y con ello demostrar que  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ .

## 16.4 EL GRADIENTE Y LA DERIVADA DIRECCIONAL

### El gradiente

La definición 16.3.1, enunciada para una función de tres variables, dice que  $w = f(x, y, z)$  es diferenciable si

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \\ &= f_x(x, y, z) \Delta x + f_y(x, y, z) \Delta y + f_z(x, y, z) \Delta z \\ &\quad + \zeta \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},\end{aligned}\quad (1)$$

en la que  $\zeta$  depende de  $x, y, z, \Delta x, \Delta y$  y  $\Delta z$ , y que  $\zeta \rightarrow 0$  cuando  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)$ . En esta sección estamos empleando la notación  $\Delta$  para indicar incrementos de las variables respectivas, y no letras separadas  $h, k$ , etcétera. Es de utilidad reformular la ecuación 1 empleando notación vectorial. Sea

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (2)$$

de modo que

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}, \quad \|\Delta \mathbf{r}\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \quad (3)$$

Entonces se puede volver a escribir la ecuación 1 como

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \\ &= [f_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + f_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + f_z(\mathbf{r})\mathbf{k}] \cdot \Delta \mathbf{r} + \zeta \|\Delta \mathbf{r}\|.\end{aligned}\quad (4)$$

Esta ecuación nos motiva para definir una función vectorial, que se conoce como el **gradiente** de  $f$ , en la siguiente forma:

$$\text{grad } f(\mathbf{r}) = f_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + f_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + f_z(\mathbf{r})\mathbf{k}. \quad (5)$$

Esta función vectorial se llama grad de  $f$ ; con frecuencia se escribe  $\nabla f$ , y se llama del de  $f$ .\* Con esta definición, la fórmula (4) para el incremento  $\Delta f$  asume la forma

$$\Delta f = \text{grad } f(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} + \zeta \|\Delta \mathbf{r}\| \quad (6a)$$

o también

$$\Delta f = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} + \zeta \|\Delta \mathbf{r}\|. \quad (6b)$$

En esta forma, la fórmula de  $\Delta f$  tiene bastante parecido a la fórmula correspondiente de la función de una variable; por ejemplo, véase la ecuación 5 de la sección 16.3. También nos sugiere que, para funciones de más de una variable,  $\nabla f$  juega un papel semejante al de  $f'$  para una función de una variable.

### EJEMPLO 1

Si

$$f(\mathbf{r}) = xe^y - ye^z + e^x \sin yz,$$

determinar  $\nabla f(\mathbf{r})$ .

Tenemos que

$$f_x(x, y, z) = e^y + e^x \sin yz,$$

$$f_y(x, y, z) = xe^y - e^z + ze^x \cos yz,$$

$$f_z(x, y, z) = -ye^z + ye^x \cos yz.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{r}) = & (e^y + e^x \sin yz)\mathbf{i} + (xe^y - e^z + ze^x \cos yz)\mathbf{j} \\ & + (-ye^z + ye^x \cos yz)\mathbf{k}. \blacksquare \end{aligned}$$

### Derivadas direccionales

Veremos a continuación la cuestión de determinar la razón de cambio de una función en una dirección arbitraria. Para una función diferenciable de dos variables,  $z = f(x, y) = f(\mathbf{r})$ , las derivadas parciales  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  dan la razón de cambio de  $f$  en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Sin embargo, en un punto  $(x, y)$  hay muchas otras direcciones, como se ve en la figura 16.4.1. La razón de cambio de  $f$  en una dirección arbitraria se conoce como la **derivada direccional** de  $f$  en esa dirección; demostraremos que está estrechamente relacionada con el vector gradiente  $\nabla f$ .

\* Al símbolo  $\nabla$  también se le llama nabla (N. del R. T.).



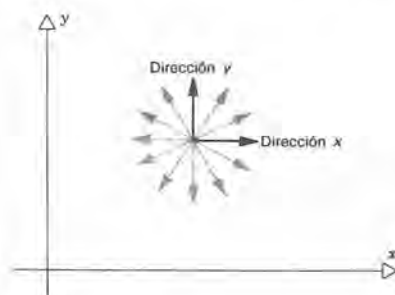


Figura 16.4.1

¿Cómo calculamos la razón de cambio de  $z = f(x, y)$  en un punto dado en una dirección dada? Especificamos la dirección mediante el vector unitario

$$\lambda = \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} = (\cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \theta) \mathbf{j}, \quad (7)$$

como se ve en la figura 16.4.2. Además, necesitamos que el incremento  $\Delta \mathbf{r}$  sea proporcional a  $\lambda$ , esto es,  $\Delta \mathbf{r} = h\lambda$ , donde  $h$  es un multiplicador escalar. La razón de

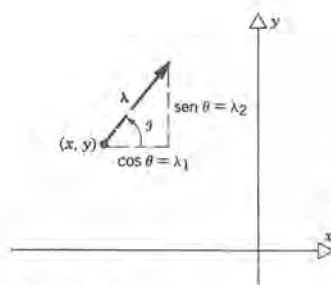


Figura 16.4.2

cambio de  $f$  en la dirección  $\lambda$  se representa mediante  $D_\lambda f(\mathbf{r})$  y se define de la siguiente manera:

$$D_\lambda f(\mathbf{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r} + h\lambda) - f(\mathbf{r})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h\lambda_1, y + h\lambda_2) - f(x, y)}{h}, \quad (8)$$

siempre que exista este límite. La interpretación geométrica de  $D_\lambda f(\mathbf{r})$  se muestra en la figura 16.4.3. La superficie  $z = f(x, y)$  se interseca con el plano paralelo al eje  $z$  que contiene al punto  $\mathbf{r} = (x, y)$  y al vector  $\lambda$ . Si  $C$  es la curva de la intersección de la superficie con el plano, entonces  $D_\lambda f(\mathbf{r})$  es la pendiente de  $C$  en el punto  $(x, y, f(x, y))$ .

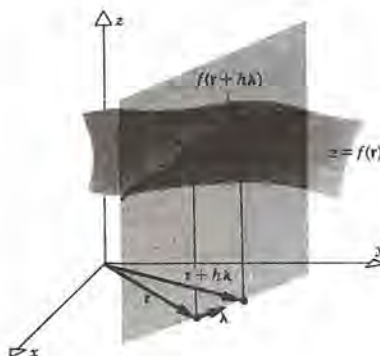


Figura 16.4.3

Como  $f$  es diferenciable, podemos calcular  $D_{\lambda}f(\mathbf{r})$  empleando la fórmula (6b) para el incremento  $\Delta f$ . Entonces

$$\begin{aligned} D_{\lambda}f(\mathbf{r}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\nabla f(\mathbf{r}) \cdot h\lambda + \zeta \|h\lambda\|}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \lambda + \zeta \frac{|h|}{h} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

El término  $\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \lambda$  no depende de  $h$ . Además, cuando  $h \rightarrow 0$ ,  $\Delta x = h\lambda_1 \rightarrow 0$  y  $\Delta y = h\lambda_2 \rightarrow 0$ ; por tanto también  $\zeta \rightarrow 0$ . Se obtiene por consiguiente

$$\begin{aligned} D_{\lambda}f(\mathbf{r}) &= \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \lambda = \text{grad } f(\mathbf{r}) \cdot \lambda \\ &= f_x(x, y)\lambda_1 + f_y(x, y)\lambda_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Así, la derivada direccional de  $f$  en un punto  $(x, y)$  en la dirección dada por el vector unitario  $\lambda$  es el producto escalar del gradiente de  $f$  en ese punto por el vector unitario  $\lambda$  (véase figura 16.4.4). En otras palabras,  $D_{\lambda}f(\mathbf{r})$  es la componente de  $\nabla f$  en la

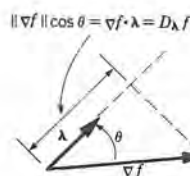


Figura 16.4.4

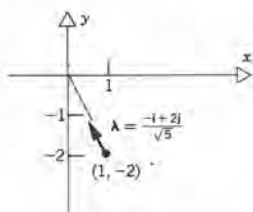
*dirección de  $\lambda$ .* Si  $f$  es diferenciable y si conocemos  $\nabla f$  en un punto dado, podemos entonces calcular rápidamente la derivada direccional de  $f$  en este punto en cualquier dirección dada  $\lambda$ . Nótese que si  $\lambda = \mathbf{i}$ , entonces  $D_{\mathbf{i}}f(\mathbf{r}) = f_x(\mathbf{r})$ ; la razón de cambio de  $f$  en la dirección  $x$  es, tal como se esperaba,  $f_x(\mathbf{r})$ . Análogamente,  $D_{\mathbf{j}}f(\mathbf{r}) = f_y(\mathbf{r})$ .

**EJEMPLO 2**

Determinar la razón de cambio de  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2$  en el punto  $(1, -2)$  en la dirección hacia el origen.

Primero debemos calcular el vector unitario en la dirección que se desea (véase figura 16.4.5). El vector de  $(1, -2)$  a  $(0, 0)$  es  $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ; por tanto

$$\lambda = \frac{-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$



**Figura 16.4.5**

A continuación,

$$f_x(x, y) = 4x + 3y, \quad \text{por lo que} \quad f_x(1, -2) = -2,$$

$$f_y(x, y) = 3x - 4y, \quad \text{por lo que} \quad f_y(1, -2) = 11.$$

Empleando la ecuación 10 nos encontramos con que

$$D_\lambda f(1, -2) = (-2) \left( \frac{-1}{\sqrt{5}} \right) + (11) \left( \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{24}{\sqrt{5}} \cong 10.73. \blacksquare$$

La fórmula para la derivada direccional de una función de tres o de más variables está dada por la forma vectorial de la ecuación 10. Así, si  $w = f(x, y, z)$  es una función diferenciable, entonces la derivada direccional en  $(x, y, z)$  en la dirección del vector unitario  $\lambda = \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}$  es

$$D_\lambda f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \lambda = f_x(x, y, z) \lambda_1 + f_y(x, y, z) \lambda_2 + f_z(x, y, z) \lambda_3. \quad (11)$$

**EJEMPLO 3**

¿Cuál es la razón de cambio de  $f(x, y, z) = xy^2e^z$  a lo largo de la curva  $\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$  en el punto que corresponde a  $t = \pi/3$ ?

Al referirnos “a lo largo de la curva” queremos decir en la dirección del vector



tangente a la curva. El punto en la curva es

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \mathbf{i} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}.$$

Un vector tangente es el que está dado por

$$d\mathbf{r}/dt = -2\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

y por tanto el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{-2\sin t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t + 9}}.$$

Evalutando  $\mathbf{T}$  en  $t = \pi/3$  obtenemos

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{3 + \frac{9}{4} + 9}} = \frac{-2\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{57}}.$$

A continuación

$$f_x(x, y, z) = y^2 e^z, \quad \text{por lo que} \quad f_x\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \pi\right) = \frac{27}{4} e^\pi,$$

$$f_y(x, y, z) = 2xy e^z, \quad \text{por lo que} \quad f_y\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \pi\right) = 3\sqrt{3} e^\pi,$$

$$f_z(x, y, z) = xy^2 e^z, \quad \text{por lo que} \quad f_z\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \pi\right) = \frac{27}{4} e^\pi.$$

Por último, empleando la fórmula (11) para la derivada direccional, obtenemos

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\lambda}} f\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}, \pi\right) &= \frac{27}{4} e^\pi \left(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{57}}\right) + 3\sqrt{3} e^\pi \left(\frac{3}{\sqrt{57}}\right) + \frac{27}{4} e^\pi \left(\frac{6}{\sqrt{57}}\right) \\ &= \frac{e^\pi}{\sqrt{57}} \left(-\frac{27}{2}\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + \frac{81}{2}\right) \\ &= \frac{e^\pi}{2\sqrt{57}} (81 - 9\sqrt{3}) \cong 100.245. \blacksquare \end{aligned}$$

### Propiedades del gradiente

Nótese que podemos escribir las fórmulas (10) u (11) para la derivada direccional en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\lambda}} f(\mathbf{r}) &= \nabla f(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\lambda} = \|\nabla f(\mathbf{r})\| \|\boldsymbol{\lambda}\| \cos \theta \\ &= \|\nabla f(\mathbf{r})\| \cos \theta, \end{aligned} \tag{12}$$

ya que  $\|\lambda\| = 1$ , y donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $\nabla f(\mathbf{r})$  y  $\lambda$  (véase figura 16.4.4). Es una consecuencia inmediata de la ecuación 12 que en un punto dado,  $D_\lambda f(\mathbf{r})$  es máxima cuando  $\cos \theta = 1$ ; esto es, cuando  $\theta = 0$ , o cuando  $\lambda$  está en la dirección de  $\nabla f(\mathbf{r})$ . Así,

$$[D_\lambda f(\mathbf{r})]_{\max} = \|\nabla f(\mathbf{r})\|.$$

Por consiguiente, la magnitud de  $\nabla f$  en un punto dado  $\mathbf{r}$  es la máxima razón de cambio de  $f$  en ese punto, y la dirección de  $\nabla f$  es la dirección en la cual se tiene la máxima razón de cambio. Igualmente,  $-\nabla f(\mathbf{r})$  es un vector en la dirección en la cual  $f$  disminuye más rápidamente y  $-\|\nabla f(\mathbf{r})\|$  es la razón de cambio en esta dirección.

#### EJEMPLO 4

Si

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2,$$

determinar el valor máximo de la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(-1, 2)$  y la dirección que tiene.

Para responder a estas cuestiones tan sólo necesitamos calcular  $\text{grad } f(-1, 2)$ . Tenemos que

$$f_x(x, y) = 6x - 2y, \quad \text{por lo que} \quad f_x(-1, 2) = -10,$$

y

$$f_y(x, y) = -2x + 8y, \quad \text{por lo que} \quad f_y(-1, 2) = 18.$$

Por tanto

$$\text{grad } f(-1, 2) = -10\mathbf{i} + 18\mathbf{j},$$

y

$$\begin{aligned} [D_\lambda f(-1, 2)]_{\max} &= \|\text{grad } f(-1, 2)\| = \sqrt{100 + 324} \\ &= 2\sqrt{106} \approx 20.59. \end{aligned}$$

El vector unitario en cuya dirección  $f$  crece más rápidamente es

$$\lambda = \frac{\text{grad } f(-1, 2)}{\|\text{grad } f(-1, 2)\|} = \frac{-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j}}{\sqrt{106}}. \quad \blacksquare$$

#### EJEMPLO 5

En la figura 16.4.6 se muestra una placa rectangular delgada ( $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$ )

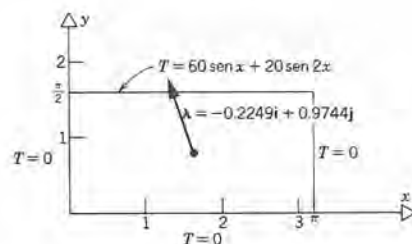


Figura 16.4.6

con la temperatura indicada en sus orillas. Se puede demostrar, de acuerdo con la ecuación diferencial parcial que gobierna la conducción de calor, que la distribución de la temperatura en la placa es

$$T(x, y) = A_1 \operatorname{sen} x \sinh y + A_2 \operatorname{sen} 2x \sinh 2y,$$

en la cual

$$A_1 = 60 \left( \sinh \frac{\pi}{2} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad A_2 = 20 (\sinh \pi)^{-1}.$$

En la parte media de la placa, ¿en qué dirección aumenta la temperatura con mayor rapidez y cuál es esta razón de cambio?

Para contestar estas preguntas debemos calcular  $\operatorname{grad} T(\pi/2, \pi/4)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} T(x, y) &= (A_1 \cos x \sinh y + 2A_2 \cos 2x \sinh 2y)\mathbf{i} \\ &\quad + (A_1 \operatorname{sen} x \cosh y + 2A_2 \operatorname{sen} 2x \cosh 2y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} T\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) &= \left(-2A_2 \sinh \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \left(A_1 \cosh \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j} \\ &= -\frac{40 \sinh \pi/2}{\sinh \pi} \mathbf{i} + \frac{60 \cosh \pi/4}{\sinh \pi/2} \mathbf{j} \\ &\cong -7.9707\mathbf{i} + 34.5355\mathbf{j}. \end{aligned}$$

El vector unitario en cuya dirección la temperatura aumenta con mayor rapidez es

$$\lambda \cong \frac{-7.9707\mathbf{i} + 34.5355\mathbf{j}}{35.4434} \cong -0.2249\mathbf{i} + 0.9744\mathbf{j},$$

y la razón de cambio de  $T$  en esta dirección en  $(\pi/2, \pi/4)$  es

$$\left\| \operatorname{grad} T\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \right\| \cong 35.44.$$

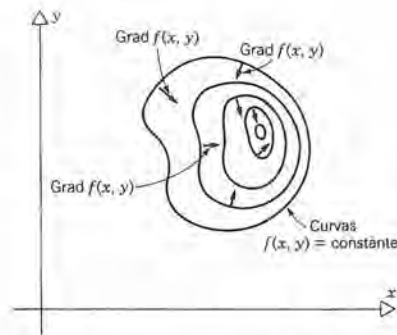


En la figura 16.4.6 se muestra la dirección del aumento más rápido de la temperatura. ■

En dos dimensiones, el gradiente tiene una interpretación sencilla en términos de las curvas de nivel (mapa topográfico) de la superficie  $z = f(x, y)$ . Si deseamos subir por esta superficie a lo largo de la trayectoria que se eleva con mayor rapidez, entonces en cualquier punto  $(x, y)$  en el mapa topográfico debemos escoger nuestro camino en la dirección de  $\nabla f(x, y)$  ya que ésta es la dirección en la que  $z$  aumenta con mayor rapidez. Al revés, la dirección del descenso más empinado está dada por  $-\nabla f(x, y)$ . Demostraremos ahora que *en cualquier punto  $(x, y)$  el vector  $\nabla f(x, y)$  es perpendicular a la curva de nivel  $f(x, y) = c_0$  que pasa por ese punto*. Supongamos que  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  es una representación paramétrica de la curva de nivel  $f(x, y) = c_0$ . En esta curva  $f(x, y) = f[\phi(t), \psi(t)] = F(t) = c_0$ . Por lo que  $dF/dt = 0$ . Por otro lado, empleando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= f_x(x, y) \frac{d\phi}{dt} + f_y(x, y) \frac{d\psi}{dt} \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \left( \frac{d\phi}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\psi}{dt} \mathbf{j} \right) = 0.\end{aligned}\quad (13)$$

El vector  $(d\phi/dt)\mathbf{i} + (d\psi/dt)\mathbf{j}$  es tangente a la curva  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ . Suponiendo que el vector tangente no es el vector cero, entonces se deduce inmediatamente que  $\nabla f(x, y)$  es perpendicular a la curva de nivel. Esto se ve en la figura 16.4.7.



**Figura 16.4.7** El gradiente es ortogonal a las curvas de nivel.

## EJEMPLO 6

La altura de una montaña, en pies sobre el nivel del mar, está dada por

$$z = 900 - \frac{x^2}{10,000} - \frac{y^2}{8100}.\quad (14)$$

Si un alpinista comienza la ascensión al nivel del mar en  $x = y = (27/\sqrt{181}) \times 10^3 \cong 2007$  pies, ¿cuál es el trayecto en el plano  $xy$  que corresponde a la ruta del ascenso más empinado a la montaña?

El mapa topográfico de la superficie (14) es el conjunto de elipses que se ve en la figura 16.4.8a. Sabemos que en cada punto de la montaña la dirección del ascenso con

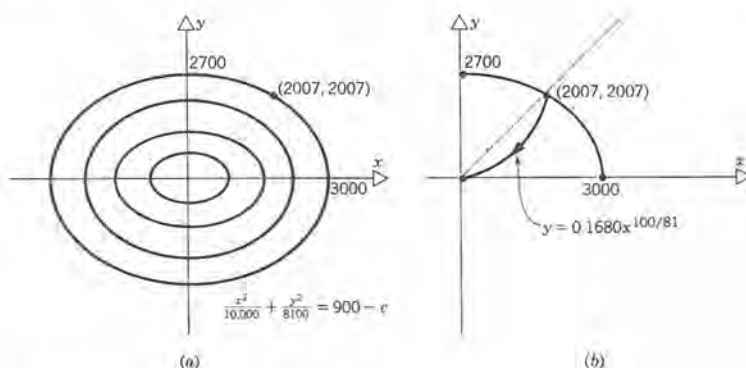


Figura 16.4.8

más pendiente está dada por

$$\text{grad } z = -\frac{x}{5000} \mathbf{i} - \frac{y}{4050} \mathbf{j}.$$

Esto significa que la proyección de la trayectoria de ascenso en el plano  $xy$  debe ser tangente a este vector en cada punto  $(x, y)$ . Así, si  $y = g(x)$  es la proyección de esa trayectoria en el plano  $xy$ , entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y/4050}{-x/5000} = \frac{100}{81} \frac{y}{x}. \quad (15)$$

La ecuación 15 es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables, que se puede resolver como en la sección 10.2. También, podemos simplemente comprobar que la solución está dada por

$$y = kx^{100/81},$$

en la que  $k$  es una constante arbitraria. Se determina la constante  $k$  por medio de la condición de que el alpinista empieza en  $x = y \cong 2007$  pies. Así,

$$2007 = k(2007)^{100/81}$$

y entonces

$$k = \frac{2007}{11,946} = 0.1680.$$

Por tanto, la trayectoria en el plano  $xy$  que corresponde a la ruta de ascenso más empinado a la montaña es

$$y = 0.1680x^{100/81}.$$

Este camino se muestra en la figura 16.4.8b. La altitud correspondiente sobre el nivel del mar, a medida que el alpinista escala la montaña, es

$$\begin{aligned} z &= 900 - \frac{x^2}{10,000} - \frac{y^2}{8100} \\ &= 900 - \frac{x^2}{10,000} - \frac{0.02822}{8100} x^{200/81} \\ &= 900 - \frac{x^2}{10,000} (1 + 0.03484x^{38/81}). \blacksquare \end{aligned}$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 determinar el gradiente de la función dada.

1.  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$
2.  $g(x, y) = e^{nx} \cos ny$
3.  $f(x, y, z) = xy^2 + 2yz^2 - 3zx^2$
4.  $w = \phi(x, y, z) = Ax^a y^b z^c$
5.  $f(x, y) = \sinh x \tan y$
6.  $f(x, y, z) = e^{xy^2/z^3}$

En los problemas 7 a 12 calcular la derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección dada.

7.  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$ ,  $(1, 1)$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
8.  $f(x, y, z) = xy^2 + 2yz + 3zx^2$ ,  $(1, -2, 3)$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
9.  $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $(a, b)$ , hacia el origen
10.  $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $(a, b, c)$ , hacia el origen
11.  $f(x, y, z) = ze^{x^2y}$ ,  $(2, \frac{1}{2}, 2)$ , hacia  $(1, -\frac{1}{2}, 3)$
12.  $\phi(x, y) = \arctan(x\sqrt{2-y})$ ,  $(1, 1)$ , hacia  $(-1, 1)$

En los problemas 13 a 16 determinar el vector unitario  $\lambda$  en la dirección en la que la función dada aumenta con mayor rapidez en el punto indicado, y determinar la razón de cambio de la función en esa dirección.

13.  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$ ,  $(1, 1)$
14.  $f(x, y, z) = xy^2 + 2yz^2 + 3zx^2$ ,  $(1, -2, -3)$
15.  $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ ,  $(3, -4, 12)$
16.  $\phi(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x$ ,  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$
17. Si  $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$  y  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , demostrar que

$$\text{grad } \phi(x, y) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad r \neq 0,$$

en la cual  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

18. (a) Si  $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  y  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , demostrar que

$$\text{grad } \phi(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad r \neq 0,$$

donde  $r = \|\mathbf{r}\|$ .



## 922 DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

(b) Si  $\phi(x, y, z) = \|\mathbf{r}\|^{-n}$  y  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , demostrar que

$$\text{grad } \phi(x, y, z) = -n\mathbf{r}/r^{n+2}, \quad r \neq 0,$$

en la cual  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

19. Si  $f(x, y) = x/y$  y  $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 4y$ , determinar la razón de cambio de  $f(x, y)$  en el punto  $(2, -1)$  en la dirección en la que  $g(x, y)$  crece con mayor rapidez.

20. Si  $w = x^2 + y^2$ , entonces en el punto  $(a, b)$ ,

(a) determinar un vector unitario en la dirección del aumento más rápido de  $w$ ,

(b) determinar un vector unitario en la dirección de la disminución más rápida de  $w$ , y

(c) determinar un vector unitario en la o las direcciones de cero razón de cambio de  $w$ . Interpretar esos vectores en relación a la curva  $w = \text{constante}$  que pasa por el punto  $(a, b)$ .

21. Determinar un vector unitario normal a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto  $(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2})$ .

22. Determinar el vector unitario normal a la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

en el punto  $(1, 3\sqrt{3}/2)$  que esté dirigido de tal manera que  $x$  y  $y$  aumenten a lo largo del vector unitario.

23. Determinar un vector unitario normal a la hipérbola  $xy = 1$  en el punto  $(a, 1/a)$ ,  $a > 0$ .

24. Determinar un vector unitario normal a la curva  $y^2 = 4px$  en el punto  $(a, 2\sqrt{pa})$ .

25. Si  $w = e^{x^2+y^2}$ , ¿cuál es la razón de cambio de  $w$  a lo largo de la curva  $\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} - \sin 2t \mathbf{k}$  en el punto que corresponde a  $t = 13\pi/6$ ?

26. Si  $w = y^2 e^x$ , ¿cuál es la razón de cambio de  $w$  a lo largo de la curva  $\mathbf{r} = (t^2 - 3t)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j}$  en el punto que corresponde a  $t = 2$ ?

27. Si  $w = y \ln|x| + 2y^2x$ , ¿cuál es la razón de cambio de

$w$  a lo largo de la curva  $\mathbf{r} = (3t + 2)\mathbf{i} - 2t^2\mathbf{j}$  en el punto que corresponde a  $t = -1$ ?

28. Si  $w = z/(x + 2y)$ , ¿cuál es la razón de cambio de  $w$  a lo largo de la curva  $\mathbf{r} = 2 \cos t \mathbf{i} - 2 \sin t \mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}$  en el punto que corresponde a  $\pi/4$ ?

29. Si  $w = (y + 3)^2 e^{xz} \tan(z + \pi/4)$ , ¿cuál es la razón de cambio de  $w$  a lo largo de la curva  $\mathbf{r} = e^{-t}\mathbf{i} + te^t\mathbf{j} + 4tk$  en el punto que corresponde a  $t = 0$ ?

30. La distribución de la temperatura, en grados centígrados, en una banda semiinfinita ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y < \infty$ ) para la cual las orillas  $x = 0$  y  $x = a$  se mantienen en 0 y la orilla en  $y = 0$  tiene la temperatura prescrita igual a  $40 \sin \pi x/a + 20 \sin \pi x/a$  es

$$T(x, y) = 40e^{-\pi y/a} \sin \frac{\pi x}{a} + 20e^{-2\pi y/a} \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

En el punto  $(a/2, a)$ , determinar un vector unitario en la dirección en la que la temperatura aumenta más rápidamente.

31. En la conducción de calor bidimensional, una *isoterma* es una curva en la que la temperatura es constante. La temperatura en la placa semicircular  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x > 0$ , está dada por  $T(x, y) = 3yx^2 - x^3 + 60$ . Determinar un vector en  $(1, -1)$  que sea tangente a la isoterma que pasa por el punto.

32. La segunda derivada direccional de  $f(x, y)$  en un punto dado en la dirección del vector unitario  $\lambda = \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j}$  se define como  $D_\lambda^2 f(x, y) = D_\lambda[D_\lambda f(x, y)]$ . Demostrar que

$$D_\lambda^2 f(x, y) = f_{xx}(x, y)\lambda_1^2 + 2f_{xy}(x, y)\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}(x, y)\lambda_2^2.$$

Verificar que  $D_1^2 f(x, y) = f_{xx}(x, y)$  y que  $D_2^2 f(x, y) = f_{yy}(x, y)$ .

En los problemas 33 a 36, calcular la segunda derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección dada.

33.  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$ ,  $(1, 1)$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

34.  $\phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $(a, b)$ , hacia el origen

35.  $f(x, y) = \sinh x \tan y$ ,  $(0, 0)$ ,  $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
36.  $f(x, y) = xy$ ,  $(1, 1)$ , hacia  $(2, 3)$
37. La fuerza gravitacional  $\mathbf{F}$  que ejerce una masa  $M$  concentrada en el origen, sobre una masa  $m$  en el punto  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  es

$$\mathbf{F} = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

donde  $r = \|\mathbf{r}\|$  y  $G$  es una constante universal. Demostrar que  $\mathbf{F}$  es el gradiente del campo escalar

$$f(\mathbf{r}) = \frac{GMm}{r}.$$

38. ¿Cuándo es igual la derivada direccional de  $f(\mathbf{r})$  en  $\mathbf{r}$  en la dirección del gradiente de  $g(\mathbf{r})$ , a la derivada direccional de  $g(\mathbf{r})$  en  $\mathbf{r}$  en la dirección del gradiente de  $f(\mathbf{r})$ ?
39. Determinar la proyección, sobre el plano  $xy$ , de la trayectoria de descenso con más pendiente en la superficie  $z = 4x^2 + 12y^2$  desde el punto  $(4, 12, 1792)$  hasta el punto  $(0, 0, 0)$ .
40. Determinar la proyección, en el plano  $xy$ , de la trayectoria de descenso con más pendiente en la superficie  $z = (x^2 + y^2)^{1/3}$  desde el punto  $(a, b, (a^2 + b^2)^{1/3})$  hasta el punto  $(0, 0, 0)$ . El dibujo de la superficie aparece en las figuras 15.10.8 y 16.1.4.
41. Demostrar que la proyección, sobre el plano  $xy$ , de la trayectoria de descenso con más pendiente y de la de ascenso con más pendiente en el paraboloides hiperbólico  $z = -x^2/16 + y^2/4$  da la familia de curvas  $y = Cx^{-4}$ , donde  $C$  es una constante. En la figura 15.10.15 se muestra un paraboloides hiperbólico.
42. Una partícula que busca el calor (insecto) se mueve siempre en la dirección de la temperatura máxima. La distribución de temperatura es  $T(x, y) = T_0 e^{-(x^2 + 3y^2)/5}$ , para la cual  $x$  y  $y$  se miden en pies, y  $T_0$  es una constante. Si un insecto se suelta en  $(a, b)$ , ¿qué trayectoria sigue para llegar al origen?
43. **El teorema del valor medio para funciones de más de una variable.** En este problema presentaremos la generalización del teorema del valor medio para una función de una variable (sección 4.1), a funciones de más de una variable. Emplearemos notación vectorial para deducir el resultado para el caso de funciones de dos variables; sin embargo, el resultado es válido para

funciones de más de dos variables. El teorema es el siguiente: sea  $f$  una función diferenciable de dos variables en un dominio tal que si  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  están en el dominio, entonces todos los puntos del segmento de recta que conecta a  $\mathbf{a}$  con  $\mathbf{b}$  están en el dominio de  $f$ . Entonces existe un punto  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$  en el segmento de recta que conecta a  $\mathbf{a}$  con  $\mathbf{b}$  tal que

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}). \quad (i)$$

- (a) Comprobar que el segmento de recta que conecta a  $\mathbf{a}$  con  $\mathbf{b}$  se puede representar en la forma paramétrica  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ,  $0 \leq t \leq 1$  (véase figura 16.4.9).
- (b) Sea

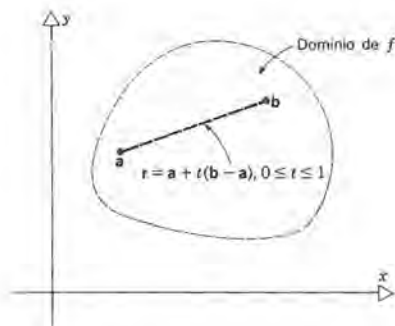


Figura 16.4.9

$$F(t) = f[\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})], \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (ii)$$

¿Por qué hay un número  $\alpha$  en el intervalo  $(0, 1)$  tal que

$$F(1) - F(0) = F'(\alpha)(1 - 0)? \quad (iii)$$

- (c) Emplear la regla de la cadena para calcular  $F'(\alpha)$  en términos de las derivadas parciales de  $f$ , y a continuación deducir el resultado que se desea a partir de la ecuación (iii). Expresar a  $\mathbf{c}$  en términos de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\alpha$ .
44. Emplear el resultado del problema 43 para demostrar que si  $f$  es una función diferenciable de dos variables con un dominio circular, y que si  $\text{grad } f(x, y) \equiv 0$  en ese dominio, entonces  $f(x, y)$  es constante.

## 16.5 EL PLANO TANGENTE Y LA RECTA NORMAL

Si  $z = f(x, y)$  es diferenciable, entonces  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ , ó  $z - z_0$ , se pueden aproximar cerca del punto  $(x_0, y_0)$  por medio de la diferencial

$$dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy.$$

Remplazando  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  por  $x - x_0$ ,  $y - y_0$  y  $z - z_0$ , respectivamente, obtenemos la aproximación

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (1)$$

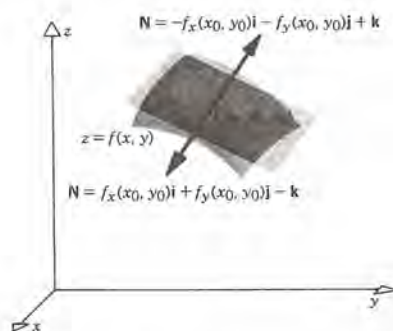
cuando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ . También, podemos escribir esta ecuación en la siguiente forma:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Las ecuaciones 1 y 2 son ecuaciones del plano (véase sección 15.5) que pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  y que tiene el vector normal

$$\mathbf{N} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} - \mathbf{k}. \quad (3)$$

A este plano se le conoce como el **plano tangente** a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  y el vector  $\mathbf{N}$ , o cualquier escalar múltiple de éste, se conoce como **vector normal** a esta superficie en este punto (véase figura 16.5.1).



**Figura 16.5.1** Vector normal y plano tangente.

Se pueden justificar estas definiciones como sigue: sea  $C$  una curva que queda en la superficie  $z = f(x, y)$  y que pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  como se ve en la figura 16.5.2. La curva  $C$  se puede describir mediante las ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = f(x, y) = f[g(t), h(t)],$$



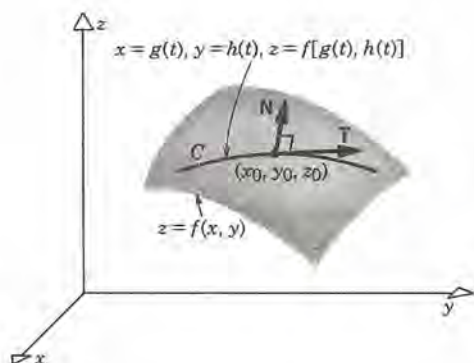


Figura 16.5.2

en la que  $t_0$  corresponde al punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Si  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , entonces un vector tangente a  $C$  es

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ &= g'(t)\mathbf{i} + h'(t)\mathbf{j} + [f_x(x, y)g'(t) + f_y(x, y)h'(t)]\mathbf{k};\end{aligned}\quad (4)$$

nótese que se ha empleado la regla de la cadena para calcular  $dz/dt$ . Suponemos que no todas las componentes de  $d\mathbf{r}/dt$  son cero. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t_0) &= f_x(x_0, y_0)g'(t_0) + f_y(x_0, y_0)h'(t_0) \\ &\quad - [f_x(x_0, y_0)g'(t_0) + f_y(x_0, y_0)h'(t_0)] = 0.\end{aligned}$$

Por tanto  $\mathbf{N}$  es perpendicular al vector tangente a  $C$  en  $t_0$ . Como  $C$  podría ser cualquier curva diferenciable que quede en la superficie  $z = f(x, y)$  y que pase por  $(x_0, y_0, z_0)$ , es natural referirse a  $\mathbf{N}$  como un vector normal a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Además, como  $d\mathbf{r}(t_0)/dt \cdot \mathbf{N} = 0$  para todas las curvas  $C$ , entonces los vectores tangente deben estar en un plano cuya normal es  $\mathbf{N}$ , y que es el plano definido por las ecuaciones 1 ó 2. Es natural llamar a este plano el plano tangente a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

La **normal** a la superficie  $z = f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  es la recta que pasa por ese punto y que es paralela al vector  $\mathbf{N}$ . Entonces, la normal está definida por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x - x_0 &= f_x(x_0, y_0)t, \\ y - y_0 &= f_y(x_0, y_0)t, \\ z - z_0 &= -t,\end{aligned}\quad (5a)$$

donde  $-\infty < t < \infty$ , o bien, está definida por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.\quad (5b)$$

**EJEMPLO 1**

Determinar un vector normal, el plano tangente y la recta normal al punto  $(1, 2, 2)$  en el hemisferio  $z = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$ .

Notemos primero que

$$z_x = \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2x), \quad \text{por lo que} \quad z_x(1, 2) = -\frac{1}{2};$$

$$z_y = \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-1/2}(-2y), \quad \text{por lo que} \quad z_y(1, 2) = -1.$$

Empleamos la ecuación 3 y vemos que un vector normal en  $(1, 2, 2)$  es

$$\mathbf{N} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Entonces la ecuación del plano tangente en  $(1, 2, 2)$  está dada por la ecuación 2:

$$-\frac{1}{2}(x - 1) - (y - 2) - (z - 2) = 0,$$

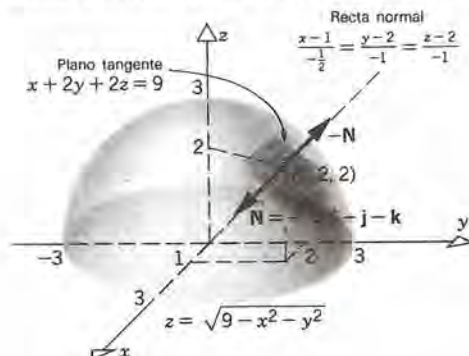
o bien

$$x + 2y + 2z = 9.$$

La forma simétrica de la recta normal en  $(1, 2, 2)$  es consecuencia de la ecuación (5b):

$$\frac{x - 1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 2}{-1}.$$

El vector normal, el plano tangente y la recta normal se muestran en la figura 16.5.3. Nótese que  $\mathbf{N}$  apunta desde la superficie hacia adentro del hemisferio. Un vector normal también, igualmente satisfactorio, que apunta hacia afuera es  $-\mathbf{N} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . En realidad, cualquier múltiplo de  $\mathbf{N}$  distinto de cero puede servir de vector normal. Por último, nótese que  $\mathbf{N}$  es paralelo al radio vector  $\overrightarrow{OP}$  desde el origen hasta el punto



**Figura 16.5.3**

$P(1, 2, 2)$ . Intuitivamente parece correcto que un vector normal en un punto de un hemisferio o de una esfera debe quedar a lo largo de la recta desde el centro hasta el punto. ■

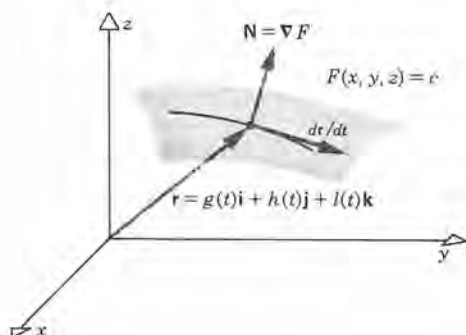


Figura 16.5.4

Con frecuencia sucede que no se nos da la fórmula explícita  $z = f(x, y)$  de una superficie, sino que en su lugar se da una ecuación implícita  $F(x, y, z) = c$ , una constante, y se nos dice que esta ecuación define una superficie, como se muestra en la figura 16.5.4. En este caso podemos demostrar que el vector

$$\mathbf{N} = \nabla F(x, y, z) = F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k} \quad (6)$$

es perpendicular a la superficie  $F(x, y, z) = c$  en el punto  $(x, y, z)$  de dicha superficie. Nuevamente, sea  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ,  $z = l(t)$  una representación paramétrica de cualquier curva  $C$  diferenciable que quede en la superficie  $F(x, y, z) = c$ . En esta curva, tenemos que

$$\Phi(t) = F[g(t), h(t), l(t)] = c \quad \text{por lo que} \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0. \quad (7)$$

Al calcular  $d\Phi/dt$  mediante la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt} \\ &= (\nabla F) \cdot \left( \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) \\ &= \mathbf{N} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

en la cual  $d\mathbf{r}/dt$  es un vector tangente a la curva  $C$ . Así, en consecuencia, en cualquier punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de la superficie, el vector  $\mathbf{N} = \nabla F(x_0, y_0, z_0)$  es perpendicular al vector tangente a cualquier curva diferenciable que quede en la superficie y que pase por ese punto. El plano tangente en  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0,$$

o bien

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (9)$$



La normal que pasa por  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$\begin{aligned}x - x_0 &= F_x(x_0, y_0, z_0) t, \\y - y_0 &= F_y(x_0, y_0, z_0) t, \\z - z_0 &= F_z(x_0, y_0, z_0) t\end{aligned}\quad (10a)$$

o sea

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (10b)$$

Nótese que para una superficie representada por  $z = f(x, y)$  podemos escribir que

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

Entonces

$$F_x = f_x, \quad F_y = f_y, \quad F_z = -1,$$

y la ecuación 6 para el vector normal, la ecuación 8 para el plano tangente, y las ecuaciones 10 de la recta normal, se reducen a las ecuaciones 3, 2 y 5, respectivamente. Por esta razón en general es más sencillo describir superficies en la forma implícita  $F(x, y, z) = c$ , quedando sobreentendido que en la vecindad del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de interés, se puede despejar una de las tres variables en la ecuación implícita en términos de las otras dos. Regresaremos a las ecuaciones implícitas en la sección 16.8.

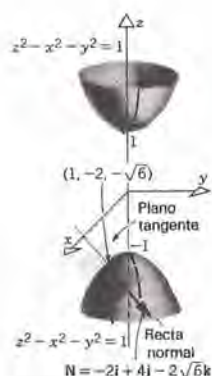


Figura 16.5.5

## EJEMPLO 2

Determinar el plano tangente y la recta normal, ambos en el punto  $(1, -2, -\sqrt{6})$  de la hiperboloide de dos mantos  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$  (véase figura 16.5.5).

Hacemos que  $F(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2$ . Entonces  $F_x = -2x$ ,  $F_y = -2y$ ,  $F_z = 2z$ , y entonces

$$\mathbf{N} = \text{grad } F(1, -2, -\sqrt{6}) = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\sqrt{6}\mathbf{k}.$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente es

$$-2(x - 1) + 4(y + 2) - 2\sqrt{6}(z + \sqrt{6}) = 0$$

o bien

$$-x + 2y - \sqrt{6}z = 1.$$

La ecuación de la recta normal es

$$x - 1 = -2t, \quad y + 2 = 4t, \quad z + \sqrt{6} = -2\sqrt{6}t, \quad -\infty < t < \infty,$$

o sea

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z + \sqrt{6}}{-2\sqrt{6}}, \quad \blacksquare$$

**EJEMPLO 3**

¿Cuáles son los puntos de intersección de la recta normal a la elipsoide

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad (11)$$

que pasa por el punto  $(\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ , con la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36? \quad (12)$$

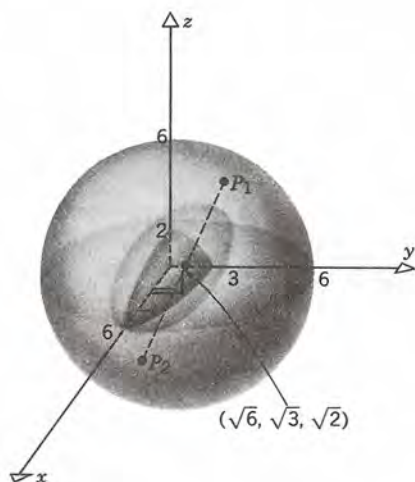
En la figura 16.5.6 se muestran la elipsoide y la esfera. Un vector normal en el punto  $(x, y, z)$  de la elipsoide lo da  $\mathbf{N} = (2x/36)\mathbf{i} + (2y/9)\mathbf{j} + (2z/4)\mathbf{k}$ . Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta normal que pasa por el punto  $(\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$  son

$$\begin{aligned} x - \sqrt{6} &= \frac{2}{36} \sqrt{6} t = \frac{\sqrt{6}}{18} t, \\ y - \sqrt{3} &= \frac{2}{9} \sqrt{3} t, \\ z - \sqrt{2} &= \frac{2}{4} \sqrt{2} t = \frac{\sqrt{2}}{2} t, \end{aligned} \quad (13)$$

para  $-\infty < t < \infty$ . Para determinar los valores de  $t$  en los cuales la recta representada por las ecuaciones 13 interseca a la esfera de la ecuación 12, sustituimos las ecuaciones 13 en la ecuación 12. Esto da

$$\frac{2}{3}t^2 + 4t - 25 = 0,$$

entonces



**Figura 16.5.6**

$$t = -3 \pm \frac{3}{2} \sqrt{\frac{62}{3}} \cong 3.8191, -9.8191.$$

Con las ecuaciones 13 obtenemos los dos puntos de intersección con la esfera, que corresponden a los dos valores de  $t$ , y que son  $P_1(2.9692, 3.2020, 4.1147)$  y  $P_2(1.1133, -2.0473, -5.5289)$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 determinar el plano tangente y la recta normal a la superficie dada y en el punto dado.

1.  $z = 3x^2 + 2xy + y^2$ ,  $(1, 1, 6)$

2.  $z = 4xy$ ,  $(2, -1, -8)$

3.  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$ ,  $(0, 1, 2)$

4.  $z = e^{2x} \sin \pi y$ ,  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{e}{2}\right)$

5.  $x^{1/2} + y^{1/2} + (-z)^{1/2} = 6$ ,  $(1, 9, -4)$

6.  $z^3 + y^3 + x^3 - 6xyz = 0$ ,  $(2, 1, 3)$

7.  $2x^2 - xz + y^2 - zy = -5$ ,  $(1, 3, 4)$

8.  $x^2 + 2y - z^2 = 4$ ,  $(2, 0, 2)$

9.  $z = x^2 \ln(2y^2 - 1) + e^{xy}$ ,  $(1, 1, e)$

10.  $z = xe^{y/x}$ ,  $(1, -2, e^{-2})$

11. Sea  $(x_0, y_0, z_0)$  un punto sobre la elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(véase figura 16.5.7). Demostrar que la ecuación del

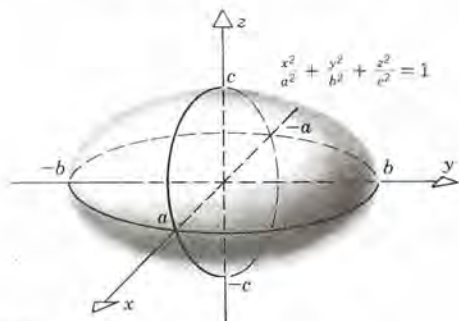


Figura 16.5.7

plano tangente en  $(x_0, y_0, z_0)$  es

12. Sea  $(x_0, y_0, z_0)$  un punto de la hiperboloide de un manto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(véase figura 16.5.8). Demostrar que la ecuación del plano tangente a  $(x_0, y_0, z_0)$  es

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = 1.$$

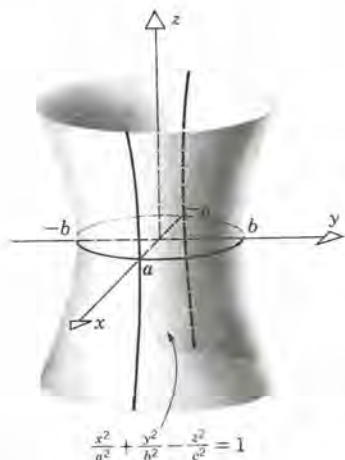


Figura 16.5.8

13. Demostrar que el plano tangente en cualquier punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de la superficie del cono

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(figura 16.5.9) pasa por el origen.



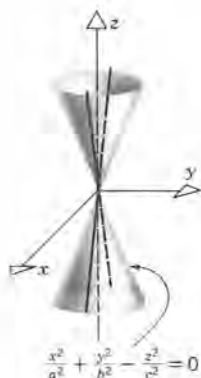


Figura 16.5.9

14. Deducir la ecuación del plano tangente y de la recta normal al cilindro circular  $x^2 + y^2 = 13$  en el punto  $(2, 3, \alpha)$ .
15. (a) Determinar el plano tangente en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  para la superficie  $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ .  
(b) Demostrar que la suma de los cuadrados de las intersecciones del plano tangente con los ejes de coordenadas es  $a^2$ , independientemente de la elección de  $(x_0, y_0, z_0)$ .
16. (a) Determinar el plano tangente a la superficie  $xyz = a^3$ ,  $a > 0$ , en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .  
(b) Demostrar que el volumen del tetraedro que forma el plano tangente y los planos coordenados es  $9a^3/2$ , independientemente de la elección de  $(x_0, y_0, z_0)$ .
17. (a) Determinar el plano tangente a la superficie  $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2}$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .  
(b) Demostrar que la suma de las intersecciones del plano tangente con los ejes coordenados es  $a$ , independientemente de la elección de  $(x_0, y_0, z_0)$ .
18. Suponer que las superficies  $F(x, y, z) = 0$  y  $G(x, y, z) = 0$  se intersecan definiendo una curva; véase la figura 16.5.10.  
(a) Demostrar que un vector tangente a esta curva en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  está dado por
 
$$\mathbf{u} = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \times \nabla G(x_0, y_0, z_0)$$

$$= [(F_y G_z - F_z G_y)\mathbf{i} + (F_z G_x - F_x G_z)\mathbf{j} + (F_x G_y - F_y G_x)\mathbf{k}]_{(x_0, y_0, z_0)}.$$
- (b) ¿Cuál es la forma de  $\mathbf{u}$  si las superficies están definidas por  $z = f(x, y)$  y  $z = g(x, y)$ ?

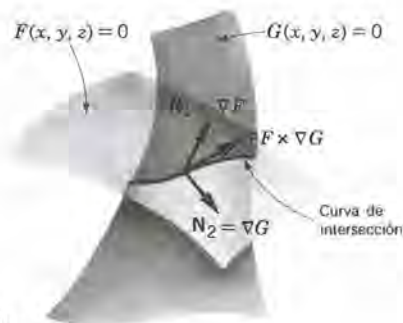


Figura 16.5.10

En los problemas 19 a 22 comprobar que el punto dado está en la curva de la intersección de las dos superficies y determinar la recta tangente en ese punto (véase problema 18).

19.  $x + y + z = 0$ ,  $2x - 3y + 4z = 4$ ,  
 $\left(1, -\frac{6}{7}, -\frac{1}{7}\right)$
20.  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ ,  
 $z = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 9$ ,  $(1, 2, 3)$
21.  $z = 4xy$ ,  $z = 2xy + 2x - 5y - 13$ ,  
 $(2, -1, -8)$
22.  $z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ ,  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 2$ ,  
 $(2, 3, 0)$
23. Se tienen las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$y \quad x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 4.$$

Comprobar que las superficies se intersecan en  $(0, 0, 2)$ . Demostrar que no es posible construir una recta en este punto empleando la teoría desarrollada en el problema 18. ¿Por qué?

24. ¿En qué punto de la superficie  $z = 3x^2 + 2xy + y^2$  la recta normal es paralela al vector  $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ?
25. Determinar en forma analítica en cuáles puntos de la elipsoide  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  (figura 16.5.7) el plano tangente es
  - (a) horizontal,
  - (b) paralelo al plano  $yz$ ,
  - (c) perpendicular al vector  $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

26. (a) Determinar la curva de la intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  con el cilindro circular  $x^2 + y^2 = a^2/4$ , donde  $z > 0$ .  
 (b) Demostrar que en cada punto de esta curva de la intersección, el ángulo entre los planos tangentes a esas dos superficies es el mismo, y calcular ese ángulo.
27. Demostrar que si  $f$  es diferenciable, entonces en cada punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de la superficie  $z = xf(y/x)$ , el plano tangente pasa por el origen. Nótese que el problema 10 es un caso especial de esta relación funcional.
28. ¿En qué puntos de la superficie  $z = f(x, y)$  es horizontal el plano tangente?

### Ángulo entre una curva y una superficie

Supongamos que la curva  $\mathbf{r} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$  interseca a la superficie  $F(x, y, z) = 0$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  que corresponde a  $t = t_0$ . El ángulo entre la curva y la superficie se define como el que existe entre el vector tangente a la curva y el plano tangente a la superficie en  $(x_0, y_0, z_0)$  (véase figura 16.5.11). Este ángulo es el complemento del que forman el vector tangente a la curva y el vector normal a la superficie.

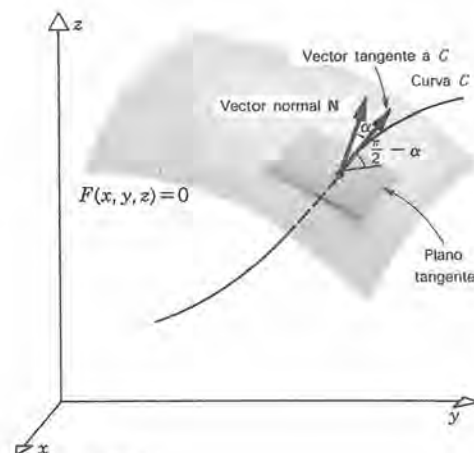


Figura 16.5.11

29. Determinar el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  en el que la curva  $\mathbf{r} = 2 \cos \pi t \mathbf{i} + 2 \sin \pi t \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$  interseca a la paraboloides  $z = x^2 + y^2$ , y determinar el ángulo de la intersección.
30. Comprobar que la curva  $\mathbf{r} = \frac{1}{3}t \mathbf{i} + 3 \cos(\pi/3)t \mathbf{j} + \frac{1}{2}(t - 1)^2 \mathbf{k}$  interseca a la elipsoide  $x^2 + y^2/9 + z^2/4 = 3$  en el punto  $(1, -3, 2)$ , y determinar el ángulo de la intersección.

## 16.6 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

En esta sección ampliaremos la discusión de los máximos y mínimos de funciones de una variable (secciones 4.1 y 4.2) a funciones de dos variables.

**DEFINICIÓN 16.6.1** Se dice que una función  $f$  de dos variables tiene un máximo relativo, o local, en  $(x_0, y_0)$  si existe una vecindad de  $(x_0, y_0)$  tal que

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad (1)$$

para todos los puntos  $(x, y)$  que están en la vecindad y también en el dominio de  $f$ . Se dice que  $f$  tiene un mínimo relativo o local en  $(x_0, y_0)$  si existe una vecindad de  $(x_0, y_0)$  tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad (2)$$

para toda  $(x, y)$  en la vecindad y en el dominio de  $f$ . Se dice que la función tiene un extremo relativo, o local, en  $(x_0, y_0)$  si tiene ya sea un máximo relativo o un mínimo relativo en  $(x_0, y_0)$ .



Figura 16.6.1

Para la superficie  $z = f(x, y)$  un máximo relativo corresponde a la cumbre de una colina y un mínimo relativo al fondo de un valle (véase figura 16.6.1). Si una función  $f$  de una variable tiene un extremo local en un punto interior  $x_0$ , entonces  $f'(x_0) = 0$ , o bien  $f'(x_0)$  no existe (teorema 4.1.1). El resultado correspondiente cuando  $f$  es una función de dos variables se enuncia en términos de  $\nabla f$ .

### Teorema 16.6.1

Si  $f$  es función diferenciable de dos variables y si  $f$  tiene un extremo relativo en un punto interior  $(x_0, y_0)$  de su dominio, entonces

$$\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

**Demostración.** Considere la función  $g(x) = f(x, y_0)$ ; véase la figura 16.6.2, en la cual  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Como  $f$  tiene un extremo relativo en  $(x_0, y_0)$ , se infiere que  $g$  tiene un

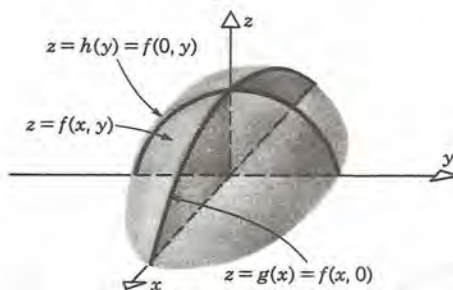


Figura 16.6.2

extremo relativo en  $x_0$ . Es más,  $g'(x) = f_x(x, y_0)$  existe en  $x_0$  y, por tanto,  $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$ . De modo semejante, empleando la función  $h(y) = f(x_0, y)$  podemos demostrar que  $f_y(x_0, y_0) = 0$ . Por consiguiente,  $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ .

En ese punto tenemos que  $D_{\lambda}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \lambda = 0$ , donde  $\lambda$  es un vector unitario arbitrario. Esto es, en un extremo relativo de una función diferenciable  $f$ , la razón de cambio de  $f$  en cualquier dirección es cero (véase figura 16.6.3). También, el plano tangente en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  en la superficie  $z = f(x, y)$ , es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$



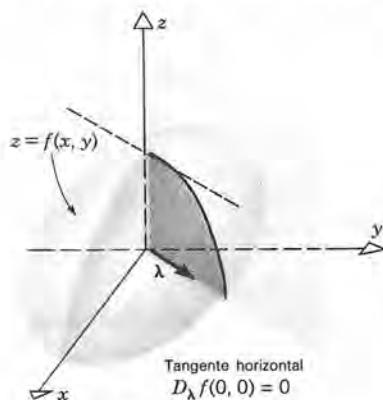


Figura 16.6.3

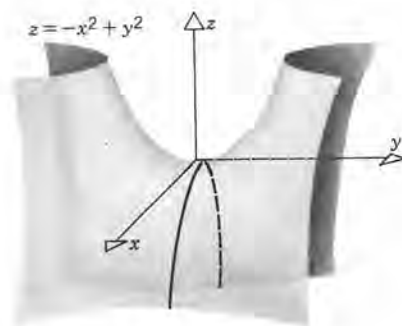


Figura 16.6.4

y esto se reduce a

$$z = z_0.$$

Por tanto, en un extremo relativo el plano tangente a la superficie es horizontal.  $\square$

Al igual que para una función de una variable, el teorema 16.6.1 es una condición necesaria, pero no suficiente, para que exista un extremo relativo de una función diferenciable. Esto se muestra mediante el paraboloide hiperbólico  $z = f(x, y) = -x^2 + y^2$  que está dibujado en la figura 16.6.4. Es claro que  $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ . Sin embargo,  $f$  no tiene máximo relativo ni mínimo relativo en  $(0, 0)$ .

Un punto en el que  $f$  es diferenciable y  $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ , o un punto en el que  $f$  no es diferenciable, se llama **punto crítico\*** de  $f$ . También nos referiremos a un punto en el cual  $f$  es diferenciable y  $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$  como un **punto estacionario** de  $f$ . Un punto estacionario de  $f$  que no es un extremo se llama **punto silla**, terminología que encaja con naturalidad en la superficie en forma de silla de montar que se ve en la figura 16.6.4. Dado el problema de determinar los extremos relativos de una función  $f$  en un dominio no acotado, o en el interior de un dominio acotado, debemos determinar los puntos críticos de  $f$  y a continuación investigar esos puntos para ver si dan un máximo relativo, un mínimo relativo, o ninguno de los dos casos.

## EJEMPLO 1

Determinar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

\* La definición de punto crítico en esta sección no corresponde por completo a la definición de la sección 4.2, en la cual también se clasificaban los puntos de los extremos como puntos críticos. En esta ocasión, deseamos tratar con puntos frontera por separado (en la sección 16.7) y, por tanto, no los clasificaremos como puntos críticos.

Como  $f$  es diferenciable para toda  $x$  y  $y$ , sólo necesitaremos determinar los puntos en los cuales  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  son iguales a cero. Tenemos que

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y,$$

y por tanto al hacer que  $f_x(x, y) = 0$ , y que  $f_y(x, y) = 0$ , nos encontramos con que el único punto crítico es  $(0, 0)$ . Como  $f(0, 0) = 0$  y  $f(x, y) > 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , entonces se sigue que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$ . En la figura 16.6.5 se muestra un dibujo de  $z = x^2 + y^2$ , que confirma que  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$ . ■

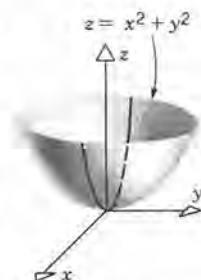


Figura 16.6.5

## EJEMPLO 2

¿En qué puntos, si es que los hay, la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3}$$

tiene un máximo o un mínimo relativo?

Primero, observemos que como  $f(x, 0) = x^{2/3}$ , y  $f(0, y) = y^{2/3}$ , la función  $f$  no tiene derivadas parciales en  $(0, 0)$ . Para  $(x, y) \neq (0, 0)$  tenemos que

$$\nabla f(x, y) = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \mathbf{i} + \frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \mathbf{j}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

la cual *nunca* es igual a  $\mathbf{0}$ . Así,  $(0, 0)$  es el único punto crítico. Como  $f(0, 0) = 0$ , y  $f(x, y) > 0$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$ . En la figura 16.6.6 aparece el dibujo de  $z = (x^2 + y^2)^{1/3}$ . ■

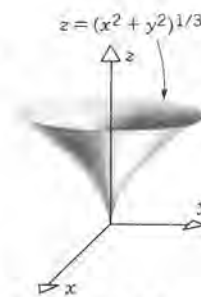


Figura 16.6.6

Para determinar los puntos estacionarios de una función  $f$  diferenciable debemos determinar los puntos  $(x, y)$  en los cuales

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 0. \quad (4)$$

Esto fue bastante fácil en los ejemplos 1 y 2. Sin embargo, si las ecuaciones 4 no son lineales en  $x$  y  $y$ , podrá dificultarse resolverlas para encontrar los puntos críticos. En realidad, podría ser necesario recurrir a un procedimiento numérico para resolver esas ecuaciones. Aquí nos enfocaremos a la teoría de los máximos y mínimos de funciones de dos variables y no a procedimientos numéricos para resolver dos ecuaciones simultáneas. Por tanto, sólo emplearemos ejemplos y problemas para los que sea posible resolver las ecuaciones 4 con relativa facilidad.

Para ver si un punto estacionario  $(x_0, y_0)$  de  $z = f(x, y)$  es un punto silla, un punto máximo relativo o un mínimo relativo, necesitamos una generalización del criterio de la segunda derivada para funciones de una variable (teorema 4.2.4). Presentaremos una deducción parcial de esta generalización, basada en la segunda derivada direccional.

Supongamos que  $f$  tiene segundas derivadas parciales continuas, y sea

$$\lambda = \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j}$$

un vector unitario en una dirección arbitraria. Entonces, la segunda derivada direccional en la dirección  $\lambda$  es

$$\begin{aligned} D_{\lambda}^2 f(x, y) &= D_{\lambda}[D_{\lambda} f(x, y)] \\ &= D_{\lambda}[f_x(x, y)\lambda_1 + f_y(x, y)\lambda_2]. \end{aligned}$$

Al calcular las derivadas direccionales de  $f_x$  y  $f_y$  por separado, obtenemos

$$\begin{aligned} D_{\lambda}^2 f(x, y) &= [f_{xx}(x, y)\lambda_1]\lambda_1 + [f_{xy}(x, y)\lambda_1]\lambda_2 \\ &\quad + [f_{yx}(x, y)\lambda_2]\lambda_1 + [f_{yy}(x, y)\lambda_2]\lambda_2. \end{aligned}$$

La hipótesis de que  $f$  tiene segundas derivadas continuas quiere decir que  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ . En consecuencia,

$$D_{\lambda}^2 f(x, y) = f_{xx}(x, y)\lambda_1^2 + 2f_{xy}(x, y)\lambda_1\lambda_2 + f_{yy}(x, y)\lambda_2^2. \quad (5)$$

Si ahora consideramos al punto estacionario  $(x_0, y_0)$  y hacemos que

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0), \quad (6)$$

entonces

$$D_{\lambda}^2 f(x_0, y_0) = A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2.$$

Primero supondremos que  $\lambda_1 \neq 0$ . Podemos entonces escribir

$$D_{\lambda}^2 f(x_0, y_0) = \lambda_1^2(A + 2Bm + Cm^2), \quad (7)$$

en la que  $m = \lambda_2/\lambda_1$  es la pendiente de una recta que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$ . Como  $\lambda_1^2 > 0$ , se infiere que el signo de  $D_{\lambda}^2 f(x_0, y_0)$  es igual al signo de la expresión cuadrática  $Q(m) = A + 2Bm + Cm^2$ .

Si  $B^2 - AC > 0$ , entonces  $Q(m)$  tiene dos ceros reales diferentes, y por tanto es positiva para algunos valores de  $m$  y negativa para otros. Así, en algunas direcciones la traza de  $f$  tiene un mínimo en  $(x_0, y_0)$ , mientras que en otras tiene un máximo. Por consiguiente,  $(x_0, y_0)$  es un punto silla.

Por otro lado, si  $B^2 - AC < 0$ , entonces  $Q(m)$  no tiene ceros reales y, por tanto, siempre tiene un signo, que es igual al signo de  $A$  y  $C$ . Por tanto, si  $B^2 - AC < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto extremo. Si  $A > 0$  y  $C > 0$ , entonces  $Q(m) > 0$  para toda  $m$ , y  $(x_0, y_0)$  es un punto mínimo relativo, mientras que si  $A < 0$  y  $C < 0$ , entonces  $Q(m) < 0$  para toda  $m$  y  $(x_0, y_0)$  es un punto máximo relativo.

Si  $B^2 - AC = 0$ , entonces  $Q(m)$  tiene un solo cero repetido, pero no cambia de signo. En este caso no se puede llegar a conclusión alguna (véase problema 36).

Por último, si  $\lambda_1$  es cero, entonces se supone que  $\lambda_2 \neq 0$  y se repite esencialmente el mismo argumento, pero con los papeles de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  invertidos. Podemos resumir estos resultados en el teorema siguiente:



**Teorema 16.6.2****(Criterio de la segunda derivada)**

Sea  $f$  una función de dos variables con segundas derivadas parciales continuas en la vecindad de  $(x_0, y_0)$  y se supone que  $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ . Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  como en la ecuación 6.

- (a) Si  $B^2 - AC < 0$ , donde  $A < 0$  y  $C < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto máximo relativo.
- (b) Si  $B^2 - AC < 0$ , donde  $A > 0$  y  $C > 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto mínimo relativo.
- (c) Si  $B^2 - AC > 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto silla.
- (d) Si  $B^2 - AC = 0$ , entonces no se puede llegar a conclusión alguna sin hacer más investigaciones.

En los siguientes ejemplos se mostrará el empleo de este teorema.

**EJEMPLO 3**

Para la función

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - 2y^2 + 3x + 4$$

determinar todos los puntos estacionarios, y clasificarlos en puntos silla, máximos relativos o mínimos relativos.

Los puntos estacionarios se determinan mediante

$$f_x(x, y) = 2x + 2y + 3 = 0, \quad f_y(x, y) = 2x - 4y = 0.$$

La única solución de esas ecuaciones es  $x = -1$ ,  $y = -\frac{1}{2}$ , por tanto,  $(-1, -\frac{1}{2})$  es el único punto estacionario de  $f$ . Para clasificarlo calcularemos las segundas derivadas de  $f$ ; así,  $f_{xx}(x, y) = 2$ ;  $f_{xy}(x, y) = 2$ , y  $f_{yy}(x, y) = -4$ . En la notación del teorema 16.6.2, tenemos que  $A = 2$ ,  $B = 2$ , y  $C = -4$  y, por tanto  $B^2 - AC = 12 > 0$ . Por lo que  $(-1, -\frac{1}{2})$  es un punto silla. ■

**EJEMPLO 4**

Para la función

$$f(x, y) = \frac{1}{3}y^3 + x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 6$$

determinar todos los puntos estacionarios y clasificarlos como puntos silla, máximos relativos o mínimos relativos.

Los puntos estacionarios son las soluciones de

$$f_x(x, y) = 2xy - 4x = 2x(y - 2) = 0,$$

$$f_y(x, y) = y^2 + x^2 - 4y = 0.$$

De la primera ecuación, la solución debe ser  $x = 0$ , ó  $y = 2$ . Si  $x = 0$ , entonces la segunda ecuación es  $y(y - 4) = 0$ , y sus soluciones son  $y = 0$  y  $y = 4$ . Si  $y = 2$ , entonces la segunda ecuación es  $x^2 = 4$  y  $x = \pm 2$ . Por tanto, hay cuatro puntos estacionarios, que son  $(0, 0)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(2, 2)$  y  $(-2, 2)$ .

A continuación determinamos las segundas derivadas:

$$f_{xx}(x, y) = 2y - 4, \quad f_{xy}(x, y) = 2x, \quad f_{yy}(x, y) = 2y - 4.$$

Si evaluamos a  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$  y  $f_{yy}$  en cada uno de los puntos críticos y a continuación empleamos el teorema 16.6.2, obtendremos los resultados que aparecen en la tabla 16.1.

**Tabla 16.1** Clasificación de los puntos estacionarios del ejemplo 4

Punto	$A$	$B$	$C$	$B^2 - AC$	Conclusión
$(0, 0)$	-4	0	-4	-16	Máximo relativo
$(0, 4)$	4	0	4	-16	Mínimo relativo
$(2, 2)$	0	4	0	16	Punto silla
$(-2, 2)$	0	-4	0	16	Punto silla

En muchas aplicaciones nos interesa el valor máximo o mínimo de  $f$  en un dominio dado. Se dice que la función tiene un **máximo absoluto**, o **global** en  $(x_0, y_0)$  si  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  para toda  $(x, y)$  en el dominio de  $f$ . Igualmente, se dice que tiene un **mínimo absoluto**, o **global** en  $(x_0, y_0)$  si  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  para toda  $(x, y)$  en el dominio de  $f$ . En general, una función no necesita tener un máximo o un mínimo absoluto en una región dada. Sin embargo, de acuerdo con la versión bidimensional del teorema 2.6.2, toda función que sea *continua en una región cerrada y acotada* debe tener un máximo absoluto y un mínimo absoluto en esa región. Para buscar el máximo absoluto, digamos, de  $f$  debemos proceder en forma semejante a cuando se tiene una función de una variable. Se estudia  $f$  en sus puntos críticos y en los puntos frontera del dominio de  $f$ . Con frecuencia sólo hay una o dos posibilidades y se puede determinar, de acuerdo con el contexto del problema, que un punto crítico debe dar el máximo o el mínimo absoluto que se desea. ■

## EJEMPLO 5

Determinar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo cuyos lados son paralelos a los ejes, y que se puede inscribir en la elipsoide

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1. \quad (8)$$

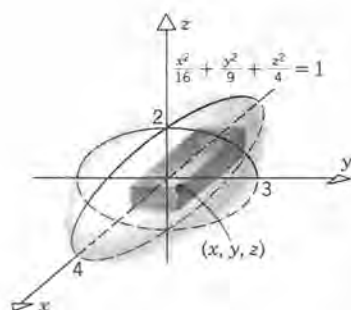


Figura 16.6.7

En la figura 16.6.7 se dibujan la elipsoide y el paralelepípedo rectangular. Sea  $V$  el volumen del paralelepípedo, y sea  $(x, y, z)$  su vértice en el primer octante. Entonces, por simetría,

$$V = 8xyz. \quad (9)$$

El punto  $(x, y, z)$  queda en la elipsoide y, entonces  $z = 2(1 - x^2/16 - y^2/9)^{1/2}$ . Por tanto

$$V = 16xy \left( 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right)^{1/2}, \quad (10)$$

en la que  $(x, y)$  queda en el cuarto de la elipse  $x^2/16 + y^2/9 \leq 1$ , donde  $0 \leq x \leq 4$ , y  $0 \leq y \leq 3$ . Se infiere de la ecuación 10 que  $V = 0$  en las fronteras de la cuarta parte de la elipse.

Para determinar los puntos estacionarios, calculamos  $V_x$  y  $V_y$ :

$$V_x = 16y \left( 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right)^{1/2} - \frac{16x^2y}{16} \left( 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right)^{-1/2},$$

$$V_y = 16x \left( 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right)^{1/2} - \frac{16xy^2}{9} \left( 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right)^{-1/2}.$$

Hacemos que  $V_x = 0$ ,  $V_y = 0$  y multiplicamos cada ecuación por  $(1 - x^2/16 - y^2/9)^{1/2}$ , y con ello obtenemos

$$16y \left( 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right) - x^2y = 0,$$

$$16x \left( 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right) - \frac{16}{9}xy^2 = 0.$$

Una solución de esas ecuaciones es  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; sin embargo, esto corresponde a un paralelepípedo de volumen cero. Así, suponiendo que  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ , dividimos la primera ecuación entre  $y$ , la segunda entre  $x$  y combinamos los términos para obtener

$$2x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16,$$



$$x^2 + \frac{32}{9}y^2 = 16.$$

Podemos despejar a  $x$  restando dos veces la primera ecuación de la segunda

$$3x^2 = 16, \text{ por lo que } x = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Para  $x = 4/\sqrt{3}$  tenemos que

$$y^2 = \frac{9}{16} \left( 16 - 2 \frac{16}{3} \right), \text{ por lo que } y = \sqrt{3}.$$

Empleamos la ecuación 10 para calcular el valor correspondiente de  $V$ , que es

$$V = 16 \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{3} \left( 1 - \frac{1}{16} \frac{16}{3} - \frac{1}{9} \frac{16}{3} \right)^{1/2} = \frac{64}{\sqrt{3}}.$$

Como los puntos frontera dan un volumen cero, y como, a excepción de  $(0, 0)$  hay sólo un punto crítico en la cuarta parte de la elipse, llegamos a la conclusión de que el volumen máximo del paralelepípedo rectangular es  $64/\sqrt{3} \approx 36.95$  unidades al cubo. ■

Para terminar esta sección haremos notar que, aunque hemos limitado nuestra discusión a funciones de dos variables, las ideas se generalizan con facilidad a funciones de varias variables. En particular, si  $f$  es diferenciable, entonces los puntos estacionarios están dados por  $\nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ . Naturalmente, el enunciado del criterio de la segunda derivada que aparece en el teorema 16.6.2 se complica. Sin embargo, las ideas acerca de la segunda derivada direccional  $D_{\lambda}^2 f(\mathbf{r})$  siguen siendo válidas, pero en un mayor número de dimensiones. Estas generalizaciones se describen en algunos libros de cálculo avanzado y de la teoría de la optimización.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 22 localizar todos los puntos estacionarios de la función  $f$  y aplicar el teorema 16.6.2 para clasificarlos como puntos silla, o máximos o mínimos relativos.

1.  $f(x, y) = 7 - 2x + 6y + 2x^2 + 3y^2$

2.  $f(x, y) = 1 + 3x + 2y - x^2 + xy - 2y^2$

3.  $f(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2$

4.  $f(x, y) = 5 + 3x + 6y - 3x^2 - 2y^2$

5.  $f(x, y) = x + 6y + \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2$

6.  $f(x, y) = 4 + 2x + 6y - x^2 + 2y^2$

7.  $f(x, y) = 3 + x - x^2 - 2xy - 2y^2$

8.  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x$

9.  $f(x, y) = ye^x - y$

10.  $f(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x$

11.  $f(x, y) = y \ln x + 3x^2 - 2y, \quad x > 0$

12.  $f(x, y) = 3x^3 + xy - 2x - \frac{1}{6}y^2$

13.  $f(x, y) = xy + x^2 + y^3$

14.  $f(x, y) = 2x^3 + 2xy^2 + 3x^2 + y^2 - 5$

15.  $f(x, y) = e^{x^2} \sin y$

16.  $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^4 + xy^2 - \frac{1}{4}y^4 + 7$

17.  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

18.  $f(x, y) = \frac{1}{x} + y^2 + x$

19.  $f(x, y) = \ln|y| + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy - 3$

20.  $f(x, y) = \frac{1}{9}y^3 + 3x^2y + 9x^2 + y^2 + 9$

21.  $f(x, y) = x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 + 1$

22.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} + 3y^2 - 2y + 6$

En varios de los problemas siguientes es necesario reducir al mínimo o aumentar al máximo determinada cantidad positiva como, por ejemplo, una distancia. Con frecuencia resulta que el álgebra es algo más sencilla si en lugar de ello sólo se estudia el problema equivalente de reducir al mínimo o aumentar al máximo el cuadrado de la cantidad. En el problema 34 se demuestra que esos problemas son equivalentes.

23. Si la suma de tres números positivos es  $a$ , ¿cuáles son sus valores si la suma de sus cuadrados debe ser mínima?
24. Demostrar que la caja rectangular de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio  $a$  es un cubo y determinar sus dimensiones y su volumen.
25. Determinar el punto del plano  $ax + by + cz = d$  que queda más cerca del origen y demostrar que el vector del origen a ese punto es normal al plano.
26. Determinar las dimensiones de una caja de longitud  $l$ , ancho  $b$  y altura  $h$ , de volumen fijo  $V$ , que está abierta en la parte superior, y que requiere la cantidad mínima de material.
27. Suponer que una caja rectangular con su tapa abierta debe tener un volumen de  $6 \text{ ft}^3$ . Si el material del fondo cuesta  $\$1.50/\text{ft}^2$  y el material de los lados cuesta  $\$1.00/\text{ft}^2$ , calcular las dimensiones de la caja que hacen mínimo el costo.
28. Demostrar que entre todos los paralelepípedos rectangulares de una determinada área de superficie, el cubo es el que tiene el volumen máximo.
29. **Método de los mínimos cuadrados.** Supongamos que se da un conjunto de  $N$  puntos  $(X_i, Y_i)$ , donde  $N > 2$ ; deseamos trazar una recta  $y = mx + b$  de tal modo que  $y_i = mX_i + b$  tengan una aproximación razonable a  $Y_i$  para cada  $X_i$ . ¿Cómo debemos escoger  $m$  y  $b$ ? En el método de los mínimos cuadrados, el criterio de selección consiste en reducir al mínimo la suma de los cuadrados de los errores:

$$S = \sum_{i=1}^N (Y_i - y_i)^2.$$

La recta que resulta se conoce como la recta de los mínimos cuadrados.

- (a) Demostrar que si se minimiza  $S$  se llega a las dos ecuaciones siguientes para  $m$  y  $b$ :

$$\left( \sum_{i=1}^N X_i^2 \right) m + \left( \sum_{i=1}^N X_i \right) b = \sum_{i=1}^N X_i Y_i, \quad (i)$$

$$\left( \sum_{i=1}^N X_i \right) m + Nb = \sum_{i=1}^N Y_i. \quad (ii)$$

- (b) Determinar la recta de los mínimos cuadrados para el conjunto de puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(2, \frac{3}{2})$  y hacer un dibujo de los puntos y de la recta.
- (c) Para la recta de los mínimos cuadrados se tiene que  $y_i = mX_i + b$ , en la que  $m$  y  $b$  satisfacen las ecuaciones (i) y (ii). Demostrar que de acuerdo a la ecuación (ii) la suma de las desviaciones,  $\sum_{i=1}^N (Y_i - y_i)$  es cero y comprobar este resultado para el ejemplo específico de la parte (b).
30. Emplear el procedimiento descrito en el problema 29 para determinar la recta de los mínimos cuadrados para el conjunto de puntos  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(0, 3)$  y  $(1, 3)$ . Hacer un dibujo de los puntos y de la recta.
31. En el problema 29 describimos un procedimiento para determinar una recta en el plano  $xy$  que se aproxime a un conjunto de puntos  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . En este problema veremos cómo se debería aproximar una función  $f$  mediante un polinomio  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  en un intervalo  $a \leq x \leq b$ . Un procedimiento útil es seleccionar los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  de tal modo que se minimice el cuadrado del error promedio. El error es la diferencia entre la función y el polinomio, o sea
- $$E_n = \int_a^b [f(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)]^2 dx.$$
- ¿Cómo se debe seleccionar  $a_n$  si  $a = -1$ ,  $b = 1$  y (a)  $n = 1$ , (b)  $n = 2$ ?
32. Una compañía telefónica desea construir una estación central de conmutación para reducir al mínimo la suma de los cuadrados de las distancias desde la estación hasta cada uno de los suscriptores de su servicio. Si los domicilios de los suscriptores son



## 942 DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

$(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , ¿en dónde se debe ubicar la estación?

33. Dos fabricantes de guantes, en mutua competencia, tienen ganancias  $p_1$  y  $p_2$  que dependen de la producción de cada uno y de la de su competidor, de acuerdo con las fórmulas

$$\begin{aligned} p_1 &= 40q_1 - q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2, \\ p_2 &= 60q_2 - 2q_2^2 - \frac{1}{2}q_1^2. \end{aligned}$$

En este caso,  $q_1$  y  $q_2$  se miden en miles de pares de guantes, y  $p_1$  y  $p_2$  son decenas de dólares.

- (a) Si las dos compañías trabajan independientemente para elevar al máximo sus ganancias individuales, determinar los niveles de producción  $q_1$  y  $q_2$ , las ganancias individuales  $p_1$  y  $p_2$ , y la ganancia total  $p_1 + p_2$ .
- (b) Si las dos compañías trabajan en conjunto para hacer máxima la ganancia total  $p_1 + p_2$ , determinar las producciones correspondientes, las ganancias individuales y la ganancia total.

34. Suponer que  $f(x, y) > 0$ . Sea  $g(x, y) = f^2(x, y)$ . Descamos demostrar que si  $g$  tiene un punto estacionario en  $(x_0, y_0)$ , entonces  $f$  tiene un punto estacionario en  $(x_0, y_0)$  y que el tipo de punto estacionario de  $f$  es el mismo que el de  $g$ .

- (a) Demostrar que si  $g_x(x_0, y_0) = g_y(x_0, y_0) = 0$ , entonces  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ . Por tanto  $f$  tiene un punto estacionario en  $(x_0, y_0)$ .
- (b) Sea  $A_1 = g_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B_1 = g_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C_1 = g_{yy}(x_0, y_0)$ ,  $A_2 = f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B_2 = f_{xy}(x_0, y_0)$ , y  $C_2 = f_{yy}(x_0, y_0)$ . Demostrar que  $A_1$  y  $A_2$  tienen el mismo signo, o bien ambas son cero, y que

$$B_1^2 - A_1C_1 = 4f^2(x_0, y_0)(B_2^2 - A_2C_2).$$

Como  $f(x_0, y_0) > 0$ , entonces  $B_1^2 - A_1C_1$  y  $B_2^2 - A_2C_2$  tienen el mismo signo o ambas son cero. Por tanto, el carácter del punto estacionario de  $f$  es el mismo que el de  $g$ .

\*35. Considerar la función

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2).$$

- (a) Demostrar que  $f$  tiene un mínimo relativo en el origen en cada recta  $y = mx$ .
- (b) Demostrar que  $f(0, \beta) > f(0, 0) = 0$  para toda  $\beta \neq 0$  y que  $f(\alpha, 2\alpha^2) < 0$  para toda  $\alpha \neq 0$ .

La parte (b) muestra que aun cuando  $f$  tiene un mínimo relativo en el origen de cada trayectoria recta  $y = mx$ , no puede tener un mínimo relativo en  $(0, 0)$ . Sin embargo, ello no contradice al teorema 16.6.2, o a la discusión que conduce a ese teorema. Nótese que en este caso la ecuación 5 se transforma en

$$D_{\lambda}^2 f(0, 0) = 2 \sin^2 \theta,$$

por lo que es 0 cuando  $\theta = 0$  y  $\pi$ . También, obsérvese que  $B^2 - AC = 0$  en el teorema 16.6.2 y por tanto el teorema no conduce a conclusión alguna.

36. En este problema demostraremos que si  $(x_0, y_0)$  es un punto estacionario de  $f(x, y)$ , y si  $B^2 - AC = 0$ , entonces no se puede llegar a conclusión alguna acerca del tipo de punto que tiene  $(x_0, y_0)$ .

- (a) Demostrar que para cada una de las funciones siguientes, un punto estacionario es  $(0, 0)$  y que  $B^2 - AC = 0$ .

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + y^4, \\ g(x, y) &= -(x^4 + y^4), \\ h(x, y) &= x^4 - y^4. \end{aligned}$$

- (b) Demostrar que  $f(0, 0) \leq f(x, y)$  para toda  $(x, y)$ ; por tanto  $(0, 0)$  corresponde al valor mínimo de  $f$ . Igualmente, demostrar que  $g(0, 0) \geq g(x, y)$  para toda  $(x, y)$ ; por tanto,  $g(0, 0)$  corresponde al valor máximo de  $g$ .
- (c) Demostrar que en cualquier disco alrededor de  $(0, 0)$  hay puntos  $(x, y)$  tales que  $h(0, 0) < h(x, y)$ , y puntos  $(x, y)$  tales que  $h(0, 0) > h(x, y)$ ; por tanto,  $(0, 0)$  es un punto silla para  $h$ .



## 16.7 PROBLEMAS DE EXTREMOS CON RESTRICCIONES

Con frecuencia deseamos calcular los máximos o los mínimos relativos de  $w = f(x, y)$  sujeta a la restricción (o condición lateral) de que el punto  $(x, y)$  quede en una curva  $g(x, y) = 0$ . O bien, podemos querer calcular los máximos o los mínimos relativos de  $w = f(x, y, z)$  sujeta a la restricción de que el punto  $(x, y, z)$  quede en la superficie representada por  $g(x, y, z) = 0$ . Nos referiremos a esta clase de problemas como problemas de extremos con restricciones.

Un problema de éstos surgió en el ejemplo 5 de la sección 16.6 cuando buscábamos el máximo de  $V = 8xyz$  sujeta a la condición de que el punto  $(x, y, z)$  quedara en la superficie de la elipsoide

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad (1)$$

en el primer octante. En ese caso tan sólo despejamos a  $z$  de la ecuación 1 y la sustituimos en la ecuación de  $V$ , para obtener a  $V$  como una función de dos variables. Acto seguido empleamos las técnicas que desarrollamos en la sección 16.6 para funciones de dos variables, para determinar el valor máximo de  $V$ . Para este ejemplo en especial fue posible despejar a  $z$  y sustituir en la ecuación de  $V$ . Sin embargo, éste no siempre es el caso. La función  $g$  puede ser demasiado complicada como para que podamos desarrollar una fórmula explícita para  $z$  en términos de  $x$  y  $y$ , o para cualquiera de las variables en términos de las otras dos.

Nos gustaría desarrollar una teoría alterna para determinar los máximos y mínimos de una función de varias variables sujeta a una condición de restricción de las variables para la que no necesitemos emplear dicha condición para eliminar a una de las variables. Mostraremos el procedimiento para una función de dos variables. Así, examinaremos el problema de determinar los máximos y mínimos relativos de  $w(x, y)$  sujeta a la restricción de que el punto  $(x, y)$  quede en la curva representada por  $g(x, y) = 0$ . Supondremos que  $f$  y  $g$  tienen primeras derivadas parciales continuas.

Sea  $C$  la curva definida por  $g(x, y) = 0$ , y, recordemos que el vector

$$\nabla g(x, y) = g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} \quad (2)$$

es normal a  $C$  en cada punto de ella. Suponemos que  $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$  en los puntos de  $C$ . A continuación supondremos que la curva  $C$  tiene la representación paramétrica  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  y entonces  $g[x(t), y(t)] = 0$ . Consideremos  $w = f(x, y)$ . En la curva  $C$ ,

$$w = f[x(t), y(t)] \quad (3)$$

es una función de una variable. Por último, supongamos que  $w$  tiene un extremo en  $t_0$  que corresponde al punto  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ . Como  $w$  es diferenciable, sabemos que  $dw(t_0)/dt = 0$ . A continuación calculamos  $dw/dt$  empleando la regla de la cadena:

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt}, \quad (4)$$

y, en particular,

$$\begin{aligned}\frac{dw(t_0)}{dt} &= f_x(x_0, y_0) \frac{dx(t_0)}{dt} + f_y(x_0, y_0) \frac{dy(t_0)}{dt} \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \left[ \frac{dx(t_0)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t_0)}{dt} \mathbf{j} \right] = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Como el vector

$$\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j}$$

es tangente a la curva  $C$ , entonces, de acuerdo con la ecuación 5,  $\nabla f(x_0, y_0)$  es normal a la curva  $C$  en el punto  $(x_0, y_0)$ . También, sabemos que  $\nabla g(x_0, y_0)$  es perpendicular a la curva  $C$ . Por tanto, estos dos vectores gradiente son paralelos en  $(x_0, y_0)$ . Como  $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ , existe un escalar  $\lambda$  tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0). \quad (6)$$

Así, para buscar los puntos de  $g(x, y) = 0$  en los cuales  $f(x, y)$  tiene un extremo relativo sólo necesitamos tomar en cuenta los puntos en los que  $\nabla f$  y  $\nabla g$  son paralelos, esto es, los puntos para los que  $\nabla f$  y  $\nabla g$  satisfacen la ecuación 6. La restricción  $g(x, y) = 0$  y las dos ecuaciones provenientes de la ecuación vectorial  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$  proporcionan tres ecuaciones para  $x$ ,  $y$  y  $\lambda$ .

En la figura 16.7.1 se muestra una interpretación geométrica del caso en el que se busca un máximo de  $f(x, y)$  sujeto a la condición  $g(x, y) = 0$ . En el punto en el que  $f(x, y)$  es máximo y  $g(x, y) = 0$ , las curvas de nivel de  $f$  y la curva de restricción son tangentes y, por tanto, sus vectores normales son paralelos.

Al parámetro  $\lambda$  se le llama multiplicador de Lagrange, y el procedimiento que seguimos es el **método de los multiplicadores de Lagrange**. Aunque hemos descrito este método sólo para funciones de dos variables, se generaliza para el caso en que  $f$  y  $g$  son funciones de más de dos variables.

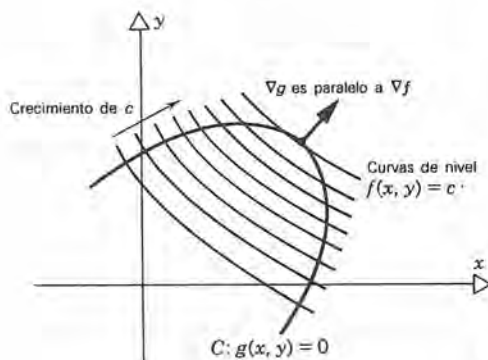


Figura 16.7.1

**Teorema 16.7.1**

Sean  $f$  y  $g$  funciones de varias variables con primeras derivadas parciales continuas. Si  $f(\mathbf{r})$  tiene un extremo relativo en  $\mathbf{r}_0$  sujeto a la restricción  $g(\mathbf{r}) = 0$ , entonces  $\nabla f(\mathbf{r}_0)$  y  $\nabla g(\mathbf{r}_0)$  son paralelos. Por tanto, siempre que  $\nabla g(\mathbf{r}_0) \neq \mathbf{0}$ , existe un escalar  $\lambda$  tal que

$$\nabla f(\mathbf{r}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{r}_0). \quad (7)$$

Para el caso en el cual  $f$  y  $g$  son funciones de tres variables, la interpretación geométrica del teorema 16.7.1 es la siguiente: en un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  de la superficie  $g(x, y, z) = 0$  en el que  $f$  tiene un extremo relativo el vector gradiente  $\nabla f(\mathbf{r}_0)$  es paralelo al vector normal  $\nabla g(\mathbf{r}_0)$  a la superficie  $g(x, y, z) = 0$ . Por analogía con el caso de dos dimensiones que se ve en la figura 16.7.1, una superficie de la familia  $f(x, y, z) = c$  es tangente a la superficie  $g(x, y, z) = 0$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**EJEMPLO 1**

Determinar el mínimo y el máximo de

$$w = f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (8)$$

sujeto a la restricción

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0. \quad (9)$$

Mostraremos cómo resolver este problema de máximo y mínimo con restricciones empleando el método de los multiplicadores de Lagrange y también por eliminación directa. Primero usaremos el de los multiplicadores de Lagrange.

Buscamos valores de  $x$ ,  $y$  y  $\lambda$  tales que  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$  y  $g(x, y) = 0$ . Tenemos que

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}, \quad \nabla g(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (-x + 2y)\mathbf{j},$$

así que

$$2x = \lambda(2x - y) \quad (10a)$$

y

$$2y = \lambda(-x + 2y). \quad (10b)$$

Estas dos ecuaciones, junto con la restricción (9) nos da tres ecuaciones para  $x$ ,  $y$  y  $\lambda$ . El modo más sencillo de proseguir es eliminar a  $\lambda$  de las ecuaciones 10, con lo que



obtenemos una relación entre  $x$  y  $y$  que podemos sustituir en la restricción (9). Observemos primero que si  $y = 2x$ , entonces el lado derecho de la ecuación 10a es cero y, por tanto, debemos tener que  $x = 0$ . Esto a su vez implica que  $y = 0$ . Sin embargo,  $(0, 0)$  no cumple con la restricción (9). Así que podemos excluir la posibilidad  $y = 2x$ . Análogamente, trabajando con la ecuación 10b, nos encontramos con que podemos excluir la posibilidad  $y = x/2$ .

Para  $y \neq 2x$  y  $y \neq x/2$ , podemos despejar a  $\lambda$  de las ecuaciones 10, obteniendo

$$\lambda = \frac{2x}{2x - y} = \frac{2y}{-x + 2y}.$$

Por tanto

$$2x(-x + 2y) = 2y(2x - y)$$

o sea

$$x^2 = y^2,$$

así que

$$y = \pm x.$$

Sustituyendo este resultado en la restricción (9), obtenemos

$$\begin{aligned} y = x: \quad x^2 - x^2 + x^2 - 3 &= 0 \quad \text{por lo que} \quad x = \pm\sqrt{3}, y = \pm\sqrt{3}, \\ y = -x: \quad x^2 + x^2 + x^2 - 3 &= 0 \quad \text{por lo que} \quad x = \pm 1, y = \mp 1. \end{aligned}$$

Así, debemos ver cada uno de los cuatro puntos  $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ,  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ,  $(1, -1)$  y  $(-1, 1)$ . Evaluamos  $f$  en cada uno de ellos:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) &= 3 + 3 = 6, & f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) &= 3 + 3 = 6 \\ f(1, -1) &= 1 + 1 = 2, & f(-1, 1) &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión de que el máximo con restricción de  $f$  es 6 y se presenta en  $(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})$ , y que el mínimo con restricción de  $f$  es 2 y se presenta en  $(\pm 1, \pm 1)$ .

Compararemos este procedimiento con el método de eliminación. Despejando a  $y$  de la ecuación 9 obtenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 3)}}{2} = \frac{x \pm \sqrt{12 - 3x^2}}{2} \\ &= \frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

A continuación sustituimos  $y$  en la ecuación (8) para  $w$ :

$$\begin{aligned} w &= x^2 + \left[ \frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4-x^2} \right]^2 \\ &= x^2 + \frac{x^2}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{4-x^2} + \frac{3}{4} (4-x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} x \sqrt{4-x^2} + 3, \quad -2 \leq x \leq 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Para determinar el máximo y el mínimo de  $w$  debemos estudiar las dos funciones que corresponden al signo  $\pm$  de la ecuación 11, empleando las técnicas para localizar los máximos y los mínimos de las funciones de una variable. Para este problema, el cálculo es definitivamente más tedioso que el empleo de los multiplicadores de Lagrange. ■

## EJEMPLO 2

Emplear el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones del paralelepípedo de volumen máximo y aristas paralelas a los ejes, que se puede inscribir en la elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1. \quad (12)$$

Este problema lo resolvimos en el ejemplo 5 de la sección 16.6 eliminando una de las variables. Recordemos que deseamos encontrar el máximo de  $V = 8xyz$  sujeto a la restricción (12) donde  $x, y, z$  positivas. Sea  $g(x, y, z) = x^2/16 + y^2/9 + z^2/4 - 1$ , y  $f(x, y, z) = 8xyz$ . Deseamos entonces calcular  $x, y, z$  y  $\lambda$  tales que  $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$  y que  $(x, y, z)$  satisfaga la restricción (12). Tenemos que

$$\nabla f(x, y, z) = 8(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}), \quad \nabla g(x, y, z) = \frac{x}{8}\mathbf{i} + \frac{2y}{9}\mathbf{j} + \frac{z}{2}\mathbf{k},$$

y entonces

$$8yz = \lambda \frac{x}{8}, \quad 8xz = \lambda \frac{2y}{9}, \quad 8xy = \lambda \frac{z}{2}. \quad (13)$$

Como  $x > 0, y > 0$  y  $z > 0$ , podemos despejar a  $\lambda$  de cada una de las ecuaciones 13. Las primeras dos dan  $y^2 = 9x^2/16$ , y la primera y la última dan  $z^2 = x^2/4$ . Sustituyendo  $y^2$  y  $z^2$  en la restricción 12, obtenemos

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{9} \frac{9x^2}{16} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{4} = 1$$

y por tanto

$$x^2 = \frac{16}{3}$$

y  $x = 4\sqrt{3}$ . Los valores correspondientes de  $y$  y  $z$  son  $\sqrt{3}$  y  $2/\sqrt{3}$ . Éste es el único candidato para ser punto máximo, y del contexto del problema queda claro que el punto  $(4/\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$  es el volumen máximo de  $V$ .

Es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 5 de la sección 16.6; sin embargo, este último cálculo es algo más sencillo que nuestro primer cálculo. ■

### EJEMPLO 3

Calcular el mínimo y el máximo de

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x \quad (14)$$

en el dominio  $x^2 + y^2 \leq 9$ .

Descompondremos el problema en dos partes. Primero, determinaremos los extremos relativos de  $f$  en el conjunto abierto  $x^2 + y^2 < 9$  y después encontraremos los extremos relativos de  $f$  en la frontera  $x^2 + y^2 = 9$ . Tenemos que

$$f_x(x, y) = 2x - y - 3, \quad f_y(x, y) = -x + 2y.$$

Haciendo que  $f_x(x, y)$  y  $f_y(x, y)$  sean cero, se obtiene  $x = 2$ ,  $y = 1$ . El punto  $(2, 1)$  pertenece al conjunto  $x^2 + y^2 < 9$ , y entonces es un candidato para punto máximo o mínimo.

A continuación pasaremos al problema de máximo o mínimo con restricción para  $f$  en la frontera,

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0. \quad (15)$$

Tenemos que

$$\nabla f(x, y) = (2x - y - 3)\mathbf{i} + (-x + 2y)\mathbf{j}, \quad \nabla g(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j},$$

de modo que

$$\begin{aligned} 2x - y - 3 &= 2\lambda x, \\ -x + 2y &= 2\lambda y. \end{aligned} \quad (16)$$

Si  $x = 0$ , entonces la primera de las ecuaciones 16 queda satisfecha si escogemos  $y = -3$ , y la segunda se satisface si hacemos que  $\lambda = 1$ . Como  $(0, -3)$  también satisface la restricción (15), es un segundo candidato para ser punto máximo o mínimo. Si  $y = 0$ , entonces de acuerdo con la segunda ecuación 16,  $x = 0$ . Sin embargo,  $(0, 0)$  no cumple con la restricción (15).



Para  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$  podemos despejar a  $\lambda$  de cada una de las ecuaciones 16, y obtenemos

$$\lambda = \frac{2x - y - 3}{2x} = \frac{-x + 2y}{2y}.$$

Por tanto

$$y(2x - y - 3) = x(-x + 2y),$$

y entonces

$$x^2 = y^2 + 3y. \quad (17)$$

Sustituyendo  $x^2$  en la restricción (15) obtenemos

$$2y^2 + 3y - 9 = 0,$$

así que

$$y = -3 \quad \text{y} \quad y = \frac{3}{2}.$$

Los valores correspondientes de  $x$  se calculan con la ecuación 17

$$y = -3: \quad x^2 = (-3)^2 + 3(-3) \quad \text{por lo que} \quad x = 0;$$

$$y = \frac{3}{2}: \quad x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{por lo que} \quad x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Así, los puntos  $(0, 3)$ ,  $(3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2})$  y  $(-3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2})$  de la frontera son candidatos a ser puntos máximo o mínimo. Nótese que ya habíamos visto que  $(0, -3)$  es un candidato. Para determinar el máximo o mínimo de  $f$  evaluamos  $f$  en los cuatro puntos  $(2, 1)$ ,  $(0, -3)$ ,  $(3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2})$ , y  $(-3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2})$ . Tenemos así

$$f(2, 1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3,$$

$$f(0, -3) = 0 - 0 + 9 - 0 = 9,$$

$$f\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9 - \frac{27\sqrt{3}}{4} \approx -2.69,$$

$$f\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = 9 + \frac{27\sqrt{3}}{4} \approx 20.69.$$

Entonces, el máximo de  $f$  es  $9 + 27\sqrt{3}/4 \approx 20.69$ , y se presenta en  $(-3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2})$ ; el mínimo de  $f$  es  $-3$  y se presenta en  $(2, 1)$ . Nótese que el punto máximo está en la frontera del dominio  $x^2 + y^2 \leq 9$ , y que el punto mínimo está en el interior.

En la figura 16.7.2 se muestra la gráfica de  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3x$  en el dominio  $x^2 + y^2 \leq 9$ . ■

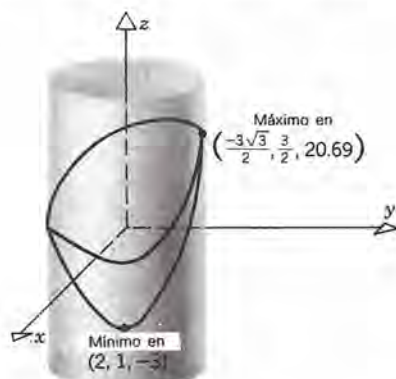


Figura 16.7.2

En resumen, hay dos métodos generales para atacar los problemas de máximo con restricción. El “método directo” consiste en despejar una de las variables de la ecuación con restricción en términos de las demás y sustituir después esa variable en la función para la que se busca el extremo. Como reducimos el número de variables en uno, este método parece adecuado. Sin embargo, como hemos visto en el ejemplo 1 aquí, y en el ejemplo 5 de la sección 16.6, los cálculos se pueden hacer tediosos.

El método de los multiplicadores de Lagrange es indirecto porque se introduce una nueva variable, que es el multiplicador  $\lambda$  de Lagrange, además de todas las variables originales. Podría uno creer que se da este paso en una dirección equivocada. Sin embargo, como se muestra en los ejemplos 1 y 2, el método de los multiplicadores de Lagrange rara vez, si es que alguna vez, es más complicado, y con mucha frecuencia es más fácil que el método directo. Desde luego que esto no significa que siempre sea fácil resolver las ecuaciones resultantes para encontrar los posibles puntos máximo y mínimo. A veces es necesario recurrir a procedimientos numéricos para resolver las ecuaciones; sin embargo, los ejemplos y los problemas que se tienen aquí no lo necesitan. A pesar de todo, en el método de Lagrange sólo necesitamos resolver las ecuaciones  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$  y  $g(x, y)$  para encontrar los puntos  $(x, y, \lambda)$ . En el método directo debemos resolver la ecuación  $g(x, y) = 0$  para encontrar a  $y$  como una función de  $x$ , o a  $x$  como una función de  $y$ .

Es posible ampliar la teoría de los multiplicadores de Lagrange directamente a problemas en los que hay más de una restricción. Por ejemplo, podemos querer determinar el máximo de  $w = f(x, y, z)$  sujeto a las restricciones  $g(x, y, z) = 0$  y  $h(x, y, z) = 0$ . Sin embargo, no discutiremos esta generalización.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 24 emplear el método de los multiplicadores de Lagrange.

1. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = xy$  en la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

2. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = y^2x$  en la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

3. Calcular el mínimo de  $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$  en la hipérbola  $xy = 1$ .

4. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y, z) = x - y + z$  en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . ¿En qué puntos de la esfera se alcanza el máximo y el mínimo?
  5. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y, z) = 2x + 2y - z$  en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . ¿En qué puntos de la esfera se alcanza el máximo y el mínimo?
  6. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = x^2y^2$  en la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .
  7. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y, z) = x + y - z$  en la elipsoide  $x^2/4 + y^2/4 + z^2 = 1$ . ¿En qué puntos de la elipsoide se alcanza el máximo y el mínimo?
  8. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y, z) = 3x - y + 2z$  en la elipsoide  $x^2 + y^2/4 + z^2/3 = 1$ . ¿En qué puntos de la elipsoide se alcanza el máximo y el mínimo?
  9. Calcular el máximo de  $f(x, y, z) = xyz$  en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
  10. Calcular el máximo de  $f(x, y, z) = xyz$  en la superficie  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .
  11. Calcular el mínimo de  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$  en el plano  $x + y + z = 1$ .
  12. Calcular el mínimo de  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$  en el plano  $x + y + z = 1$ .
  13. Determinar la distancia mínima del origen a la recta  $ax + by + c = 0$ .
  14. Determinar la distancia mínima del origen al plano  $ax + by + cz = d$ ,  $d \neq 0$ .
  15. Determinar el vector tridimensional  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  tal que  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = a^2$  y  $x + y + z$  es un máximo.
  16. Demostrar que el rectángulo de perímetro fijo que tiene área máxima es un cuadrado.
  17. Demostrar que de entre todos los paralelepípedos rectangulares con una determinada área de superficie, el cubo es el que tiene volumen máximo. (Problema 28 de la sección 16.6.)
  18. Si la suma de tres números positivos es  $a$ , ¿cuáles son sus valores, si la suma de sus cuadrados debe ser mínima? (Problema 23 de la sección 16.6.)
  19. Demostrar que si  $f(x, y)$ , sujeta a la restricción  $g(x, y) = 0$ , tiene un valor extremo en  $(x_0, y_0)$  entonces  $f_x(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) = 0$ .
  20. Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  números positivos. Determinar el máximo de  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  sujeta a la restricción  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .
  21. (a) Si la suma de dos números positivos es  $C$ , ¿cuáles son sus valores, si la raíz cuadrada de su producto debe ser máxima?  
(b) Demostrar que si  $a$  y  $b$  son números positivos, entonces  $(ab)^{1/2} \leq (a + b)/2$ .
  22. (a) Si la suma de tres números positivos es  $C$ , ¿cuáles son sus valores si la raíz cúbica de su producto debe ser máxima?  
(b) Demostrar que si  $a, b$  y  $C$  son positivos, entonces  $(abc)^{1/3} \leq (a + b + c)/3$ .
  23. Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números positivos, demostrar que  $(a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .
- Sugerencia:* véanse los problemas 21 y 22.
24. Se construye un silo en forma de cilindro circular de radio  $r$  y altura  $h$ , con una tapa cónica de altura  $H$ . Si están fijos el radio y el volumen de este silo, ¿cómo se deben seleccionar  $h$  y  $H$  para que sea mínima el área de la superficie?
  25. Determinar el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2$  en el dominio  $x^2 + y^2 \leq r^2$ . Suponer que  $a^2 > b^2$ .
  26. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 4y + 1$  en el dominio  $x^2 + y^2 \leq 16$ .
  27. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = 4x^2 - xy + y^2 + y$  en el dominio  $x^2 + y^2/4 \leq 1$ .
  28. Determinar el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = x^4 - y^4$  en el dominio  $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ .
  29. Calcular el máximo y el mínimo de  $f(x, y) = (\frac{1}{3})y^3 + x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 6$  en el dominio  $x^2 + y^2 \leq 36$ . Nótese que  $f$  es la función que se describió en el ejemplo 4 de la sección 16.6.



## 16.8 FUNCIONES IMPLÍCITAS

Con frecuencia hemos visto que las funciones que deseamos investigar están definidas de forma implícita. Por ejemplo, podemos tener definida implícitamente a  $y$  como una función de  $x$  en la ecuación  $g(x, y) = 0$ , o tener a  $z$  definida implícitamente como una función de  $x$  y  $y$  mediante la ecuación  $h(x, y, z) = 0$ . En la sección 3.7 discutimos cómo calcular  $dy/dx$  cuando se define a  $y$  en forma implícita como una función de  $x$  mediante la ecuación  $g(x, y) = 0$ . A continuación ampliaremos esas técnicas a funciones de varias variables. Por el momento dejaremos a un lado la cuestión de cuándo una ecuación, como  $h(x, y, z)$ , define realmente a  $z$  como una función de  $x$  y  $y$ , y cuándo es diferenciable esa función. Comenzaremos con un ejemplo.

### EJEMPLO 1

Supongamos que existe una función diferenciable  $z = f(x, y)$  definida por la ecuación

$$h(x, y, z) = x^4z - 2xy^3 + yz^3 - 8 = 0. \quad (1)$$

Comprobar que  $z = 2$  cuando  $x = 1, y = 1$ , y calcular  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$  en el punto  $(1, 1)$ .

Primero demostraremos, por sustitución directa, que el punto  $(1, 1, 2)$  satisface realmente la ecuación 1:

$$h(1, 1, 2) = 1(2) - 2(1)(1) + 1(8) - 8 = 2 - 2 + 8 - 8 = 0.$$

Para calcular  $\partial z/\partial x$ , mantenemos constante a  $y$  y derivamos la ecuación 1 con respecto a  $x$ . Esto da

$$4x^3z + x^4 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y^3 + 3yz^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y^3 - 4x^3z}{x^4 + 3yz^2}, \quad (2)$$

siempre que el denominador no sea cero. Para calcular  $\partial z/\partial x$  cuando  $x = 1, y = 1$ , debemos emplear el hecho de que conocemos el valor correspondiente de  $z$ , que es  $z = 2$ . Tenemos entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = \frac{2(1) - 4(1)(2)}{1 + 3(1)(4)} = -\frac{6}{13}.$$

De igual forma calculamos  $\partial z/\partial y$  manteniendo constante a  $x$  y derivamos la ecuación 1 con respecto a  $y$ . Con ello obtenemos

$$x^4 \frac{\partial z}{\partial y} - 6xy^2 + z^3 + 3yz^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

y por consiguiente

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6xy^2 - z^3}{x^4 + 3yz^2}, \quad (3)$$

siempre que, de nuevo, el denominador no sea cero. Cuando  $x = 1$ ,  $y = 1$ , tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = \frac{6(1)(1) - 8}{1 + 3(1)(4)} = -\frac{2}{13}. \blacksquare$$

A continuación consideraremos algunos casos generales.

### Una ecuación con dos variables

Supongamos que la ecuación  $g(x, y) = 0$  define a  $y$  como una función derivable de  $x$ , y que  $y = f(x)$ . Deseamos deducir una fórmula para  $dy/dx$  en términos de las derivadas de  $g$ . Como  $y = f(x)$  es una solución de  $g(x, y) = 0$ , tenemos

$$g[x, f(x)] = 0, \quad \text{por lo que} \quad \frac{d}{dx} g[x, f(x)] = 0. \quad (4)$$

A continuación calculamos esta derivada mediante la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} g[x, f(x)] = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (5)$$

se comprende que  $y = f(x)$ . Siempre que  $g_y(x, y) \neq 0$ , podemos despejar a  $dy/dx$  de la ecuación 5 y obtener

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)}. \quad (6)$$

Nótese que éste es un enunciado más general del procedimiento que se usó en la sección 3.7 para calcular la derivada de una función definida en forma implícita. Para calcular  $dy/dx$  a partir de la ecuación (6) para determinado valor de  $x$ , debemos conocer el valor correspondiente de  $y$  que se obtiene al despejarla en la ecuación  $g(x, y) = 0$ . Puede ser necesario recurrir a procedimientos numéricos para llevar a cabo lo anterior.

### EJEMPLO 2

Suponer que la ecuación

$$g(x, y) = 5ye^y + 2 \sin \frac{\pi}{2}(x + y) + x - 3 = 0 \quad (7)$$

define a  $y$  como una función derivable de  $x$ ,  $y$  que  $y = f(x)$ . Demostrar que  $x = 1$ ,  $y = 0$  satisface la ecuación 7 y calcular  $dy/dx$  para  $x = 1$ .

Primero

$$g(1, 0) = 0 + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + 1 - 3 = 0.$$

Acto seguido podemos calcular  $g_x(x, y)$  y  $g_y(x, y)$  y sustituir en la ecuación 6. Sin embargo, en lugar de memorizar la fórmula (6), preferiríamos llevar a cabo los cálculos en forma directa. Así, al considerar que  $y$  es una función de  $x$ , derivamos la ecuación 7 con respecto a  $x$ :

$$5ye^y \frac{dy}{dx} + 5e^y \frac{dy}{dx} + \left[ 2 \cos \frac{\pi}{2} (x + y) \right] \left[ \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{dy}{dx} \right) \right] + 1 = 0.$$

Despejando a  $dy/dx$  de esta ecuación, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\pi \cos \frac{\pi}{2} (x + y) + 1}{5e^y (1 + y) + \pi \cos \frac{\pi}{2} (x + y)}. \quad (8)$$

En  $x = 1$ ,  $y = 0$ , y entonces tenemos que

$$\frac{dy}{dx}(1) = - \frac{\pi \cos \pi/2 + 1}{5 + \pi \cos \pi/2} = - \frac{1}{5}. \blacksquare$$

### Una ecuación con tres variables

Supongamos que la ecuación  $h(x, y, z) = 0$  define a  $z$  como una función diferenciable de  $x$  y  $y$ , donde  $z = f(x, y)$ . Deseamos deducir fórmulas para  $z_x$  y  $z_y$  en términos de las derivadas de  $h$ . Como  $z = f(x, y)$  es una solución de  $h(x, y, z) = 0$ , entonces  $h[x, y, f(x, y)] = 0$ , así que

$$\frac{\partial h[x, y, f(x, y)]}{\partial x} = 0 \quad y \quad \frac{\partial h[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

A continuación calculamos la derivada parcial con respecto a  $x$  empleando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h[x, y, f(x, y)]}{\partial x} &= \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$



en donde se sobreentiende que  $z = f(x, y)$ . Ahora bien,  $\partial x/\partial x = 1$ , y  $\partial y/\partial x = 0$ , ya que  $y$  se mantiene constante para calcular la derivada parcial con respecto a  $x$ . Despejando a  $\partial z/\partial x$  de la ecuación 10, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{h_x(x, y, z)}{h_z(x, y, z)}, \quad (11)$$

siempre que  $h_z(x, y, z) \neq 0$ . Un cálculo semejante demuestra que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{h_y(x, y, z)}{h_z(x, y, z)}. \quad (12)$$

Para el ejemplo 1 tenemos que

$$h(x, y, z) = x^4 z - 2xy^3 + yz^3 - 8,$$

y entonces

$$h_x(x, y, z) = 4x^3 z - 2y^3,$$

$$h_y(x, y, z) = -6xy^2 + z^3,$$

$$h_z(x, y, z) = x^4 + 3yz^2.$$

Si sustituimos  $h_x$ ,  $h_y$  y  $h_z$  en las ecuaciones 11 y 12, obtendremos las ecuaciones 2 y 3, respectivamente.

## Dos ecuaciones con cuatro variables

Supongamos que las dos ecuaciones  $F(x, y, u, v) = 0$  y  $G(x, y, u, v) = 0$  definen a  $u$  y  $v$  como funciones diferenciables de  $x$  y  $y$ , o sea que  $u = f(x, y)$  y  $v = g(x, y)$ . Deseamos deducir fórmulas para  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$  y  $v_y$  en términos de las derivadas de  $F$  y  $G$ . Como  $u = f(x, y)$  y  $v = g(x, y)$  son soluciones de  $F(x, y, u, v) = 0$  y  $G(x, y, u, v) = 0$ , tenemos

$$F[x, y, f(x, y), g(x, y)] \equiv 0 \quad \text{y} \quad G[x, y, f(x, y), g(x, y)] \equiv 0. \quad (13)$$

Nuevamente observamos que las derivadas parciales de esas funciones con respecto a  $x$  y a  $y$  también son cero. Determinamos las derivadas parciales con respecto a  $x$  empleando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[x, y, f(x, y), g(x, y)]}{\partial x} &= \frac{\partial F(x, y, u, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, u, v)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial F(x, y, u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\equiv 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G[x, y, f(x, y), g(x, y)]}{\partial x} &= \frac{\partial G(x, y, u, v)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y, u, v)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial G(x, y, u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G(x, y, u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &\equiv 0, \end{aligned} \quad (15)$$

en donde se sobreentiende que  $u = f(x, y)$  y  $v = g(x, y)$ . De nuevo,  $\partial x/\partial x = 1$  y  $\partial y/\partial x = 0$ . Las ecuaciones 14 y 15 nos proporcionan dos ecuaciones algebraicas lineales no homogéneas para  $u_x$  y  $v_x$ , que son

$$\begin{aligned} F_u u_x + F_v v_x &= -F_x, \\ G_u u_x + G_v v_x &= -G_x. \end{aligned} \quad (16)$$

Siempre que  $F_u G_v - F_v G_u \neq 0$ , podemos despejar a  $u_x$  y  $v_x$  de esas ecuaciones, obteniendo

$$u_x = \frac{-F_x G_v + F_v G_x}{F_u G_v - F_v G_u}, \quad v_x = \frac{-F_u G_x + F_x G_u}{F_u G_v - F_v G_u}. \quad (17)$$

Así, para evaluar a  $u_x$  y  $v_x$  en un punto  $(x, y)$ , debemos (a) determinar los valores correspondientes de  $u$  y  $v$  resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas  $F(x, y, u, v) = 0$  y  $G(x, y, u, v) = 0$ ; (b) determinar las derivadas parciales  $F_x, F_u, F_v, G_x, G_u$  y  $G_v$ , y evaluarlas en el punto  $(x, y, u, v)$ ; y (c) a continuación evaluar  $u_x$  y  $v_x$  empleando las ecuaciones 17.

Se procede de igual forma para deducir las fórmulas de  $u_y$  y  $v_y$  y se obtiene

$$u_y = \frac{-F_y G_v + F_v G_y}{F_u G_v - F_v G_u}, \quad v_y = \frac{-F_u G_y + F_y G_u}{F_u G_v - F_v G_u}. \quad (18)$$

En la práctica no se necesita recordar las ecuaciones 17 y 18, sino más bien llevar a cabo los cálculos en forma directa, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3

Se definen las variables  $u$  y  $v$  como funciones diferenciables de  $x$  y  $y$  mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= x^2 + y - u^2 + 2v = 0, \\ G(x, y, u, v) &= xy + 2x - y + 3uv + 10 = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Comprobar que  $x = 1, y = -1, u = -2, v = 2$  es una solución de estas ecuaciones y calcular  $u_y$  y  $v_y$  en  $x = 1, y = -1$ .

Comprobaremos que  $(1, -1, -2, 2)$  es una solución de estas ecuaciones 19, por sustitución directa:

$$F(1, -1, -2, 2) = 1 - 1 - 4 + 4 = 0,$$

$$G(1, -1, -2, 2) = -1 + 2 + 1 - 12 + 10 = 0.$$

A continuación derivamos cada una de las ecuaciones 19 con respecto a  $y$ , recordando que  $x$  se mantiene fija y que  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$  y  $y$ . El resultado es

$$1 - 2uu_y + 2v_y = 0,$$

$$x - 1 + 3vu_y + 3uv_y = 0.$$

Por tanto,

$$-2uu_y + 2v_y = -1, \quad (20)$$

$$3vu_y + 3uv_y = 1 - x.$$

La solución de estas ecuaciones es

$$u_y = \frac{3u + 2(1 - x)}{6u^2 + 6v}, \quad v_y = \frac{2u(1 - x) - 3v}{6u^2 + 6v}, \quad (21)$$

de modo que, empleando el hecho de que  $u = -2$  y  $v = 2$  cuando  $x = 1$  y  $y = -1$ , obtenemos

$$u_y(1, -1) = \frac{-6 + 0}{24 + 12} = -\frac{1}{6},$$

y

$$v_y(1, -1) = \frac{0 - 6}{24 + 12} = -\frac{1}{6}. \blacksquare$$

Las ideas que se han desarrollado en estos casos se pueden extender con facilidad para el caso de  $m$  ecuaciones con  $n$  variables (donde  $m < n$ ) que definen a  $m$  variables como funciones diferenciables de las  $n - m$  variables restantes. Resumiremos lo que se necesita comprender para calcular la derivada o las derivadas parciales de una función o de funciones definidas en forma implícita.

1. Dadas  $m$  ecuaciones con  $n$  variables ( $m < n$ ), decidir qué variables serán independientes y cuáles dependientes. En el ejemplo 3,  $x$  y  $y$  fueron las variables independientes y  $u$  y  $v$  las dependientes. El número de variables dependientes es igual al número ( $m$ ) de ecuaciones.
2. Suponer que las ecuaciones definen a las  $m$  variables dependientes como funciones de las  $n - m$  variables independientes para determinado dominio de las variables independientes.
3. Derivar cada una de las ecuaciones con respecto a una de las variables independientes, manteniendo fijas las demás variables independientes.
4. Las ecuaciones resultantes *siempre son lineales* en las derivadas parciales de las variables dependientes con respecto a la variable independiente seleccionada.



y, por tanto, se pueden despejar con facilidad. Los resultados tienen sentido siempre que los denominadores no sean cero.

Una vez comprendido este proceso, no nos debe preocupar el tratar con cualquier combinación de números de ecuaciones y de variables, siempre que, desde luego, el número de ecuaciones sea menor que el número de variables. Es más, no hay necesidad de memorizar fórmulas. Hasta que se llegue a comprender este proceso, existe el peligro de confundir los casos y las fórmulas complicadas. Lo que es peor, puede no comprenderse cómo tratar algún caso nuevo.

Para cerrar esta sección enunciaremos y discutiremos brevemente un teorema que asegura que una ecuación  $g(x, y)$  define a  $y$  como una función derivable de  $x$ . Específicamente nos preguntamos: Dada una ecuación  $g(x, y) = 0$  y un punto  $(x_0, y_0)$  que satisfaga a esta ecuación, ¿existe alguna función derivable  $y = f(x)$  tal que  $f_0 = y_0$  y  $g[x, f(x)] = 0$  para  $x$  en un intervalo abierto que contenga a  $x_0$ ?

### Teorema 16.8.1

#### (Teorema de la función implícita)

Supongamos que  $g(x, y)$ ,  $g_x(x, y)$  y  $g_y(x, y)$  son continuas en la vecindad de un punto  $(x_0, y_0)$  tal que  $g(x_0, y_0) = 0$ , y que  $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Entonces existe una función  $y = f(x)$  en algún intervalo abierto que contiene a  $x_0$  tal que  $f(x_0) = y_0$  y  $g[x, f(x)] = 0$ ; la función  $f$  es derivable y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)}.$$

Nótese que el teorema dice que  $f$  está definida en algún intervalo abierto que contiene a  $x_0$ ; no nos dice el tamaño del intervalo. Así, el teorema sólo nos da un resultado "local". Esto se muestra en la figura 16.8.1. Mostraremos, mediante algunos ejemplos sencillos, que se necesitan condiciones como las del teorema 16.8.1 para obtener el resultado que se enuncia allí.

Sea la función

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0. \quad (22)$$

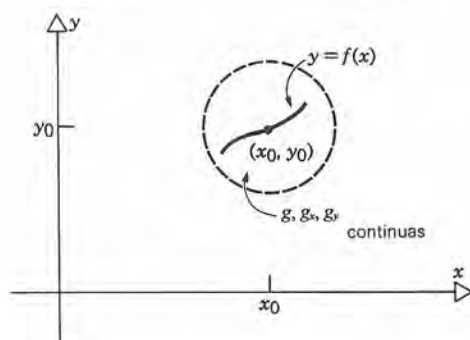


Figura 16.8.1

Es claro que  $g$ ,  $g_x$  y  $g_y$  son continuas dondequiera, y que  $g(x, y) = 2y$  sólo es cero en la recta  $y = 0$ . Sin embargo, no existe ninguna función derivable  $y = f(x)$  que satisfaga la ecuación 22, ya que no hay ningún punto  $(x_0, y_0)$  en el plano tal que  $x_0^2 + y_0^2 + 1 = 0$ .

A continuación, consideremos

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 0. \quad (23)$$

El único punto que satisface esta ecuación es el  $(0, 0)$ . Sin embargo, no existe ninguna función derivable  $y = f(x)$  que satisfaga la ecuación 23 y la condición  $f(0) = 0$ . Nótese que mientras  $g$ ,  $g_x$  y  $g_y$  son continuas dondequiera,  $g_y(x, y) = 2y$ , y por tanto es cero en  $(0, 0)$ .

Por último, consideremos la ecuación

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (24)$$

El punto  $(0, 1)$  satisface la ecuación 24. De nuevo,  $g$ ,  $g_x$  y  $g_y$  son continuas dondequiera, y ahora  $g_y(0, 1) = 2$ , de manera que existe una función derivable  $y = f(x)$  que satisface a  $f(0) = 1$  y a la ecuación 24 en algún intervalo que contiene a 0. Esta función es  $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , para  $-1 < x < 1$ . Análogamente, la solución de la ecuación 24 que pasa por  $(0, -1)$  es  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ , para  $-1 < x < 1$ . Sin embargo, como  $g_y(x, y) = 2y$  es cero en la recta  $y = 0$ , no debemos esperar que allí se tenga una función derivable que satisfaga la ecuación 24 y la condición de que  $f(1) = 0$ . En realidad, no hay tal función.

El teorema de la función implícita se generaliza directamente al caso de  $n$  variables y  $m$  ecuaciones, donde  $m < n$ . Sin embargo, no continuaremos con este tema.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 12 determinar las derivadas que se piden. Suponer que la(s) ecuación(es) define(n) a la(s) variable(s) necesaria(s) como función(es) diferenciable(s) de las variables restantes.

1.  $e^x \sin y + 2y \cos x = 3$ ,  $\frac{dy}{dx}$

2.  $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = 4$ ,  $\frac{dy}{dx}$

3.  $\frac{x^2}{y} + \arctan \frac{y}{x} = 6$ ,  $\frac{dy}{dx}$

4.  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 3xyz + 2yz + 4xy - 1 = 0$ ,  $z_x$

5.  $3xy - z + e^{x+z} - 2y^2 + 4 = 0$ ,  $z_x$  y  $z_y$

6.  $z = e^{2x} \sin(3y - 2z)$ ,  $z_x$  y  $z_y$

7.  $\sin(x + y) + \cos(y + z) + \sin(x + z) = 1$ ,  $z_y$

8.  $x^3y + y^3z + z^3x = 8$ ,  $x_y$  y  $x_z$

9.  $(x^2 + 2y^2)^2 + 2(x^2 + z^2)^2 + (2y^2 + z^2)^2 = 12$ ,  $z_y$

10.  $x^2 - y^2 + 2uv = 0$ ,  $u^2 + v^2 - 2xy = 0$ ;  $u_x$  y  $v_x$

11.  $x^2 - y^2 + u^2 - v^2 = 0$ ,  $xyuv = 4$ ;  $u_y$  y  $v_y$

12.  $e^xu + e^yv - uv = 1$ ,  $yu + xv + \cos 2y = 3$ ;  $u_x$  y  $v_x$

13. Suponer que la ecuación

$$x^2 - xy + y^3 - 2x + 1 = 0$$

define a  $y = f(x)$  con una segunda derivada continua en la vecindad de  $x = 2$ . Comprobar que  $f(2) = 1$  y calcular (a)  $f'(2)$ , y (b)  $f''(2)$ .

14. Suponer que la ecuación  $g(x, y) = 0$  define a  $y$  como una función doblemente derivable de  $x$ . Determinar a  $d^2y/dx^2$  en términos de las derivadas parciales de  $g$ .

**960 DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**

15. Suponer que la ecuación

$$x^2 + xy + 4y^2 - 3yz - z^3 = 2$$

define a  $z = f(x, y)$  con segundas derivadas parciales en una vecindad del punto  $(1, -1)$ . Comprobar que  $x = 1, y = -1$  y  $z = 2$  satisface esta ecuación, y calcular  $f_x, f_{xx}, f_y$  y  $f_{xy}$  en este punto.

16. Suponer que la ecuación  $g(x, y, z) = 0$  define a  $z$  como una función de  $x$  y  $y$  con segundas derivadas parciales.

(a) Determinar a  $z_{xx}$  en términos de las derivadas parciales de  $g$ .

(b) Determinar a  $z_{xy}$  en términos de las derivadas parciales de  $g$ .

17. Si  $z = f(x, y)$  y  $g(x, y) = 0$  define a  $y$  como una función derivable de  $x$ , deducir una ecuación para  $dz/dx$  en términos de las derivadas parciales de  $f$  y  $g$ .

18. Las ecuaciones  $f(x, u, v) = 0$  y  $g(x, u, v) = 0$  definen a  $u$  y a  $v$  como funciones derivables de  $x$ . Deducir ecuaciones para  $du/dx$  y  $dv/dx$ .

19. Suponer que la ecuación  $F(x, y, z) = 0$  define las funciones diferenciables  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(x, z)$  y  $x = h(y, z)$ . Demostrar que

$$\frac{\partial h(y, z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g(x, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -1. \quad (i)$$

Esta ecuación se escribe con frecuencia en la forma más sencilla

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1, \quad (ii)$$

en la que cada expresión se debe interpretar en el sentido dado por la ecuación (i). Nótese también, de la ecuación (ii), el error que se comete si por casualidad se simplifica a una  $\partial x$  "de arriba" con una  $\partial x$  "de abajo" y de igual manera para  $\partial y$  y  $\partial z$ .

20. Suponer que la ecuación

$$x^2y^2 + xz^3 - x^4 + zy^3 = 6$$

define a las funciones diferenciables  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(x, z)$  y  $x = h(z)$ . Calcular  $z_x, y_z$  y  $x_y$  en el punto  $(1, -1, 2)$  y comprobar que en este punto  $x_y y_z z_x = -1$ .

21. (a) Emplear la derivación implícita para demostrar que si

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (i)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

- (b) Emplear los resultados de la parte (a) para demostrar que si  $w = f(r, \theta)$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

- (c) Demostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Este cálculo es mucho más fácil que despejar a  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  y a  $\theta = \arctan(y/x)$  de las ecuaciones (i) para después calcular  $w_{xx} + w_{yy}$ .

22. Considerar la transformación de coordenadas

$$x = \cosh u \cos v, \quad y = \sinh u \sin v.$$

- (a) Demostrar que las familias de curvas  $u = \text{constante}$  y  $v = \text{constante}$  son elipses e hipérbolas, respectivamente, en el plano  $xy$ .

- (b) Emplear la derivación implícita para demostrar que  $u_x = v_y$  y que  $u_y = -v_x$ .

23. Suponer que  $x = f(u, v)$  y que  $y = g(u, v)$  y que es posible despejar a  $y$  y a  $v$  como funciones diferenciables de  $x$  y  $u$ . Determinar a  $u_x, y_y, v_x$  y  $v_y$  en términos de las derivadas parciales de  $f$  y  $g$ .

**PROBLEMAS DE REPASO**

En los problemas 1 a 4 evaluar la función dada en los puntos dados, y determinar el dominio de esa función.

1.  $\phi(x, y) = \ln(x^2 - y^2)^{3/2}$ ,  
(a)  $(1, 0)$ ,  
(b)  $(5, 4)$



$$2. F(x, y, z) = \exp(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2});$$

$$(a) (a, a, a), a > 0$$

$$(b) (a^{-1}, a^{-1}, a^{-1}), a > 0$$

$$3. \phi(x, y, z) = \arctan \left( \frac{3x - 2y}{-2z + x^2} \right);$$

$$(a) (1, 1, 1),$$

$$(b) (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1})$$

$$4. g(x, y) = \sin x \sinh y + \cos x \cosh y;$$

$$(a) \left( \frac{\pi}{3}, \ln 2 \right), \quad (b) \left( \frac{\pi}{6}, \ln 3 \right)$$

En los problemas 5 a 8 identificar el o los puntos de discontinuidad de la función dada. Definir la función en esos puntos para hacerla continua, si es posible.

$$5. f(x, y) = \frac{x^2 - 2y}{2x - y} \quad 6. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$7. f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{\ln|x - y|}$$

$$8. f(x, y) = \cos \left( \frac{x^2 - y^2}{|x| + |y|} \right)$$

En los problemas 9 a 12 determinar las primeras derivadas parciales con respecto a cada una de las variables independientes.

$$9. f(x, y) = \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

$$10. F(u, v) = e^{v \cos u} - uv$$

$$11. g(r, s, t) = st^2 \sin(rs - t)$$

$$12. F(u, v, w) = v \arctan(u - w)$$

En los problemas 13 a 16 comprobar que  $z_{xy} = z_{yx}$ .

$$13. z = \cos(x^2 - y^2) \quad 14. z = x^3 y^2 - x^2 y^3$$

$$15. z = e^{xy} \sin xy \quad 16. z = \ln(4x^2 + 4y^2)$$

En los problemas 17 a 20, determinar si las funciones dadas satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (véase problema 31, sección 16.2).

$$17. u(x, y) = -x^3 + 3xy^2, v(x, y) = y^3 - 3x^2 y$$

$$18. u(x, y) = 3x^2 + 2y - 3y^2 - 1, \\ v(x, y) = 6xy + 2y$$

$$19. u(x, y) = \sin(\omega x - y), v(x, y) = x^2 e^{\pi y}$$

$$20. u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy, v(x, y) = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

En los problemas 21 a 24, determinar el conjunto de todas las funciones  $z = f(x, y)$  que tengan la propiedad dada.

$$21. z_x = 2x^3 y - 2 \cos 2y$$

$$22. z_x = \frac{y}{x} + (\sin x)e^{\cos x}$$

$$23. z_y = x/(x^2 + y^2)$$

$$24. z_x = \frac{3y}{\sqrt{1 - (3x - 5y)^2}}$$

En los problemas 25 a 28, expresar  $f(x + h, y + k)$  en la forma de la ecuación 11, sección 16.3. Determinar  $r(x, h, k)$  y mostrar que  $r \rightarrow 0$  cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

$$25. f(x, y) = x^3 - 3y^2 \quad 26. f(x, y) = 2x^2 y + 7y^3$$

$$27. f(x, y) = e^{xy} - x^2 y \quad 28. f(x, y) = y \cos x$$

En los problemas 29 a 32 determinar la diferencial de la función dada.

$$29. z = ye^{\cos x} \quad 30. z = \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

$$31. w = z^2 \arcsin(x - y)$$

$$32. w = e^x \cos(yz) \ln \frac{x^2}{y}$$

En los problemas 33 a 36 emplear la regla de la cadena para determinar  $dz/dt$  o  $dw/dt$ .

$$33. z = \sinh(xy - y^2), \quad x = t, \quad y = t^{1/2}$$

$$34. z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - 1), \quad x = t, \quad y = t^2$$

$$35. w = x^2 yz - xy^2 z + xyz^3, \quad x = t, \\ y = t^2, \quad z = t^3$$

$$36. w = x^2 e^y \ln(\cos z), \quad x = t^2, \quad y = t^{-1}, \\ z = t$$

En los problemas 37 a 40 emplear la regla de la cadena para calcular las primeras derivadas parciales de  $z$  o  $w$  con respecto a  $r$  y a  $s$ .

$$37. z = x^3 y, \quad x = e^r \sin s, \quad y = e^s \cos r$$

$$38. z = \ln(x^2 + y^2), \quad x = r + s, \\ y = r - s$$

$$39. w = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c}, \quad x = rs, \quad y = r^2 + s, \\ z = r - s; \quad a, b, c \text{ son constantes}$$

$$40. w = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad x = r, \quad y = s, \\ z = r + s; \quad a, b, c \text{ son constantes}$$

En los problemas 41 a 44 calcular la derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección dada.

## 962 DERIVACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

41.  $f(x, y) = xy^2$ ,  $(1, 1)$ ,  $\mathbf{u} = (2, -3)$

42.  $f(x, y) = x^3y - 2x^2y^2 + y$ ,  
 $(3, 4)$ , hacia  $(-1, 2)$

43.  $g(x, y, z) = x^2 \arctan(zy)$ ,  
 $(1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{u} = (4, 1, -2)$

44.  $g(x, y, z) = z \sinh xy$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  
hacia  $(1, 3, -2)$

En los problemas 45 a 48 determinar el vector unitario  $\lambda$  en la dirección en la que la función dada crece con mayor rapidez y determinar la razón de cambio de la función en esa dirección en el punto dado.

45.  $f(x, y) = xy^2$ ,  $(3, -2)$

46.  $f(x, y) = x^3y - 2x^2y^2 + y$ ,  $(1, 1)$

47.  $g(x, y, z) = x^2 \arcsen(zy)$ ,  $(1, 0, -4)$

48.  $g(x, y, z) = z \sinh xy$ ,  $(0, 2, 1)$

En los problemas 49 a 52 comprobar que el punto dado queda en la curva de la intersección de las dos superficies dadas y determinar la recta tangente en este punto.

49.  $2x - y = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z = 9$ ,  $(1, 2, 4)$

50.  $x^2 - y^2 + z = 5$ ,  
 $z^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$ ,  $(5, 5, 5)$

51.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ ,  $x + z = 2$ ,  $(1, 3, 1)$

52.  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $z = e^y$ ,  $(\sqrt{8}, 0, 1)$

En los problemas 53 a 56 localizar y clasificar los puntos estacionarios.

53.  $f(x, y) = x^2y - 3xy^2 + 4xy$

54.  $f(x, y) = \sen x - xy$

55.  $f(x, y) = e^{-x^2+4y^2}$

56.  $f(x, y) = \sinh x \cos y$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  
 $0 \leq y \leq \pi$

En los problemas 57 a 60 determinar las derivadas indicadas empleando la derivación implícita.

57.  $x^2 - 3xy^2 + 2y^3 = 6$ ;  $y'$

58.  $xy + \sen xy = 2$ ;  $\frac{dy}{dx}$

59.  $z - e^{z \cosh x} + \ln(x^2 - z^2) = 5$ ;  $z_x$ ,  $z_z$

60.  $u = x \arctan u - y^3$ ;  $u_x$ ,  $u_y$

61. Determinar el plano tangente y la normal en el punto  $(3, 0, 1)$  de la superficie  $(x^2/4) + (y^2/9) - (z^2/4) = 2$ .

62. Determinar el plano tangente y la normal en el punto  $(1, 1, 1)$  de la superficie  $z = 2x^2 - 3xy^2 + 2x$ .

63. Calcular la razón de cambio de  $f(x, y)$  en el punto  $(1, 3)$  en la dirección en la que  $g(x, y) = (x^2/4) + (y^2/9)$  crece más rápidamente.

64. Emplear diferenciales para estimar el error en el volumen de una caja rectangular que tenga 1% de error en la altura, 2% de error en la longitud, y 3% en el ancho.

65. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, que se puede inscribir en la elipse  $(x^2/25) + (y^2/144) = 1$ :

(a) empleando multiplicadores de Lagrange;

(b) sin emplear multiplicadores de Lagrange.

66. Se va a construir un tanque cilíndrico vertical metálico para contener  $512\pi$  litros de agua. Calcular las dimensiones del tanque que requerirá la mínima cantidad de metal (de espesor uniforme) para construirlo:

(a) empleando multiplicadores de Lagrange;

(b) sin emplear multiplicadores de Lagrange.

67. Un automóvil rojo y uno azul arrancan en el punto  $P$ . El rojo se dirige a  $N60^\circ W$  y el azul va hacia  $N45^\circ E$ . En el tiempo  $T$ , el coche rojo está a 100 km de  $P$  y se mueve a una velocidad de 60 km/h; el azul está a 120 km de  $P$  y se mueve con una velocidad de 70 km/h. Calcular a qué velocidad se separan entre sí en el tiempo  $T$ .

# CÁLCULO

## Capítulo 17

### Integrales múltiples

La operación matemática fundamental de integración se presenta en numerosos casos. Hasta ahora, sin embargo, todas nuestras integrales han sido unidimensionales, o sencillas. Esto es, los problemas que hemos visto siempre se pueden formular de tal manera que se necesita la integración sólo con respecto a una variable. A continuación estudiaremos cómo y cuándo el proceso de integración se puede generalizar a más dimensiones. Encontraremos que se puede lograr la generalización de modo natural y directo, y que las integrales multidimensionales comparten las mismas propiedades básicas que las integrales sencillas. Esto nos permitirá tratar muchos problemas que dependen de modo intrínseco de dos o más variables. La mayor parte de este capítulo se ocupa de la evaluación de integrales en dos o tres dimensiones, junto con varios ejemplos de sus aplicaciones.

---

### 17.1 INTEGRALES DOBLES

En el capítulo 6 estudiamos la integral definida de una función de una variable. Las integrales impropias y las aplicaciones de la integración se han tratado en los capítulos siguientes. A continuación veremos cómo definir y usar las integrales de funciones de varias variables. En las primeras cuatro secciones de este capítulo restringiremos nuestra atención a funciones de dos variables, pero en las secciones 17.5 a 17.7 estudiaremos la integración para funciones de tres varia-



bles. La generalización a mayores dimensiones es relativamente directa, pero no se verá en este libro.

Supongamos que se da una función  $f$  acotada en el rectángulo  $R$ :  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ , que se muestra en la figura 17.1.1a. Para definir la integral de  $f$  sobre  $R$ ,

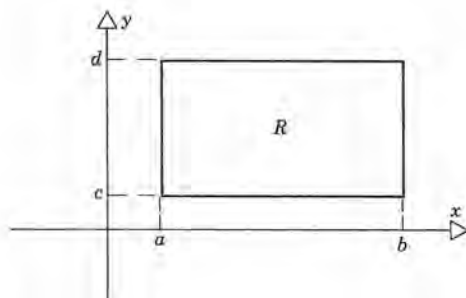


Figura 17.1.1a

seguiremos esencialmente el mismo procedimiento que describimos en el capítulo 6 para la integral de Riemann de una función de una variable. Para desarrollar integrales unidimensionales empleamos con frecuencia la interpretación de tales integrales como áreas. Análogamente, con frecuencia resulta útil considerar a las integrales de las funciones de dos variables, en forma intuitiva, en términos de volúmenes, y mencionaremos esto de vez en cuando. Sin embargo, la definición de  $f$  sobre  $R$  es tan sólo analítica y no depende de ideas geométricas.

Comenzaremos tomando una partición de los intervalos  $[a, b]$  en el eje  $x$  y  $[c, d]$  en el eje  $y$ :

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b; \\ c &= y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d. \end{aligned} \quad (1)$$

La localización de los puntos de subdivisión  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) y  $y_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) es arbitraria; en particular, no necesitan tener igual espaciamiento en los ejes  $x$  y  $y$ . Esto se muestra en la figura 17.1.1b para el caso en el cual  $m = 7$  y  $n = 6$ .

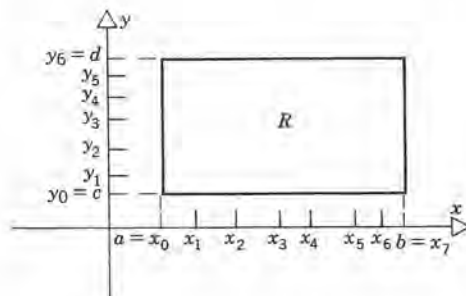


Figura 17.1.1b

A continuación trazamos las rectas  $x = x_i$  y  $y = y_j$  paralelas a los ejes coordenados, y con ello dividimos el rectángulo  $R$  en subrectángulos, como se indica en la figura 17.1.1c.

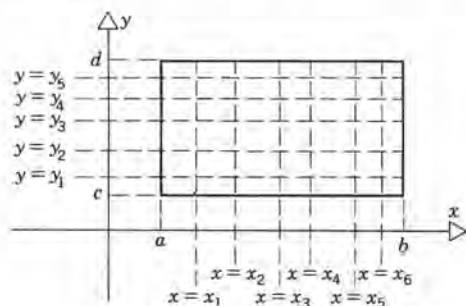


Figura 17.1.1c

Un subrectángulo típico está acotado por las rectas  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$ ,  $y = y_{j-1}$ ,  $y = y_j$ , y se representará mediante  $R_{ij}$  (véase figura 17.1.2).

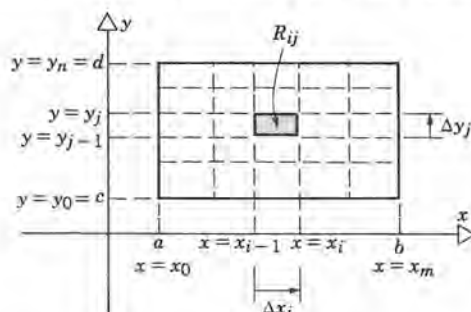


Figura 17.1.2 Un subrectángulo  $R_{ij}$  típico.

El conjunto de subrectángulos

$$\Delta = \{R_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

constituye una **partición** del rectángulo  $R$  original. El área del subrectángulo  $R_{ij}$  es

$$\Delta A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_i \Delta y_j. \quad (3)$$

Para medir la “finura” de la partición  $\Delta$  es conveniente emplear el número  $\|\Delta\|$  definido como

$$\|\Delta\| = \max \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}; \quad (4)$$

$\|\Delta\|$  es la longitud de la diagonal más larga de todos los subrectángulos  $R_{ij}$  y se conoce como la **norma** de  $\Delta$ .

Para una partición dada  $\Delta$  seleccionaremos en forma arbitraria un punto estrella  $P_{ij}^* = (x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  en cada uno de los rectángulos cerrados  $R_{ij}$ , evaluaremos la función  $f$  en  $P_{ij}^*$  y formaremos el producto  $f(P_{ij}^*)\Delta A_{ij}$ . Si  $f(P_{ij}^*) > 0$ , entonces este producto es el volumen de una caja rectangular, paralelepípedo, de altura  $f(P_{ij}^*)$  y con área de sección transversal  $\Delta A_{ij}$ . Podemos ver en forma intuitiva el volumen de esta caja como una aproximación al volumen de la región cilíndrica acotada por el plano  $xy$  por abajo, por la superficie  $z = f(x, y)$  por arriba y por los planos  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$ ,  $y = y_{j-1}$  y  $y = y_j$  a los lados. Esto se muestra en la figura 17.1.3. Procediendo de igual forma para cada

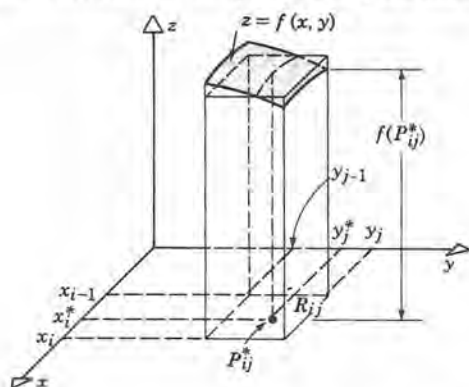


Figura 17.1.3

subrectángulo y sumando a continuación todos estos productos, obtenemos la suma de Riemann

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} f(P_{ij}^*) \Delta A_{ij} = f(P_{11}^*) \Delta A_{11} + \dots + f(P_{mn}^*) \Delta A_{mn}, \quad (5)$$

o en forma breve  $\sum_{i,j} f(P_{ij}^*) \Delta A_{ij}$ , en donde se sobreentiende que la suma se extiende a todos los valores permisibles de  $i$  y de  $j$ . Para una función  $f$  no negativa, esperamos en forma intuitiva que la suma (5) sea una aproximación al volumen de la región tridimensional acotada por abajo por el rectángulo  $R$  en el plano  $xy$ , por arriba por la superficie  $z = f(x, y)$  y a los lados por los planos  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$  y  $y = d$  (véase

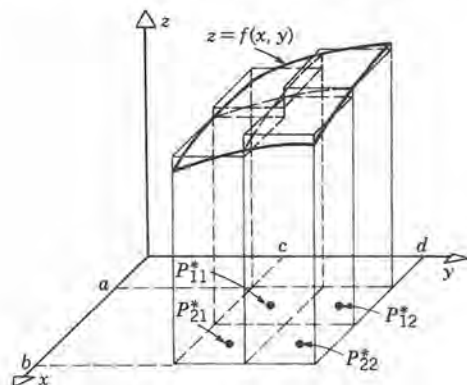


Figura 17.1.4



figura 17.1.4) para el caso en el que  $m = n = 2$ . Si bien con frecuencia es útil pensar en las sumas de Riemann en términos de volúmenes de esta forma, subrayamos que podemos formar la suma (5) independientemente de los signos de los diversos términos y sin referirnos a ideas geométricas. Sin embargo, no la interpretaremos como volumen a menos que  $f(x, y) \geq 0$ .

Como en el caso de las integrales unidimensionales, deseamos examinar el comportamiento de la suma de Riemann (5) a medida que la partición  $\Delta$  se hace más y más fina, esto es, cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . Si existe el límite de la suma (5) cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , independientemente de cómo se forme la partición, e independientemente de cómo se seleccionen los puntos estrella, entonces se dice que  $f$  es **integrable** sobre  $R$ . Al límite se le da el nombre de integral de  $f$  sobre  $R$  y se representa mediante

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} f(P_{ij}^*) \Delta A_{ij}. \quad (6)$$

Se usan dos signos de integración para indicar que es una integral bidimensional o **integral doble**. Esto también se indica designando al elemento de integración mediante  $dA$ , (por el área). Por otro lado, si no existe el límite de la suma de Riemann que aparece en la ecuación 6, entonces se dice que  $f$  no es integrable en  $R$ .

### EJEMPLO 1

Sea  $f(x, y) = k$  para todos los puntos  $(x, h)$  de  $R$ . Demostrar que  $f$  es integrable sobre  $R$ .

Para toda partición de  $R$  y toda selección de puntos estrella tenemos que  $f(P_{ij}^*) = k$ . Así,

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} f(P_{ij}^*) \Delta A_{ij} = k \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \Delta A_{ij} = k(b-a)(d-c).$$

Como en este caso todas las sumas de Riemann tienen el mismo valor, en consecuencia

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} f(P_{ij}^*) \Delta A_{ij} = k(b-a)(d-c),$$

de modo que  $f$  es integrable sobre  $R$ , y

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R k dA = k(b-a)(d-c).$$

Nótese que si  $k > 0$  entonces  $k(b-a)(d-c)$  es el volumen de un paralelepípedo rectangular de altura  $k$  y base  $(b-a)$  por  $(d-c)$ . ■

### EJEMPLO 2

Sea  $f$  definida en  $R$  de tal modo que

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ y } y \text{ son racionales;} \\ -1 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (7)$$

Demostrar que  $f$  no es integrable sobre  $R$ .

Para toda partición de  $R$  siempre es posible seleccionar un punto estrella en cada subrectángulo tal que  $f(P_{ij}^*) = 1$ . En este caso la suma de Riemann correspondiente es  $\sum_{ij} 1 \Delta A_{ij} = (b-a)(d-c)$ . Por otro lado, para toda partición también siempre es posible seleccionar otro punto estrella en cada subrectángulo tal que  $f(P_{ij}^*) = -1$ , en cuyo caso la suma de Riemann correspondiente tiene el valor  $-(b-a)(d-c)$ . Así, sin importar lo pequeña que sea  $\|\Delta\|$ , las sumas de Riemann no tienden a un sólo número como límite. En consecuencia,  $f$  no es integrable sobre  $R$ . ■

Los ejemplos 1 y 2 muestran que algunas funciones son integrables sobre un rectángulo  $R$  mientras que otras no. El teorema siguiente es algo análogo al teorema 6.2.1 y sirve para identificar una extensa clase de funciones integrables.

### Teorema 17.1.1

Supongamos que  $r$  está acotada en el rectángulo  $R$  y que es continua allí, excepto, a lo más, en los puntos que queden en un número finito de arcos suaves rectificables. Entonces  $f$  es integrable sobre  $R$ .

Recuérdese que los arcos suaves rectificables son aquellos que tienen una tangente que los puede recorrer en forma continua y que son de longitud finita. Véanse en las secciones 15.6 y 15.7, para discusiones más completas sobre estos términos. Las gráficas de

$$y = \phi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (8)$$

y de

$$x = \psi(y), \quad c \leq y \leq d, \quad (9)$$

o del sistema paramétrico

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (10)$$

son suaves y rectificables si  $\phi'$  y  $\psi'$  son continuas en los intervalos dados, y en el caso de las ecuaciones 10,  $\phi'^2(t) + \psi'^2(t)$  nunca es cero en  $[\alpha, \beta]$ .

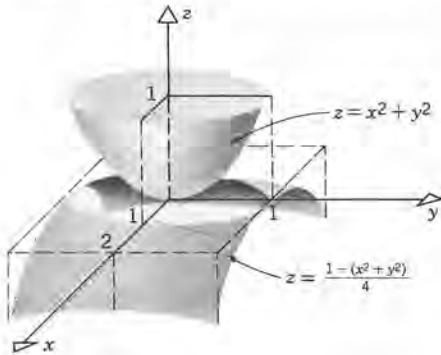
El teorema 17.1.1 es suficientemente general como para garantizar la integrabilidad sobre rectángulos de casi cualquier función acotada que aparezca en un curso elemental en la mayor parte de las aplicaciones. La demostración es semejante a la del resultado correspondiente que aparece en el capítulo 6 y se omite aquí.

**EJEMPLO 3**

Supongamos que  $f$  está definida en el rectángulo  $R: |x| \leq 2, |y| \leq 1$  del siguiente modo:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 \leq 1; \\ \frac{1 - (x^2 + y^2)}{4}, & (x, y) \in R \text{ y } x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \quad (11)$$

(véase figura 17.1.5). Determinar si  $f$  es integrable sobre  $R$ .



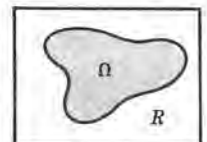
**Figura 17.1.5**

Como  $f$  está definida por dos expresiones polinomiales, está acotada en el rectángulo  $R$  y es continua, excepto quizá en el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . De acuerdo con la figura 17.1.5 es claro que en realidad  $f$  es discontinua en todos los puntos del círculo. Sin embargo, el círculo es un arco suave rectificable de longitud  $2\pi$  y, por tanto, la función  $f$  satisface las condiciones del teorema 17.1.1. Por lo que  $f$  es integrable sobre  $R$ . ■

La integración en una dimensión se lleva a cabo en intervalos, y en dos dimensiones el análogo natural del intervalo es el rectángulo. Sin embargo, es importante poder integrar en otras regiones bidimensionales como triángulos, círculos, etc., y es por eso que volvemos a la cuestión de definir una integral doble sobre una región más o menos arbitraria del plano. Representaremos con  $\Omega$  la región de interés y supondremos que está cerrada y acotada. Esto significa que la frontera de  $\Omega$  está en  $\Omega$ , y que se puede encontrar un rectángulo  $R$  que contenga por completo a  $\Omega$  (véase figura 17.1.6). Además, supondremos que la frontera de  $\Omega$  consta de un número finito de arcos suaves rectificables, descrito cada uno por ecuaciones de la forma (8), (9) ó (10).

Supongamos ahora que se da una función  $f$  que satisface las hipótesis del teorema 17.1.1 acerca de  $\Omega$ . Definimos entonces una nueva función  $g$  del siguiente modo:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \text{ en } \Omega; \\ 0, & (x, y) \text{ en } R \text{ pero no en } \Omega \end{cases} \quad (12)$$



**Figura 17.1.6**  
La región acotada  $\Omega$  está contenida en el rectángulo  $R$ .



Como  $g$  es igual a  $f$  siempre que  $f$  esté definida (esto es, en  $\Omega$ ), y como  $g$  está definida en una región más grande, llamaremos a  $g$  una **extensión** de  $f$  de  $\Omega$  a  $R$ . Además,  $g$  es continua en  $R$  excepto, a lo más, en dos conjuntos de puntos, que son

1. los puntos de  $\Omega$  en los que  $f$  es discontinua;
2. la frontera de  $\Omega$ .

Ambos conjuntos de puntos satisfacen las condiciones del teorema 17.1.1 y, por tanto, existe la integral de  $g$  sobre  $R$ . Por último, *definimos* que la integral de  $f$  sobre  $\Omega$  tiene el mismo valor que la integral de  $g$  sobre  $R$ , esto es

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dA = \iint_R g(x, y) dA, \quad (13)$$

en la que  $g$  está dada por la ecuación 12. Además, como la extensión de  $f$  es cero fuera de  $\Omega$ , no hay diferencia si seleccionamos cualquier rectángulo  $R$ , siempre que contenga a  $\Omega$ . La ecuación 13 es válida para cualquiera de esas  $R$ . Con ello, hemos obtenido el siguiente resultado.

### Teorema 17.1.2

Sea  $\Omega$  una región acotada en el plano  $xy$  cuya frontera consta de un número finito de arcos suaves rectificables. Si  $f$  es continua en  $\Omega$  excepto (a lo más) en un conjunto de puntos que estén en un número finito de arcos suaves rectificables, entonces  $f$  es integrable sobre  $\Omega$ , y el valor de la integral está dado por la ecuación 13.

En la discusión anterior de las integrales dobles, hemos indicado la posible interpretación de algunas integrales como volúmenes. En realidad, los volúmenes se definen en términos de integrales. Considere el cilindro cuya sección transversal en el plano  $xy$  es la región  $\Omega$  y cuyo eje es paralelo al eje  $z$ . El volumen  $V$  de la parte de este cilindro que queda arriba del plano  $xy$  y abajo de la superficie  $z = f(x, y)$  se define como

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dA, \quad (14)$$

siempre y cuando  $f$  sea integrable sobre  $\Omega$  (véase figura 17.1.7).

Si  $f(x, y) = 1$  para todo punto de  $\Omega$ , entonces la ecuación 14 da el volumen de una región cilíndrica de espesor unitario y de sección transversal  $\Omega$ . Así,  $V = A \cdot 1$ , donde  $A$  es el área de  $\Omega$ . De acuerdo con la ecuación 14, entonces

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dA. \quad (15)$$

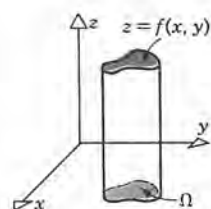


Figura 17.1.7

Otra interpretación importante de una integral doble de una función no negativa  $\rho$  es cuando se considera a  $\rho(x, y)$  como la densidad\* (masa por unidad de área) de una película continua de algún material que ocupa la región  $\Omega$ . Entonces  $\rho(x_i^*, y_i^*)\Delta A_{ij}$  es aproximadamente igual a la masa del elemento  $\Delta A_{ij}$ , y la suma de Riemann

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} \quad (16)$$

es aproximadamente igual a la masa total  $M$  de la región  $\Omega$ . Si  $\rho(x, y)$  y  $\Omega$  satisfacen las condiciones del teorema 17.1.2, entonces la suma (16) tiene un límite cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , y la masa total de la hoja delgada está dada por

$$M = \iint_{\Omega} \rho(x, y) \, dA. \quad (17)$$

A veces es posible evaluar integrales dobles mediante el empleo directo de la definición. Como este método es tedioso en una dimensión, y lo es más todavía en el caso de integrales dobles, casi nunca es satisfactorio este modo de determinar el valor de la integral doble. En la sección siguiente desarrollaremos un método que es mucho más conveniente. También hay métodos numéricos, semejantes a los que se estudiaron en la sección 6.6 para el caso de integrales simples, pero no los trataremos aquí.

Para terminar esta sección enunciaremos algunas propiedades de las integrales dobles, que con frecuencia son útiles. Cada propiedad es directamente análoga a una propiedad de las integrales simples, que se estudiaron en la sección 6.3.

### Teorema 17.1.3

Supongamos que  $f$  y  $g$  son integrables sobre  $\Omega$ .

(a) *Linealidad.* Si  $c_1$  y  $c_2$  son cualesquiera constantes, entonces  $c_1f + c_2g$  también es integrable sobre  $\Omega$  y

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [c_1f(x, y) + c_2g(x, y)] \, dA \\ = c_1 \iint_{\Omega} f(x, y) \, dA + c_2 \iint_{\Omega} g(x, y) \, dA. \end{aligned} \quad (18)$$

Este resultado se generaliza a la suma de cualquier número finito de términos.

(b) Si  $f(x, y) \geq 0$  en  $\Omega$ , entonces

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dA \geq 0. \quad (19)$$

\* En mecánica del medio continuo la existencia y la definición de una función densidad son cuestiones muy delicadas, y exigen una discusión cuidadosa. Este tratamiento queda fuera del alcance de este libro y, por tanto, supondremos simplemente que se da esta función densidad.

(c) *Comparación.* Si  $f(x, y) \geq g(x, y)$  sobre  $\Omega$ , entonces

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dA \geq \iint_{\Omega} g(x, y) dA. \quad (20)$$

(d) La función  $|f|$  también es integrable sobre  $\Omega$ , y

$$\left| \iint_{\Omega} f(x, y) dA \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x, y)| dA. \quad (21)$$

(e) Si  $|f(x, y)| \leq M$  en  $\Omega$  para una constante  $M$ , entonces

$$\left| \iint_{\Omega} f(x, y) dA \right| \leq MA, \quad (22)$$

donde  $A$  es el área de  $\Omega$ .

#### Teorema 17.1.4

##### (Aditividad)

Supongamos que  $\Omega$  se compone de dos partes  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  que no se traslapan; supongamos además que  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y también  $\Omega$  están acotadas por un número finito de arcos suaves rectificables. Si existen cualesquiera dos integrales de las siguientes tres, entonces también existe la tercera, y

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dA = \iint_{\Omega_1} f(x, y) dA + \iint_{\Omega_2} f(x, y) dA. \quad (23)$$

Este resultado se generaliza a la descomposición de  $\Omega$  en cualquier número finito de partes  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  que no se traslapan.

Las figuras 17.1.8, 17.1.9 y 17.1.10 muestran el contenido del teorema 17.1.4. Si desea uno integrar sobre la región  $\Omega$  que aparece en la figura 17.1.8, casi con seguridad será útil separar a  $\Omega$  en partes que no se traslapan y a continuación integrar en cada una de las partes por separado. Las figuras 17.1.9 y 17.1.10 muestran dos maneras fáciles de descomponer a  $\Omega$  en cuatro partes que no se traslapan, y que son más convenientes para la integración.



Figura 17.1.8

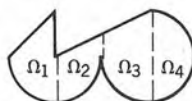


Figura 17.1.9

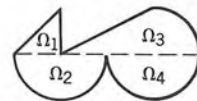


Figura 17.1.10



## PROBLEMAS

1. Sea  $f(x, y) = 2xy$  y sea  $R$  el cuadrado  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Subdividir a  $R$  en cuatro subrectángulos mediante los puntos de partición  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  y  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$  y  $y_2 = 2$ . Formar la suma de Riemann correspondiente si

- (a)  $P_{ij}^*$  es el centro de cada subrectángulo,  
 (b)  $P_{ij}^*$  es la esquina inferior derecha de cada subrectángulo,  
 (c)  $P_{ij}^*$  es la esquina superior derecha de cada subrectángulo.

2. Sea  $f(x, y) = 2x^2 - y^2$  y sea  $R$  el rectángulo  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Subdividir a  $R$  en seis subrectángulos mediante los puntos de partición  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ , y  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = 1$  y  $y_2 = 2$ . Formar la suma correspondiente de Riemann si

- (a)  $P_{ij}^*$  está en el centro de cada subrectángulo,  
 (b)  $P_{ij}^*$  se selecciona en cada subrectángulo de modo que  $f(P_{ij}^*)$  sea tan grande como sea posible,  
 (c)  $P_{ij}^*$  se selecciona en cada subrectángulo de modo que  $f(P_{ij}^*)$  sea tan pequeña como sea posible.

3. Sea  $f(x, y) = x^2y$  y sea  $R$  el rectángulo  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Determinar la suma correspondiente de Riemann si  $P_{ij}^*$  es el centro de cada subrectángulo, y  $R$  se divide en

- (a) dos cuadrados idénticos, cada uno de área 1,  
 (b) ocho cuadrados idénticos, cada uno de área  $\frac{1}{4}$ ,  
 (c) treinta y dos cuadrados idénticos, cada uno de área  $\frac{1}{16}$ .

4. Sea  $f(x, y) = \sin x \cos y$  y sea  $R$  el rectángulo  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \pi/2$ . Determinar la suma de Riemann correspondiente si  $P_{ij}^*$  es el centro de cada subrectángulo, y  $R$  se divide en

- (a) dos cuadrados idénticos, cada uno con un área de  $(\pi/2)^2$ ,  
 (b) ocho cuadrados idénticos, cada uno con un área de  $(\pi/4)^2$ ,  
 (c) treinta y dos cuadrados idénticos, cada uno con un área de  $(\pi/8)^2$ .

En los problemas 5 a 8 emplear la parte (c), (d) o (e) del teorema 17.1.3 para determinar una cota superior de la cantidad indicada.

$$5. \iint_{\Omega} \frac{1}{2x^2 + y^2 + 4} dA, \quad \text{donde } \Omega : x^2 + y^2 \leq 1$$

$$6. \left| \iint_{\Omega} \sin(2x - 3y) dA \right|, \quad \text{donde } \Omega : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5$$

$$7. \iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} dA, \quad \text{donde } \Omega : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$8. \iint_{\Omega} xy dA, \quad \text{donde } \Omega : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$$

A veces es posible calcular el valor de una integral identificándola como el volumen de una figura sólida elemental que se conoce de la geometría. Usar este método para evaluar las integrales de los problemas 9 a 12.

$$9. \iint_{\Omega} \sqrt{9 - x^2 - y^2} dA, \quad \text{donde } \Omega \text{ es el cuarto de círculo } x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0, y \geq 0.$$

$$10. \iint_{\Omega} (6 - 3x - 2y) dA, \quad \text{donde } \Omega \text{ es el triángulo acotado por los ejes coordenados y la recta } 3x + 2y = 6.$$

$$11. \iint_{\Omega} (6 - 3\sqrt{x^2 + y^2}) dA, \quad \text{donde } \Omega \text{ es el círculo } x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$12. \iint_{\Omega} (3 - \frac{3}{4}y) dA, \quad \text{donde } \Omega \text{ es el rectángulo } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4.$$

$$13. \text{ Demostrar la parte (b) del teorema 17.1.3: si } f \text{ es integrable sobre } \Omega, \text{ y si } f(x, y) \geq 0 \text{ sobre } \Omega, \text{ entonces } \iint_{\Omega} f(x, y) dA \geq 0.$$

*Sugerencia:* ¿Qué puede decir el lector acerca del signo de cada una de las sumas de Riemann asociadas?

$$14. \text{ Suponiendo que se haya demostrado la parte (b) del teorema 17.1.3, demostrar la parte (c) de ese teorema.}$$

*Sugerencia:* considerar  $\iint_{\Omega} [f(x, y) - g(x, y)] dA$ .

$$15. \text{ Si } f \text{ es integrable sobre } \Omega, \text{ es posible demostrar que } |f| \text{ también es integrable. Suponiendo que lo anterior sea cierto, y suponiendo la parte (c) del teorema 17.1.3, demostrar la parte (d) de ese teorema.}$$

$$16. \text{ Suponiendo que se han demostrado las partes (c) y (d) del teorema 17.1.3, demostrar la parte (e) del mismo.}$$

## 17.2 INTEGRALES ITERADAS

En la sección anterior definimos a la integral doble  $\iint_{\Omega} f(x, y) dA$  para una amplia clase de funciones  $f$  y regiones  $\Omega$ . La discusión siguió un desarrollo muy semejante al del capítulo 6, en el que se trató la integral definida  $\int_a^b f(x) dx$  de una función de una variable. En el capítulo 6 el siguiente paso fue desarrollar un método para evaluar integrales empleando una antiderivada  $F(x)$  del integrando  $f(x)$ , y recurriendo al teorema fundamental del cálculo, el teorema 6.4.3. Es natural que busquemos extender este procedimiento a las integrales dobles y con ello obtener un método para evaluarlas.

Al calcular las derivadas parciales de una función  $f$  de dos variables mantenemos constante a una de las variables mientras derivamos con respecto a la otra. La operación inversa a la derivación parcial implica integrar con respecto a una variable manteniendo constante a la otra. Por ejemplo, supongamos que  $f(x, y)$  se define en el rectángulo  $R$ :  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ . Entonces

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (1)$$

es el resultado de fijar a  $x$  para integrar a  $f(x, y)$  con respecto a  $y$  en el intervalo  $c \leq y \leq d$ , como se ve en la figura 17.2.1a. La notación  $g(x)$  indica que el valor de la integral en general depende de  $x$ , pero no depende de  $y$ . Análogamente,

$$h(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (2)$$

se obtiene manteniendo constante a  $y$  e integrando con respecto a  $x$  desde  $a$  hasta  $b$  (véase figura 17.2.1b). Se puede emplear el teorema fundamental del cálculo para evaluar a  $g(x)$  y  $h(x)$ , puesto que implican integrar sólo con respecto a una variable.

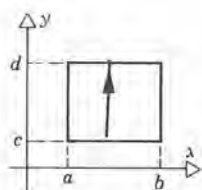
### EJEMPLO 1

Sea  $f(x, y) = 1 + 2xy + 3x^2y^3$  para  $0 \leq x \leq 4$  y  $1 \leq y \leq 3$ . Determinar

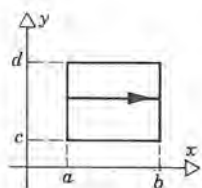
$$g(x) = \int_1^3 f(x, y) dy \quad y \quad h(y) = \int_0^4 f(x, y) dx.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_1^3 (1 + 2xy + 3x^2y^3) dy \\ &= \left( y + xy^2 + \frac{3}{4}x^2y^4 \right) \Big|_{y=1}^{y=3} \\ &= \left( 3 + 9x + \frac{243}{4}x^2 \right) - \left( 1 + x + \frac{3}{4}x^2 \right) \\ &= 2 + 8x + 60x^2, \quad 0 \leq x \leq 4. \end{aligned} \quad (3)$$



(a)



(b)

**Figura 17.2.1**

(a) Integración con respecto a  $y$  manteniendo fija a  $x$ . (b) Integración con respecto a  $x$ , manteniendo fija a  $y$ .

Análogamente

$$\begin{aligned}
 h(y) &= \int_0^4 (1 + 2xy + 3x^2y^3) dx \\
 &= (x + x^2y + x^3y^3) \Big|_{x=0}^{x=4} \\
 &= 4 + 16y + 64y^3, \quad 1 \leq y \leq 3. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{4}$$

Ahora se pueden integrar las funciones  $g$  y  $h$  en los intervalos  $a \leq x \leq b$  y  $c \leq y \leq d$ , respectivamente. Esto da

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \tag{5}$$

y

$$\int_c^d h(y) dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \tag{6}$$

A las integrales de las ecuaciones 5 y 6 se les llama **integrales iteradas**. Hemos introducido paréntesis rectangulares en esas ecuaciones para subrayar el orden de las operaciones; en la ecuación 5 se integra primero con respecto a  $y$  y después con respecto a  $x$ , mientras que en la ecuación 6 se invierte ese orden. Es importante comprender que cada una de las integraciones del lado derecho de las ecuaciones 5 y 6 es con respecto a una variable única. Así, todos los métodos que se han presentado hasta ahora para la evaluación de las integrales de funciones de una variable son aplicables para la evaluación de estas integrales iteradas. Obsérvese que la integración se lleva a cabo desde adentro hacia afuera, como lo indican los paréntesis rectangulares de las ecuaciones 5 y 6. En general omitiremos esos paréntesis y representaremos las integrales iteradas (5) y (6) mediante

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy, \tag{7}$$

respectivamente.

## EJEMPLO 2

Sea  $f(x, y)$  como la del ejemplo 1. Calcular

$$\int_0^4 \int_1^3 f(x, y) dy dx \quad \text{y} \quad \int_1^3 \int_0^4 f(x, y) dx dy.$$



En el ejemplo 1 determinamos que

$$g(x) = \int_1^3 f(x, y) dy = 2 + 8x + 60x^2, \quad 0 \leq x \leq 4$$

y que

$$h(y) = \int_0^4 f(x, y) dx = 4 + 16y + 64y^3, \quad 1 \leq y \leq 3.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_1^3 f(x, y) dy dx &= \int_0^4 g(x) dx \\ &= (2x + 4x^2 + 20x^3) \Big|_0^4 \\ &= 8 + 64 + 1280 = 1352. \end{aligned}$$

De manera semejante,

$$\begin{aligned} \int_1^3 \int_0^4 f(x, y) dx dy &= \int_1^3 h(y) dy \\ &= (4y + 8y^2 + 16y^4) \Big|_1^3 \\ &= (12 + 72 + 1296) - (4 + 8 + 16) = 1352. \blacksquare \end{aligned}$$

Para el caso que se vio en el ejemplo 2, el cálculo directo muestra que los dos conjuntos de integrales iteradas dan el mismo resultado. En otras palabras, el orden en el que se llevan a cabo las dos integraciones no importa. Esto hace que surja la pregunta de si siempre son iguales los dos conjuntos de integrales iteradas en la ecuación 7, y si es así, si también tienen el mismo valor que la integral doble  $\iint_R f(x, y) dA$  que se estudió en la sección 17.1. Si la respuesta a esta pregunta es “sí,” entonces las integrales iteradas son un medio de evaluar las integrales dobles.

Podemos dar una discusión geométrica de la relación que existe entre las integrales iteradas y las dobles cuando  $f(x, y) \geq 0$  en  $R$ . Considere la región  $U$ , que se muestra en la figura 17.2.2, acotada por el plano  $xy$ , la superficie  $z = f(x, y)$ , y los cuatro planos  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = c$ , y  $y = d$ . En la sección 17.1, el volumen  $V$  de esa región se definió como la integral doble de  $f$  sobre  $R$ :

$$V = \iint_R f(x, y) dA. \quad (8)$$

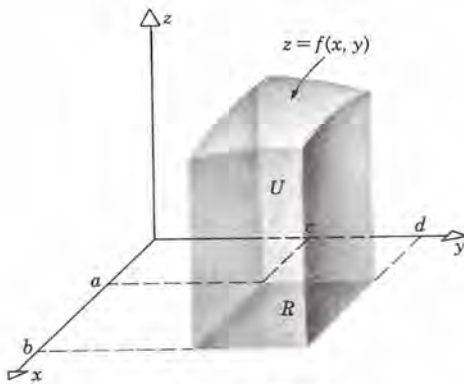


Figura 17.2.2

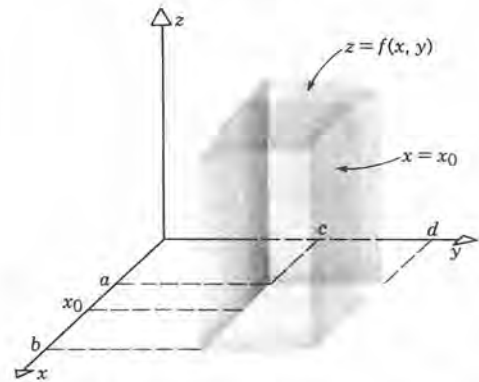


Figura 17.2.3 El área de la sección transversal sombreada es  $g(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy$ .

A continuación veremos la interpretación geométrica de las integrales iteradas (7). Primero, de acuerdo con la figura 17.2.3,

$$g(x_0) = \int_c^d f(x_0, y) dy$$

es el área de la sección transversal de  $U$  que corresponde a  $x = x_0$ . Así, expresando a la integral de  $g(x)$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$  en términos de una suma de Riemann, tenemos que

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \|\Delta\| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m g(x_i^*) \Delta x_i. \quad (9)$$

Se puede considerar que cada término de la suma es el volumen de una hoja delgada cuyas caras tienen un área  $g(x_i^*)$ , y cuyo espesor es  $\Delta x_i$  (véase figura 17.2.4). La suma de Riemann en la ecuación 9 da por lo tanto una aproximación al volumen  $V$  de la región  $U$ . En el límite la aproximación se hace exacta y tenemos por consiguiente,

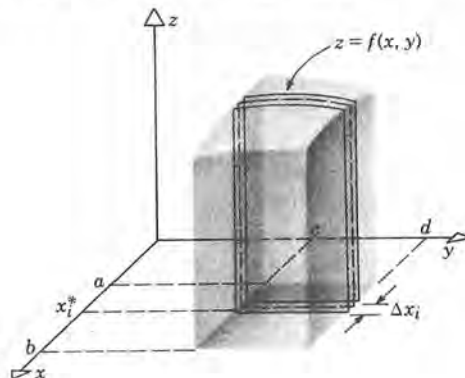


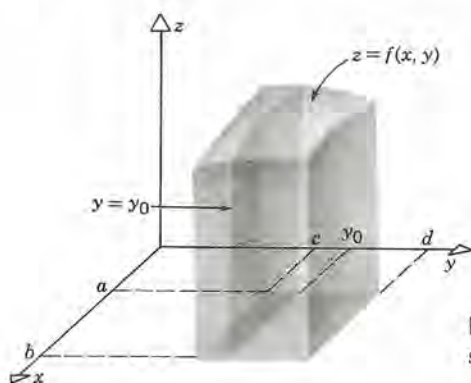
Figura 17.2.4 El volumen de la placa delgada es  $g(x_i^*) \Delta x_i$ .

$$V = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (10)$$

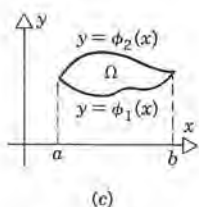
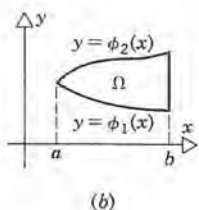
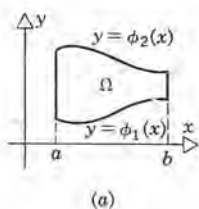
Del mismo modo,

$$h(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

es el área de la sección transversal de  $U$  para  $y = y_0$  (véase figura 17.2.5). Entonces se puede obtener también  $V$  integrando  $h(y)$  desde  $y = c$  hasta  $y = d$ . Esto corresponde a



**Figura 17.2.5** El área de la sección transversal sombreada es  $h(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$ .



aproximar el valor de  $V$  por medio de hojas delgadas de espesor  $\Delta y_j$  y área  $h(y_j^*)$ . Con ello obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|\Delta\| \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n h(y_j^*) \Delta y_j = \int_c^d h(y) dy \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Las ecuaciones 8, 10 y 11 establecen que el mismo volumen  $V$  se obtiene mediante cada conjunto de integrales iteradas, así como mediante la integral doble. Con ello debemos esperar que sea válida la igualdad entre esas tres integrales, al menos cuando  $f$  sea no negativa y satisfaga las condiciones de continuidad del teorema 17.1.1. En realidad todo esto es cierto; además, esta relación es válida para una clase de integrales mucho más amplia en la que la región puede no ser rectangular y el integrando puede ser no negativo. Para discutir este resultado, más general y útil, debemos, sin embargo, extender el empleo de las integrales iteradas a regiones no rectangulares.

Primero consideremos una región  $\Omega$  que consta de los puntos  $(x, y)$  tales que

$$a \leq x \leq b \quad \text{y} \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad (12)$$

en la cual  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son funciones dadas. La figura 17.2.6 muestra algunas regiones típicas

**Figura 17.2.6**



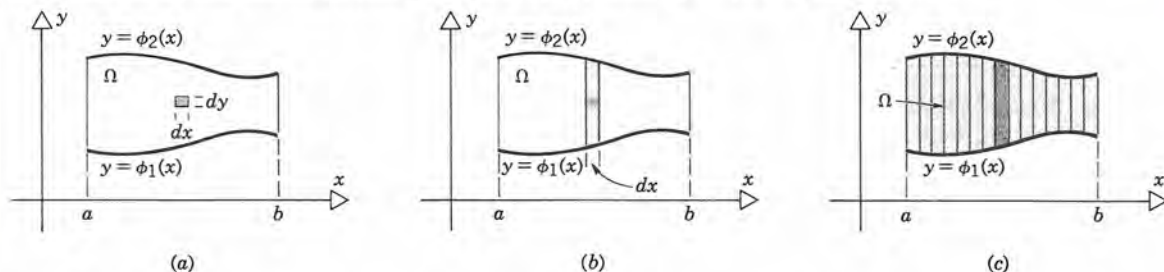
de esta clase. Supongamos que  $f(x, y)$  es continua para cada punto de  $\Omega$ . Entonces, para cada  $x$  fija en  $a \leq x \leq b$ , podemos integrar  $f(x, y)$  con respecto a  $y$  desde la frontera inferior de  $\Omega$  hasta la superior, esto es, desde  $y = \phi_1(x)$  hasta  $y = \phi_2(x)$ . El resultado es

$$g(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (13)$$

Obsérvese que los límites de integración varían con la posición de  $x$  en el intervalo  $a \leq x \leq b$ , pero siempre están dados por  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$ , respectivamente. Para completar la integración sobre la región  $\Omega$ , integraremos a  $g(x)$  desde  $a$  hasta  $b$ ; con ello obtenemos

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (14)$$

Representar el proceso de integración del siguiente modo puede resultar de ayuda: Supongamos que la región  $\Omega$  se debe cubrir con losetas delgadas rectangulares de dimensiones  $dx$  y  $dy$  (véase figura 17.2.7a). La integración con respecto a  $y$  corresponde a la formación de una fila de losetas paralela al eje  $y$ , como se ve en la figura 17.2.7b.



**Figura 17.2.7** (a) Un elemento de área  $dx dy$ . (b) Banda de elementos paralela al eje  $y$ . (c) La región  $\Omega$  cubierta por bandas paralelas al eje  $y$ .

Entonces la integración con respecto a  $x$  corresponde a poner muchas filas de esas, lado a lado, hasta cubrir por completo a la región  $\Omega$ .

A continuación consideraremos una región  $\Omega$  que se describe mediante las desigualdades

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), \quad c \leq y \leq d, \quad (15)$$

donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son funciones dadas. La figura 17.2.8 muestra algunas regiones típicas de este tipo. Entonces se puede repetir la deducción que conduce a la ecuación 14, intercambiando los papeles de  $x$  y  $y$ . Tenemos que

$$h(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \quad (16)$$

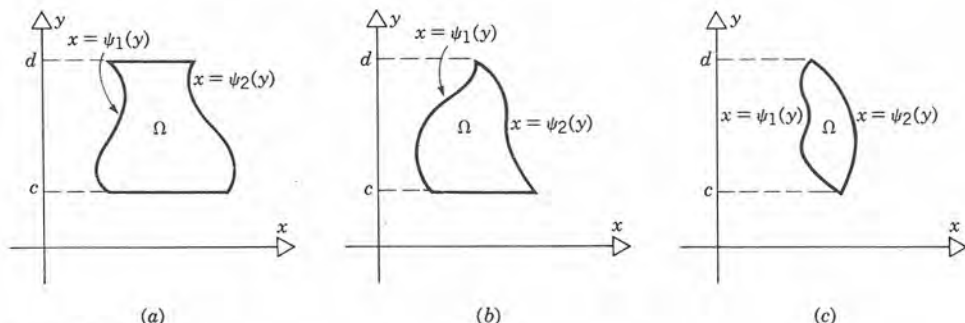


Figura 17.2.8

y

$$\int_c^d h(y) dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy, \quad (17)$$

que corresponde a las ecuaciones 13 y 14, respectivamente. En términos de la cubierta de la región  $\Omega$  compuesta por las losetas, esto corresponde a formar primero una sola hilera de losetas paralelas al eje  $x$ , y a continuación cubrir a  $\Omega$  con muchas filas de éstas colocadas lado a lado (véase figura 17.2.9).

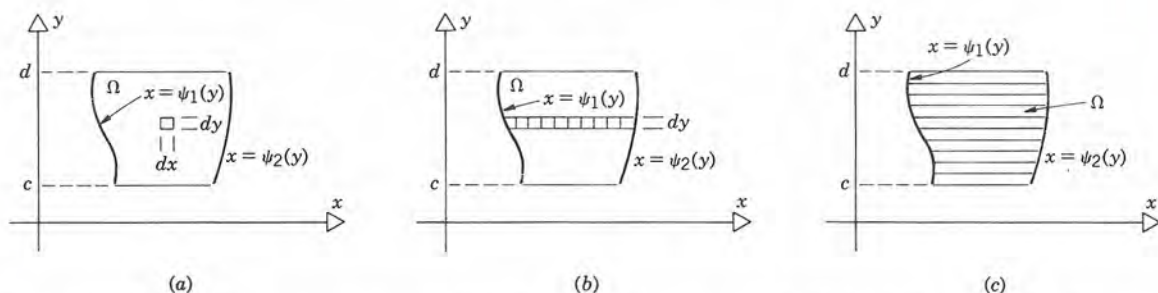


Figura 17.2.9 (a) Un elemento de área  $dx dy$ . (b) Banda de elementos paralela al eje  $x$ . (c) La región  $\Omega$  cubierta por bandas paralelas al eje  $x$ .

No hay un término con aceptación universal para representar a una región  $\Omega$  que se describa mediante al menos uno de los conjuntos de desigualdades (12) ó (15). Como es conveniente poder llamar a esas regiones con un nombre, a cada una la llamaremos **región estándar**.

Pasaremos ahora a la cuestión de si las integrales iteradas del lado derecho de las ecuaciones 14 y 17 son iguales a la integral doble  $\iint_{\Omega} f(x, y) dA$  que se definió en la sección 17.1. Basándonos en nuestro estudio anterior acerca de este problema cuando la región  $\Omega$  es un rectángulo y  $f(x, y) \geq 0$ , parece razonable esperar que las integrales iteradas sean verdaderamente iguales a la integral doble. El teorema que sigue da un conjunto simple de condiciones, adecuadas en la mayor parte de los casos, que asegura la igualdad de las integrales iteradas y las dobles.

**Teorema 17.2.1**

Si  $f$  es continua en una región  $\Omega$  definida por  $a \leq x \leq b$ ,  $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ , donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  tienen derivadas continuas en  $a \leq x \leq b$ , entonces

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx. \quad (18)$$

Si  $f$  es continua en una región  $\Omega$  definida por  $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , donde  $\psi_1$  y  $\psi_2$  tienen derivadas continuas en  $c \leq y \leq d$ , entonces

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy. \quad (19)$$

El significado del teorema 17.2.1 es que da un medio para evaluar integrales dobles; se evalúan las integrales iteradas correspondientes *en forma sucesiva* integrando con respecto a una variable a la vez. Se escogen las hipótesis del teorema 17.2.1 de tal modo que se facilite llegar a la conclusión, partiendo del teorema 17.1.2, de que existe la integral doble  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dA$ . Es posible deducir versiones más generales del teorema 17.2.1; sin embargo, aun la demostración del teorema 17.2.1 es bastante complicada y no la estudiaremos aquí.

**EJEMPLO 3**

Calcular el valor de

$$\iint_{\Omega} (2y - x^2) \, dA, \quad (20)$$

en la que  $\Omega$  es la región  $0 \leq x \leq 2$ ,  $x^2 \leq y \leq 9 - x$ .

En la figura 17.2.10 se muestra la región de integración, y es una región estándar de la forma (12). Así, remplazaremos a la integral doble (20) por un conjunto de integrales iteradas en las que se lleva a cabo la integración con respecto a  $y$ :

$$\iint_{\Omega} (2y - x^2) \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{9-x} (2y - x^2) \, dy \, dx. \quad (21)$$

Evaluando la integral interior en la ecuación 21 obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{x^2}^{9-x} (2y - x^2) \, dy &= (y^2 - x^2y) \Big|_{x^2}^{9-x} \\ &= [(9-x)^2 - x^2(9-x)] - [(x^2)^2 - x^2x^2] \\ &= 81 - 18x - 8x^2 + x^3. \end{aligned}$$



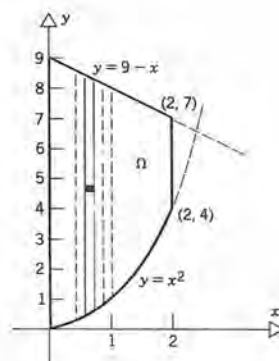


Figura 17.2.10

Y entonces la segunda integración de la ecuación 21 produce el resultado

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} (2y - x^2) dA &= \int_0^2 (81 - 18x - 8x^2 + x^3) dx \\
 &= \left( 81x - 9x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 \\
 &= 162 - 36 - \frac{64}{3} + 4 \\
 &= \frac{326}{3}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 4

Una hoja delgada de material cuya densidad (masa por unidad de área) es proporcional al cuadrado de la distancia al origen, ocupa la región triangular  $\Omega$  acotada por el eje  $x$ , la recta  $y = x$  y la recta  $y = 2 - x$ . Calcular la masa total  $M$  de la hoja.

En la figura 17.2.11 se muestra la región  $\Omega$  y se puede describir mediante las desigualdades

$$y \leq x \leq 2 - y, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (22)$$

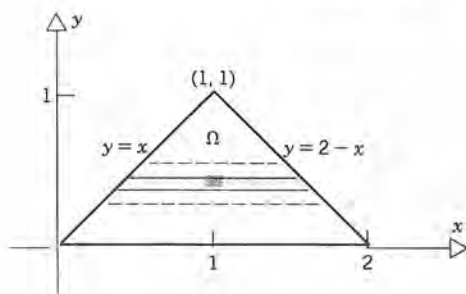


Figura 17.2.11

La densidad es  $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$ , donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. De acuerdo con la ecuación 17 de la sección 17.1, la masa total  $M$  se calcula integrando a  $\rho(x, y)$  sobre  $\Omega$ . Podemos evaluar esta integral doble mediante un conjunto de integrales iteradas, llevando a cabo la integración con respecto a  $x$  debido a que las desigualdades (22) son de la forma (15). Con ello obtenemos

$$M = \int \int_{\Omega} \rho(x, y) \, dA = k \int_0^1 \int_y^{2-y} (x^2 + y^2) \, dx \, dy. \quad (23)$$

Evaluando esas integrales iteradas encontramos que

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_y^{2-y} dy \\ &= k \int_0^1 \left[ \frac{(2-y)^3}{3} + (2-y)y^2 - \frac{y^3}{3} - y^3 \right] dy \\ &= k \int_0^1 \left( \frac{8}{3} - 4y + 4y^2 - \frac{8}{3}y^3 \right) dy \\ &= k \left( \frac{8}{3} - 2 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## EJEMPLO 5

Calcular el volumen del sólido en el primer octante que está delimitado por el plano  $xy$ , el plano  $yz$ , el plano  $y = x$  y el cilindro  $z = 4 - y^2$ .

El sólido tridimensional cuyo volumen se busca se muestra en la figura 17.2.12. La región  $\Omega$  de integración en el plano  $xy$  es el triángulo acotado por el eje  $y$ , la recta  $y = x$  y la recta  $y = 2$ . Se muestra en la figura 17.2.13 y se puede describir por las desigualdades

$$0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Para cada punto  $(x, y)$  en  $\Omega$ , la altura del sólido es la distancia del plano  $xy$  al cilindro  $z = 4 - y^2$ . Por tanto, el volumen  $V$  está dado por

$$V = \int \int_{\Omega} (4 - y^2) \, dA = \int_0^2 \int_0^y (4 - y^2) \, dx \, dy$$

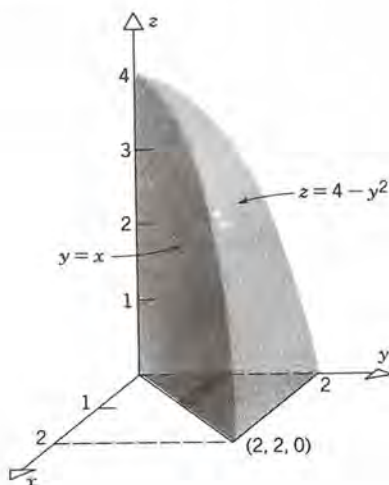


Figura 17.2.12

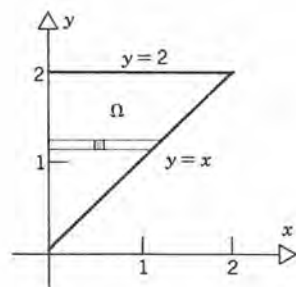


Figura 17.2.13

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^2 (4 - y^2)x \Big|_0^y dy \\
 &= \int_0^2 (4 - y^2)y dy \\
 &= \left( 2y^2 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 \\
 &= 8 - 4 = 4.
 \end{aligned}$$

Obsérvese que la región  $\Omega$  de integración también se puede describir por las desigualdades

$$0 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq 2.$$

Así, también se puede calcular  $V$  mediante la integral

$$V = \int_0^2 \int_x^2 (4 - y^2) dy dx \quad (24)$$



en la que la integración con respecto a  $y$  se lleva a cabo primero.

También se puede calcular  $V$  integrando en el plano  $yz$ . En este caso  $\Omega$  es la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la parábola  $z = 4 - y^2$  que se

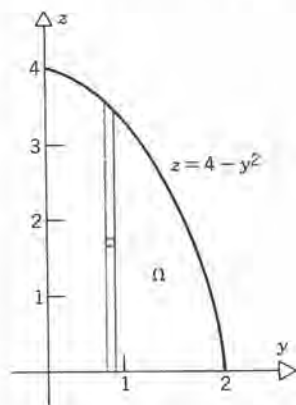


Figura 17.2.14

ve en la figura 17.2.14. La altura del sólido es ahora la distancia desde el plano  $yz$  hasta el plano  $y = x$ . Así,  $V$  está dado por

$$V = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} y \, dz \, dy. \quad (25)$$

Puede verificar el lector que las ecuaciones 24 y 25 también producen el valor  $V = 4$ . ■

Como hicimos notar en la sección 17.1, el área  $A$  de la región  $\Omega$  está dada por

$$A = \iint_{\Omega} dA.$$

Si se describe  $\Omega$  mediante las desigualdades (12), entonces, según la ecuación 18, tenemos que

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \, dx \\ &= \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)] \, dx. \end{aligned}$$

Esta expresión es equivalente a la del área de una región que obtuvimos mucho antes (ecuación 2, sección 7.1). Desde luego, hay un resultado correspondiente si  $\Omega$  se describe mediante las desigualdades (15).

Como en el caso del ejemplo 5, puede suceder que la región  $\Omega$  de integración se

puede describir por cualquiera de los conjuntos de desigualdades (12) o (15). En este caso, son válidas las ecuaciones 18 y 19 y, por tanto, se puede escoger cualquier conjunto de integrales iteradas como medio de evaluar la integral doble. En otras palabras, la integración se puede llevar a cabo en cualquier orden. En el ejemplo 5 había poca o ninguna diferencia al escoger cualquiera de las integrales iteradas para evaluar. Sin embargo, a veces un conjunto puede ser mucho más fácil que el otro, como se verá en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 6

Evaluar la integral

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2} dA,$$

en la que  $\Omega$  es el triángulo en el primer cuadrante acotado por el eje  $x$ , la recta  $x = 1$  y la recta  $y = x$  (véase figura 17.2.15).

Si tratamos de integrar primero con respecto a  $x$  tendremos que

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2} dA = \int_0^1 \int_y^1 e^{-x^2} dx dy. \quad (26)$$

Como es imposible evaluar la integral interior del lado derecho de la ecuación 26 en términos de funciones elementales, tendríamos que recurrir a procedimientos numéricos, o quizá a un desarrollo del integrando en series de potencias. Por otro lado, si invertimos el orden de integración tendremos

$$\iint_{\Omega} e^{-x^2} dA = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx, \quad (27)$$

y sucede que esto es mucho más fácil, ya que el integrando  $e^{-x^2}$  es constante durante la primera integración. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} e^{-x^2} dA &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big|_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 e^{-x^2} x dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{e} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

Si la región de integración  $\Omega$  no es una región estándar, entonces debe uno buscar subdividirla en dos o más regiones menores,  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ , cada una de las cuales sea estándar. Entonces, de acuerdo con el teorema 17.1.4,

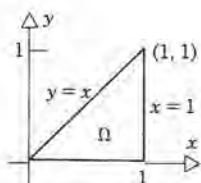


Figura 17.2.15

$$\int \int_{\Omega} f(x, y) dA = \int \int_{\Omega_1} f(x, y) dA + \cdots + \int \int_{\Omega_n} f(x, y) dA, \quad (28)$$

en la que cada una de las integrales del lado derecho se puede evaluar mediante integrales iteradas. Es natural que, aun si  $\Omega$  es una región estándar, siempre se puede subdividir la región de integración y emplear el teorema 17.1.4 si con ello se simplifican los cálculos.

## EJEMPLO 7

Formular integrales que sean equivalentes a la integral doble

$$\int \int_{\Omega} (2y + x) dA,$$

en la que  $\Omega$  es la región delimitada por los ejes coordenados, la recta  $y = 7 - x$  y la parábola  $y = 1 + x^2$  (véase la figura 17.2.16).

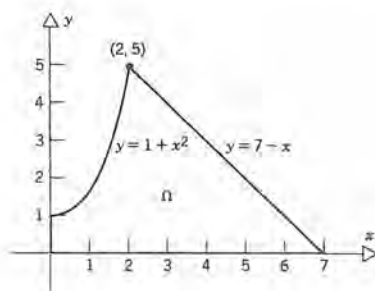


Figura 17.2.16

Con una inspección de la figura puede uno ver que  $\Omega$  no es una región estándar. Un modo de subdividir  $\Omega$  en subregiones normales es trazar la recta vertical que pase por el punto de intersección de la parábola con la recta  $y = 7 - x$ , como se ve en la figura 17.2.17. Entonces, cada una de las regiones  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  es una región estándar de la forma (12). Para localizar el punto de intersección resolvemos en forma simultánea  $y = 1 + x^2$  y  $y = 7 - x$ , con lo cual se obtiene  $x = 2$ ,  $y = 5$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} (2y + x) dA &= \int \int_{\Omega_1} (2y + x) dA + \int \int_{\Omega_2} (2y + x) dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{1+x^2} (2y + x) dy dx \\ &\quad + \int_2^7 \int_0^{7-x} (2y + x) dy dx. \end{aligned} \quad (29)$$



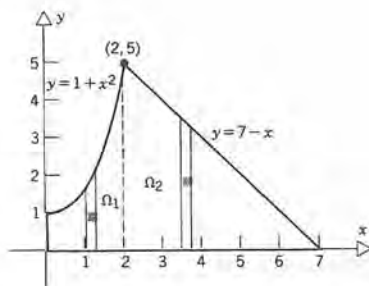


Figura 17.2.17

Otro modo de subdividir a  $\Omega$  es mediante la recta horizontal  $y = 1$ , como se ve en la figura 17.2.18. Entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (2y + x) dA &= \iint_{\Omega_1} (2y + x) dA + \iint_{\Omega_2} (2y + x) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{7-y} (2y + x) dx dy \\ &\quad + \int_1^5 \int_{\sqrt{y-1}}^{7-y} (2y + x) dx dy. \end{aligned} \quad (30)$$

Ninguna de estas integrales es difícil de evaluar, pero probablemente sea un poco más fácil emplear la ecuación 29. ■

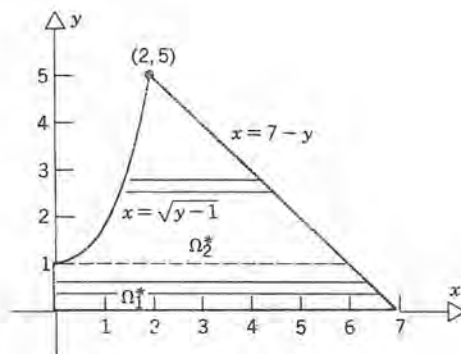


Figura 17.2.18

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10, hacer un dibujo de la región de integración y evaluar la integral dada.

1.  $\int_0^3 \int_0^2 (3x - 2y) dx dy$
2.  $\int_0^2 \int_1^3 3xy dy dx$

$$3. \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 + x^2 y^2) dx dy$$

$$4. \int_{-2}^3 \int_{-2}^2 x(1 - y) dy dx$$

$$5. \int_0^1 \int_{x^2}^x (2x - 5y) dy dx$$

$$6. \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (y^2 - x^2) dy dx$$

$$7. \int_0^{\ln 2} \int_y^1 2x e^{-x} dx dy$$

$$8. \int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy dx$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \int_0^y y \sin x \cos y dx dy$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx$$

En los problemas 11 a 14, se da una integral doble en determinada región  $\Omega$ . En cada caso,

(a) formular una o más integrales iteradas equivalentes a la integración con respecto a  $y$  que se haga primero,

(b) formular una o más integrales iteradas equivalentes a la integración con respecto a  $x$  que se haga primero,

(c) evaluar la integral o integrales que se formularon en la parte (a) o (b).

$$11. \iint_{\Omega} 2xy dA, \text{ donde } \Omega \text{ está acotada por las gráficas de } y = x^3 \text{ y de } x = y^2.$$

$$12. \iint_{\Omega} (2x - y) dA, \text{ donde } \Omega \text{ está acotada por la recta } y = x \text{ y la parábola } x = 2 - y^2.$$

$$13. \iint_{\Omega} (2x - y) dA, \text{ donde } \Omega \text{ es el triángulo acotado por } y = 3x, y = x/2 \text{ y } x + 3y = 10.$$

$$14. \iint_{\Omega} (1 - y^2) dA, \text{ en la que } \Omega \text{ está acotada por las parábolas } x = y^2 \text{ y } x = 1 + \frac{1}{2}y^2.$$

En los problemas 15 a 20,

(a) hacer un dibujo de la región de integración,

(b) formular una o más integrales iteradas equivalentes a aquéllas en las que se invierte el orden de integración,

(c) evaluar ya sea la integral dada o la(s) que se determinaron en la parte (b).

$$15. \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} dy dx \quad 16. \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx dy$$

$$17. \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{1 + y^3} dy dx$$

$$18. \int_0^1 \int_{y^{2/3}}^1 x^{-3/4} y^{1/6} e^x dx dy$$

$$19. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} (x - 2y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} (x - 2y) dy dx$$

$$20. \int_0^1 \int_y^1 \frac{e^x - 1}{x} dx dy$$

21. La región  $\Omega$ , acotada por  $y = x^2$  y  $y = \sqrt{x}$ , está constituida por una hoja delgada de material con densidad  $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$  donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Calcular la masa total de  $\Omega$ .

22. La región  $\Omega$  está acotada por  $y = 6 - x^2$ ,  $y = x$  y el eje  $y$ . Está constituida por una hoja delgada de material cuya densidad  $\rho(x, y) = kx$ , donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Calcular la masa total de  $\Omega$ .

23. La región  $\Omega$  está comprendida entre las parábolas  $y = x^2$  y  $y = 8 - 3x^2$ . Está constituida por una hoja delgada de material cuya densidad es  $\rho(x, y) = ky$ , donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Calcular la masa total de  $\Omega$ .

24. La región  $\Omega$  está acotada por  $x = y^4$  y  $x = y^2 + 2$ . Está constituida por una hoja delgada de material cuya densidad  $\rho(x, y) = kx$ , donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Calcular la masa total de  $\Omega$ .

25. Calcular el volumen de la región acotada por los planos coordenados, los planos  $x = 3$  y  $y = 2$  y la superficie  $z = 16 - x^2 - y^2$ .

26. Calcular el volumen de la región acotada por el plano  $xy$ , el plano  $xz$ , el cilindro  $y = 1 - x^2$  y el plano  $z = 2 + x + y$ .

27. Calcular el volumen de la región del primer octante acotada por el plano  $xy$ , el plano  $yz$ , el plano  $y = 1$ , el cilindro  $y = x^2$  y la paraboloides  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

28. Calcular el volumen de la región que está arriba del plano  $xy$ , abajo de la superficie  $z = 4 - y^2$ , y dentro del cilindro acotado por los planos  $y = 0$ ,  $x = 2$  y  $y = x$ .

29. Calcular el volumen de la región acotada por los cilindros  $y = z^2$  y  $y = \sqrt{z}$  y por los planos  $x = 0$  y  $x = 9 - 2y - z$ .

30. Calcular el volumen de la región del interior de los dos cilindros  $x^2 + y^2 = a^2$  y  $x^2 + z^2 = a^2$ .

31. Calcular el volumen de la región limitada por los planos coordenados, el plano  $x + y = a$ , y la superficie  $x^2 + y^2 + z = a^2$ .

## 17.3 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES

En las secciones 17.1 y 17.2 hemos notado que se pueden emplear las integrales dobles para el cálculo de masas y volúmenes. En esta sección indicaremos algunas aplicaciones más y también daremos ejemplos adicionales de la formulación y evaluación de integrales en dos dimensiones.

### Centro de masa

Considere una partícula de masa  $m$  cuya ubicación en el plano  $xy$  está dada por el vector de posición  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  (véase figura 17.3.1). Entonces, el **primer momento**,\* o **momento lineal** de la partícula con respecto al origen es el vector  $\mathbf{L}$ , definido mediante

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m\mathbf{r} \\ &= mx\mathbf{i} + my\mathbf{j}.\end{aligned}\tag{1}$$

Obsérvese que las dimensiones del momento lineal son masa  $\times$  longitud.

Para un sistema de  $n$  partículas con masas  $m_k$  y vectores de posición  $\mathbf{r}^{(k)} = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ , como se indica en la figura 17.3.2, el momento lineal  $\mathbf{L}$  con respecto al origen es la suma de los momentos lineales de las partículas por separado. Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}^{(k)} \\ &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j}) \\ &= \mathbf{i} \sum_{k=1}^n m_k x_k + \mathbf{j} \sum_{k=1}^n m_k y_k.\end{aligned}\tag{2}$$

¿Cómo extender este concepto partiendo de un conjunto finito de partículas a una hoja delgada y continua de material que ocupa una región  $\Omega$  en el plano  $xy$ , y que tiene una densidad de masa  $\rho(x, y)$  por unidad de área? Para definir el momento lineal con respecto al origen, del material en  $\Omega$ , subdividimos a  $\Omega$  en elementos pequeños y

\* Es preferible decir *momento de primer grado*, pero con frecuencia usamos esta terminología por brevedad (N. del R. T).

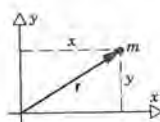


Figura 17.3.1



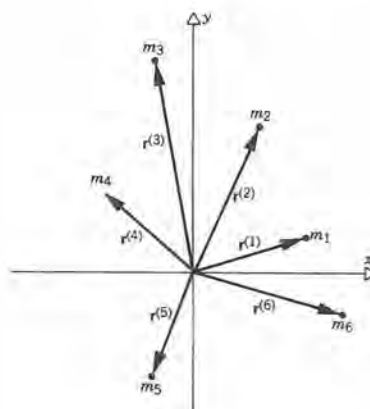


Figura 17.3.2

consideramos uno típico. El momento lineal de ese elemento con respecto al origen está dado aproximadamente por

$$\mathbf{L}_{ij} \cong \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} (x_i^* \mathbf{i} + y_j^* \mathbf{j}), \quad (3)$$

en la cual  $P_{ij}(x_i^*, y_j^*)$  es un punto arbitrario del elemento y  $\Delta A_{ij}$  es el área del elemento (véase figura 17.3.3). Entonces el momento lineal de todo el material en  $\Omega$  está dado aproximadamente por

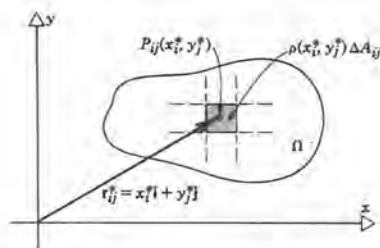


Figura 17.3.3

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{i,j} \mathbf{L}_{ij} \\ &\cong \mathbf{i} \sum_{i,j} x_i^* \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij} + \mathbf{j} \sum_{i,j} y_j^* \rho(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}. \end{aligned} \quad (4)$$

Las sumas del lado derecho de la ecuación 4 son sumas de Riemann y, por tanto, podemos pasar al límite en esta ecuación, siempre que  $\rho(x, y)$  y  $\Omega$  satisfagan las

condiciones del teorema 17.1.2. Definimos así el momento lineal del material de  $\Omega$  con respecto al origen del siguiente modo:

$$\mathbf{L} = \mathbf{i} \int \int_{\Omega} x \rho(x, y) dA + \mathbf{j} \int \int_{\Omega} y \rho(x, y) dA. \quad (5)$$

Es útil hacer que

$$L_y = \int \int_{\Omega} x \rho(x, y) dA. \quad (6)$$

Llamaremos a esta cantidad el momento lineal del material de  $\Omega$  con respecto al eje  $y$ . En la ecuación 6 el factor  $x$  es la posición, o brazo del momento, del elemento de área  $dA$  con respecto al eje  $y$  y  $\rho(x, y) dA$  es la masa del elemento. Igualmente,

$$L_x = \int \int_{\Omega} y \rho(x, y) dA \quad (7)$$

es el momento lineal con respecto al eje  $x$ . Entonces la ecuación 5 se transforma en

$$\mathbf{L} = L_y \mathbf{i} + L_x \mathbf{j}. \quad (8)$$

Nótese que  $L_y$  es la componente de  $\mathbf{L}$  en la dirección  $\mathbf{i}$  y que  $L_x$  es la componente a lo largo de  $\mathbf{j}$ . Si parece extraño, recuérdese que el brazo del momento en  $L_y$  es  $x$  y que el brazo del momento en  $L_x$  es  $y$ .

También es posible calcular el momento estático  $\mathbf{L}_0$  del material de  $\Omega$  con respecto a algún punto  $P_0(x_0, y_0)$ . Sólo tiene uno que cambiar el factor  $x$  en  $L_y$ , por  $x - x_0$ , y el factor  $y$  en  $L_x$  por  $y - y_0$ . Así,

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{i} \int \int_{\Omega} (x - x_0) \rho(x, y) dA + \mathbf{j} \int \int_{\Omega} (y - y_0) \rho(x, y) dA, \quad (9)$$

que es análoga a la ecuación 5.

El **centro de masa** del material de  $\Omega$  se define como el punto  $Q(\bar{x}, \bar{y})$  con respecto al cual el momento lineal es cero. Así, el centro de masa es el "punto de equilibrio" de la masa de  $\Omega$ . Para calcular  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  reemplazamos a  $P_0$  por  $Q$  y hacemos que  $\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$  en la ecuación 9. Con ello obtenemos

$$\mathbf{i} \int \int_{\Omega} (x - \bar{x}) \rho(x, y) dA + \mathbf{j} \int \int_{\Omega} (y - \bar{y}) \rho(x, y) dA = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Los coeficientes de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  del lado izquierdo de la ecuación 10 deben ser cero. Del coeficiente de  $\mathbf{i}$  encontramos que

$$\int \int_{\Omega} (x - \bar{x}) \rho(x, y) dA = 0 \quad (11)$$

de donde

$$\bar{x} = \frac{\int \int_{\Omega} x \rho(x, y) dA}{\int \int_{\Omega} \rho(x, y) dA} = \frac{L_y}{M}, \quad (12)$$

en la cual

$$M = \int \int_{\Omega} \rho(x, y) dA \quad (13)$$

es la masa total de  $\Omega$ . De igual modo

$$\bar{y} = \frac{\int \int_{\Omega} y \rho(x, y) dA}{\int \int_{\Omega} \rho(x, y) dA} = \frac{L_x}{M}, \quad (14)$$

Además, si sustituimos  $L_y$  y  $L_x$  de las ecuaciones 12 y 14 en la ecuación 8, obtenemos

$$\mathbf{L} = M(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}). \quad (15)$$

La interpretación de la ecuación 15 es que *el momento lineal del material de  $\Omega$  es el mismo que el momento lineal de una partícula única de masa igual a la masa  $M$  total de  $\Omega$  ubicada en el centro de masa  $(\bar{x}, \bar{y})$ .*

### EJEMPLO 1

Sea  $\Omega$  el triángulo en el primer cuadrante, acotado por los ejes coordenados y la recta  $(x/a) + (y/b) = 1$ , donde  $a > 0$  y  $b > 0$  (véase figura 17.3.4). Supongamos que el material de  $\Omega$  tiene una densidad  $\rho(x, y) = k(2b - y)$ , donde  $k$  es una constante. Esto significa que la densidad disminuye en forma lineal cuando aumenta  $y$ . Calcular el centro de masa del material de  $\Omega$ .

Con objeto de emplear las ecuaciones 12 y 14 para las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  del centro de masa, necesitamos calcular la masa total  $M$  y los momentos lineales  $L_y$  y  $L_x$  con respecto a los ejes  $y$  y  $x$  respectivamente. La masa  $M$  es

$$M = \int \int_{\Omega} \rho(x, y) dA = k \int \int_{\Omega} (2b - y) dA. \quad (16)$$

Esta integral doble se puede evaluar mediante integrales iteradas en las que la primera integración puede ser con respecto a  $x$  o a  $y$ . Si integramos primero con respecto a  $y$ , entonces, de acuerdo con la figura 17.3.4, para cada  $x$  fija debemos integrar desde el límite inferior,  $y = 0$ , hasta el superior,  $y = b[1 - (x/a)]$ . A esto sigue la integración con respecto a  $x$  desde 0 hasta  $a$ . Tenemos entonces

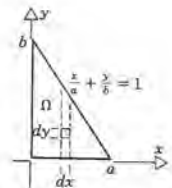


Figura 17.3.4



$$\begin{aligned}
M &= k \int_0^a \int_0^{b[1-(x/a)]} (2b - y) dy dx \\
&= k \int_0^a \left( 2by - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{b[1-(x/a)]} dx \\
&= k \int_0^a \left[ 2b^2 \left( 1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{1}{2} b^2 \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 \right] dx \\
&= kb^2 \int_0^a \left( \frac{3}{2} - \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right) dx \\
&= kb^2 \left( \frac{3}{2} x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{a^2} \right) \Big|_0^a \\
&= kb^2 \left( \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} a - \frac{1}{6} a \right) = \frac{5}{6} kab^2. \tag{17}
\end{aligned}$$

Según la ecuación 6, el momento lineal  $L_y$  está dado por

$$\begin{aligned}
L_y &= k \int_0^a \int_0^{b[1-(x/a)]} x(2b - y) dy dx \\
&= k \int_0^a \left( 2bxy - \frac{1}{2} xy^2 \right) \Big|_0^{b[1-(x/a)]} dx \\
&= k \int_0^a \left[ 2b^2 x \left( 1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{1}{2} b^2 x \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 \right] dx \\
&= kb^2 \int_0^a \left( \frac{3}{2} x - \frac{x^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{a^2} \right) dx \\
&= kb^2 \left( \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{8} a^2 \right) \\
&= \frac{7}{24} ka^2b^2.
\end{aligned}$$

Así, la coordenada  $x$  del centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{7ka^2b^2/24}{5kab^2/6} = \frac{7}{20} a.$$

Análogamente, de acuerdo con la ecuación 7, tenemos que

$$L_x = k \int_0^a \int_0^{b[1-(x/a)]} y(2b - y) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= k \int_0^a \left( by^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^{b[1-(x/a)]} dx \\
&= k \int_0^a \left[ b^3 \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{3} b^3 \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^3 \right] dx \\
&= kb^3 \int_0^a \left( \frac{2}{3} - \frac{x}{a} + \frac{1}{3} \frac{x^3}{a^3} \right) dx \\
&= kb^3 \left( \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} a + \frac{1}{12} a \right) \\
&= \frac{1}{4} kab^3,
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\bar{y} = \frac{kab^3/4}{5kab^2/6} = \frac{3}{10} b. \blacksquare$$

### Centro de gravedad y centroide

Hay otros dos puntos que se definen de manera análoga al centro de masa, que son el **centro de gravedad** y el **centroide** de una región  $\Omega$  bidimensional. Para definir el centro de gravedad, la única diferencia es que la densidad de masa  $\rho(x, y)$  se reemplaza por la densidad de peso  $w(x, y)$ , donde

$$w(x, y) = \rho(x, y)g(x, y), \quad (18)$$

y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad en el punto  $(x, y)$ . Si  $(x^*, y^*)$  es el centro de gravedad, entonces las ecuaciones correspondientes a las 12 y 14 son

$$x^* = \frac{\int \int_{\Omega} x w(x, y) dA}{\int \int_{\Omega} w(x, y) dA}, \quad y^* = \frac{\int \int_{\Omega} y w(x, y) dA}{\int \int_{\Omega} w(x, y) dA}. \quad (19)$$

Si  $g$  es constante, entonces se puede sacar de las integrales en estas últimas ecuaciones y se puede simplificar. Así,

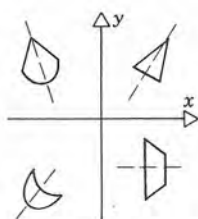
$$\text{si } g \text{ es constante, entonces } x^* = \bar{x} \text{ y } y^* = \bar{y}.$$

En otras palabras, *el centro de gravedad coincide con el centro de masa cuando el campo gravitacional es uniforme.*

El centroide de una región  $\Omega$  bidimensional es una propiedad puramente geométrica de la misma y no tiene que ver con masas ni con pesos. Si  $(\hat{x}, \hat{y})$  es el centroide de  $\Omega$ , entonces se define a  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  mediante las ecuaciones

$$\hat{x} = \frac{\int \int_{\Omega} x \, dA}{\int \int_{\Omega} dA} = \frac{\hat{L}_y}{A}, \quad (20)$$

$$\hat{y} = \frac{\int \int_{\Omega} y \, dA}{\int \int_{\Omega} dA} = \frac{\hat{L}_x}{A}, \quad (21)$$



**Figura 17.3.5**

En cada caso el centroide queda en el eje de simetría.

que son semejantes a las ecuaciones 12 y 14 del centro de masa. Ciertamente, supóngase que  $\Omega$  está ocupada por una hoja delgada de material de densidad uniforme, esto es,  $\rho(x, y)$  es constante. Entonces la densidad se puede sacar del signo de integración y se puede simplificar en las ecuaciones (12) y (14) para  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ , quedando las ecuaciones 20 y 21. Así,

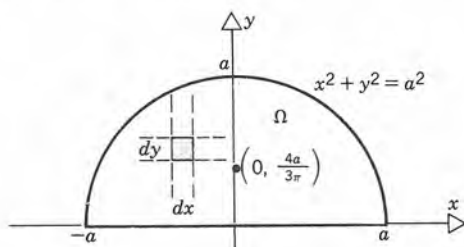
$$\text{si } \rho \text{ es constante, entonces } \hat{x} = \bar{x} \text{ y } \hat{y} = \bar{y};$$

esto es, *si la densidad es constante, entonces el centro de masa es igual que el centroide.*

La determinación del centroide se simplifica si  $\Omega$  tiene un eje de simetría, porque entonces el centroide debe quedar en él (véase figura 17.3.5). Por ejemplo, el centroide de un triángulo isósceles queda en la altura perpendicular al lado desigual. Si  $\Omega$  tiene dos ejes de simetría, el centroide debe quedar en ambos y, por tanto, es su punto de intersección. Así, el centroide de un círculo o de un rectángulo es el centro.

## EJEMPLO 2

Localizar el centroide de la región semicircular  $\Omega$  definida por  $x^2 + y^2 \leq a^2$  donde  $y \geq 0$  (véase figura 17.3.6)



**Figura 17.3.6**

Debido a la simetría de la región con respecto al eje  $y$ , tenemos que

$$\hat{L}_y = \int \int_{\Omega} x \, dA = 0,$$



por tanto  $\hat{x} = 0$  y tan sólo debemos calcular  $\hat{y}$ . Para ello necesitamos

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \int \int_{\Omega} y \, dA = 2 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y \, dy \, dx \\ &= \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx \\ &= \left( a^2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3.\end{aligned}$$

También

$$A = \int \int_{\Omega} dA = \frac{1}{2}\pi a^2,$$

ya que es el área del semicírculo. Así, de acuerdo con la ecuación 21,

$$\hat{y} = \frac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \frac{4a}{3\pi} \cong 0.4244 \, a. \quad \blacksquare$$

### EJEMPLO 3

Ubicar el centroide de la región triangular  $\Omega$  en el primer cuadrante, acotada por los ejes coordenados y por la recta  $(x/a) + (y/b) = 1$ . Nótese que es la misma región que la del ejemplo 1; se muestra en la figura 17.3.4.

Sabemos, de la geometría elemental, que

$$A = \int \int_{\Omega} dA = \frac{ab}{2}.$$

Además,

$$\begin{aligned}\hat{L}_y &= \int \int_{\Omega} x \, dA = \int_0^a \int_0^{b[1-(x/a)]} x \, dy \, dx = b \int_0^a x \left( 1 - \frac{x}{a} \right) dx \\ &= b \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2b}{6}.\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= \int \int_{\Omega} y \, dA = \int_0^a \int_0^{b[1-(x/a)]} y \, dy \, dx = \frac{b^2}{2} \int_0^a \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 dx \\ &= \frac{b^2}{2} \left( x - \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_0^a = \frac{ab^2}{6}.\end{aligned}$$

Así, de acuerdo con las ecuaciones 20 y 21, tenemos

$$\hat{x} = \frac{a^2 b / 6}{ab/2} = \frac{a}{3}, \quad \hat{y} = \frac{ab^2 / 6}{ab/2} = \frac{b}{3}.$$

Si comparamos estos resultados con los del ejemplo 1 queda claro que el centro de masa y el centroide pueden estar en distinto lugar cuando la distribución de masa es no uniforme. En realidad, como en este caso, las dos coordenadas del centro de masa pueden ser distintas de las correspondientes al centroide, aun cuando la densidad sólo varíe en una dirección. ■

### Momento de Inercia

Supongamos una vez más que una región  $\Omega$  del plano  $xy$  está ocupada por una delgada membrana de material cuya densidad (masa/área) es  $\rho(x, y)$ . El **momento de inercia** (o segundo momento\*) del material en  $\Omega$  con respecto al eje  $x$  se define como

$$I_x = \int \int_{\Omega} y^2 \rho(x, y) dA. \quad (22)$$

Análogamente, el momento de inercia con respecto al eje  $y$  es

$$I_y = \int \int_{\Omega} x^2 \rho(x, y) dA. \quad (23)$$

Por último, el momento de inercia con respecto al origen, al que con frecuencia se le llama momento polar de inercia, es

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA \\ &= I_x + I_y. \end{aligned} \quad (24)$$

Obsérvese que para calcular los momentos de inercia  $I_x$  e  $I_y$  a partir de las ecuaciones 22 y 23, empleamos el cuadrado de la coordenada apropiada de la posición del elemento de masa  $\rho(x, y) dA$ , y no la primera potencia, como corresponde para el momento lineal. De acuerdo con las ecuaciones 22, 23 y 24, es fácil de ver que las dimensiones de los momentos de inercia son masa  $\times$  (longitud)<sup>2</sup>.

El **radio de giro** con respecto al eje  $x$ , que se representa con  $R_x$ , es la distancia al eje  $x$  a la cual se debe concentrar toda la masa  $M$  de la región  $\Omega$  para producir el mismo momento de inercia que la masa real distribuida. Así,

$$R_x^2 = \frac{I_x}{M}. \quad (25)$$

\* Es preferible decir *momento de segundo grado*, pero con frecuencia usamos esta terminología por brevedad (N. del R. T.).

De modo semejante, el radio de giro con respecto al eje  $y$  está dado por

$$R_y^2 = \frac{I_y}{M}. \quad (26)$$

### EJEMPLO 4

Se tiene una placa delgada cuya forma es la de un triángulo rectángulo con lados de longitudes  $a$ ,  $b$  y  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Si la placa tiene densidad  $\rho(x, y) = k$  uniforme, calcular el momento de inercia de la placa con respecto al lado de longitud  $b$ . También, calcular el radio de giro con respecto a este eje.

Si ubicamos la placa en el plano  $xy$  como se muestra en la figura 17.3.7, vemos entonces que ocupa la misma región triangular  $\Omega$  que teníamos en los ejemplos 1 y 3. Además, el momento de inercia pedido es justamente  $I_y$ . Entonces

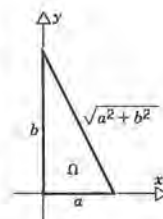


Figura 17.3.7

$$\begin{aligned} I_y &= k \int_0^a \int_0^{b[1-(x/a)]} x^2 \, dy \, dx \\ &= kb \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \\ &= kb \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} \frac{x^4}{a} \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{12} ka^3b. \end{aligned}$$

La masa total de la placa es

$$M = \frac{1}{2}kab,$$

y entonces el radio de giro  $R_y$  está dado por la ecuación 26:

$$R_y^2 = \frac{ka^3b/12}{kab/2} = \frac{a^2}{6}.$$

Así,

$$R_y = \frac{a}{\sqrt{6}} \cong 0.4082 a. \blacksquare$$

### EJEMPLO 5

Una placa delgada cuya densidad es proporcional a la distancia al eje  $y$  ocupa la región



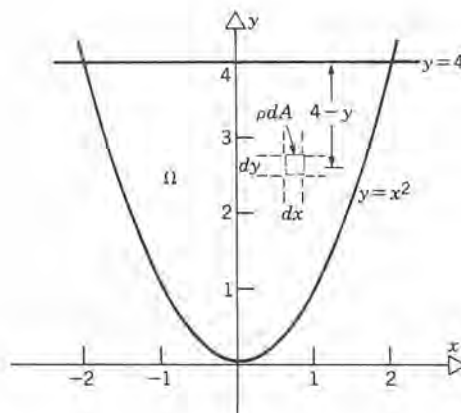


Figura 17.3.8

$\Omega$  que se muestra en la figura 17.3.8 que está acotada por la recta  $y = 4$  y la parábola  $y = x^2$ . Calcular el momento de inercia de esta placa con respecto a la recta  $y = 4$ .

La función de densidad es  $\rho(x, y) = k|x|$ , en la cual  $k$  es una constante de proporcionalidad; se necesita el valor absoluto porque la distancia y la densidad son cantidades intrínsecamente no negativas. El elemento de integración  $dA = dx dy$  se muestra en la figura 17.3.8, y su posición con respecto a la recta  $y = 4$  es  $4 - y$ , que es entonces el brazo del momento en este problema. Así, el momento de inercia  $I$  pedido es

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} (4 - y)^2 \rho(x, y) dA \\ &= k \iint_{\Omega} (4 - y)^2 |x| dA. \end{aligned}$$

Como  $\Omega$  es simétrica con respecto al eje  $y$  y el integrando es una función par de  $x$ , podemos calcular  $I$  integrando sobre la parte de  $\Omega$  para la cual  $x > 0$ , y después multiplicando por dos el resultado. En consecuencia,

$$I = 2k \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4 - y)^2 |x| dy dx.$$

Además, podemos remplazar ahora a  $|x|$  por  $x$  en el integrando, porque  $x > 0$  en la parte de  $\Omega$  que estamos integrando. Con todo ello obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} I &= 2k \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4 - y)^2 x dy dx \\ &= 2k \int_0^2 \left. \frac{(4 - y)^3}{3} \right|_{x^2}^4 x dx \\ &= \frac{2k}{3} \int_0^2 (4 - x^2)^3 x dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{2k}{3} \frac{(4-x^2)^4}{8} \bigg|_0^2$$

$$= \frac{64k}{3}. \blacksquare$$

El momento de inercia es una cantidad importante en la mecánica, especialmente en los casos en los que interviene la rotación en torno a un eje. Recuérdese que la energía cinética  $E$  de una partícula de masa  $m$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  es

$$E = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2. \quad (28)$$

Supongamos ahora que la partícula gira en torno a un eje fijo (véase figura 17.3.9) con velocidad angular  $\omega$  constante. Entonces  $\|\mathbf{v}\|$  y  $\omega$  están relacionadas por

$$\|\mathbf{v}\| = l\omega, \quad (29)$$

donde  $l$  es la distancia (constante) del eje de rotación a la partícula. Combinando las ecuaciones 28 y 29, obtenemos

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (30)$$

en la cual  $I = m l^2$  es el momento de inercia de la partícula con respecto al eje de rotación.

Para distribuciones planas de masa, las ecuaciones 28 y 30 se sustituyen por expresiones más generales en las que intervienen integrales. Para un cuerpo rígido que se mueve en línea recta con velocidad  $\|\mathbf{v}\|$  constante, la ecuación 28 queda sustituida por

$$E = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \iint_{\Omega} \rho(x, y) dA$$

$$= \frac{1}{2} M \|\mathbf{v}\|^2. \quad (31)$$

Similarmente, para un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular constante  $\omega$  en el plano del cuerpo, en lugar de la ecuación 30 tenemos

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 \iint_{\Omega} l^2(x, y) \rho(x, y) dA$$

$$= \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (32)$$

en las que  $l(x, y)$  es la distancia del eje de rotación al punto  $(x, y)$ , y la integral en la ecuación 32 es el momento de inercia del material en  $\Omega$  con respecto al eje dado (véase figura 17.3.10). De acuerdo con las ecuaciones 32 y 31, respectivamente, vemos que en las dos expresiones para la energía cinética, el momento de inercia (para un movimiento rotatorio) y la masa (movimiento lineal) aparecen del mismo modo. Así, *el momento de inercia mide la resistencia de un cuerpo a la rotación, del mismo modo que la masa mide su resistencia al movimiento lineal.*

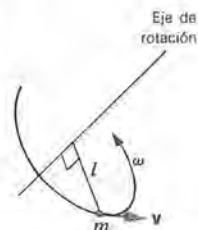


Figura 17.3.9

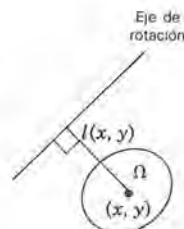


Figura 17.3.10

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 5 localizar el centroide de la región dada.

1. La región semi-elíptica acotada por el eje  $x$  y la gráfica de  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$  para  $y \geq 0$ .
2. La región acotada por el eje  $x$  y la parábola  $y = 1 - (x^2/a^2)$ .
3. La región acotada por el eje  $x$  y la gráfica de  $y = \sin x$  para  $0 \leq x \leq \pi$ .
4. La región acotada por el eje  $x$  y un arco de la cicloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ , para  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
5. El triángulo cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$  y  $(0, a)$ .
6. El cuadrado  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  está ocupado por una distribución de masa cuya densidad es  $\rho(x, y) = k(2a - x - y)$ . Localizar el centro de masa, y observar que está en distinto lugar que el centroide del cuadrado.
7. El rectángulo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  está ocupado por una distribución de masa cuya densidad es  $\rho(x, y) = k(2b - y)$ . Localizar el centro de masa y observar que queda en distinto lugar que el centroide de ese rectángulo.
8. Se tiene una placa con la forma de un triángulo cuyos vértices están en  $(-b/2, 0)$ ,  $(b/2, 0)$  y  $(0, h)$ . Tiene una densidad  $\rho(x, y) = 1 - (y/h)^2$ .
  - (a) Localizar el centro de masa de la placa.
  - (b) Localizar el centroide de la región triangular.
9. Una placa rectangular cuyas dimensiones son  $b$  y  $h$  tiene una densidad uniforme  $k$ .
  - (a) Calcular el momento de inercia con respecto a uno de los lados de longitud  $b$ .
  - (b) Calcular el momento de inercia con respecto a uno de los lados de longitud  $h$ .
  - (c) Calcular el momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el centro de la placa y que es paralela al lado de longitud  $b$ .
  - (d) Calcular el momento polar de inercia con respecto a una esquina de la placa.
  - (e) Calcular el momento polar de inercia con respecto al centro de la placa.

*Sugerencia:* Puede resultar útil elegir coordenadas distintas para las diferentes partes de este problema.

10. Una placa en forma de un triángulo rectángulo tiene una densidad  $k$  uniforme y sus lados son  $a$ ,  $a$  y  $\sqrt{2}a$ .
  - (a) Calcular el momento de inercia con respecto a uno de los lados iguales.
  - (b) Calcular el momento de inercia con respecto a la hipotenusa.
  - (c) Calcular el momento polar de inercia con respecto al vértice opuesto a la hipotenusa.
  - (d) Calcular el momento de inercia con respecto a la altura perpendicular a la hipotenusa.
  - (e) Calcular el momento polar de inercia con respecto al centro de la hipotenusa.

*Sugerencia:* Resulta de ayuda escoger coordenadas distintas para las diferentes partes de este problema.

11. Se tiene una placa en forma de un triángulo isósceles cuya base es  $b$  y cuya altura es  $h$ . La densidad  $k$  es uniforme.
  - (a) Localizar el centroide.
  - (b) Calcular el momento de inercia con respecto a la base.
  - (c) Calcular el momento de inercia con respecto al eje de simetría del triángulo.
  - (d) Calcular el momento de inercia con respecto a la recta paralela a la base y que pasa por el centroide.
12. Se tiene una placa de densidad  $k$  uniforme que está acotada por el eje  $x$  y la parábola  $y = 1 - (x^2/a^2)$ .
  - (a) Calcular el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje  $x$ .
  - (b) Calcular el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje  $y$ .
13. Una placa de densidad uniforme  $k$  está acotada por la elipse  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ .
  - (a) Calcular el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje  $x$ .
  - (b) Calcular el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje  $y$ .
  - (c) Calcular el momento polar de inercia.

En los problemas 14 al 17 se dan una región  $\Omega$ , una densidad  $\rho(x, y)$  y una recta  $l$ . Formular, pero no evaluar,



una integral que represente al momento de inercia del material en  $\Omega$  con respecto a  $l$ .

14.  $\Omega: x^2 + y^2 \leq a^2$ ;  $\rho(x, y) = k$ ;  $l: y = -a$ .

15.  $\Omega: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x$ ;  $\rho(x, y) = 1 - y$ ;  
 $l: x = \frac{\pi}{2}$ .

16.  $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ;  $\rho(x, y) = k$ ;  $l: x = -a$ .

17.  $\Omega: \{x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\} \cap \{(x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ ;  
 $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ;  $l: x = 0$ .

18. **Centro de masa de un cuerpo compuesto.** Supongamos que una distribución de masa ocupa la región  $\Omega$  del plano  $xy$ , y que  $\Omega$  se puede separar en dos partes que no traslapan,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  (véase figura 17.3.11).

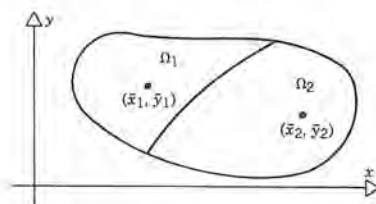


Figura 17.3.11

Supongamos que los centros de masa de las dos partes, respectivamente, son  $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$  y  $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ , y que las masas de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. Si  $(\bar{x}, \bar{y})$  es el centro de masa de la región total  $\Omega$ , demostrar que

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 M_1 + \bar{x}_2 M_2}{M_1 + M_2}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 M_1 + \bar{y}_2 M_2}{M_1 + M_2}.$$

Así, el centro de masa de una región de forma complicada se puede calcular dividiendo esa región en subregiones de forma más sencilla.

En los problemas 19 a 22 emplear el resultado del problema 18 para localizar el centro de masa del material en la región dada.

19. La región que se muestra en la figura 17.3.12, donde  $\rho(x, y) = k$ .

20. La región que se muestra en la figura 17.3.13, donde

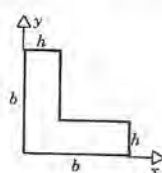


Figura 17.3.12

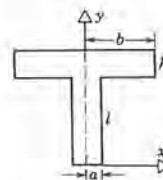


Figura 17.3.13

$\rho(x, y) = k_1$  en la pieza inferior y  $\rho(x, y) = k_2$  en la pieza horizontal cruzada.

21. La región se muestra en la figura 17.3.14, y  $\rho(x, y) = k$ .

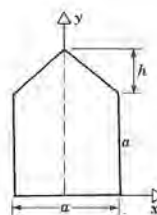


Figura 17.3.14

22. La región se muestra en la figura 17.3.15, y  $\rho(x, y) = k$ .

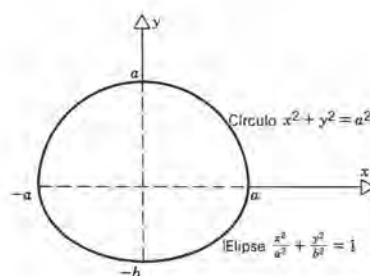
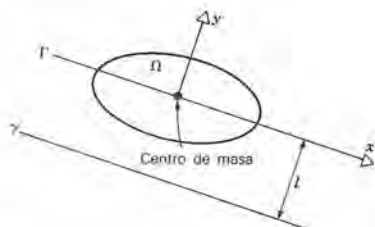


Figura 17.3.15

23. **Teorema de los ejes paralelos para el momento de inercia.** Supongamos que el plano de la región  $\Omega$  en la figura 17.3.16 está ocupado por una distribución de masa descrita por una función densidad  $\rho$  dada. Sea  $\gamma$  una recta dada en el plano y  $\Gamma$  la recta paralela a  $\gamma$  que

pasa por el centro de masa de  $\Omega$ . Sean  $I_\gamma$  e  $I_\Gamma$  los momentos de inercia de  $\Omega$  con respecto a  $\gamma$  y a  $\Gamma$ , respectivamente.



**Figura 17.3.16** El teorema de los ejes paralelos:

$$I_\gamma = I_\Gamma + l^2 M.$$

(a) Demostrar que

$$I_\gamma = I_\Gamma + l^2 M, \quad (i)$$

donde  $l$  es la distancia entre  $\gamma$  y  $\Gamma$ , y  $M$  la masa total de  $\Omega$ .

*Sugerencia:* seleccionar los ejes coordenados como se muestra en la figura 17.3.16.

(b) Emplear los resultados del problema 9(a, c) para comprobar que (i) es cierta para el caso que se considera allí.

(c) Emplear los resultados del problema 11(b, d) para comprobar que (i) es cierta para el caso que se considera allí.

**24.** Emplear el teorema de los ejes paralelos (problema 23) para calcular el momento de inercia de una placa circular de radio  $a$  y de densidad  $k$  uniforme con respecto a una recta tangente. Comparar con el problema 14.

**25.** Una placa en forma de un triángulo rectángulo tiene densidad uniforme  $k$  y sus lados son  $a$ ,  $a$  y  $\sqrt{2}a$ . Mediante el teorema de los ejes paralelos (problema 23) y los resultados de los problemas 5 y 10, calcular el momento de inercia con respecto a la recta paralela a la hipotenusa y que pasa por el vértice opuesto.

**26.** Una placa de densidad uniforme  $k$  tiene la forma de una elipse con semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$ .

(a) Emplear el teorema de los ejes paralelos (problema 23) y los resultados del problema 13 para calcular el momento de inercia de la placa con respecto a

la recta tangente a la elipse en un extremo del eje mayor. Comparar con el problema 16.

(b) Calcular el momento polar de inercia con respecto a un extremo del eje mayor.

**27. Teorema de Pappus.** Las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  del centroide de la región  $\Omega$  del plano  $xy$  son

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Omega} x \, dA}{\iint_{\Omega} dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_{\Omega} y \, dA}{\iint_{\Omega} dA}.$$

Suponer que  $\Omega$  no cruza ninguno de los ejes coordenados, aunque los puede tocar; suponer también que  $\Omega$  puede describirse mediante las desigualdades tanto de la forma (12) como de la forma (15) de la sección 17.2.

(a) Demostrar que

$$\iint_{\Omega} x \, dA = \frac{V_y}{2\pi},$$

donde  $V_y$  es el volumen del sólido formado al girar a  $\Omega$  alrededor del eje  $y$ . A continuación demostrar que

$$\bar{x} = \frac{V_y}{2\pi A},$$

el la cual  $A$  es el área de  $\Omega$ .

(b) De igual forma, demostrar que

$$\bar{y} = \frac{V_x}{2\pi A},$$

en la cual  $V_x$  es el volumen del sólido que se forma al girar a  $\Omega$  en torno al eje  $x$ .

Los resultados de las partes (a) y (b) se conocen como "teorema de Pappus." Si  $V_x$ ,  $V_y$  y  $A$  se pueden calcular con facilidad, entonces el teorema de Pappus es un método cómodo para ubicar el centroide de  $\Omega$ .

En los problemas 28 a 30 emplear el teorema de Pappus para localizar el centroide de la región  $\Omega$  dada.

**28.**  $\Omega$  es el triángulo cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ .

**29.**  $\Omega$  es un semicírculo con radio  $a$ .

**30.**  $\Omega$  es el cuarto de círculo  $x^2 + y^2 \leq a^2$  donde  $x \geq 0$  y  $y \geq 0$ .

## 17.4 INTEGRACIÓN EMPLEANDO COORDENADAS POLARES

Hasta ahora hemos estudiado las integrales dobles y su evaluación empleando integrales iteradas en un sistema de coordenadas rectangulares. Sin embargo, las integrales iteradas se pueden calcular también en otros sistemas de coordenadas, para evaluar las integrales dobles y a veces es más sencillo hacerlo así. En esta sección estudiaremos el empleo de las coordenadas polares  $(r, \theta)$  para evaluar las integrales dobles.

Para representar mediante coordenadas polares a puntos del plano, de manera esencialmente única, se requiere ahora que  $r \geq 0$ , y que  $\theta$  quede en un intervalo conveniente de longitud  $2\pi$ , en general  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , ó  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Nótese que esto es un punto de vista distinto al del capítulo 14.

En coordenadas cartesianas, la región básica elemental es el rectángulo; la región correspondiente en coordenadas polares es el llamado rectángulo polar

$$R: a \leq r \leq b, \quad c \leq \theta \leq d \quad (1)$$

que se muestra en la figura 17.4.1.

Supongamos ahora que deseamos evaluar la integral de una función  $f$  sobre el rectángulo polar  $R$ . Primero, tomamos una partición  $\Delta$  de  $R$  que consta de subrectángulos polares más pequeños  $R_{ij}$ , donde  $i = 1, \dots, m$  y  $j = 1, \dots, n$  (véase figura 17.4.2). La norma  $\|\Delta\|$  de la partición  $\Delta$  es la longitud de la diagonal más larga de todos los subrectángulos en  $\Delta$ . Un subrectángulo polar típico  $R_{ij}$  está acotado por los arcos de dos círculos  $r = r_{i-1}$  y  $r = r_i$ , y por los segmentos de dos rectas radiales,  $\theta = \theta_{j-1}$  y

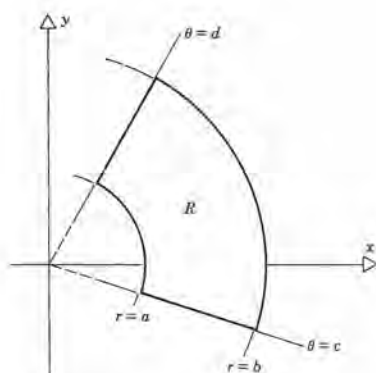


Figura 17.4.1 Un rectángulo polar  $R$ .

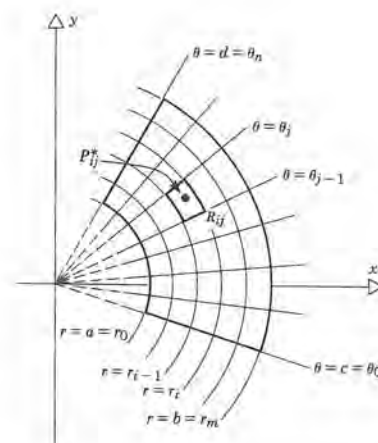


Figura 17.4.2 Una partición de  $R$  en subrectángulos polares.



$\theta_j$ . Sea  $\Delta A_{ij}$  el área de  $R_{ij}$ , y escojamos un punto estrella  $P_{ij}^*(r_i^*, \theta_j^*)$  en forma arbitraria en cada subrectángulo, y formemos la suma de Riemann

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} f(r_i^*, \theta_j^*) \Delta A_{ij}. \quad (2)$$

Si  $f$  es continua en  $R$  excepto, a lo más, en un conjunto de puntos que queden en un número infinito de arcos suaves rectificables, entonces, de acuerdo con el teorema 17.1.2,

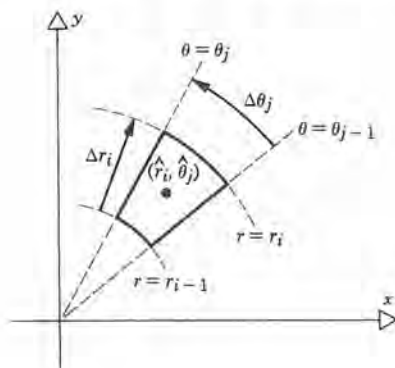
$$\iint_R f(r, \theta) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} f(r_i^*, \theta_j^*) \Delta A_{ij}. \quad (3)$$

Además, el valor límite es el mismo, independientemente de cómo se lleve a cabo la partición, de cómo se escojan los puntos estrella y de cómo  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . Así, podemos llevar a cabo esos pasos de cualquier modo que escojamos y, si seleccionamos un modo que sea más conveniente, podemos remplazar a la integral doble (3) por integrales iteradas con respecto a  $r$  y a  $\theta$ .

Lo primero que se necesita es una ecuación para  $\Delta A_{ij}$ . El subrectángulo polar típico  $R_{ij}$  que se ve en la figura 17.4.3 es la parte del anillo circular entre  $r = r_{i-1}$  y  $r = r_i$  que abarca el ángulo  $\Delta\theta_j$ . Así, su área  $\Delta A_{ij}$  está dada por

$$\begin{aligned} \Delta A_{ij} &= \pi r_i^2 \frac{\Delta\theta_j}{2\pi} - \pi r_{i-1}^2 \frac{\Delta\theta_j}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta_j \\ &= \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) \Delta\theta_j \\ &= \frac{1}{2} (r_i + r_{i-1}) \Delta r_i \Delta\theta_j \\ &= \hat{r}_i \Delta r_i \Delta\theta_j, \end{aligned} \quad (4)$$

en la que  $\hat{r}_i = (r_i + r_{i-1})/2$  es el radio medio del subrectángulo polar  $R_{ij}$ .



**Figura 17.4.3** Un subrectángulo polar típico.

El siguiente paso consiste en seleccionar los puntos estrella  $P_{ij}^*$ . Hacemos que  $P_{ij}^*$  sea el centro del subrectángulo polar  $R_{ij}$  y, entonces sus coordenadas son  $r_i^* = \hat{r}_i$ , y  $\theta_j^* = \hat{\theta}_j$ , donde  $\hat{\theta}_j = (\theta_j + \theta_{j-1})/2$ . Entonces la ecuación 3 se transforma en

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} f(\hat{r}_i, \hat{\theta}_j) \hat{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j. \quad (5)$$

Por último, consideraremos el límite del lado derecho de la ecuación 5. Refinamos la partición primero en la dirección  $r$  haciendo que  $\Delta r_i \rightarrow 0$  y que  $m \rightarrow \infty$ ; esto corresponde a integrar con respecto a  $r$  teniendo fija a  $\theta$ . A continuación refinamos la partición en la dirección de  $\theta$  haciendo que  $\Delta \theta_j \rightarrow 0$  y  $n \rightarrow \infty$ , lo que corresponde a integrar con respecto a  $\theta$ . De este modo, la integral doble se evalúa mediante un conjunto equivalente de integrales iteradas:

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_c^d \int_a^b f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (6)$$

Nótese especialmente que en las integrales iteradas del lado derecho de la ecuación 6, el elemento de área  $dA$  se sustituye por  $r dr d\theta$ , no tan sólo por  $dr d\theta$ .

Del mismo modo que en las coordenadas rectangulares, podemos extender el empleo de las integrales iteradas en coordenadas polares a muchas regiones que no sean rectángulos polares. Por ejemplo, supongamos que la región  $\Omega$  de la figura 17.4.4 está definida por

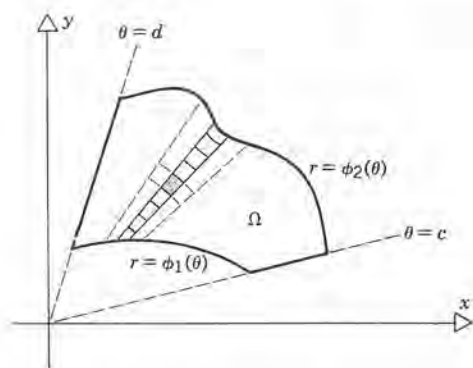


Figura 17.4.4

$$\Omega: \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta), \quad c \leq \theta \leq d, \quad (7)$$

donde  $\phi_1'$  y  $\phi_2'$  son continuas en  $[c, d]$ . Entonces, en lugar de la ecuación 6 tenemos

$$\iint_{\Omega} f(r, \theta) dA = \int_c^d \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (8)$$

Como en el caso de las coordenadas rectangulares, se puede representar el proceso de integración que se indica en el lado derecho de la ecuación 8 suponiendo que la

región  $\Delta$  se debe cubrir con pequeñas losetas que tienen la forma de rectángulos polares (véase figura 17.4.4). La integración con respecto a  $r$  corresponde a la formación de una cuña delgada de esas losetas, que va desde la frontera interior  $r = \phi_1(\theta)$  hasta la frontera exterior  $r = \phi_2(\theta)$ . Entonces, la integración con respecto a  $\theta$  corresponde a colocar muchas de esas cuñas lado a lado hasta que la región  $\Omega$  quede cubierta por completo.

La interpretación de la integral

$$\iint_{\Omega} f(r, \theta) dA \quad (9)$$

depende, desde luego, de lo que represente  $f(r, \theta)$ . Por ejemplo, la integral (9) podría dar el valor de un volumen, de una masa o de un momento, como se vio en las secciones anteriores. Si  $f(r, \theta) = 1$  para cada punto de  $\Omega$ , entonces la expresión (9) es justamente el área  $A$  de  $\Omega$ . En este caso, la ecuación 8 da

$$A = \int_c^d \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} r dr d\theta. \quad (10)$$

Se puede llevar a cabo inmediatamente la integración con respecto a  $r$ , y el resultado es

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d \left. \frac{r^2}{2} \right|_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_c^d [\phi_2^2(\theta) - \phi_1^2(\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Esto es consistente con el resultado que se obtuvo antes en la sección 14.3.

## EJEMPLO 1

Calcular la masa total  $M$  del sector del anillo

$$\Omega: 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

si la densidad (masa/área) está dada por  $\rho(r, \theta) = \sin 2\theta$  (véase figura 17.4.5).

La masa  $M$  está definida por la integral de  $\rho(r, \theta)$  en la región dada. Así,

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \rho(r, \theta) dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 (\sin 2\theta) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Para calcular  $M$  integramos primero con respecto a  $r$  manteniendo constante a  $\theta$  y después integramos con respecto a  $\theta$ . Obtenemos

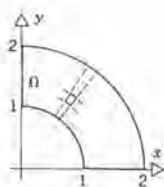


Figura 17.4.5



$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} 2\theta) \left. \frac{r^2}{2} \right|_1 d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2\theta d\theta \\
 &= \frac{3}{2} \left( -\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{3}{4} (1 + 1) = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

## EJEMPLO 2

La región  $\Omega$  está fuera del círculo  $r = 3$  y dentro de la cardioide  $r = 2(1 + \cos \theta)$ . Supongamos que  $\Omega$  está ocupada por un material cuya masa por unidad de área  $\rho(r, \theta)$  es inversamente proporcional a la distancia al origen. Calcular la masa  $M$  del material y las coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  del centro de masa.

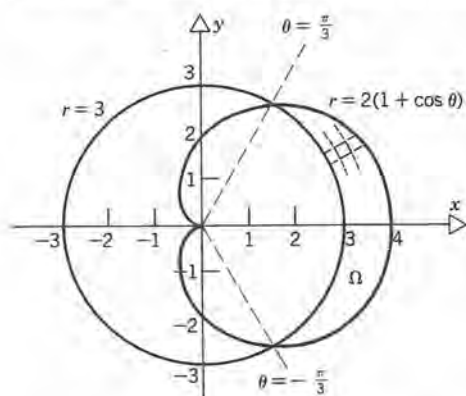


Figura 17.4.6

La región  $\Omega$  se muestra en la figura 17.4.6. La función densidad es

$$\rho(r, \theta) = \frac{k}{r},$$

en la cual  $k$  es una constante de proporcionalidad, así que la masa total está dada por

$$M = \iint_{\Omega} \rho(r, \theta) dA.$$

Para obtener integrales iteradas equivalentes necesitamos describir a  $\Omega$  por desigualdades de la forma (7) y ello requiere que determinemos los puntos de la intersección del círculo con la cardioide. Tenemos

$$r = 3 = 2(1 + \cos \theta),$$

de donde se deduce que  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  y, por tanto,  $\theta = \pm \pi/3$ . Así,  $\Omega$  está definida por

$$\Omega: 3 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad (12)$$

y en consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_3^{2(1+\cos \theta)} \frac{k}{r} r \, dr \, d\theta \\ &= 2k \int_0^{\pi/3} \int_3^{2(1+\cos \theta)} dr \, d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Obsérvese que al formular la ecuación 13 hemos integrado sobre la mitad superior de  $\Omega$  y multiplicado el resultado por dos; esto se permite porque tanto la región de integración como el integrando son simétricos con respecto al eje  $x$ .

Por último, si evaluamos las integrales de la ecuación 13. obtenemos

$$\begin{aligned} M &= 2k \int_0^{\pi/3} (2 \cos \theta - 1) \, d\theta \\ &= 2k(2 \sin \theta - \theta) \Big|_0^{\pi/3} \\ &= 2k \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) \cong 1.37 \, k. \end{aligned} \quad (14)$$

A continuación localicemos el centro de masa. Primero, nótese que la simetría del problema implica que  $\bar{y} = 0$  y, por tanto, sólo necesitamos calcular  $\bar{x} = L_y/M$ . Tenemos entonces

$$\begin{aligned} L_y &= \int \int_{\Omega} x \, \rho(r, \theta) \, dA \\ &= 2 \int_0^{\pi/3} \int_3^{2(1+\cos \theta)} (r \cos \theta) \left( \frac{k}{r} \right) r \, dr \, d\theta \\ &= 2k \int_0^{\pi/3} \int_3^{2(1+\cos \theta)} r \cos \theta \, dr \, d\theta. \end{aligned}$$

Evaluando la integral con respecto a  $r$ , obtenemos

$$\begin{aligned} L_y &= k \int_0^{\pi/3} \cos \theta [4(1 + \cos \theta)^2 - 9] \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/3} \cos \theta (-5 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

$$= k \int_0^{\pi/3} (-5 \cos \theta + 8 \cos^2 \theta + 4 \cos^3 \theta) d\theta. \quad (15)$$

El segundo término del último integrando se puede integrar empleando la fórmula para la mitad del ángulo, y el tercer término empleando el hecho de que  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ . Tenemos así que

$$\begin{aligned} L_y &= k \int_0^{\pi/3} [-5 \cos \theta + 4 + 4 \cos 2\theta + 4 \cos \theta (1 - \sin^2 \theta)] d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/3} (4 - \cos \theta + 4 \cos 2\theta - 4 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \\ &= k \left( 4\theta - \sin \theta + \sin 2\theta - \frac{4}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi/3} \\ &= k \left( \frac{4}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi k \cong 4.19 k. \end{aligned} \quad (16)$$

Por último,

$$\bar{x} = \frac{L_y}{M} = \frac{4k\pi/3}{2k(3\sqrt{3} - \pi)/3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3} - \pi} \cong 3.06. \blacksquare$$

Cuando nos encontremos con un problema en el que intervenga la evaluación de una integral doble, se debe recordar que se pueden usar coordenadas ya sea cartesianas o polares. La selección del sistema de coordenadas se debe basar en el que facilite los cálculos. Si bien esto no se puede prever, la práctica resulta conveniente; además, si la primera selección lleva a complicaciones, vale la pena considerar si la otra podría acarrear una mejora. En particular, si las fronteras de la región de integración involucran a círculos con centro en el origen, rectas radiales, cardioides, etcétera, o si aparece la expresión  $x^2 + y^2$  en el integrando, entonces se deben recomendar fuertemente las coordenadas polares.

### EJEMPLO 3

Calcular el volumen  $V$  de la región que queda arriba del plano  $xy$ , abajo de la paraboloides  $z = 4 - x^2 - y^2$  y dentro del cilindro  $r = 2 \sin \theta$ .

En la figura 17.4.7a se muestra la región tridimensional cuyo volumen se busca. Este volumen,  $V$ , está dado por

$$V = \int \int_{\Omega} (4 - x^2 - y^2) dA, \quad (17)$$



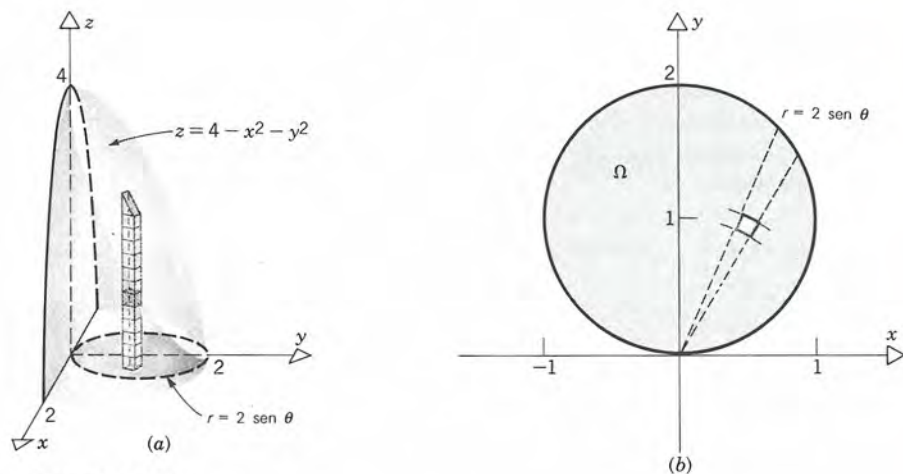


Figura 17.4.7

en la cual  $\Omega$  es la región del plano  $xy$  que queda dentro del círculo  $r = 2 \operatorname{sen} \theta$  (véase figura 17.4.7b). La región de integración

$$\Omega: 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

se describe mejor en coordenadas polares y el integrando depende de la combinación  $x^2 + y^2$ . Por tanto, será mejor evaluar la integral (17) empleando coordenadas polares. Sustituyendo el elemento de integración  $dA$  por  $r \, dr \, d\theta$ , y presentándolo en términos de  $r$  y  $\theta$ , tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} (4 - r^2) r \, dr \, d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi (4 - r^2)^2 \Big|_0^{2 \operatorname{sen} \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi [(4 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta)^2 - 16] d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi (1 - \cos^4 \theta) d\theta. \end{aligned}$$

La integración con respecto a  $\theta$  se puede llevar a cabo mediante el uso repetido de la fórmula para la mitad del ángulo:

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^\pi \left[ 1 - \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta)^2 \right] d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos^2 2\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\pi} \left[ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{8} (1 + \cos 4\theta) \right] d\theta \\
&= 4 \int_0^{\pi} \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta \\
&= 4 \left( \frac{5}{8} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{32} \sin 4\theta \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{5\pi}{2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

### EJEMPLO 4

Evaluar la integral

$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy. \quad (18)$$

Si tratamos de trabajar con esa integral así como está, la primera integración (con respecto a  $x$ ) es fácil, y obtenemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left( \frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \Big|_y^{\sqrt{2-y^2}} dy \\
&= \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} (2 - y^2)^{3/2} + y^2 \sqrt{2 - y^2} - \frac{4}{3} y^3 \right] dy.
\end{aligned}$$

La integración que resta es lo suficientemente difícil como para que en esta etapa, si no es que antes, nos detengamos y consideremos otras posibilidades. Una consiste en invertir el orden de la integración, esto es, determinar los límites de integración de tal modo que integremos primero con respecto a  $y$  y después con respecto a  $x$ . Sin embargo, en este caso esto no ayuda, como puede comprobar el lector.

La presencia de  $x^2 + y^2$  en el integrando nos sugiere que podrían ayudarnos las coordenadas polares. Para reformular el problema en coordenadas polares necesitamos determinar la región de integración. Esto se puede deducir de los límites de la integral original (18):  $x$  va de  $x = y$  hasta  $x = \sqrt{2 - y^2}$ , y de  $y = 0$  hasta  $y = 1$ . La gráfica de  $x = \sqrt{2 - y^2}$  es parte del círculo  $x^2 + y^2 = 2$ , y, por tanto, la región  $\Omega$  de integración es como la que se muestra en la figura 17.4.8a; es el sector del disco  $x^2 + y^2 \leq 2$  comprendido entre el eje  $x$  y la recta  $y = x$ . En términos de coordenadas polares, las fronteras de  $\Omega$  son el círculo  $r = \sqrt{2}$  y las rectas  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/4$ , como se ve en la figura 17.4.8b. Así, en coordenadas polares tenemos que

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 r dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr d\theta. \quad (19)$$

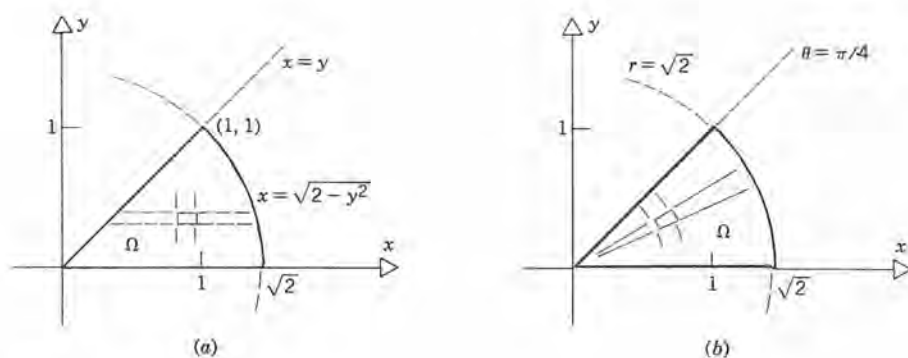


Figura 17.4.8

Es claro que  $I$  es mucho más sencilla en coordenadas polares y se puede evaluar con facilidad:

$$I = \int_0^{\pi/4} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{\pi}{4}. \blacksquare$$

Obsérvese que al formular la integral (19) en coordenadas polares reemplazamos el integrando original  $x^2 + y^2$  por la expresión  $r^2$  equivalente, en coordenadas polares; reemplazamos el elemento de integración  $dx dy$  por  $r dr d\theta$ , y establecimos los límites de las integrales en la región adecuada de integración. Este último paso *nunca* se debe hacer empleando un proceso de sustitución mecánica. En lugar de ello, *siempre* se debe hacer un dibujo de la región de integración, para después establecer los límites que se necesitan para integrar sobre esta región.

## EJEMPLO 5

Calcular el momento de inercia de una placa circular de radio  $a$  y de densidad uniforme  $\rho(x, y) = k$ , con respecto a un diámetro.

Escogemos al origen como centro del círculo, de modo que tanto  $I_x$  como  $I_y$  sean el momento de inercia pedido. Además, por simetría, sabemos que  $I_x = I_y$  y, en consecuencia,  $I_x = I_0/2$ , donde  $I_0$  es el momento polar de inercia. Lo más sencillo es calcular  $I_0$ ; tenemos que

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_{\Omega} k(x^2 + y^2) dA \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r dr d\theta \end{aligned}$$



$$= k \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\pi k a^4}{2}.$$

Por tanto, el resultado es

$$I_x = I_y = \frac{\pi k a^4}{4}. \blacksquare$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, hacer un dibujo de la región de integración y evaluar la integral dada.

$$1. \int_0^{\pi} \int_0^2 r \sin \theta \, r \, dr \, d\theta$$

$$2. \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \sin \theta \cos \theta \, r \, dr \, d\theta$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\sin \theta} \cos \theta \, r \, dr \, d\theta$$

$$4. \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sin 2\theta} \cos 2\theta \, dr \, d\theta$$

$$5. \int_{\pi/18}^{5\pi/18} \int_1^{2 \tan 3\theta} r \, dr \, d\theta \quad 6. \int_{\pi/2}^{5\pi/6} \int_1^{2 \sin \theta} \sin \theta \, dr \, d\theta$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \int_{2 \sin \theta}^2 \sin \theta \, r \, dr \, d\theta$$

$$8. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{(3/4)\sec \theta}^{1+\cos \theta} \cos \theta \, dr \, d\theta$$

En los problemas 9 a 12, hacer un dibujo de la región de integración y a continuación evaluar la integral transformándola a coordenadas polares.

$$9. \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx \, dy$$

$$10. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \, dx$$

$$11. \int_0^{3/2} \int_{\sqrt{3x}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-x^2} e^{-y^2} \, dy \, dx$$

$$12. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-x^2-y^2)^{3/2} \, dx \, dy$$

13. Calcular el área de la región dentro del círculo  $r = 2a \sin \theta$  y fuera del círculo  $r = a$ .

14. Calcular el área de la región dentro de la cardioide  $r = 1 + \sin \theta$  que está arriba de la recta  $y = \frac{3}{4}$ .

15. Calcular el volumen de la región encerrada entre el plano  $xy$  y la superficie  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

16. Calcular el volumen de la región encerrada por las superficies  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 4 - x - x^2$ .

17. Calcular el volumen de la región acotada por el cilindro  $r = 1 + \cos \theta$ , por el plano  $z = 4 - y$  y por el plano  $xy$ .

18. Calcular el volumen de la región que es común a la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y al cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ .

19. Calcular el volumen común de las esferas  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y  $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ .

20. Localizar el centroide de la región del primer cuadrante acotada por  $r = a \sin 2\theta$ .

21. Localizar el centroide de la región del primer cuadrante acotada por  $r = a \sin 2\theta$ .

22. Localizar el centroide de la región de los primeros dos cuadrantes, acotada por el eje  $x$  y la gráfica de  $r = \theta$  para  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

23. Una placa semicircular de densidad  $k$  uniforme está acotada por el eje  $x$  y por el arco  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y \geq 0$ .

(a) Calcular el momento de inercia con respecto al eje  $x$ .

## 1016 INTEGRALES MÚLTIPLES

- (b) Calcular el momento de inercia con respecto al eje  $y$ .
- (c) Calcular el momento polar de inercia.
24. Localizar el centro de masa del sector del anillo  $1 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  si  $\rho(r, \theta) = \sin 2$  (véase ejemplo 1).
25. Un anillo semicircular ocupa la región  $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , y su densidad es inversamente proporcional a la distancia al origen. Calcular
- (a) la masa,
- (b) el centro de masa,
- (c) el momento de inercia con respecto al eje  $x$ ,
- (d) el momento de inercia con respecto al eje  $y$ .
26. Un anillo circular tiene un radio interior  $a$  y un radio exterior  $b$ . Su densidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro. Calcular el momento de inercia con respecto:
- (a) a un diámetro,
- (b) a una recta tangente a la frontera interior,
- (c) a una recta tangente a la frontera exterior.

*Sugerencia:* en las partes (b) y (c) el lector puede consultar en el problema 23 de la sección 17.3, el teorema de los ejes paralelos.

27. Una placa semicircular de densidad  $k_2$  constante se une a una placa cuadrada de densidad  $k_1$  constante, como se ve en la figura 17.4.9. Calcular la relación

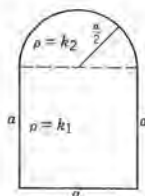


Figura 17.4.9

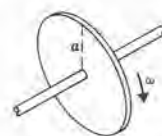


Figura 17.4.10

$k_2/k_1$  para la cual el centro de masa de la estructura combinada esté en la frontera entre el semicírculo y el cuadrado.

*Sugerencia:* consultar los problemas 18 y 19, sección 17.3.

28. Un volante de radio  $a$ , de espesor uniforme y densidad  $k$  constante gira alrededor de un eje que pasa por su centro. La velocidad angular  $\omega$  rad/seg es constante (véase figura 17.4.10). Calcular la energía cinética  $E$  del volante.

## 17.5 INTEGRALES TRIPLES

Es importante poder extender el concepto y los métodos de integración a funciones de más de dos variables y a regiones de espacios de más de dos dimensiones. Por fortuna, el proceso de integración se generaliza de manera directa de dos dimensiones a un mayor número de ellas. En esta sección estudiaremos las integrales de funciones de tres variables. Para hacer que esta presentación sea tan sencilla como sea posible, nos limitaremos a funciones que sean continuas siempre en la región de integración. Seguiremos el patrón de las secciones 17.1 y 17.2, de modo que nuestro estudio pueda ser breve; no se presentan ideas nuevas en este caso, sino tan sólo una dimensión más.

Sea  $R$  la caja rectangular, o paralelepípedo,  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ ,  $p \leq z \leq q$  que se ve en la figura 17.5.1 y sea  $f$  una función continua en todos los puntos en  $R$ . Nuestra tarea consiste en definir y mostrar cómo evaluar la integral de  $f$  sobre  $R$ . Primeramente subdividimos a  $R$  en una colección  $\Delta$  de cajas rectangulares de menor tamaño mediante planos paralelos a los planos coordenados:  $x = x_i$  donde  $i = 1, \dots, l-1$ ,  $y = y_j$  para  $j = 1, \dots, m-1$  y  $z = z_k$  para  $k = 1, \dots, n-1$ . Esta partición está representada en la figura 17.5.2. Una caja típica en  $\Delta$  se representa mediante  $R_{ijk}$  y está acotada por los

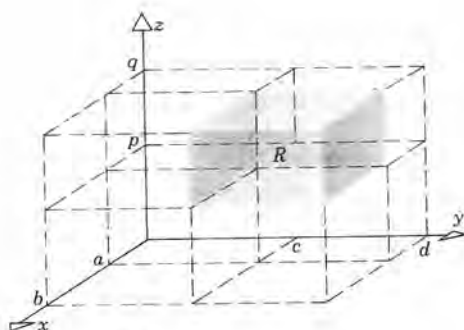


Figura 17.5.1

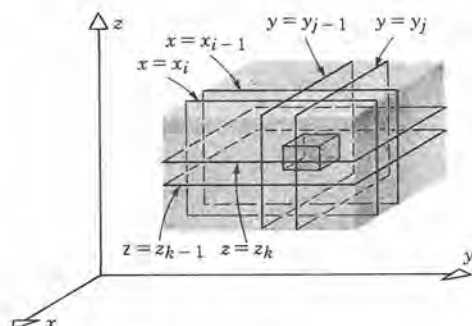


Figura 17.5.2

planos  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$ ,  $y = y_{j-1}$ ,  $y = y_j$ ,  $z = z_{k-1}$  y  $z = z_k$ , como se ve en la figura 17.5.3. El volumen  $\Delta V_{ijk}$  de  $R_{ijk}$  es

$$\begin{aligned}\Delta V_{ijk} &= (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}) \\ &= \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.\end{aligned}\tag{1}$$

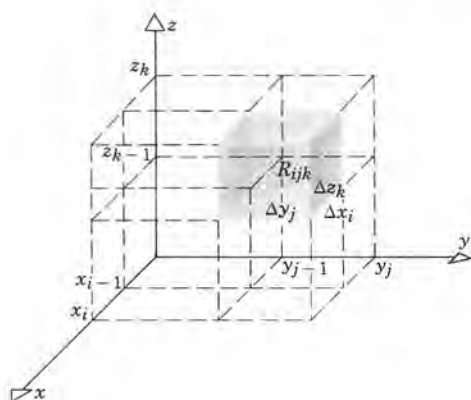


Figura 17.5.3

La norma  $\|\Delta\|$  de la partición  $\Delta$  es la longitud de la diagonal más larga de todas las cajas de  $\Delta$ .

A continuación, seleccionamos un punto estrella  $P_{ijk}^*(x_i^*, y_j^*, z_k^*)$  en forma arbitraria en cada caja  $R_{ijk}$  y formamos la suma de Riemann

$$\sum_{i,j,k} f(P_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}.\tag{2}$$

Por último, veamos qué sucede con el límite de la suma (2) cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ . Para todas las funciones  $f$  continuas (y en muchas otras funciones acotadas cuyos puntos



de discontinuidad no sean demasiado numerosos) es posible demostrar que cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , la suma (2) tiende a un límite definido, al cual nosotros llamaremos la integral de  $f$  sobre  $R$ :

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i,j,k} f(P_{ijk}^*) \Delta V_{ijk}. \quad (3)$$

Además, el valor del límite no depende de cómo se forme la partición, ni de cómo se escojan a los puntos estrella, ni de cómo  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ .

A la integral del lado izquierdo de la ecuación 3 se le llama **integral triple**, y se representa empleando tres signos de integración. Hay muchos casos en los que surgen esas integrales de modo natural. Por ejemplo,  $f(x, y, z)$  puede ser la densidad (masa por unidad de volumen) de un material que ocupe la caja  $R$ . Entonces cada término de la suma de Riemann (2) es una aproximación a la masa del material en  $R_{ijk}$ , y toda la suma es una aproximación a la masa de  $R$ . La masa total  $M$  de  $R$  se define como el valor límite de la suma de Riemann cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ; así,

$$M = \iiint_R f(x, y, z) dV. \quad (4)$$

Análogamente, si  $f(x, y, z) = 1$  en cada punto de  $R$ , entonces la integral triple (3) nos da el volumen  $V$  de la caja  $R$ .

El valor de la integral triple  $\iiint_R f(x, y, z) dV$  se puede calcular evaluando un conjunto de integrales sencillas iteradas, exactamente igual que en el caso bidimensional. Para poder tener una representación de lo que está implícito será útil pensar como sigue. Supongamos que se tiene que llenar un cuarto con pequeños tabiques en forma de caja. Si hacemos que  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  refinando primero la red en la dirección  $x$ , llegamos a una integral con respecto a  $x$ . Esto corresponde a la formación de una banda de una sola hilera de tabiques paralela al eje  $x$  (véase figura 17.5.4a). A continuación refina-

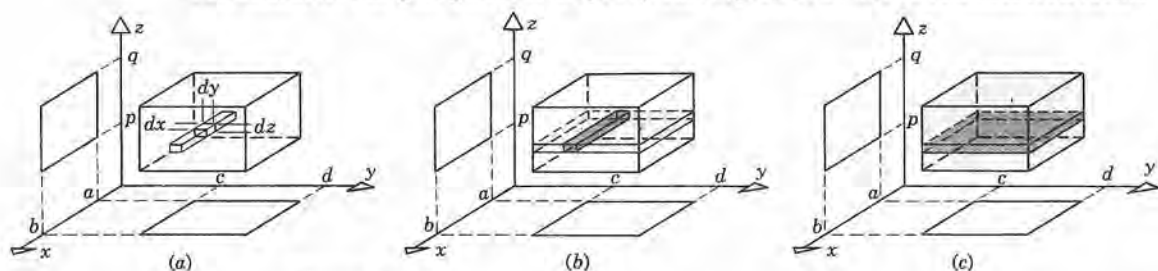


Figura 17.5.4

mos la red en la dirección  $y$ , con lo cual se llega a una integral con respecto a  $y$ . Esto corresponde a combinar muchas bandas para formar una capa o placa paralela al plano  $xy$  (véase figura 17.5.4b). Por último, al refinar la red en la dirección  $z$  llegamos a una integral con respecto a  $z$ , y esto corresponde al apilamiento de las capas una sobre otra hasta que el cuarto esté completamente lleno de tabiques (véase figura 17.5.4c). De

este modo obtenemos

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz. \quad (5)$$

Obsérvese que se ha remplazado  $dV$  por  $dx dy dz$ , el volumen de un paralelepípedo rectangular de lados  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ . Las integrales iteradas del lado derecho de la ecuación 5 se deben evaluar desde el interior hacia el exterior; así, se integra primero con respecto a  $x$  desde  $x = a$  hasta  $x = b$  manteniendo constantes a  $y$  y a  $z$ ; a continuación se integra con respecto a  $y$  desde  $y = c$  hasta  $y = d$  manteniendo al mismo tiempo  $y$  y  $z$  constantes; por último se integra con respecto a  $z$  desde  $z = p$  hasta  $z = q$ . Es natural que la integración también se puede llevar a cabo siguiendo otros órdenes (5 más); por ejemplo, si escogemos escribir

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z) dz dy dx \quad (6)$$

en lugar de la ecuación 5, entonces se lleva a cabo la integración primero con respecto a  $z$ , a continuación con respecto a  $y$  y por último con respecto a  $x$ .

### EJEMPLO 1

El material de la caja

$$R: 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 2$$

tiene densidad  $\rho(x, y, z) = 6 - x - y - z$ . Calcular la masa total  $M$  de la caja.

De acuerdo con la ecuación 4, tenemos que

$$M = \iiint_R (6 - x - y - z) dV.$$

Optamos por integrar primero con respecto a  $z$ , después con respecto a  $y$  y por último con respecto a  $x$ . Así

$$M = \int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 (6 - x - y - z) dz dy dx.$$

Integrando con respecto a  $z$  con  $x$  y  $y$  fijas, obtenemos

$$\begin{aligned} M &= \int_0^3 \int_0^1 \left( 6z - xz - yz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=2} dy dx \\ &= \int_0^3 \int_0^1 (10 - 2x - 2y) dy dx. \end{aligned}$$

A continuación, integrando con respecto a  $y$  y manteniendo fija a  $x$ , encontramos que

$$\begin{aligned} M &= \int_0^3 (10y - 2xy - y^2) \Big|_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^3 (9 - 2x) dx. \end{aligned}$$

Por último, la integración con respecto a  $x$  da como resultado

$$M = (9x - x^2) \Big|_0^3 = 18,$$

que es el valor de la masa que se pidió.

El lector puede comprobar este resultado llevando a cabo la integración siguiendo otros órdenes. ■

La extensión de las integrales triples de cajas rectangulares a otras regiones  $\Omega$  tridimensionales se maneja exactamente de la misma forma que en la sección 17.1 para el caso de dos dimensiones. Encerramos a  $\Omega$  en una caja rectangular mayor  $R$  y definimos una función  $g$  tal que  $g(x, y, z) = f(x, y, z)$  en los puntos en  $\Omega$ , y  $g(x, y, z) = 0$  en los demás puntos. Definimos entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_R g(x, y, z) dV. \quad (7)$$

Con esta definición las integrales triples tienen las mismas propiedades de linealidad, de comparación, de aditividad, etcétera, que enunciamos para las integrales dobles en los teoremas 17.1.3 y 17.1.4.

Nuestro principal interés consiste en la evaluación de las integrales triples en determinados tipos de regiones tridimensionales relativamente sencillas, mediante integrales iteradas. Supongamos que  $\Omega$  es como se muestra en la figura 17.5.5a; esta región se describe mediante las desigualdades

$$\Omega: \chi_1(x, y) \leq z \leq \chi_2(x, y), \quad (x, y) \text{ en } \Omega_{xy}. \quad (8)$$

La región  $\Omega_{xy}$  bidimensional del plano  $xy$  se llama **proyección** de  $\Omega$  en el plano  $xy$ . Las fronteras inferior y superior de  $\Omega$  las dan las superficies  $z = \chi_1(x, y)$  y  $z = \chi_2(x, y)$ , respectivamente. La integral de una función  $f$  dada, en la región  $\Omega$  se puede expresar como

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{\Omega_{xy}} \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x, y, z) dz dA. \quad (9)$$

La primera integral del lado derecho de la ecuación 9 representa una integración con respecto a  $z$  desde la frontera inferior hasta la superior de  $\Omega$  (véase figura 17.5.5b). A esto sigue una integral doble sobre la proyección  $\Omega_{xy}$ . Por ejemplo, si  $\Omega_{xy}$  se describe



mediante

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad (10)$$

como lo indican las figuras 17.5.5c y 17.5.5d, entonces la ecuación 9 se transforma en

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx. \quad (11)$$

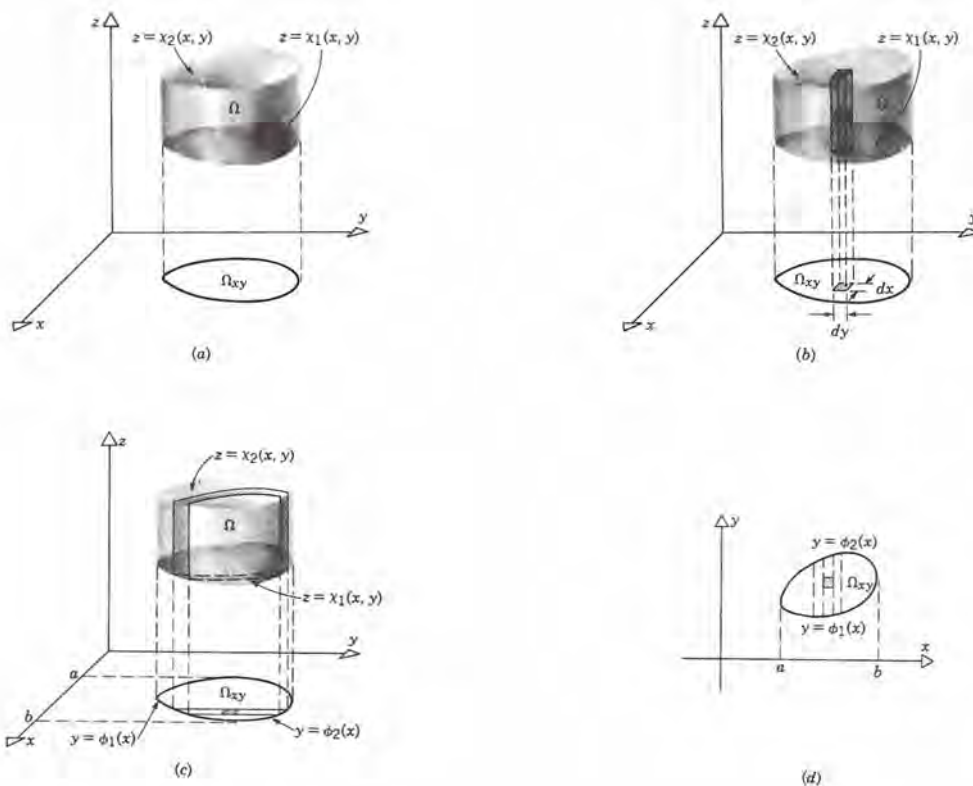


Figura 17.5.5

## EJEMPLO 2

Calcular el volumen de la región  $\Omega$  en el primer octante, acotada por los planos coordenados, el plano  $x + 2y = 2$  y la superficie  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

En la figura 17.5.6a se muestra la región  $\Omega$ . Su volumen  $V$  se puede calcular mediante una integral doble, como en la sección 17.2, pero con fines ilustrativos emplearemos en esta ocasión una integral triple. Lo más conveniente es proyectar a  $\Omega$  en el plano  $xy$ , en cuyo caso  $\Omega_{xy}$  es el triángulo cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(0, 1)$ , que se ven en la figura 17.5.6b. A continuación  $\Omega$  se puede describir mediante el siguiente conjunto de desigualdades:

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, \quad 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2. \quad (12)$$

Las integrales iteradas correspondientes son

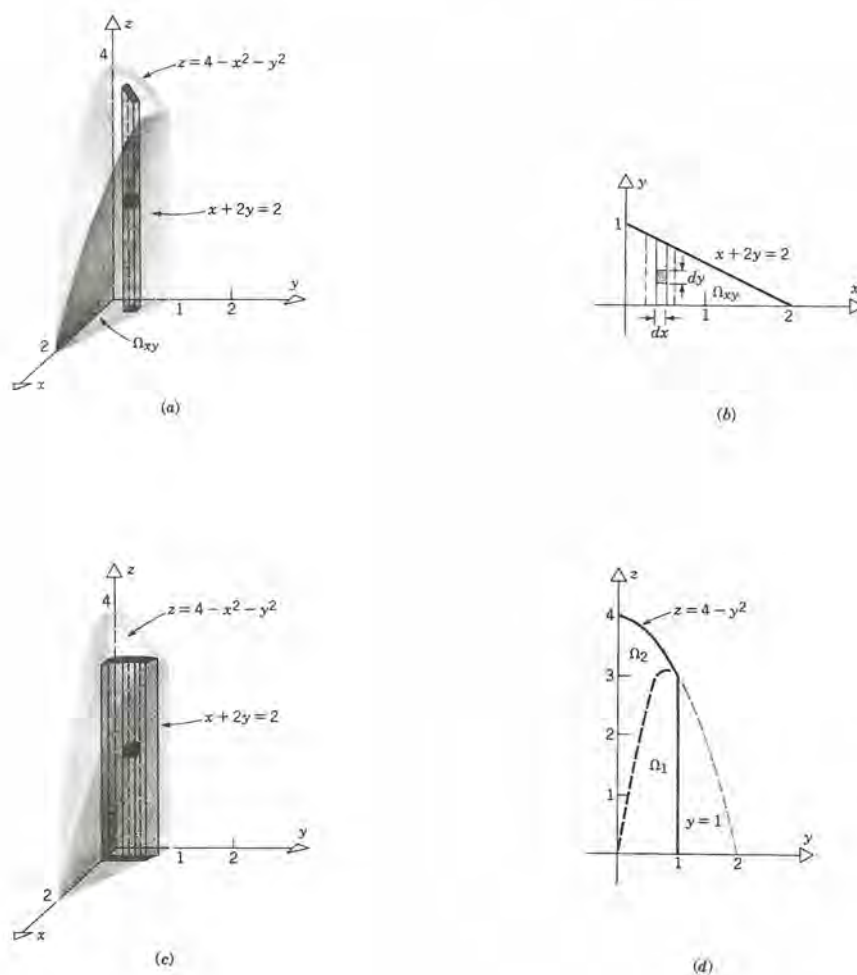


Figura 17.5.6

$$V = \int_0^2 \int_0^{1-(x/2)} \int_0^{4-x^2-y^2} dz \, dy \, dx. \quad (13)$$

Obsérvese que el orden de integración es primero con respecto a  $z$ , segundo con respecto a  $y$  y por último con respecto a  $x$ , y que corresponde a la forma de las desigualdades (12). La figura 17.5.6c sugiere el proceso de integración: partiendo del elemento de volumen  $dx \, dy \, dz$ , la integración con respecto a  $z$  corresponde a la construcción de una columna paralela al eje  $z$ , la integración con respecto a  $y$  corresponde a la combinación de columnas en una placa paralela al eje  $yz$ , y la integración con respecto a  $x$  corresponde al llenado de  $\Omega$  con esas placas.

Al evaluar la primera integral de la ecuación 13 obtenemos

$$V = \int_0^2 \int_0^{1-(x/2)} (4 - x^2 - y^2) \, dy \, dx,$$

y a continuación las integrales restantes dan

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left[ (4 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right] \bigg|_0^{1-(x/2)} dx \\ &= \int_0^2 \left[ (4 - x^2) \left( 1 - \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^3 \right] dx \\ &= \int_0^2 \left( \frac{11}{3} - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}x^2 + \frac{13}{24}x^3 \right) dx \\ &= \frac{22}{3} - 3 - \frac{10}{3} + \frac{13}{6} = \frac{19}{6}. \blacksquare \end{aligned}$$

En muchos casos puede haber más de una manera de expresar la región  $\Omega$  en términos de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y, por tanto, más de una manera de llevar a cabo la integración. En la discusión anterior y en el ejemplo 2 se describió la región mediante

$$\Omega: \chi_1(x, y) \leq z \leq \chi_2(x, y), \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (14)$$

También es posible describir a  $\Omega$  mediante otros conjuntos de desigualdades, como por ejemplo

$$\Omega: \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z), \quad \chi_1(x) \leq z \leq \chi_2(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (15)$$

en cuyo caso la integral tomaría la siguiente forma:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{\chi_1(x)}^{\chi_2(x)} \int_{\psi_1(x, z)}^{\psi_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx. \quad (16)$$

Obsérvese que en la ecuación 16, la primera integración es con respecto a  $y$ , que



corresponde a una proyección de  $\Omega$  en el plano  $xz$ . De igual forma también es posible proyectarla al plano  $yz$ .

En muchos problemas la integración real es directa, aunque a veces es tediosa. Con frecuencia, la parte más difícil de un problema consiste en representar a una integral triple mediante un conjunto de integrales iteradas en la forma que sea más conveniente, y establecer los límites de integración correspondientes. Casi siempre ayuda el hacer un dibujo, aun cuando sea primitivo, de toda o parte de la región de integración, y describir a  $\Omega$  mediante un conjunto de desigualdades como las ecuaciones 14 ó 15. Con frecuencia, es útil dibujar tanto la región original  $\Omega$  como su proyección en uno o más de los planos coordenados. No conviene limitarse únicamente a memorizar las fórmulas ni debe tampoco el estudiante proceder simplemente a sustituir valores en expresiones como, por ejemplo, los lados derechos de las ecuaciones 11 o 16. En lugar de ello, debe tratar de comprender completamente los principios subyacentes y adaptarlos a cada caso que se presente.

En el ejemplo 2 se puede invertir el orden de las integraciones con respecto a  $x$  y a  $y$  en  $\Omega_{xy}$  sin encontrar alguna dificultad especial. También es posible, aunque algo más complicado, integrar primero con respecto a  $x$  o a  $y$ , en lugar de con respecto a  $z$  como lo hemos hecho. Para ver dónde surge la complicación, supongamos que deseamos integrar primero con respecto a  $x$ , lo cual significa que debemos proyectar a  $\Omega$  en el plano  $yz$ . En la figura 17.5.6d se muestra la proyección  $\Omega_{yz}$ . La complicación proviene del hecho de que el límite superior de la primera integral, la integral con respecto a  $x$ , depende de dónde está ubicado el punto  $(y, z)$  en  $\Omega_{yz}$ . Si  $(y, z)$  está en  $\Omega_1$ , entonces se obtiene el límite superior de la ecuación del plano  $x + 2y = 2$ , y si  $(x, y)$  está en  $\Omega_2$ , entonces se obtiene de la ecuación de la paraboloides  $z = 4 - x^2 - y^2$ . El hecho es que se debe encontrar la curva que separa a  $\Omega_{yz}$  en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , y formular entonces dos integrales para cubrir la región completa de integración. Como esto complica las cosas, se ve que la proyección en el plano  $yz$  no ayudará y que debemos proceder de otra forma, lo cual hicimos.

### **Momentos, centros de masa, centroides y momentos de inercia**

La discusión que aparece en la sección 17.3 se generaliza también en forma directa de dos dimensiones a tres. Considere una región  $\Omega$  ocupada por un material cuya densidad (masa/volumen) es  $\rho(x, y, z)$ . La masa total es

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dV. \quad (17)$$

El momento lineal con respecto al origen es

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \, dV \\ &= \mathbf{i} \iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) \, dV + \mathbf{j} \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z) \, dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{k} \int \int \int_{\Omega} z \rho(x, y, z) dV \\
& = L_{yz} \mathbf{i} + L_{xz} \mathbf{j} + L_{xy} \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{18}$$

En ellas,  $L_{yz}$  es el momento lineal con respecto al plano  $yz$ , y análogamente  $L_{xz}$  y  $L_{xy}$ .

El centro de masa del material de  $\Omega$  es el punto con respecto al cual el momento lineal es cero. Se pueden deducir las ecuaciones para sus coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  como en la sección 17.3:

$$\bar{x} = \frac{L_{yz}}{M} = \frac{1}{M} \int \int \int_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV, \tag{19}$$

$$\bar{y} = \frac{L_{xz}}{M} = \frac{1}{M} \int \int \int_{\Omega} y \rho(x, y, z) dV, \tag{20}$$

$$\bar{z} = \frac{L_{xy}}{M} = \frac{1}{M} \int \int \int_{\Omega} z \rho(x, y, z) dV. \tag{21}$$

Si  $\rho(x, y, z)$  es constante, entonces se puede sacar de las integrales de estas ecuaciones y simplificar numerador con denominador. De este modo obtenemos las ecuaciones para las coordenadas  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  del centroide de  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
\hat{x} = \frac{\hat{L}_{yz}}{V} &= \frac{1}{V} \int \int \int_{\Omega} x dV, & \hat{y} = \frac{\hat{L}_{xz}}{V} &= \frac{1}{V} \int \int \int_{\Omega} y dV, \\
\hat{z} = \frac{\hat{L}_{xy}}{V} &= \frac{1}{V} \int \int \int_{\Omega} z dV,
\end{aligned} \tag{22}$$

en las cuales  $V$  es el volumen de  $\Omega$ .

El momento de inercia del material de  $\Omega$ ,  $I_x$ , con respecto al eje  $x$ , es

$$I_x = \int \int \int_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV. \tag{23}$$

Obsérvese que el integrando es el elemento de masa  $\rho(x, y, z)dV$  multiplicado por el cuadrado de la distancia al eje  $x$ . Del mismo modo, los momentos de inercia  $I_y$  e  $I_z$  con respecto a los ejes  $y$  y  $z$  son, en ese orden,

$$I_y = \int \int \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV, \tag{24}$$

$$I_z = \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV. \tag{25}$$

Los radios de giro  $R_x$ ,  $R_y$  y  $R_z$  con respecto a cada uno de los ejes coordenados se definen como en el caso de dos dimensiones:

$$R_x^2 = \frac{I_x}{M}, \quad R_y^2 = \frac{I_y}{M}, \quad R_z^2 = \frac{I_z}{M}. \quad (26)$$

### EJEMPLO 3

La región  $\Omega$ , acotada por el cilindro  $z = y^2$ , el plano  $x + z = 1$ , y el plano  $yz$ , está llena con un material cuya densidad (masa/volumen) es  $\rho(x, y, z)$ , proporcional a  $x$ . Localizar el centro de masa del material de  $\Omega$ .

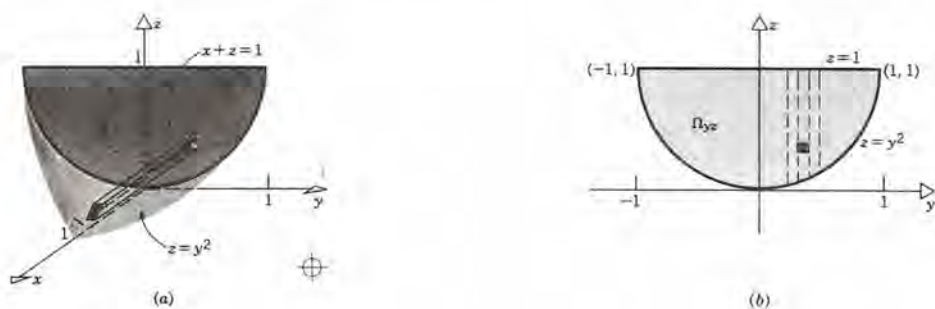


Figura 17.5.7

La región  $\Omega$  se muestra en la figura 17.5.7a. Obsérvese primero que  $\Omega$  es simétrica con respecto al plano  $xy$ . Además, como la densidad  $\rho(x, y, z)$  no depende de  $y$ , la distribución de masa también es simétrica con respecto al plano  $xz$ . Así, el centro de masa debe quedar en el plano  $xz$  y, por tanto,  $\bar{y} = 0$ . Para determinar las coordenadas restantes  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  mediante las ecuaciones 19 y 21, necesitamos calcular la masa total  $M$  y los momentos lineales  $L_{yz}$  y  $L_{xy}$ .

En este problema conviene proyectar al plano  $yz$  y en la figura 17.5.7b se muestra la región  $\Omega_{yz}$ . La región  $\Omega$  se puede describir mediante las desigualdades

$$0 \leq x \leq 1 - z, \quad y^2 \leq z \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (27)$$

La densidad del material de  $\Omega$  es  $\rho(x, y, z) = kx$ , donde  $k$  es una constante de proporcionalidad y entonces la masa total es

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dV \\ &= \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-z} kx \, dx \, dz \, dy. \end{aligned} \quad (28)$$

Prosiguiendo con la integración, obtenemos



$$\begin{aligned}
 M &= k \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1-z} dz dy \\
 &= \frac{k}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 (1-z)^2 dz dy \\
 &= \frac{k}{2} \int_{-1}^1 -\frac{(1-z)^3}{3} \Big|_{y^2}^1 dy \\
 &= \frac{k}{6} \int_{-1}^1 (1-y^2)^3 dy \\
 &= \frac{k}{3} \int_0^1 (1-y^2)^3 dy.
 \end{aligned} \tag{29}$$

En el último paso de la ecuación 29 hemos aprovechado la ventaja de que el integrando es una función par y de que el intervalo de integración es simétrico con respecto al origen. Al evaluar la integral de la ecuación 29 vemos que

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{k}{3} \int_0^1 (1-3y^2+3y^4-y^6) dy \\
 &= \frac{k}{3} \left( 1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{16}{105} k.
 \end{aligned}$$

A continuación pasamos al cálculo de  $L_{yz}$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
 L_{yz} &= \int \int \int_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV \\
 &= k \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-z} x^2 dx dz dy.
 \end{aligned}$$

La integración en este caso se asemeja a la que se empleó en el cálculo de  $M$ , y obtenemos

$$\begin{aligned}
 L_{yz} &= \frac{k}{3} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 (1-z)^3 dz dy \\
 &= \frac{k}{3} \int_{-1}^1 \frac{(1-y^2)^4}{4} dy \\
 &= \frac{k}{6} \int_0^1 (1-4y^2+6y^4-4y^6+y^8) dy \\
 &= \frac{k}{6} \left( 1 - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{4}{7} + \frac{1}{9} \right) = \frac{64}{945} k.
 \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación 18,

$$\bar{x} = \frac{64k/945}{16k/105} = \frac{4}{9}.$$

De igual modo tenemos que

$$\begin{aligned} L_{xy} &= \int \int \int_{\Omega} z \rho(x, y, z) dV \\ &= k \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-z} z x dx dz dy. \end{aligned}$$

Omitiremos la evaluación de esta integral, porque no difiere mucho de las anteriores en este ejemplo. El resultado es

$$L_{xy} = \frac{16k}{315},$$

y en consecuencia, de acuerdo con la ecuación 22, tenemos

$$\bar{z} = \frac{16k/315}{16k/105} = \frac{1}{3}.$$

Así, el centro de masa del material de  $\Omega$  es el punto  $(\frac{4}{9}, 0, \frac{1}{3})$ . ■

#### EJEMPLO 4

La región  $\Omega$  está acotada por el plano  $xy$  y la paraboloides  $z = 4 - x^2 - y^2$ . Si se llena esta región con un material de densidad constante  $k$ , calcular el momento de inercia con respecto al eje  $z$ .

Las figuras 17.5.8a y 17.5.8b muestran la región  $\Omega$  y su proyección  $\Omega_{xy}$  en el plano  $xy$ , o sea, el círculo que tiene el centro en el origen y su radio es 2. El momento de inercia  $I_z$  está dado por la ecuación 25:

$$\begin{aligned} I_z &= k \int \int \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dV \\ &= k \int \int_{\Omega_{xy}} \int_0^{4-x^2-y^2} (x^2 + y^2) dz dA \\ &= k \int \int_{\Omega_{xy}} (x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2) dA. \end{aligned}$$

De aquí en adelante el cálculo se lleva a cabo con mucho mayor facilidad si usamos coordenadas polares  $(r, \theta)$ , de modo que  $x^2 + y^2 = r^2$  y  $dA = r dr d\theta$ . Obtenemos así

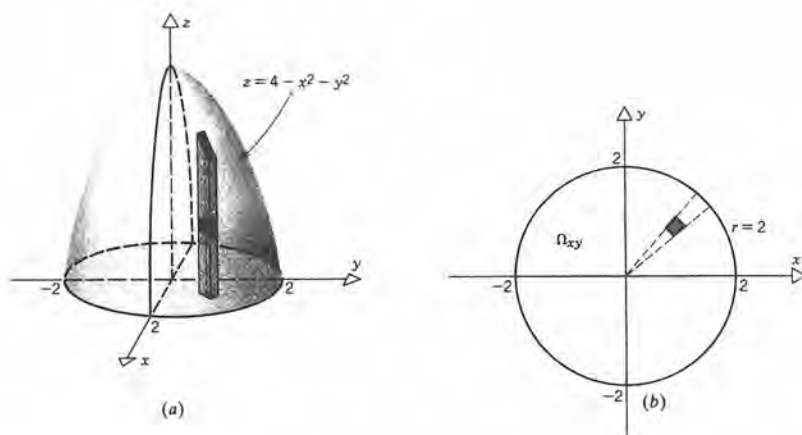


Figura 17.5.8

$$\begin{aligned}
 I_z &= k \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2(4 - r^2)r \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r^3 - r^5) \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \left( r^4 - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^2 \, d\theta \\
 &= \frac{16}{3} k \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi k}{3}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 evaluar la integral dada.

1.  $\int_1^2 \int_0^3 \int_{-1}^2 xyz \, dy \, dz \, dx$

2.  $\int_1^3 \int_0^1 \int_0^2 (xy - 2yz) \, dx \, dz \, dy$

3.  $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^{x+y} 2xy \, dz \, dy \, dx$

4.  $\int_0^1 \int_{2y}^2 \int_0^{x-2y} (x - 2z) \, dz \, dx \, dy$

5.  $\int_0^\pi \int_0^{\sin y} \int_0^{\cos y} (\pi - y) \, dx \, dz \, dy$

6.  $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos z} \int_0^{\sin z} (y - z) \, dx \, dy \, dz$

En los problemas 7 a 10 hacer un dibujo de la proyección



## 1030 INTEGRALES MÚLTIPLES

de la región  $\Omega$  dada en el plano que se indica. También presentar un conjunto de desigualdades que describa a cada una de las proyecciones que se piden:

7.  $\Omega$  es la región arriba del plano  $z = 3$  y dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ . Determinar  $\Omega_{xy}$ .
8.  $\Omega$  es la región acotada por los planos coordenados, por el plano  $x + 2z = 2$  y por el plano  $3x + 2y + z = 12$ . Determinar
  - (a)  $\Omega_{xy}$ ; (b)  $\Omega_{xz}$ .
9.  $\Omega$  es la región acotada por el plano  $xz$ , por el plano  $yz$ , por el plano  $4x + 2y + 3z = 12$  y por el cilindro  $y = 4 - z^2$ . Determinar
  - (a)  $\Omega_{xz}$ ; (b)  $\Omega_{yz}$ .
10.  $\Omega$  está arriba del plano  $y + z = 8$  y dentro de la esfera  $x^2 + y^2 = 36$ . Determinar  $\Omega_{xy}$ .

En los problemas 11 a 16 formular, pero no evaluar, integrales iteradas que expresen la cantidad que se pide.

11. La masa de la región en el primer octante acotada por los planos coordenados, el plano  $y + 2z = 2$  y el plano  $3x + 4y + 6z = 12$ ; la densidad es  $\rho(x, y, z) = 6 - x - y$ .
12. El momento de inercia, con respecto al eje  $z$ , del tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano  $2x + y + 3z = 6$ . La densidad es  $\rho(x, y, z) = k$ , constante.
13. El momento de inercia con respecto a un diámetro de la base de un cono circular recto de altura  $h$  y radio  $r$  de la base. La densidad es  $\rho(x, y, z) = k$ , constante.
14. La coordenada  $z$  del centro de masa de la región que queda arriba del plano  $xy$ , abajo de la superficie  $z = 4 - x^2$  y entre los planos  $y = 0$  y  $y = 4$ ; la densidad es  $\rho(x, y, z) = 6 - z$ .
15. La masa de la región en el interior del cilindro elíptico  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$  y entre los planos  $z = 0$  y  $z = 2b - y$ ; la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.
16. El momento lineal con respecto al plano  $xz$  de la región acotada por un manto de la hiperboloide  $-(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$  y el plano  $y = 2b$ ; la densidad es  $\rho(x, y, z) = k$ , constante.
17. Comprobar el resultado del ejemplo 1 integrando primero con respecto a  $x$ , después con respecto a  $z$  y finalmente con respecto a  $y$ .
18. Determinar la posición del centroide del tetraedro

acotado por los planos coordenados y el plano  $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes.

19. Formular las integrales adecuadas para resolver el ejemplo 2 proyectando sobre el plano  $yz$ .
20. Una caja rectangular de longitud  $l$ , ancho  $w$  y altura  $h$  tiene densidad uniforme  $k$ .
  - (a) Determinar el momento de inercia con respecto a uno de los lados de longitud  $l$ .
  - (b) Determinar el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro y que sea paralelo a los lados de longitud  $l$ .
21. Determinar la posición del centro de masa de una pirámide de densidad uniforme  $k$  cuya altura es  $b$  y cuya base es un cuadrado de lado  $a$ .
22. Se llena la región que queda arriba del plano  $xy$ , abajo del cilindro  $z = 9 - x^2$ , y entre los planos  $y = 0$  y  $y = 2$ , con un material cuya densidad es  $\rho(x, y, z) = kz$ , donde  $k$  es constante.
  - (a) Calcular la masa.
  - (b) Localizar el centro de masa.
23. Se llena la región que queda arriba del plano  $xy$  y abajo de la paraboloides  $z = 4 - x^2 - y^2$  con material de densidad uniforme, igual a  $k$ . Localizar el centro de masa.
24. La región  $\Omega$  acotada por los cilindros  $x = 4 - z^2$  y  $y = 4 - z^2$ , y por los planos  $x = 0$  y  $y = 0$ , se llena con un material cuya densidad es  $\rho(x, y, z) = k|z|$ , donde  $k$  es constante.
  - (a) Determinar la masa total de  $\Omega$ .
  - (b) Calcular el momento de inercia con respecto al eje  $z$ .
  - (c) Determinar el radio de giro con respecto al eje  $z$ .
25. La región entre las paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 8 - x^2 - y^2$  se llena con material cuya densidad es  $\rho(x, y, z) = k(8 - z)$ , donde  $k$  es constante.
  - (a) Calcular la masa total.
  - (b) Localizar el centro de masa.
26. Una pirámide de altura  $a$  y con una base cuadrada de lado  $a$  se coloca sobre un cubo de lado  $a$ , con las aristas alineadas como se ve en la figura 17.5.9. Si el cubo tiene una densidad constante  $m_1$  y la pirámide tiene una densidad constante  $m_2$ , localizar el centro de masa de la estructura combinada.

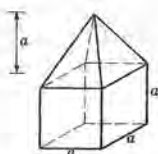


Figura 17.5.9

27. Dos barras cuadradas de longitud  $l$  y una sección transversal de lado  $a$  se unen para formar una T, como se ve en la figura 17.5.10. Si la barra vertical tiene una densidad constante  $m_1$  y la horizontal otra densidad

constante  $m_2$ , determinar la ubicación del centro de masa de la estructura combinada.

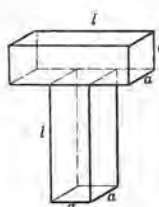


Figura 17.5.10

## 17.6 INTEGRACIÓN EMPLEANDO COORDENADAS CILÍNDRICAS

Tal como se procedió en dos dimensiones, a veces es más conveniente evaluar integrales en tres dimensiones mediante sistemas coordenados que no sean las coordenadas cartesianas de la sección 17.5. En esta sección estudiaremos e ilustraremos el empleo de las **coordenadas cilíndricas**.

Un sistema de coordenadas cilíndricas consta de las coordenadas polares  $(r, \theta)$  en un plano, junto con una tercera coordenada  $(z)$ , medida a lo largo de un eje perpendicular al plano  $r\theta$  (véase figura 17.6.1). Para relacionar las coordenadas cilíndricas con

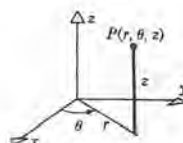


Figura 17.6.1  
Coordenadas cilíndricas  
del punto  $P$ .

las rectangulares se acostumbra identificar al plano  $r\theta$  con el plano  $xy$ . Esto significa que la coordenada  $z$  del sistema de coordenadas cilíndricas es la misma que la coordenada  $z$  del sistema rectangular, y las demás coordenadas se relacionan mediante las ecuaciones ya conocidas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1)$$

Como en la sección 17.4, se pide que  $r \geq 0$  y que  $\theta$  esté en un intervalo de longitud  $2\pi$ .

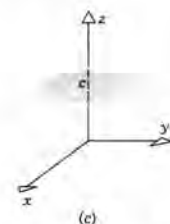
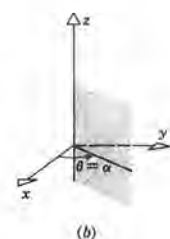
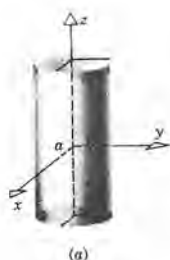
Las superficies de nivel en los sistemas de coordenadas cilíndricas que corresponden a  $r = a$ ,  $\theta = \alpha$  y  $z = c$  se muestran en la figura 17.6.2a, 17.6.2b y 17.6.2c. Como se ve en esas figuras,

$r = a$  es un cilindro circular recto cuyo eje es el eje  $z$  y todo punto del cilindro está a una distancia  $a$  de este eje.

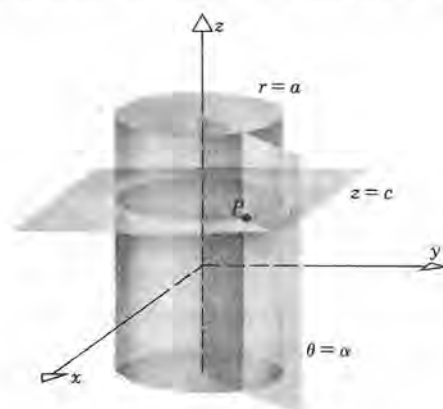
$\theta = \alpha$  es el semiplano cuya orilla es el eje  $z$  y su traza en el plano  $xy$  es el rayo que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  positivo.

$z = c$  es el plano paralelo al plano  $xy$  que contiene al punto  $c$  en el eje  $z$ .

Se puede identificar un punto  $P$  en el espacio tridimensional como el punto donde se interseca un cilindro  $r = a$ , un semiplano  $\theta = \alpha$ , y un plano  $z = c$ , como se ve en la figura 17.6.3. Siempre indicaremos las coordenadas cilíndricas de un punto en el orden



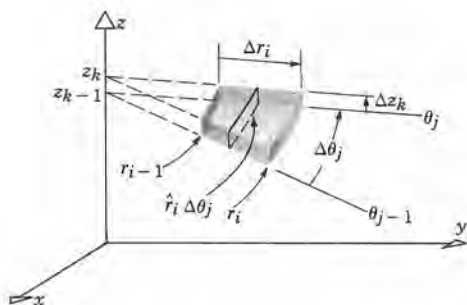
**Figura 17.6.2**  
(a) El cilindro  $r = a$ .  
(b) El semiplano  $\theta = \alpha$ . (c) El plano  $z = c$ .



**Figura 17.6.3** Superficies coordenadas en coordenadas cilíndricas.

$r, \theta, z$ . Así, en coordenadas cilíndricas, el punto  $(a, \alpha, c)$  es el punto para el cual  $r = a$ ,  $\theta = \alpha$  y  $z = c$ .

Cuando se emplean coordenadas cilíndricas para evaluar integrales triples, se considera que la región de integración está subdividida en pequeños elementos de volumen por medio de una familia de círculos concéntricos  $r = r_i$ , una familia de planos  $\theta = \theta_j$  que contienen al eje  $z$ , y una familia de planos  $z = z_k$  perpendiculares al eje  $z$ . Un elemento típico de volumen se ve en la figura 17.6.4; está acotado por los cilindros  $r = r_{i-1}$  y  $r = r_i$ , los planos  $\theta = \theta_{j-1}$  y  $\theta = \theta_j$ , y los planos  $z = z_{k-1}$  y  $z = z_k$ . El volumen  $\Delta V_{ijk}$  de este elemento es



**Figura 17.6.4** Un elemento de volumen en coordenadas cilíndricas.



$$\Delta V_{ijk} = \hat{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j \Delta z_k, \quad (2)$$

en donde  $\hat{r}_i = (r_i + r_{i-1})/2$  es el radio medio del elemento. Nótese que  $\hat{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j$  es el elemento de área en coordenadas polares que se encontró en la ecuación 6 de la sección 17.4. En el límite, cuando la partición se hace más y más fina, el elemento de volumen  $dV$  es

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz. \quad (3)$$

Así, para evaluar una integral triple

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV \quad (4)$$

mediante un conjunto de integrales iteradas en coordenadas cilíndricas, debemos:

1. Expresar el integrando  $f(x, y, z)$  en términos de  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  empleando las ecuaciones 1.
2. Reemplazar  $dV$  por  $r \, dr \, d\theta \, dz$ , pudiendo  $dr$ ,  $d\theta$  y  $dz$  aparecer en cualquier orden.
3. Fijar límites a cada integral, que sean consistentes con el orden de integración seleccionado en (2), para integrar en toda la región  $\Omega$ . Con frecuencia se integra primero con respecto a  $z$ , lo que corresponde a proyectar a  $\Omega$  en el plano  $r\theta$ .

## EJEMPLO 1

Considere un cono circular recto sólido, de altura  $h$  y con su base de radio  $a$ . Si la densidad del cono es proporcional a la distancia al eje de simetría, hallar el centro de masa.

Conviene escoger las coordenadas de tal modo que el vértice del cono esté en el origen y que el eje de simetría sea el eje  $z$  positivo (véase figura 17.6.5a). Entonces, la ecuación de la superficie lateral del cono es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0,$$

o sea

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0,$$

entonces

$$z = \frac{h}{a} r,$$

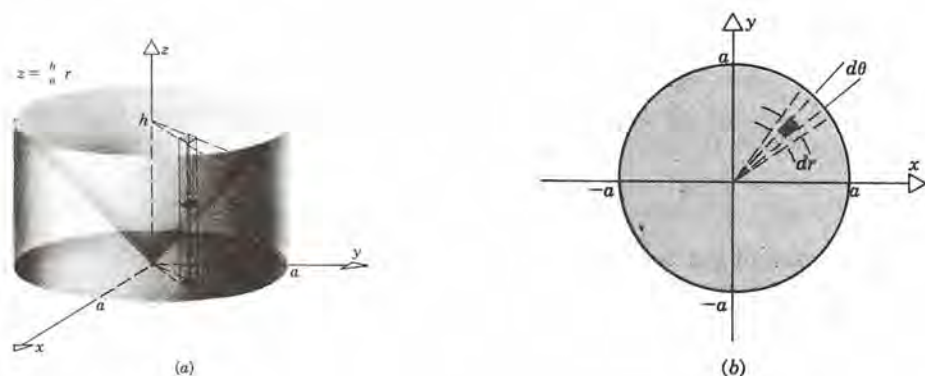


Figura 17.6.5

donde  $0 \leq r \leq a$  y  $0 \leq z \leq h$ . La proyección de la región de integración en el plano  $xy$  es el círculo con centro en el origen y radio  $a$  (véase figura 17.6.5b). Así, el cono se puede describir mediante las desigualdades

$$\frac{hr}{a} \leq z \leq h, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (5)$$

La densidad está dada por  $\rho(r, \theta, z) = kr$ , donde  $k$  es constante y, por tanto, la masa total es

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} \rho(r, \theta, z) \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{hr/a}^h (kr)r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a h \left(1 - \frac{r}{a}\right) r^2 \, dr \, d\theta \\ &= kh \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4a}\right) \Big|_0^a \, d\theta \\ &= \frac{kha^3}{12} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi ka^3 h}{6}. \end{aligned} \quad (6)$$

Debido a la simetría de la región y a la distribución de masa, sabemos que el centro de masa está en el eje  $z$ , de modo que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Para calcular  $\bar{z}$  debemos evaluar

$$\begin{aligned} L_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{hr/a}^h (z)(kr)r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{kh^2}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right) \Big|_0^a d\theta \\
 &= \frac{kh^2}{2} \frac{2}{15} a^3 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{15} \pi k a^3 h^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

En consecuencia,

$$\bar{z} = \frac{L_{xy}}{M} = \frac{2\pi k a^3 h^2 / 15}{\pi k a^3 h / 6} = \frac{4}{5} h. \quad \blacksquare \tag{8}$$

## EJEMPLO 2

Considerar la región  $\Omega$  que está arriba del plano  $xy$ , dentro de la esfera  $r^2 + z^2 = a^2$ , y fuera del cilindro  $r = a/2$ . Hallar el centroide de  $\Omega$ .

La región aparece en la figura 17.6.6a. El centroide debe quedar en el eje  $z$  debido a la simetría; en consecuencia  $\hat{x} = 0$ ,  $\hat{y} = 0$ , y sólo necesitaremos calcular  $\hat{z}$ . La

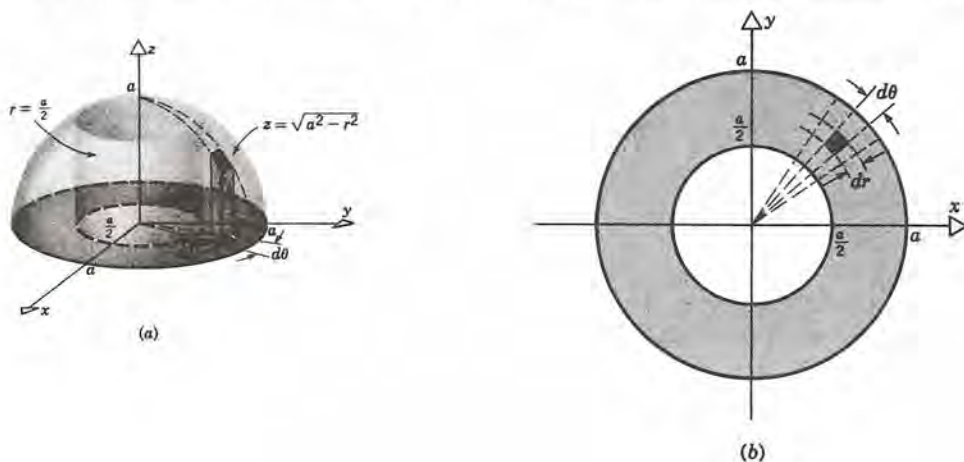


Figura 17.6.6

proyección  $\Omega_{r\theta}$  de  $\Omega$  en el plano  $r\theta$  es el anillo que aparece en la figura 17.6.6b. Así,  $\Omega$  queda descrita por las desigualdades

$$0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}, \quad \frac{a}{2} \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{9}$$



El volumen  $V$  de  $\Omega$  es

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{a/2}^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r \, dz \, d\theta \, dr \\
 &= \int_{a/2}^a \int_0^{2\pi} r \sqrt{a^2-r^2} \, d\theta \, dr \\
 &= 2\pi \int_{a/2}^a r \sqrt{a^2-r^2} \, dr \\
 &= 2\pi \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \right) (a^2-r^2)^{3/2} \Big|_{a/2}^a \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left( \frac{3}{4} a^2 \right)^{3/2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi a^3.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \hat{L}_{xy} &= \int \int \int_{\Omega} z \, dV \\
 &= \int_{a/2}^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z r \, dz \, d\theta \, dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_{a/2}^a \int_0^{2\pi} (a^2-r^2)r \, d\theta \, dr \\
 &= \pi \int_{a/2}^a (a^2-r^2)r \, dr \\
 &= \pi \left( \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{a/2}^a \\
 &= \frac{9\pi}{64} a^4.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Así,

$$\hat{z} = \frac{\hat{L}_{xy}}{V} = \frac{9\pi a^4/64}{\sqrt{3}\pi a^3/4} = \frac{3\sqrt{3}}{16} a. \blacksquare \tag{12}$$

### EJEMPLO 3

La región  $\Omega$  está acotada por abajo por el plano  $xy$ , por arriba por el cono  $z = r$ , y está dentro del cilindro  $r = 2 \sin \theta$ . El material de  $\Omega$  tiene densidad  $\rho(r, \theta, z) = k \sin \theta$ , donde  $k$  es una constante. Calcular la masa total  $M$  de  $\Omega$ .

En la figura 17.6.7a aparece la región  $\Omega$ , y su proyección  $\Omega_{r\theta}$  en el plano  $r\theta$  es el círculo que se ve en la figura 17.6.7b. Vemos en la figura que  $\Omega$  está descrita por las

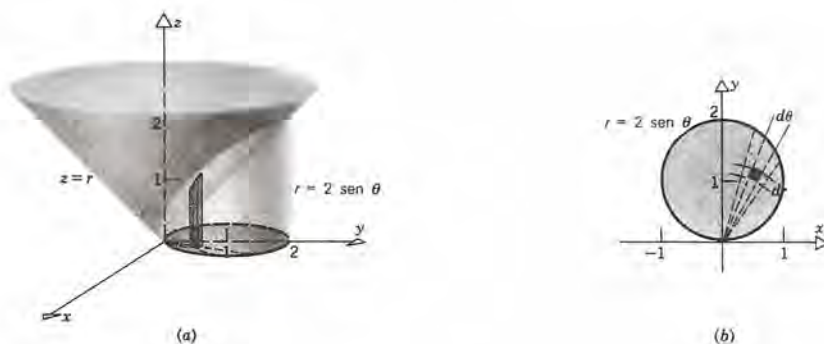


Figura 17.6.7

desigualdades

$$0 \leq z \leq r, \quad 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (13)$$

Así, la masa total de  $\Omega$  es

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} \rho(r, \theta, z) \, dV \\ &= k \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_0^r (\operatorname{sen} \theta) r \, dz \, dr \, d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Las integrales con respecto a  $z$  y a  $r$  son fáciles de evaluar, y dan como resultado

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} (\operatorname{sen} \theta) r^2 \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} \theta) \frac{(2 \operatorname{sen} \theta)^3}{3} \, d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 \theta \, d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

La integral restante (15) se puede evaluar mediante el empleo repetido de la fórmula para la mitad de un ángulo. Así,

$$\begin{aligned} M &= \frac{8k}{3} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}^2 \theta)^2 \, d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right)^2 \, d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \cos^2 2\theta \right) \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8k}{3} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) \right] d\theta \\
 &= \frac{8k}{3} \int_0^\pi \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta \\
 &= \frac{8k}{3} \left( \frac{3}{8} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right) \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{8k}{3} \frac{3}{8} \pi = k\pi. \blacksquare
 \end{aligned} \tag{16}$$



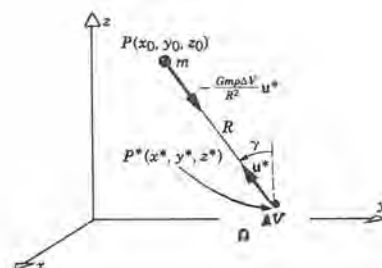
**Figura 17.6.8**  
F es la fuerza gravitacional que ejerce M sobre m.

### Atracción gravitatoria

Según Newton, la fuerza  $\mathbf{F}$  de atracción gravitacional entre dos partículas de masa  $m$  y  $M$ , respectivamente, está dirigida a lo largo de la recta que las une y su magnitud es

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{GmM}{R^2}, \tag{17}$$

en la cual  $R$  es la distancia entre las partículas, y  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$  es la constante universal gravitacional (véase figura 17.6.8). Deseamos ahora calcular la atracción gravitatoria que ejerce la masa  $M$  distribuida en una región sobre una partícula de masa  $m$ .



**Figura 17.6.9** El vector de fuerza gravitatoria tiene una magnitud  $m(\rho\Delta V)/R^2$ .

Supongamos que la región  $\Omega$  que se ve en la figura 17.6.9 contiene material de densidad  $\rho(x, y, z)$  y que una partícula de masa  $m$  está colocada en el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$ . Consideremos un elemento típico de volumen  $\Delta V$  de  $\Omega$ . La fuerza que ejerce la masa en  $\Delta V$  sobre  $m$  es, en forma aproximada,

$$-\frac{Gm\rho(x^*, y^*, z^*) \Delta V}{R^2(x^*, y^*, z^*)} \mathbf{u}^*, \tag{18}$$



en la cual  $P^*$  es un punto arbitrario de  $\Delta V$  cuyas coordenadas son  $(x^*, y^*, z^*)$  y  $R(x^*, y^*, z^*)$  es la distancia de  $P^*$  a  $P$ .  $\mathbf{u}^*$  es el vector unitario en la dirección de  $P^*$  a  $P$ , y  $\rho(x^*, y^*, z^*)\Delta V$  es aproximadamente igual a la masa del elemento. Como

$$\overrightarrow{P^*P} = (x_0 - x^*)\mathbf{i} + (y_0 - y^*)\mathbf{j} + (z_0 - z^*)\mathbf{k},$$

se infiere que

$$R(x^*, y^*, z^*) = \sqrt{(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2 + (z_0 - z^*)^2}$$

y

$$\mathbf{u}^* = \frac{(x_0 - x^*)\mathbf{i} + (y_0 - y^*)\mathbf{j} + (z_0 - z^*)\mathbf{k}}{R(x^*, y^*, z^*)}.$$

Sumando sobre todos los elementos de  $\Omega$  y pasando a continuación al límite en la forma usual, obtenemos

$$\mathbf{F} = -Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{R^3(x, y, z)} [(x_0 - x)\mathbf{i} + (y_0 - y)\mathbf{j} + (z_0 - z)\mathbf{k}] dV. \quad (19)$$

A veces se necesita calcular una sola componente de  $\mathbf{F}$ . Por ejemplo, si representamos a la componente  $z$  de  $\mathbf{F}$  mediante  $F_z$ , entonces

$$\begin{aligned} F_z &= -Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(z_0 - z)}{R^3(x, y, z)} dV \\ &= -Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)\cos \gamma(x, y, z)}{R^2(x, y, z)} dV, \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\gamma(x, y, z)$  es el ángulo entre el eje  $z$  positivo y la recta de  $P^*$  a  $P$ .

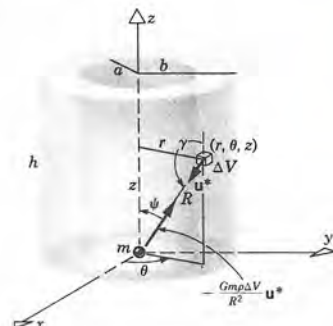
La ley del inverso del cuadrado contenida en la ecuación 17 gobierna también algunos otros fenómenos, además de la gravitación. Por ejemplo, de acuerdo con la ley de Coulomb en electrostática, la fuerza  $\mathbf{F}$  entre dos partículas que tienen cargas  $q$  y  $Q$ , respectivamente, se dirigen a lo largo de la recta que une a las partículas, y su magnitud es

$$\|\mathbf{F}\| = K|q|\frac{|Q|}{R^2}, \quad (21)$$

en la cual  $R$  es la distancia entre las partículas y  $K \cong 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ . La fuerza es de atracción si las cargas tienen signo contrario y de repulsión si tienen el mismo signo. La magnitud de la fuerza que ejerce un cuerpo  $\Omega$  que tiene una densidad de carga  $\rho(x, y, z)$  sobre una partícula con carga  $q$  queda dada entonces por ecuaciones semejantes a las ecuaciones 19 y 20.

### EJEMPLO 4

Calcular la fuerza  $\mathbf{F}$  de atracción gravitatoria que ejerce un casquillo cilíndrico circular recto de radio interior  $a$ , radio exterior  $b$ , altura  $h$  y densidad  $k$  constante sobre una partícula de masa  $m$  ubicada en el centro de una de sus bases.



**Figura 17.6.10** Fuerza gravitatoria que ejerce un casquillo cilíndrico.

Conviene escoger el sistema coordenado como se ve en la figura 17.6.10 para que el eje positivo  $z$  sea el eje del cilindro y la masa  $m$  esté en el origen. A consecuencia de la simetría del problema, las componentes  $x$  y  $y$  de la atracción del cilindro sobre la partícula son cero y, por tanto, sólo necesitaremos calcular la componente  $z$ , que es  $F_z$ . De acuerdo con la ecuación 20 tenemos que

$$F_z = Gmk \int \int \int_{\Omega} \frac{\cos \psi (r, \theta, z)}{R^2(r, \theta, z)} dV, \quad (22)$$

en la cual  $\psi = \pi - \gamma$ . De la figura 17.6.10 vemos que  $R^2 = r^2 + z^2$ , y  $\cos \psi = z/R$ . Integrando sobre el casquillo cilíndrico obtenemos

$$F_z = Gmk \int_a^b \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r d\theta dz dr, \quad (23)$$

en la cual hemos escogido integrar primero con respecto a  $\theta$ , a continuación con respecto a  $z$ , y por último con respecto a  $r$ . Así,

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi Gmk \int_a^b \int_0^h \frac{zr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} dz dr \\ &= 2\pi Gmk \int_a^b \left[ -\frac{r}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right]_0^h dr \\ &= 2\pi Gmk \int_a^b \left[ 1 - \frac{r}{(h^2 + r^2)^{1/2}} \right] dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi Gmk \left[ r - (h^2 + r^2)^{1/2} \right] \Big|_a^b \\
 &= 2\pi Gmk [b - \sqrt{h^2 + b^2} - a + \sqrt{h^2 + a^2}]. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Cuando  $a \rightarrow 0$ ,

$$F_z \rightarrow 2\pi Gmk [b + h - \sqrt{h^2 + b^2}],$$

que es la atracción debida a un cilindro sólido. ■

## PROBLEMAS

1. Emplear coordenadas cilíndricas para determinar el volumen dentro de la elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2. Determinar el volumen de la región  $\Omega$  que está dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y arriba de la paraboloides  $az = \sqrt{12}(x^2 + y^2)$ .
3. Determinar el volumen de la región comprendida entre el interior de la hiperboloides  $(x^2/a^2) + (y^2/a^2) - (z^2/c^2) = 1$  y los planos  $z = 0$  y  $z = k$ .
4. Un cilindro circular recto de radio  $a$  y altura  $h$  tiene una densidad uniforme  $k$ . Determinar el momento de inercia
  - (a) con respecto al eje de simetría;
  - (b) con respecto a un diámetro de una de las bases.
5. La región  $\Omega$  arriba del plano  $xy$ , dentro del cono  $z = r$  y abajo de la paraboloides  $z = 6 - r^2$  está llena con un material de densidad  $k$  constante.
  - (a) Determinar la localización del centro de masa.
  - (b) Determinar el momento de inercia con respecto al eje  $z$ .
6. El material de la región  $\Omega$  dentro del cilindro  $r = a/2$  y la esfera  $r^2 + z^2 = a^2$  tiene una densidad proporcional a  $|z|$ . Determinar la masa total de  $\Omega$ .
7. El cuarto de esfera  $r^2 + z^2 \leq a^2$  para el cual  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  está lleno con un material cuya densidad es  $p(x, y, z) = k \sin 2\theta$ . Determinar la masa total del material.
8. La región  $\Omega$  arriba del plano  $xy$ , dentro del cilindro

$r = a$  y fuera del cono  $z = r$  está lleno con un material cuya densidad  $k$  es uniforme. Determinar

- (a) la ubicación del centro de masa;
- (b) el momento de inercia con respecto al eje  $z$ ;
- (c) el momento de inercia con respecto al eje  $x$ .

9. Un cono circular de densidad  $k$  uniforme tiene altura  $h$  y radio  $a$  en la base.
  - (a) Determinar la ubicación del centro de masa.
  - (b) Determinar el momento de inercia con respecto al eje de simetría.
  - (c) Determinar el momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el vértice y es perpendicular al eje de simetría.
10. Un cono circular recto tiene altura  $h$ , radio de la base  $a$  y una densidad proporcional al cuadrado de la distancia a la base.
  - (a) Determinar la masa total.
  - (b) Determinar la razón  $a/h$  para que el cono tenga masa máxima si se fija la longitud  $l$  de su generatriz.
11. Un hemisferio sólido de radio  $a$  tiene una densidad  $k$  uniforme.
  - (a) Determinar la localización del centro de masa.
  - (b) Determinar el momento de inercia con respecto a la recta perpendicular a la cara plana que pasa por su centro.
12. Se barrena un agujero cilíndrico de radio  $a/2$  a través del centro de una esfera de radio  $a$  que tiene una



1042 INTEGRALES MÚLTIPLES

densidad  $k$  uniforme. Determinar el momento de inercia del material restante con respecto al eje de simetría.

13. La región interior del cilindro  $r = 2 \cos \theta$ , arriba del plano  $xy$  y abajo del cono  $z = r$  se llena con un material de densidad  $k$  uniforme. Determinar la posición del centro de masa.

14. La región  $\Omega$  arriba del plano  $xy$  y abajo de la paraboide  $z = 4 - x^2 - y^2$  se llena con material cuya densidad es  $\rho(x, y, z) = kz$ , donde  $k$  es una constante. Determinar

- (a) la ubicación del centro de masa;  
(b) el momento de inercia con respecto al eje  $z$ .

15. La región  $\Omega$  arriba del plano  $xy$  y abajo de la paraboide  $z = 9 - x^2 - y^2$  está llena con un material cuya densidad es  $\rho(x, y, z) = k(12 - z)$ , donde  $k$  es constante. Formular integrales en coordenadas cilíndricas que expresen

- (a) la masa;  
(b) el momento de inercia con respecto al eje  $z$ .

16. Considerar el casquillo cilíndrico  $a \leq r \leq b$ ,  $0 \leq z \leq h$ , y  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Suponer que su densidad es  $\rho(r, \theta, z) = k/r$ , en donde  $k$  es una constante.

- (a) Determinar la masa del casquillo.  
(b) Determinar  $I_z$ .  
(c) Determinar  $I_x$ .  
(d) Sea  $c = (a + b)/2$  y  $\xi = (b - a)/2$ . Nótese que  $c$  es el radio medio del casquillo y que  $\xi$  es la mitad de su espesor. No tomar en cuenta términos de orden mayor que el primero en  $\xi$  y con ello determinar ecuaciones aproximadas para  $I_z$  e  $I_x$  cuando la pared es delgada.

17. Un tanque hemisférico de agua tiene radio  $a$  y está hecho de tal modo que la cara plana es la base.

- (a) Determinar el volumen de agua en el tanque cuando la profundidad es  $h$ .  
(b) Determinar la profundidad a la cual el tanque tiene agua hasta la mitad de su volumen.

18. Un cilindro circular recto tiene una densidad  $k$  constante, radio  $a$  y altura  $h$ .

- (a) Determinar la atracción gravitacional que ejerce

este cilindro sobre una partícula de masa  $m$  ubicada a una distancia  $l$  al centro de una base a lo largo de la recta axial del cilindro.

- (\*b) En el resultado de la parte (a), hacer que  $h \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow \infty$  de tal modo que  $hk$  siempre sea igual a una constante  $\mu$ , que puede ser la masa por unidad de área de un disco delgado uniforme. De este modo determinar la atracción de un disco sobre una partícula de masa  $m$  ubicada a una distancia  $l$  del disco, sobre la recta perpendicular a éste y que pasa por su centro.

*Sugerencia:* emplear un desarrollo de Taylor de  $[a^2 + (l + h)^2]^{1/2}$  en términos de  $h$ .

- (\*c) Comprobar el resultado de la parte (b) haciendo el cálculo directo de la fuerza necesaria.

- \*19. En el resultado del ejemplo 4, en la ecuación 24, hacer que  $a \rightarrow b$  y que  $k \rightarrow \infty$  de modo que  $(b - a)k$  siempre sea igual a una constante  $\mu$ . Esta constante podría identificarse con la masa por unidad de área de un casquillo uniforme delgado. Con ello determinar la atracción gravitatoria de un casquillo cilíndrico delgado sobre una masa  $m$  ubicada en el centro de una base del cascarón.

*Sugerencia:* emplear un desarrollo de Taylor de  $(a^2 + h^2)^{1/2}$  en términos de  $a - b$ .

20. (a) Considerar la región en el primer cuadrante del plano  $xz$  acotada por el eje  $z$ , la parábola  $z = x^2$  cuando  $0 \leq x \leq a$ , y la recta  $z = a^2$ . Determinar  $\hat{z}_A$  y la coordenada  $z$  del centroide de esta región.

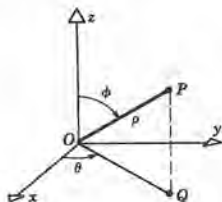
- (b) Hágase girar la región de la parte (a) alrededor del eje  $z$  para formar un sólido de revolución, para determinar  $\hat{z}_V$ , la coordenada  $z$  del centroide de este sólido. Obsérvese que  $\hat{z}_V > \hat{z}_A$ ; así, el centroide del sólido de revolución está a mayor altura que el centroide de la región plana.

- \*21. (a) Se tiene la región acotada por el eje  $z$ , la gráfica de  $z = x^p$  para todo  $p > 0$ , y para  $0 \leq x \leq a$ , y la recta  $z = a^p$ . Proceder como en el problema 20 y determinar  $\hat{z}_A$  y  $\hat{z}_V$  para este caso.

- (b) Emplear los resultados de la parte (a) para demostrar que  $\hat{z}_V > \hat{z}_A$  para todo  $p > 0$ ; esto es, el centroide del sólido de revolución queda a mayor altura que el centroide de la región plana de la cual se obtuvo. Determinar el valor de  $p$  para el que  $\hat{z}_V/\hat{z}_A$  es máxima.

## 17.7 INTEGRACIÓN EMPLEANDO COORDENADAS ESFÉRICAS

Además de las coordenadas rectangulares y de las cilíndricas, existe otro sistema coordenado que con frecuencia es útil en problemas en los que interviene la simetría esférica. Estas coordenadas se llaman **coordenadas esféricas**, y se representan mediante  $\rho$ ,  $\theta$  y  $\phi$ . Las coordenadas esféricas de un punto  $P$  dado se muestran en la figura 17.7.1.



**Figura 17.7.1**  
Coordenadas esféricas del punto  $P$ .

La coordenada radial  $\rho$  es la distancia del origen  $O$  hasta  $P$ ;  $\rho$  siempre es no negativa y es cero sólo si  $P$  coincide con el origen. La superficie  $\rho = a$  es la esfera que tiene su centro en el origen y radio  $a$ , como se ve en la figura 17.7.2.

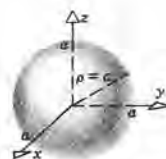
El ángulo  $\theta$  es el mismo que en las coordenadas polares y en las cilíndricas; es el ángulo entre el eje  $x$  positivo y la proyección  $OQ$  de  $OP$  en el plano  $xy$ , como se ve en la figura 17.7.1. Nos restringiremos a valores de  $\theta$  en el intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , o quizá a algún otro intervalo de longitud  $2\pi$ . Como en las coordenadas cilíndricas, la superficie  $\theta = \alpha$  es el semiplano que se ve en la figura 17.7.3 que contiene al eje  $z$  y cuya traza en el plano  $xy$  es el rayo que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  positivo.

Por último, el ángulo  $\phi$  es el que forma el eje  $z$  positivo con la recta  $OP$ ; se restringe al intervalo  $0 \leq \phi \leq \pi$ . La superficie  $\phi = \beta$  es el cono (o más exactamente, un manto del cono) cuyo vértice está en el origen y para el que el eje  $z$  es el eje de simetría (véase figura 17.7.4). El segmento de recta que va del origen a cada punto del cono forma el ángulo  $\beta$  con el eje  $z$  positivo. Si  $\phi = 0$ , o si  $\phi = \pi$ , el cono se cierra para formar el eje  $z$  positivo o negativo, respectivamente. Si  $\phi = \pi/2$ , el cono se aplana para formar el plano  $xy$ .

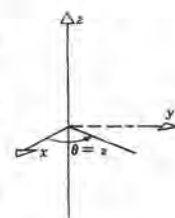
Se puede identificar un punto  $P$  del espacio tridimensional como el punto de intersección de una esfera  $\rho = a$ , con un semiplano  $\theta = \alpha$ , y con un cono  $\phi = \beta$ , como se indica en la figura 17.7.5. Siempre mencionaremos las coordenadas esféricas de un punto en el orden  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Así, en coordenadas esféricas el punto  $(a, \alpha, \beta)$  es el punto para el cual  $\rho = a$ ,  $\theta = \alpha$ , y  $\phi = \beta$ .

La relación entre las coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  y las coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  se puede ver en la figura 17.7.6. Tenemos que

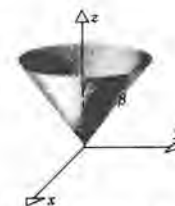
$$\begin{cases} r = \rho \sin \phi, \\ \theta = \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases} \quad (1a)$$



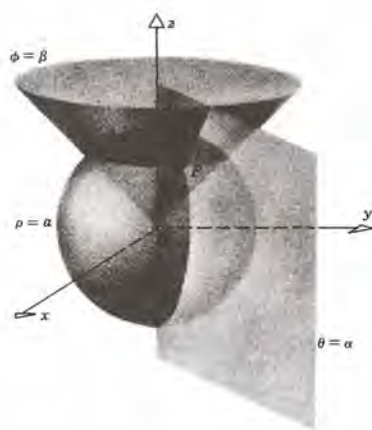
**Figura 17.7.2**  
La esfera  $\rho = a$ .



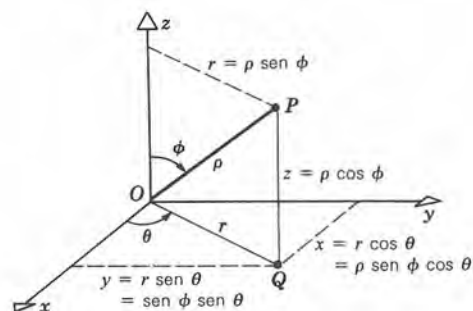
**Figura 17.7.3**  
El semiplano  $\theta = \alpha$ .



**Figura 17.7.4**  
El cono  $\phi = \beta$ .



**Figura 17.7.5** Superficies coordenadas en coordenadas esféricas.



**Figura 17.7.6**

y

$$\begin{cases} \rho = (r^2 + z^2)^{1/2}, \\ \theta = \theta, \\ \tan \phi = \frac{r}{z}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \end{cases} \quad (1b)$$

Ya que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (2)$$

la relación entre las coordenadas esféricas y las coordenadas rectangulares es

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \end{cases} \quad (3a)$$



$$y \quad \begin{cases} \rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \cos \phi = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \end{cases} \quad (3b)$$

### EJEMPLO 1

Calcular las coordenadas rectangulares del punto  $P$  cuyas coordenadas esféricas son  $\rho = 4$ ,  $\theta = \pi/3$ , y  $\phi = \pi/6$  (véase figura 17.7.7).

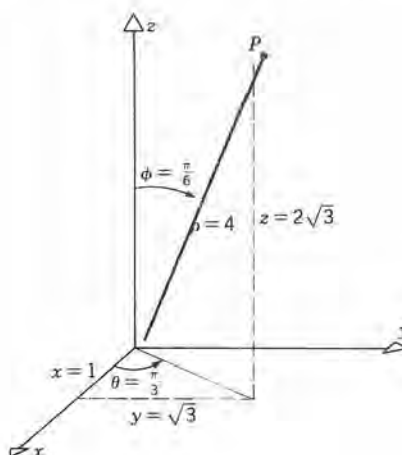


Figura 17.7.7

Sustituyendo los valores dados de  $\rho$ ,  $\theta$  y  $\phi$  en las ecuaciones 3(a), obtenemos

$$x = (4) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) = 1,$$

$$y = (4) \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3},$$

$$z = (4) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}. \quad \blacksquare$$

### EJEMPLO 2

Calcular las coordenadas esféricas del punto  $P$  cuyas coordenadas rectangulares son  $x = 2$ ,  $y = -2$  y  $z = 4$  (véase figura 17.7.8).

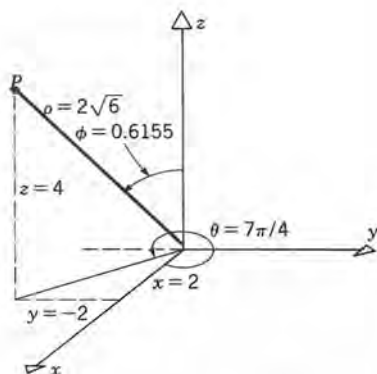


Figura 17.7.8

En este caso necesitamos emplear las ecuaciones (3b). De acuerdo con la primera de esas ecuaciones, obtenemos

$$\rho = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{6}.$$

De acuerdo con la segunda, tenemos que

$$\tan \theta = \frac{-2}{2} = -1;$$

además, como  $x > 0$  y  $y < 0$ ,  $\theta$  debe quedar en el cuarto cuadrante, y entonces  $\theta = 7\pi/4$ . Finalmente, según la última de las ecuaciones (3b), vemos que

$$\cos \phi = \frac{4}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.8165,$$

y, por tanto,  $\phi \approx 0.6155$  radianes. ■

Las coordenadas angulares  $\theta$  y  $\phi$  de un punto  $P$  de una esfera se pueden relacionar con la longitud y la latitud, respectivamente, en la superficie de la Tierra. De acuerdo

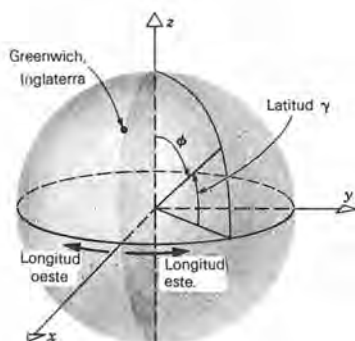
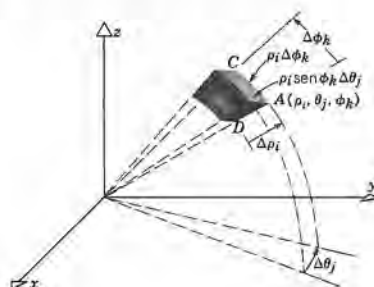


Figura 17.7.9

con la figura 17.7.9, supongamos que el eje  $z$  positivo se traza desde el centro de la tierra y pasa por el polo norte, y que el eje positivo de  $x$  se escoge de modo que el plano  $xz$ , para  $x > 0$ , pase por el Observatorio Real de Greenwich, Inglaterra. Entonces, se puede identificar a  $\theta$  con la longitud, siempre que  $\theta$  se restrinja al intervalo  $[-\pi, \pi]$ ; la longitud este corresponde a valores positivos de  $\theta$  y la longitud oeste a valores negativos. Al ángulo  $\theta$  se le conoce también como el azimut. Por otro lado, el ángulo  $\phi$  medido desde el polo norte hacia abajo, se relaciona con la latitud, que se mide desde el ecuador. Si  $\gamma$  es la latitud, donde  $\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$ , entonces  $\phi = (\pi/2) - \gamma$ .

Consideremos ahora el empleo de las coordenadas esféricas para la integración sobre una región tridimensional  $\Omega$ . Consideremos una partición de  $\Omega$  en elementos pequeños dados por una familia de esferas concéntricas  $\rho = \rho_i$ , por una familia de planos  $\theta = \theta_j$  que pasan por el eje  $z$ , y por una familia de conos  $\phi = \phi_k$ . Un elemento típico de volumen se muestra en la figura 17.7.10; está acotado por las esferas  $\rho = \rho_{i-1}$



**Figura 17.7.10** Un elemento de volumen en coordenadas esféricas.

y  $\rho = \rho_i$ , por los semiplanos  $\theta = \theta_{j-1}$  y  $\theta = \theta_j$  y por los conos  $\phi = \phi_{k-1}$  y  $\phi_k$ . Como de costumbre, hacemos que

$$\Delta \rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}, \quad \Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}, \quad \Delta \phi_k = \phi_k - \phi_{k-1}. \quad (4)$$

Con ello es fácil estimar el volumen  $\Delta V_{ijk}$  del elemento, del siguiente modo: para  $\Delta \rho_i$ ,  $\Delta \theta_j$  y  $\Delta \phi_k$  suficientemente pequeños, el elemento sólo difiere en una cantidad muy pequeña con respecto a una caja rectangular; así, se puede calcular su volumen como producto de las longitudes de tres aristas contiguas, por ejemplo, los lados  $AB$ ,  $AC$  y  $AD$ , que se ven en la figura 17.7.10. El lado  $AD$  es un segmento de recta y tiene una longitud  $\Delta \rho_i$ . El lado  $AC$  es un arco de círculo de radio  $\rho_i$ , que subtiende el ángulo  $\Delta \phi_k$  y, por tanto, su longitud es  $\rho_i \Delta \phi_k$ . Por último, el lado  $AB$  es un arco de círculo de radio  $r = \rho_i \sin \phi_k$  que subtiende el ángulo  $\Delta \theta_j$  y, por tanto, su longitud es  $\rho_i \sin \phi_k \Delta \theta_j$ . Multiplicando las longitudes de estos lados entre sí, se obtiene

$$\Delta V_{ijk} \cong \rho_i^2 \sin \phi_k \Delta \rho_i \Delta \theta_j \Delta \phi_k. \quad (5)$$

Finalmente, en el límite cuando  $\Delta \rho_i$ ,  $\Delta \theta_j$  y  $\Delta \phi_k$  tienden a cero, tenemos

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi. \quad (6)$$



Con lo anterior, para evaluar una integral triple sobre una región  $\Omega$  empleando coordenadas esféricas, se escribe

$$\iiint_{\Omega} f(\rho, \theta, \phi) dV = \iiint_{\Omega} f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \quad (7)$$

Nótese que no sólo se debe expresar a  $dV$  en términos de  $d\rho$ ,  $d\theta$  y  $d\phi$ , de acuerdo con la ecuación 6, sino que el integrando  $f$  debe escribirse en términos de  $\rho$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , y que se deben seleccionar los límites de las integrales de tal modo que se cubra la región  $\Omega$ .

### EJEMPLO 3

La densidad de un hemisferio sólido de radio  $a$  es proporcional a la distancia a la cara plana. Determinar el centro de masa del hemisferio.

Seleccionaremos el sistema coordenado que se muestra en la figura 17.7.11. Entonces la cara plana del hemisferio descansa en el plano  $xy$ , su centro está en el origen

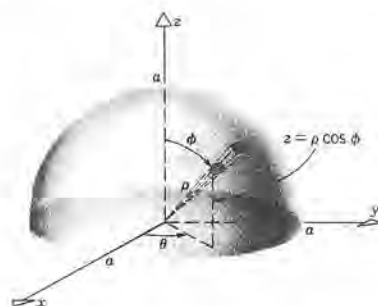


Figura 17.7.11

y el hemisferio queda del lado del plano  $xy$  para el cual  $z \geq 0$ . La densidad\* está dada por  $\mu(x, y, z) = k \rho \cos \phi$ , donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Debido a la simetría del problema el centro de masa debe quedar en el eje  $z$  y, por tanto, sólo es necesario calcular  $\bar{z}$ . Para este fin necesitamos determinar la masa total  $M$  del hemisferio y su momento lineal  $L_{xy}$  con respecto al plano  $xy$ . El hemisferio se describe mediante las desigualdades

$$0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

\* Hasta ahora hemos seguido la práctica común de usar a  $\rho$  para denotar la densidad. Sin embargo, en las coordenadas esféricas, se usa  $\rho$  casi universalmente para la coordenada radial. Por tanto, sólo en esta sección, emplearemos a  $\mu$  para representar a la densidad.

de modo que la masa total es

$$\begin{aligned}
 M &= \int \int \int_{\Omega} \mu(x, y, z) \, dV \\
 &= \int \int \int_{\Omega} kz \, dV \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (k\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
 &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^3 \cos \phi \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Al evaluar estas integrales iteradas obtenemos

$$\begin{aligned}
 M &= k \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi \, d\theta \, d\phi \\
 &= k \frac{a^4}{4} 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \\
 &= \frac{\pi}{2} k a^4 \frac{\sin^2 \phi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} k a^4. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Del mismo modo el momento lineal  $L_{xy}$  está dado por

$$\begin{aligned}
 L_{xy} &= \int \int \int_{\Omega} z \mu(x, y, z) \, dV \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a (\rho \cos \phi)(k\rho \cos \phi)(\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi) \\
 &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho^4 \cos^2 \phi \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
 &= k \frac{a^5}{5} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \sin \phi \, d\theta \, d\phi \\
 &= k \frac{a^5}{5} 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \sin \phi \, d\phi \\
 &= \frac{2}{5} \pi k a^5 \left( -\frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{15} \pi k a^5. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{z} = \frac{L_{xy}}{M} = \frac{2\pi k a^5/15}{\pi k a^4/4} = \frac{8}{15} a. \blacksquare$$

### EJEMPLO 4

La región  $\Omega$  acotada por abajo por el plano  $z = b$  y por arriba por la esfera  $\rho = a$ , se llena con material cuya densidad es inversamente proporcional a la distancia al origen. Determinar la masa total  $M$  de  $\Omega$ .

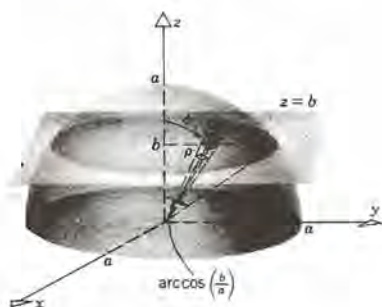


Figura 17.7.12

En la figura 17.7.12 se muestra la región  $\Omega$ . En coordenadas esféricas el plano  $z = b$  tiene por ecuación  $\rho = b/\cos \phi$ . Así,  $\Omega$  queda descrita mediante las desigualdades

$$\frac{b}{\cos \phi} \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \arccos \frac{b}{a}. \quad (13)$$

La densidad es  $\mu(\rho, \theta, \phi) = k/\rho$ , donde  $k$  es constante. Entonces, la masa total  $M$  está expresada por

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} \mu(\rho, \theta, \phi) dV \\ &= \int_0^{\arccos(b/a)} \int_0^{2\pi} \int_{b/\cos \phi}^a \frac{k}{\rho} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= k \int_0^{\arccos(b/a)} \int_0^{2\pi} \int_{b/\cos \phi}^a \rho \sin \phi d\rho d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (14)$$

Al evaluar las integrales en la ecuación 14 obtenemos

$$\begin{aligned} M &= \frac{k}{2} \int_0^{\arccos(b/a)} \int_0^{2\pi} \left( a^2 - \frac{b^2}{\cos^2 \phi} \right) \sin \phi d\theta d\phi \\ &= \frac{k}{2} 2\pi \int_0^{\arccos(b/a)} (a^2 - b^2 \cos^{-2} \phi) \sin \phi d\phi \\ &= k\pi \left( -a^2 \cos \phi - \frac{b^2}{\cos \phi} \right) \Big|_0^{\arccos(b/a)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= k\pi \left( -a^2 \frac{b}{a} + a^2 - b^2 \frac{a}{b} + b^2 \right) \\
 &= k\pi(a - b)^2.
 \end{aligned} \tag{15}$$

### EJEMPLO 5

Determinar la fuerza  $\mathbf{F}$  de atracción gravitacional que ejerce un cono circular recto sólido de densidad constante  $k$  y altura  $h$ , y un ángulo en el semivértice  $\alpha$  sobre una partícula de masa  $m$  ubicada en el vértice del cono.

Conviene seleccionar al sistema de coordenadas como se ve en la figura 17.7.13, de modo que el vértice del cono esté en el origen y que su eje sea el eje  $z$  positivo. Entonces, el cono queda descrito por las desigualdades

$$0 \leq \rho \leq h \sec \phi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \alpha. \tag{16}$$

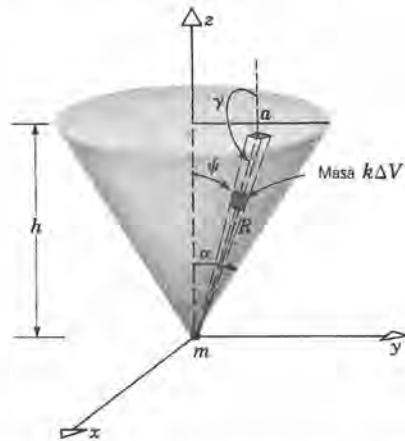


Figura 17.7.13

Por la simetría del problema, sabemos que las componentes  $x$  y  $y$  de la fuerza de atracción son cero. De acuerdo con la ecuación 20 de la sección 17.6, y la figura 17.7.13, la componente  $z$  está dada por

$$F_z = Gmk \int \int \int_{\Omega} \frac{\cos \psi}{R^2} dV,$$

en la cual  $\psi = \pi - \gamma$ . Como  $\psi = \phi$  y  $R = \rho$ , esta integral se reduce a

$$\begin{aligned}
 F_z &= Gmk \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^{h \sec \phi} \cos \phi \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
 &= Gmk \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi [h \sec \phi - 0] \, d\theta \, d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Gmkh \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\theta \, d\phi \\
 &= 2\pi Gmkh (-\cos \phi) \Big|_0^\alpha \\
 &= 2\pi Gmkh(1 - \cos \alpha).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Podemos expresar también a  $F_z$  en términos de la altura  $h$  y del radio de la base  $a$  del cono. De acuerdo con la figura 17.7.13, vemos que  $\cos \alpha = h/\sqrt{a^2 + h^2}$  y, por tanto,

$$F_z = 2\pi Gmkh \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right). \quad \blacksquare \tag{18}$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 calcular las coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  del punto con las coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  que se dan.

1.  $\left( 2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right)$
2.  $\left( 4, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right)$
3.  $\left( 2, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3} \right)$
4.  $\left( 3, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right)$
5.  $\left( 2, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right)$
6.  $\left( 4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$

En los problemas 7 a 12, calcular las coordenadas esféricas  $(\rho, \theta, \phi)$  del punto con las coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$  dadas.

7.  $(1, -1, \sqrt{2})$
8.  $(2, 0, -2\sqrt{3})$
9.  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -1 \right)$
10.  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2\sqrt{3})$
11.  $\left( \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$
12.  $\left( -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 \right)$

En los problemas 13 a 20 deducir la ecuación en coordenadas esféricas que corresponde a la ecuación dada en coordenadas rectangulares o cilíndricas.

13.  $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2$
14.  $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$
15.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0, \quad z \geq 0$

16.  $x^2 + y^2 = 9$
17.  $x = 2y, \quad y \geq 0$
18.  $r = 4$
19.  $r = 3z$
20.  $r = 2 \cos \theta$

En los problemas 21 a 25 describir la gráfica de la ecuación dada.

21.  $\rho \cos \phi = b$
22.  $\rho = 2a \cos \phi$
23.  $\rho \sin \phi = b$
24.  $\rho \sin \phi = 2a \sin \theta$
25.  $(\cos \theta + \sin \theta) \rho \sin \phi = a$
26. Determinar el centroide de un hemisferio de radio  $a$ .
27. Determinar el momento de inercia de un hemisferio sólido de radio  $a$  y densidad uniforme  $k$ 
  - (a) con respecto al eje de simetría;
  - (b) con respecto a un diámetro de la cara plana.
28. Determinar el momento de inercia de un cascarón esférico de radio interior  $a$ , radio exterior  $b$  y densidad uniforme  $k$ , con respecto a un diámetro.
29. Un cascarón esférico de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$  tiene una densidad  $\mu(\rho, \theta, \phi) = k/\rho$ , donde  $k$  es una constante. Determinar
  - (a) la masa del cascarón;
  - (b) el momento de inercia con respecto a un diámetro.
30. La región que está dentro de la esfera  $\rho = a$  y el cono  $\phi = \pi/6$  tiene una densidad constante  $k$ . Determinar
  - (a) la masa de la región;
  - (b) el centro de masa.

31. La región común interior de la esfera  $\rho = 2a \cos \phi$  y del cono  $\phi = \alpha$ , donde  $0 < \alpha < \pi/2$ , se llena con un material cuya densidad es proporcional a  $z$ . Determinar la masa total en la región.
32. La cuña esférica  $0 \leq \rho \leq a$ ,  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/3$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$  se llena con un material cuya densidad es  $\mu(\rho, \theta, \phi) = k|\cos \phi|$ , donde  $k$  es una constante. Determinar
- (a) la masa total;
- (b) el momento de inercia con respecto al eje  $z$ .
33. El cascarón hemisférico  $a/2 \leq \rho \leq a$ ,  $z \geq 0$  tiene una densidad  $\mu(\rho, \theta, \phi) = k/\rho$ , donde  $k$  es una constante. Determinar
- (a) la masa total;
- (b) el centro de masa;
- (c) el momento de inercia con respecto al eje  $z$ .
34. Calcular el volumen de la región común interior de las esferas  $\rho = 1$  y  $\rho = 2 \cos \phi$ .
35. Determinar la masa de una esfera de radio  $a$  cuya densidad es proporcional a la distancia de un punto dado a la superficie.

*Sugerencia:* seleccionar las coordenadas de tal modo que el punto dado sea el origen, y que un diámetro de la esfera quede en el eje  $z$  positivo.

36. (a) Un planeta esférico de radio  $a$  tiene una atmósfera cuya densidad es  $\mu = \mu_0 e^{-\alpha h}$ , donde  $h$  es la altura sobre la superficie del planeta,  $\mu_0$  es la densidad al nivel del mar, y  $\alpha$  una constante de proporcionalidad. Determinar la masa total de la atmósfera de este planeta.
- (b) Si suponemos que la densidad es proporcional a la presión, entonces la densidad de la atmósfera terrestre decae en forma exponencial, como se supuso en la parte (a), y  $\mu_0 \approx 1.20 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha \approx 0.116 \text{ km}^{-1}$ . Si se supone también que la Tierra es una esfera cuyo radio es de 6370 km, calcular la masa de la atmósfera terrestre.

**37. Atracción gravitacional de una esfera.** En este problema indicaremos cómo calcular la fuerza  $\mathbf{F}$  de atracción gravitatoria debida a una esfera uniforme de radio  $a$  y de densidad constante  $k$ , sobre una partícula de masa  $m$  ubicada a una distancia  $l$  del centro de la esfera, donde  $l > a$  (véase figura 17.7.14).

- (a) Habiendo seleccionado las coordenadas como se ve en la figura 17.7.14,  $F_x = F_y = 0$  es necesario sólo calcular  $F_z$ . Demostrar que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\| &= |F_z| \\ &= Gmk \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi}{R^2} \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho, \end{aligned}$$

e, integrando con respecto a  $\theta$ , que

$$\|\mathbf{F}\| = 2\pi Gmk \int_0^a \int_0^\pi \frac{\cos \psi}{R^2} \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho. \quad (i)$$

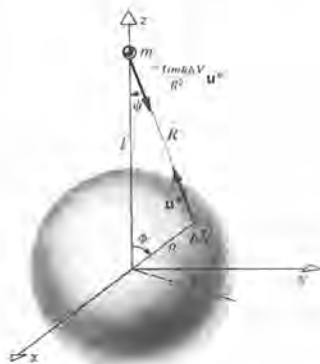
- (b) Para evaluar la integral de la ecuación (i) es necesario expresar a  $\psi$  y a  $R$  en términos de  $\rho$  y  $\phi$ . Esto se puede llevar a cabo empleando la ley de los cosenos

$$R^2 = l^2 + \rho^2 - 2l\rho \cos \phi \quad (ii)$$

y la relación

$$l = R \cos \psi + \rho \cos \phi, \quad (iii)$$

que se puede deducir inmediatamente de la figura 17.7.14. Sin embargo, la integral que resulta es



**Figura 17.7.14** Fuerza gravitacional que ejerce una esfera sólida.

difícil; es más sencillo evaluar a  $\|\mathbf{F}\|$  cambiando la variable de integración de  $\phi$  a  $R$  en la integral interior de la ecuación (i). Emplear las ecuaciones (ii) y (iii) para demostrar que

$$\cos \psi = \frac{l^2 + R^2 - \rho^2}{2lR}. \quad (iv)$$



1054 INTEGRALES MÚLTIPLES

- (c) De acuerdo con la ecuación (ii), demostrar que, para una  $p$  fija,

$$\sin \phi \, d\phi = \frac{R}{lp} \, dR, \quad (v)$$

y obsérvese que  $R = l - p$  cuando  $\phi = 0$ , y  $R = l + p$  cuando  $\phi = \pi$ . A continuación demostrar que

$$\|F\| = \frac{\pi Gmk}{l^2} \int_0^a \int_{l-p}^{l+p} \rho \left[ 1 + \frac{l^2 - p^2}{R^2} \right] dR \, dp. \quad (vi)$$

- (d) Evaluar las integrales de la ecuación (vi) y con ello demostrar que

$$\|F\| = \frac{4}{3} \pi a^3 k \frac{Gm}{l^2} = \frac{GMm}{l^2}, \quad (vii)$$

donde  $M = 4\pi a^3 k/3$  es la masa de la esfera. Así, una esfera uniforme sólida atrae a una partícula como si toda su masa estuviera concentrada en el centro de la esfera.

- (e) Suponer ahora que la esfera no es uniforme, sino que tiene una densidad  $f(\rho)$  que depende únicamente de  $\rho$ . Demostrar que en este caso también  $\|F\| = GMm/l^2$ .

**\*38. Atracción gravitatoria de un cascarón esférico.**

Sea  $F$  la fuerza de atracción de un cascarón esférico uniforme de radio interior  $a$ , radio exterior  $b$  y densidad constante  $k$  sobre una partícula de masa  $m$  ubicada a una distancia  $l$  del centro del cascarón. Deducir cada uno de los siguientes resultados modificando en forma adecuada el procedimiento que se describió en el problema 37.

- (a) Si  $l > b$ , demostrar que  $\|F\| = GMm/l^2$ , donde  $M$  es la masa del cascarón.  
 (b) Si  $l < a$ , demostrar que  $\|F\| = 0$ .  
 (c) Demostrar que los resultados de las partes (a) y (b) siguen vigentes si la densidad del cascarón es variable, aunque sólo depende de  $\rho$ .

**39. Determinar la atracción gravitatoria de un hemisferio sólido de radio  $a$  y densidad  $k$  constante sobre una masa  $m$  ubicada en el centro de la cara plana.**

## PROBLEMAS DE REPASO

Sea  $R$  el rectángulo  $0 \leq x \leq 4$ ,  $2 \leq y \leq 8$ . Subdividir a  $R$  en seis subrectángulos mediante los puntos de partición  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ ,  $y_0 = 2$ ,  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 6$ ,  $y_3 = 8$ . En los problemas 1 a 4 evaluar  $\iint_R f(P_{ij}^*) dA$  calculando la suma de Riemann correspondiente, suponiendo que  $P_{ij}^*$  es el centro de cada subrectángulo.

1.  $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 4, & 2 \leq y \leq 6 \\ 4, & 0 \leq x \leq 4, & 6 < y \leq 8 \end{cases}$
2.  $f(x, y) = x^2 + y^2$
3.  $f(x, y) = xe^y$
4.  $f(x, y) = 4x^2 + y$

En los problemas 5 a 8, evaluar la integral dada.

5.  $\int_0^2 \int_0^{2-x} e^y \, dy \, dx$
6.  $\int_0^2 \int_0^x \tan x^2 \, dy \, dx$
7.  $\iint_{\Omega} (x^2 + 4y^2) \, dA$ , donde  $\Omega$  es el cuadrado  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 3$

8.  $\iint_{\Omega} (4 - x) \, dA$ , donde  $\Omega$  es la región elíptica  $2x^2 + y^2 \leq 4$

En los problemas 9 a 12 hacer un dibujo de la región de integración y evaluar la integral dada.

9.  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\cot x} \ln(\sin x) \, dy \, dx$
10.  $\int_0^4 \int_{-y}^y y^2 e^{xy} \, dx \, dy$
11.  $\int_0^1 \int_{x^2}^x \left( \frac{1}{2}x^2 + y \right) \, dy \, dx$
12.  $\int_0^1 \int_{x^2}^{\cosh x^2} x \, dy \, dx$

En los problemas 13 a 16, para la integral doble dada sobre la región acotada  $\Omega$ :

- (a) formular la integral iterada en donde primero se lleve a cabo la integración con respecto a  $y$ ;
- (b) formular la integral iterada en donde primero se lleve a cabo la integración con respecto a  $x$ ;
- (c) evaluar cada integral.

13.  $\iint_{\Omega} (x - 2y) \, dA$ ,  $\Omega$  está acotada por  $x = \ln y$ ,  $x = 1$ ,  $y = 1$ .
14.  $\iint_{\Omega} (2 \cos x - 2y) \, dA$ ,  $\Omega$  está en el primer cuadrante and is bounded by  $y = y$  está acotada por  $x = 0$ .
15.  $\iint_{\Omega} \frac{x+y}{xy} \, dA$ ,  $\Omega$  está acotada por  $x^2 = y$ ,  $x = y^{1/3}$ .
16.  $\iint_{\Omega} 2x \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$ ,  $\Omega$  está en el primer cuadrante y está acotada por  $y = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 0$ .

En los problemas 17 a 20, hacer un dibujo de la región de integración y evaluar la integral dada.

17.  $\int_0^{2\pi} \int_1^2 r \cos r^2 \, dr \, d\theta$
18.  $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (4 - r^2)^{-1/2} r \, dr \, d\theta$
19.  $\int_0^{3\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r^2 \, dr \, d\theta$
20.  $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 \tan \theta \sec \theta \, dr \, d\theta$

En los problemas 21 a 24 llevar a cabo los cambios de coordenadas que se indican.

21. Pasar  $(2, \pi/6, 1)$  de coordenadas cilíndricas a rectangulares.
22. Pasar  $(3, \pi/4, 3\pi/4)$  de coordenadas esféricas a rectangulares.
23. Pasar  $(2, \pi/3, \pi/2)$  de coordenadas esféricas a cilíndricas.
24. Pasar  $(0, 2, \sqrt{3})$  de coordenadas rectangulares a esféricas.

En los problemas 25 a 28 hacer un dibujo e identificar la gráfica de la ecuación dada, y hacer los cambios de coordenadas que se piden.

25.  $r^2 + z^2 = 4$  a coordenadas esféricas.
26.  $\rho = \cos \phi \csc^2 \phi$  a coordenadas rectangulares.
27.  $\rho = 3 \sec \phi$  a coordenadas rectangulares.
28.  $x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 36$  a coordenadas cilíndricas.

En los problemas 29 y 30 evaluar la integral dada. Puede

ayudar si se cambia a otro sistema de coordenadas.

29.  $\int_{4\pi/3}^{5\pi/4} \int_0^{-2 \sec \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta$
30.  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\csc \theta} r^5 \sin^3 \theta \, dr \, d\theta$

En los problemas 31 y 32 calcular el volumen del sólido dado.

31. Sólido acotado por arriba por  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y por abajo por  $x^2 + y^2 = z^2$  con  $z \geq 0$ .
32. El sólido acotado por arriba por  $x + z = 5$ , por abajo por el plano  $xy$ , y que está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

En los problemas 33 a 36 calcular la masa total  $M$  de la región dada.

33.  $\Omega$  es el triángulo acotado por  $y = 2$ ,  $y = 2x$ ,  $y = x = 0$ , y tiene una densidad  $\rho(x, y) = kxy$ .
34.  $\Omega$  es la región  $1 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ , y tiene una densidad  $\rho(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta \cos 2\theta$ .
35.  $\Omega$  es la región acotada por arriba por  $r^2 + z^2 = 4$ , por abajo por el plano  $xy$ , y que está dentro del cilindro  $r = 1$ . La densidad en  $\Omega$  es proporcional al cuadrado de la distancia al eje  $z$ .
36.  $\Omega$  es el sólido del interior tanto de la esfera  $\rho = 5$  como del cono  $\phi = \pi/3$ , cuya densidad es inversamente proporcional a la distancia al origen.

En los problemas 37 a 40, determinar a  $\bar{x}$ , la coordenada  $x$  del centro de masa de la región dada. En cada caso suponer que la densidad es constante.

37. La región acotada por  $y = e^x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .
38. La región del primer octante que queda dentro de la esfera  $\rho = 4$ .
39. La cuña en el primer octante que está acotada por  $x^2 + 4z^2 = 16$  y por  $y = x$ .
40. El volumen del sólido del interior tanto de  $r^2 + z^2 = 4$  como de  $z = r$ , y que está arriba del plano  $xy$ .
41. Calcular el radio de giro de la región del problema 37 con respecto al eje  $y$ .
42. Calcular el radio de giro del sólido en el problema 38 con respecto al eje  $y$ .
43. Calcular el radio de giro del sólido del problema 39 con respecto al eje  $y$ .
44. Calcular el radio de giro del sólido del problema 40 con respecto al eje  $y$ .





# CÁLCULO

## Capítulo 18

### Integrales de línea y de superficie

Con frecuencia, en el estudio de algunas partes de la física matemática, como por ejemplo la mecánica de fluidos y la teoría electromagnética, se desea manejar integrales sobre curvas o superficies en el espacio. Estas integrales se llaman integrales de línea e integrales de superficie, respectivamente. En aplicaciones físicas, el integrando comprende, normalmente, una fuerza o una velocidad, o alguna otra cantidad que se expresa mejor con vectores. Para manejar con eficacia problemas en estos campos, con frecuencia es necesario combinar la destreza analítica con la perspectiva geométrica o física.

Los resultados matemáticos principales son dos teoremas, que se llaman teorema de la divergencia y teorema de Stokes y se puede considerar que ambos son generalizaciones muy importantes del teorema fundamental del cálculo. Si se subraya de nuevo la importancia del teorema fundamental de Newton y Leibniz, estos teoremas son la culminación de un libro de cálculo. También sirven para abrir el camino a vastas y excitantes áreas de las matemáticas y de sus aplicaciones, que se proyectan más allá.

---

### 18.1 INTEGRALES DE LÍNEA

En esta sección desarrollaremos el concepto de una integral a lo largo de una curva en el espacio. Esta integral se conoce comúnmente como integral de línea, aunque la curva a lo largo de la cual se lleva a cabo la

integración puede ser muy arbitraria, y desde luego no necesita ser una recta. En este capítulo supondremos, a menos que se diga otra cosa, que la curva es suave, o suave por pedazos, y que tiene longitud finita, o sea, que es rectificable.

Supongamos que la curva  $C$  está descrita mediante la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b; \quad (1)$$

o en forma de componentes,

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (2)$$

Recordemos que si el vector tangente

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (3)$$

es continuo para  $a \leq t \leq b$ , y si  $d\mathbf{r}/dt \neq \mathbf{0}$  en todo punto de  $C$ , entonces  $C$  es suave. También, podemos definir una función longitud de arco  $s = s(t)$  en  $C$  tal que

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| = \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (4)$$

y  $s(a) = 0$ . Entonces la longitud de la curva es

$$L = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| dt = \int_a^b \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt. \quad (5)$$

Con frecuencia conviene describir a  $C$  en forma paramétrica, en términos de la longitud de arco  $s$ ,  $0 \leq s \leq L$ , así como en términos del parámetro original  $t$ . Entonces el vector tangente unitario  $\mathbf{T}$ , que apunta en la dirección en que  $s$  crece es

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|}. \quad (6)$$

Por último, supongamos que una función vectorial  $\mathbf{F}(x, y, z)$ , o  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  está dada en un dominio que contiene a la curva  $C$ . Con frecuencia llamaremos a una función vectorial de este tipo **campo vectorial**.

Las integrales de línea se encuentran con frecuencia en las aplicaciones a la física; por ejemplo, se tiene el siguiente problema: supongamos que se mueve una partícula a lo largo de una curva  $C$  desde el punto  $\mathbf{r}(a)$  hasta el punto  $\mathbf{r}(b)$ , debido a la fuerza  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  (véase figura 18.1.1). ¿Cuál es el trabajo  $W$  que efectúa la fuerza  $\mathbf{F}$  sobre la partícula?

Podemos proceder casi como lo hemos hecho hasta ahora cuando nos enfrentamos a asuntos semejantes al anterior. Sea  $s$  la longitud de arco medida a lo largo de la curva  $C$  desde el punto inicial  $\mathbf{r}(a)$  hacia  $\mathbf{r}(b)$ . Damos a  $C$  una partición en porciones de longitud  $\Delta s_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y escogemos un punto estrella  $P_i^*$ , que corresponde

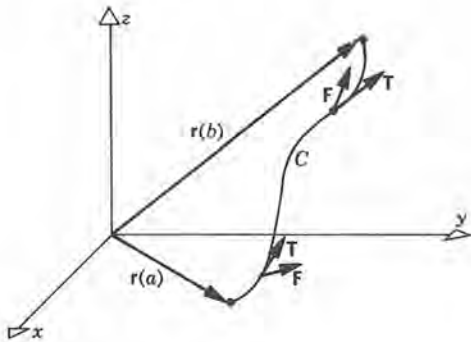


Figura 18.1.1

a una longitud  $s_i^*$  de arco, en cada porción, como se ve en la figura 18.1.2. En cualquier punto  $s$  de la curva, la componente de la fuerza que es tangente a la curva en la dirección del movimiento es  $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})(s)$ . Así,  $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})(s_i^*) \Delta s_i$  es una aproximación al trabajo necesario para mover a la partícula a través de la porción  $\Delta s_i$  de la curva  $C$ , y la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})(s_i^*) \Delta s_i \quad (7)$$

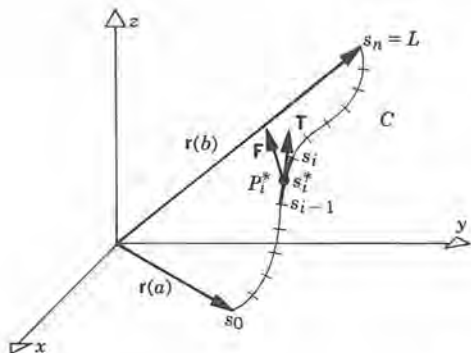


Figura 18.1.2

es una aproximación al trabajo total  $W$ . Si llevamos a cabo el procedimiento acostumbrado de límite de la suma (7), obtenemos

$$W = \int_0^L (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})(s) ds. \quad (8)$$

Podemos expresar a  $W$  en términos de  $t$ , y no de  $s$ , empleando las ecuaciones 4 y 6:

$$W = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)/dt}{\|d\mathbf{r}(t)/dt\|} \frac{ds}{dt} dt$$



$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)/dt}{\|d\mathbf{r}(t)/dt\|} \left\| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right\| dt \\
&= \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt.
\end{aligned} \tag{9}$$

Las integrales (8) y (9) se llaman **integrales de línea** de  $\mathbf{F}$  a lo largo de la curva  $C$ .

La forma de la integral en la ecuación 9 sugiere también la notación

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{10}$$

en la que  $\int_C$  destaca que la integral depende de la trayectoria de integración  $C$ . Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

podemos entonces escribir a  $W$  en la forma

$$W = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \tag{11}$$

Si bien una integral de línea implica integrar a lo largo de una trayectoria curva en el espacio tridimensional, la evaluación real de esa integral no requiere ningún método nuevo. Nótese que las integrales de las ecuaciones 8 y 9 son simplemente integrales de Riemann de funciones de una variable. Por ello, se pueden evaluar determinando una antiderivada del integrando mediante cualquiera de los métodos adecuados o, si ello no se puede, mediante un procedimiento numérico como por ejemplo la regla de Simpson. Lo importante que hay que recordar es que todo se debe expresar en términos de una variable, usualmente un parámetro  $t$  o la longitud de arco  $s$ , con lo cual se reduce la integral de línea a una integral definida con una variable.

También, nótese que para evaluar una integral de línea hay una dirección definida en la que se recorre la curva  $C$ , esto es, desde el punto inicial  $\mathbf{r}(a)$  hacia el punto final  $\mathbf{r}(b)$ . Si se invierte la dirección, se ocasiona que se intercambien los límites de integración en la ecuación 9 y, en consecuencia, se invierte también el signo del resultado.

Por último, en algunos casos se puede describir la trayectoria de integración de modo que no intervengan conjuntos de ecuaciones, o una parametrización, de la curva. En estos casos, el primer paso consiste en escoger unos parámetros adecuados para emplearlos en la evaluación de la integral. Para cualquier curva dada hay muchas parametrizaciones posibles. Es posible demostrar, aunque no lo haremos aquí, que *el valor de la integral de línea que resulta es el mismo para todas las parametrizaciones de la trayectoria de integración*. Desde luego, algunas parametrizaciones conducirán a integrales que serán más fáciles de evaluar que otras y, por tanto, se debe poner atención a la parametrización adecuada cuando esto sea posible. Los ejemplos siguientes muestran cómo evaluar las integrales de línea e ilustran algunas de las observaciones anteriores.

**EJEMPLO 1**

Calcular el trabajo efectuado sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva

$$C: \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^{-1}\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 2,$$

desde el punto  $(1, 1, 1)$  hasta el punto  $(4, 2, \frac{1}{2})$ . La fuerza que efectúa el trabajo es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}.$$

Suponer que  $\mathbf{F}$  se mide en libras y que las longitudes se miden en pies.

En forma escalar, las ecuaciones de la curva son  $x = t^2$ ,  $y = t$ ,  $z = t^{-1}$ . Así, sobre la curva, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}[x(t), y(t), z(t)] &= (t)(t^{-1})\mathbf{i} + (t^2)(t^{-1})\mathbf{j} + (t^2)(t)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \end{aligned}$$

y

$$d\mathbf{r} = \left( \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt = (2t\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^{-2}\mathbf{k}) dt.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 (\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) \cdot (2t\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^{-2}\mathbf{k}) dt \\ &= \int_1^2 (2t + t - t) dt = t^2 \Big|_1^2 = 3 \text{ pie-libra. } \blacksquare \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2**

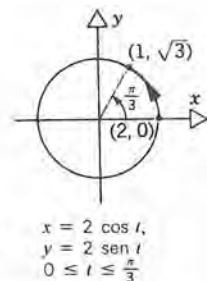
Evaluar la integral de línea de  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$  a lo largo de las siguientes trayectorias:

1. el arco circular  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ , que une a  $(2, 0)$  con  $(1, \sqrt{3})$ ;
2. la recta que conecta a  $(2, 0)$  con  $(1, \sqrt{3})$ .

Sea  $C$  la trayectoria de integración. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C y dx - x dy. \quad (12)$$

Consideremos primero la primera trayectoria, que se muestra en la figura 18.1.3. Sobre



**Figura 18.1.3**

esta trayectoria, tenemos que

$$x = \cos t, \quad dx = -2 \operatorname{sen} t \, dt,$$

y

$$y = 2 \operatorname{sen} t, \quad dy = 2 \cos t \, dt.$$

También, a medida que  $(x, y)$  va desde  $(2, 0)$  hasta  $(1, \sqrt{3})$ , el parámetro  $t$  pasa de 0 a  $\pi/3$ . Por tanto, sustituyendo en la ecuación 12, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/3} [(2 \operatorname{sen} t)(-2 \operatorname{sen} t) \, dt - (2 \cos t)(2 \cos t) \, dt] \\ &= \int_0^{\pi/3} -4 (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \, dt = -4 \int_0^{\pi/3} dt \\ &= -\frac{4\pi}{3} \cong -4.189. \end{aligned} \quad (13)$$

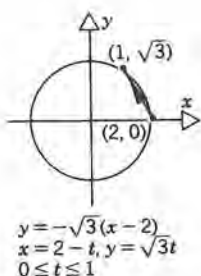


Figura 18.1.4

Consideremos ahora la segunda trayectoria. La recta que pasa por los dos puntos dados se muestra en la figura 18.1.4; su ecuación cartesiana es  $y = -\sqrt{3}(x - 2)$ . Hay muchos modos en los que podemos escoger una representación paramétrica de esta trayectoria de integración. Escogeremos una representación paramétrica sencilla tal que  $t$  aumente de 0 a 1 cuando  $(x, y)$  pase de  $(2, 0)$  a  $(1, \sqrt{3})$ , a saber

$$C: \quad x = 2 - t, \quad y = \sqrt{3}t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación 12, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [\sqrt{3}t(-dt) - (2 - t)(\sqrt{3} \, dt)] \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (-t - 2 + t) \, dt \\ &= -2\sqrt{3} \cong -3.464. \end{aligned} \quad (14)$$

El hecho de que los resultados de las ecuaciones 13 y 14 sean diferentes, demuestra claramente que, *en general, el valor de una integral de línea entre dos puntos dados, depende de la trayectoria  $C$  de integración que une a los dos puntos.* ■

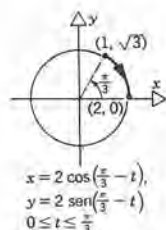


Figura 18.1.5

### EJEMPLO 3

Evaluar la integral de línea de  $\mathbf{F}$ , donde  $\mathbf{F}$  es la misma que en el ejemplo 2, a lo largo del arco circular  $x^2 + y^2 = 4$ , que conecta a  $(1, \sqrt{3})$  con  $(2, 0)$ .

Notaremos que es el mismo problema de la parte (1) del ejemplo 2, con la excepción de que se invierte la dirección de integración (véase figura 18.1.5). Para evitar posibles confusiones, nos referiremos en este caso a la trayectoria de integración



como  $C_-$ . Una representación paramétrica posible para esta trayectoria es

$$x = 2 \cos \left( \frac{\pi}{3} - t \right), \quad y = 2 \sin \left( \frac{\pi}{3} - t \right),$$

donde  $0 \leq t \leq \pi/3$ . Obsérvese que cuando  $t$  crece de 0 a  $\pi/3$ , el punto  $(x, y)$  se mueve de  $(1, \sqrt{3})$  a  $(2, 0)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{C_-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_{C_-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_-} y \, dx - x \, dy \\ &= \int_0^{\pi/3} 4 \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{3} - t \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi}{3} - t \right) \right] dt \\ &= \int_0^{\pi/3} 4 \, dt = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Véase que este resultado es el negativo del que se obtuvo en la ecuación 13 del ejemplo 2, tal como debería suceder.

Una representación alterna de  $C_-$  es

$$x = 2 \sin t, \quad y = 2 \cos t, \quad \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Entonces

$$\int_{C_-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4 (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \frac{4\pi}{3},$$

demostrando que se obtiene el mismo resultado cuando se emplean dos representaciones paramétricas de la misma curva.

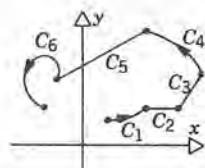
No es necesario emplear una representación paramétrica para la cual  $t$  aumente durante la integración. Por ejemplo, podríamos describir a  $C_-$  mediante las mismas ecuaciones que en el ejemplo 2, esto es

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t,$$

en las cuales ahora  $t$  disminuye de  $\pi/3$  a 0 cuando se recorre la trayectoria  $C_-$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{C_-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\pi/3}^0 -4 (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \\ &= -4 \left( 0 - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En muchos casos la curva  $C$  puede ser suave por pedazos; esto es,  $C$  puede estar



**Figura 18.1.6**  
Curva suave por pedazos.

compuesta por un número finito de arcos adjuntos suaves  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Por ejemplo, la curva  $C$  puede ser un rectángulo, un triángulo, o una curva suave por pedazos más general, como se ve en la figura 18.1.6. En este caso, la integral de línea de  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{C_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (15)$$

También notaremos, de acuerdo con las ecuaciones 10 y 11, que la integral de línea

$$\int_C P(x, y, z) \, dx$$

es tan sólo un caso especial de  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i}$ . Análogamente

$$\int_C Q(x, y, z) \, dy \quad \text{y} \quad \int_C R(x, y, z) \, dz$$

corresponde a  $\mathbf{F}(x, y, z) = Q(x, y, z)\mathbf{j}$  y  $\mathbf{F}(x, y, z) = R(x, y, z)\mathbf{k}$ , respectivamente.

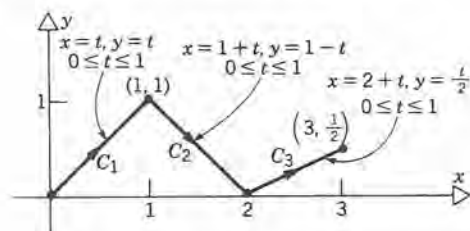
Ilustraremos estas ideas en los siguientes ejemplos.

### EJEMPLO 4

Evaluar la integral de línea de

$$\mathbf{F}(x, y) = \sin \pi x \mathbf{i} + xy \mathbf{j}$$

a lo largo de la trayectoria que se muestra en la figura 18.1.7.



**Figura 18.1.7**

La trayectoria se compone por tres segmentos de recta, y entonces tenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

La trayectoria  $C_1$  que conecta a  $(0, 0)$  con  $(1, 1)$  es una parte de la recta  $y = x$ , que podemos describir en forma paramétrica mediante

$$x = t, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

donde  $dx = dy = dt$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} (\sin \pi x \, dx + xy \, dy) \\ &= \int_0^1 (\sin \pi t + t^2) \, dt = \left[ -\frac{\cos \pi t}{\pi} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La trayectoria  $C_2$  que conecta a  $(1, 1)$  con  $(2, 0)$  es una parte de la recta  $y - 1 = -(x - 1)$ , que podemos describir en forma paramétrica mediante

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

con  $dx = dt$  y  $dy = -dt$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 [\sin \pi(1 + t) \, dt + (1 + t)(1 - t)(-dt)] \\ &= \int_0^1 [\sin \pi(1 + t) - (1 - t^2)] \, dt \\ &= \left[ \frac{-\cos \pi(1 + t)}{\pi} - t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{\pi} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La trayectoria  $C_3$ , que conecta  $(2, 0)$  con  $(3, \frac{1}{2})$  es una parte de la recta  $y = (x - 2)/2$ , que se puede describir en forma paramétrica mediante

$$x = 2 + t, \quad y = \frac{t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

con  $dx = dt$  y  $dy = dt/2$ . De aquí que

$$\begin{aligned} \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \left[ \sin \pi(2 + t) \, dt + (2 + t) \frac{t}{2} \frac{dt}{2} \right] \\ &= \int_0^1 \left[ \sin \pi(2 + t) + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} \right] \, dt \\ &= \left[ \frac{-\cos \pi(2 + t)}{\pi} + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{12} \right]_0^1 \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}.$$

Combinando estos resultados obtenemos

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{\pi} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \approx 0.6366. \blacksquare\end{aligned}$$

### EJEMPLO 5

Evaluar

$$\int_C \left( x + \frac{x^2 y}{1 + y} \right) dx \quad (16)$$

en la cual la trayectoria de integración  $C$  es la parábola representada por  $y = x^2$ , de  $(0, 0)$  a  $(2, 4)$  (véase figura 18.1.8).

Hacemos que  $y = x^2$  en la integral (16) donde  $0 \leq x \leq 2$ , y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_C \left( x + \frac{x^2 y}{1 + y} \right) dx &= \int_0^2 \left( x + \frac{x^4}{1 + x^2} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left( x + x^2 - 1 + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right]_0^2 \\ &= 2 + \frac{8}{3} - 2 + \arctan 2 \approx \frac{8}{3} + 1.107 \approx 3.774.\end{aligned}$$

Nótese que  $x$  desempeña el papel del parámetro  $t$ . ■

### EJEMPLO 6

Evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde

$$\mathbf{F}(x, y) = 3xy^2\mathbf{i} + 2yx^2\mathbf{j},$$

y  $C$  es el rectángulo que se ve en la figura 18.1.9 recorrido en sentido levógiro.

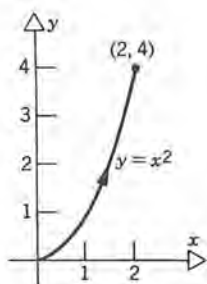


Figura 18.1.8

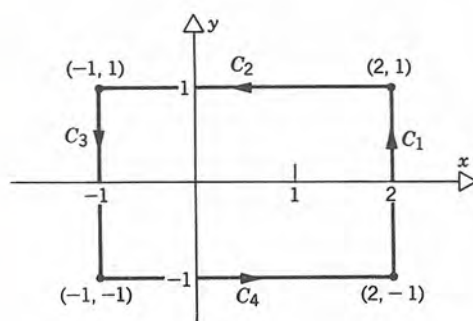


Figura 18.1.9

Para este problema será de utilidad aprovechar la ventaja del hecho de que la trayectoria consta de segmentos de rectas paralelas ya sea al eje  $x$  o al eje  $y$ . Escribimos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C 3xy^2 dx + 2yx^2 dy,$$

y observamos que en los lados del rectángulo tenemos las relaciones siguientes:

$$C_1: x = 2, \quad dx = 0, \quad y \text{ y varía de } -1 \text{ a } 1;$$

$$C_2: y = 1, \quad dy = 0, \quad x \text{ y varía de } 2 \text{ a } -1;$$

$$C_3: x = -1, \quad dx = 0, \quad y \text{ y varía de } 1 \text{ a } -1;$$

$$C_4: y = -1, \quad dy = 0, \quad x \text{ y varía de } -1 \text{ a } 2.$$

Por tanto

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 8y dy = 0,$$

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_2^{-1} 3x(1)^2 dx = \left. \frac{3x^2}{2} \right|_2^{-1} = -\frac{9}{2},$$

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{-1} 2y dy = 0,$$

$$\int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^2 3x(-1)^2 dx = \left. \frac{3x^2}{2} \right|_{-1}^2 = \frac{9}{2},$$

y

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 - \frac{9}{2} + 0 + \frac{9}{2} = 0. \quad \blacksquare$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 12 evaluar la integral  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  a lo largo de la curva dada.

- $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sin \pi t \mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2$
- $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} - \ln t \mathbf{k}$ ,  $1 \leq t \leq 3$
- $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ , línea recta de  $(1, 1)$  a  $(3, -1)$ .
- $\mathbf{F}(x, y) = e^{x+y}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ , arco más corto del círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ , de  $(a, 0)$  a  $(0, a)$ .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + tk$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .
- $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^2\mathbf{i} + 3 \sin y\mathbf{j}$ , la parábola  $y = x^2$  de  $(0, 0)$  a  $(2, 4)$ .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ , línea recta de  $(1, 0, 0)$  a  $(2, 1, 3)$ .
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ , el triángulo que une a  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(-1, 0)$ , recorrido en sentido levógiro.
- $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ , el triángulo que une a los puntos  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(-1, 2)$ , y  $(-1, 0)$  recorrido en sentido levógiro.
- $\mathbf{F}(x, y) = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ , el arco más corto de la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , de  $(a, 0)$  a  $(0, b)$ .
- $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{x-y}\mathbf{i} + e^{y+z}\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ , línea recta de  $(1, -1, 2)$  a  $(3, 3, 3)$ .

En los problemas 13 a 16 evaluar la integral de línea dada.

- $\int_C (x + y)^2 dx$  a lo largo de la recta de  $(0, 0)$  a  $(3, 5)$ .
- $\int_C y^2 dx$ , a lo largo de  $x = y^2$  de  $(0, 0)$  a  $(4, 2)$ .
- $\int_C \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$ , en sentido levógiro, a lo largo del círculo  $x^2 + y^2 = a^2$  de  $(a, 0)$  a  $(0, a)$ .
- $\int_C \left( x + \frac{x^2 y}{1 + xy} \right) dx$ , a lo largo de la curva  $x = t^2$ ,  $y = t$ , de  $(0, 0)$  a  $(4, 2)$ .

- Evaluar cada una de las siguientes integrales de línea a lo largo de la recta de  $(0, 0)$  a  $(a, b)$ :

$$(a) \int_C x^2 y^3 dx \quad (b) \int_C x^2 y^3 dy$$

- Evaluar cada una de las siguientes integrales de línea a lo largo de la trayectoria  $y = x^2$ , de  $(1, 1)$  a  $(2, 8)$ :

$$(a) \int_C x dy \quad (b) \int_C y dx$$

- Evaluar

$$\int_C (2y - x) dx + (3x + y) dy$$

para cada una de las siguientes trayectorias:

- La recta de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .
  - La parábola  $y = x^2$  de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .
  - Los segmentos de recta de  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$  a  $(1, 1)$ .
  - Los segmentos de recta de  $(0, 0)$  a  $(0, 1)$  a  $(1, 1)$ .
  - La curva  $y = \sqrt{x}$  de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .
- Demstrar que

$$\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

en la cual  $C$  es el círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ , recorrido en sentido levógiro.

- Evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias:

- El arco más corto del círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , de  $(-2, 0)$  a  $(0, 2)$ .
- El complemento del arco de (a) de  $(-2, 0)$  a  $(0, 2)$ .

- Evaluar

$$\int_C x^2 dx + y^2 dy$$

a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias cerradas:

- La trayectoria que se muestra en la figura 18.1.10a.



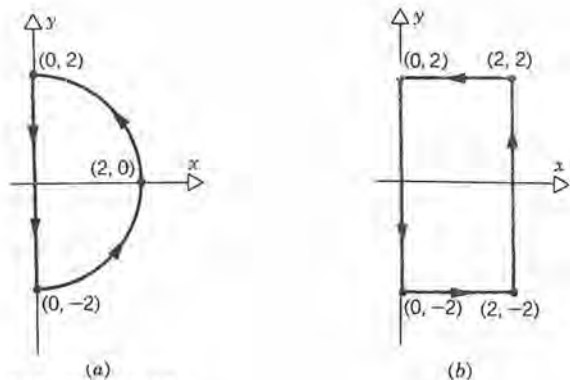


Figura 18.1.10

(b) La trayectoria que se muestra en la figura 18.1.10b.

23. Evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  donde  $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \mathbf{i} + e^y \mathbf{j} + e^z \mathbf{k}$ , a lo largo de las trayectorias siguientes:

- (a) La recta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$ .  
 (b) Los segmentos de recta que van de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 0, 0)$ , a  $(1, 1, 0)$  y termina en  $(1, 1, 1)$ .  
 (c) A lo largo de la curva  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$ .

24. Un objeto se desplaza a lo largo de la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  en sentido levógiro y está sujeto a la fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Mostrar que el trabajo efectuado en una órbita es numéricamente igual al área de la elipse.

### Masa de un alambre.

Un alambre que tenga la forma de una curva  $C$  tiene una densidad  $\rho(s)$  y una longitud  $L$ . La masa total del alambre es

$$M = \int_0^L \rho(s) ds.$$

En los problemas 25 a 29 calcular  $M$  formulando y evaluando la integral adecuada.

25. Un alambre tiene la forma de un semicírculo de radio  $a$ . La densidad de este alambre es proporcional a la distancia a uno de sus extremos. ¿Cuál es la masa del alambre?

26. Para el problema 25, suponer que la densidad es proporcional a la distancia al diámetro que conecta los dos extremos del alambre. ¿Cuál es la masa del alambre?

27. Un alambre tiene la forma de una hélice

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k},$$

$$0 \leq t \leq 4\pi.$$

La densidad del alambre es proporcional al cuadrado de la distancia al origen. ¿Cuál es la masa del alambre?

28. Un alambre tiene la forma de una hélice

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + b t \mathbf{k}.$$

La densidad del alambre es  $kz$ . Calcular la masa del alambre desde  $(a, 0, 0)$  hasta  $(-a, 0, 3b\pi/\omega)$ .

29. Un alambre tiene la forma de una espiral  $r = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La densidad del alambre es proporcional a  $\theta$ . Calcular la masa del alambre. En la sección 14.3 se describe la longitud de arco en coordenadas polares.

### Centro de masa y momentos de inercia.

Un alambre delgado de longitud  $L$  y densidad de masa  $\rho$  tiene la forma de una curva  $C$  en el plano  $xy$ . La masa total  $M$  del alambre es

$$M = \int_C \rho(s) ds.$$

El centro de masa  $(\bar{x}, \bar{y})$  del alambre está expresado por

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \rho(s) ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \rho(s) ds.$$

Si la densidad del alambre es constante, entonces el centro de masa es el centroide del alambre. Los momentos de inercia con respecto a los ejes  $x$  y  $y$  son

$$I_x = \int_C y^2 \rho(s) ds, \quad I_y = \int_C x^2 \rho(s) ds.$$

30. Un alambre de densidad constante tiene la forma

(a) de un semicírculo,  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ ;

(b) del semicírculo de la parte (a), junto con un tramo recto que une a los dos extremos del semicírculo.

## 1070 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

Determinar el centroide del alambre en cada caso. Comparar los resultados con los del ejemplo 2 de la sección 17.3 para un disco semicircular. Explicar por qué las diferencias son razonables.

31. Para el alambre del problema 30(a), determinar  $I_x$  e  $I_y$ .
32. Para el alambre del problema 30(a), determinar el centro de masa, si la densidad del alambre es proporcional a la distancia al punto  $(a, 0)$ .
33. Un alambre uniforme tiene la forma de un triángulo

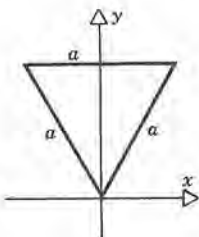


Figura 18.1.11

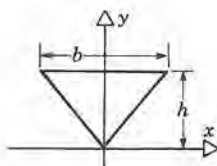


Figura 18.1.12

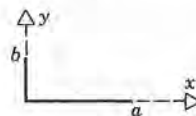


Figura 18.1.13

equilátero de lado  $a$  (véase figura 18.1.11). Determinar la posición del centroide del alambre.

34. Un alambre uniforme tiene la forma de un triángulo isósceles de base  $b$  y altura  $h$  (véase figura 18.1.12).
  - (a) Determinar la posición del centroide del alambre y comparar los resultados con los del centroide de la placa correspondiente (problema 11 de la sección 17.3).
  - (b) ¿Hay un valor de  $h/b$  para el cual los dos centroides coinciden?
35. Un alambre tiene densidad  $k$  uniforme, y su forma se ve en la figura 18.1.13. Determinar  $I_x$  e  $I_y$ .

## 18.2 INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

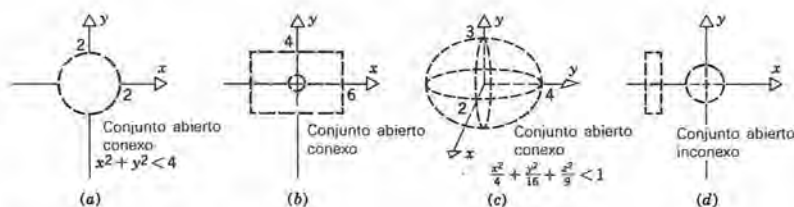
En la sección 18.1 hicimos notar que, en general, la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

entre dos puntos en el espacio depende de la trayectoria  $C$  al igual que de los extremos. Sin embargo, existe una clase numerosa de funciones vectoriales  $\mathbf{F}$  para las cuales la integral es *independiente de la trayectoria* que une a los puntos extremos. Estas funciones vectoriales son de importancia especial para muchas aplicaciones.

Antes de poder desarrollar este tema y otros relacionados, debemos describir en forma breve algunos conceptos geométricos para conjuntos de puntos en dos y tres dimensiones. Aunque no deseamos presentar todas las definiciones y notación matemáticos que se necesitan para una descripción rigurosa, sí deseamos dar una comprensión correcta, aunque intuitiva, de cada concepto. Recuérdesse que en la sección 16.1 presentamos los conceptos de vecindad de un punto, de conjuntos abiertos y cerrados, y de puntos frontera; en la sección 15.6 explicamos lo que significaba una curva suave por pedazos y una curva cerrada suave por pedazos. Agregaremos algo a estas ideas.

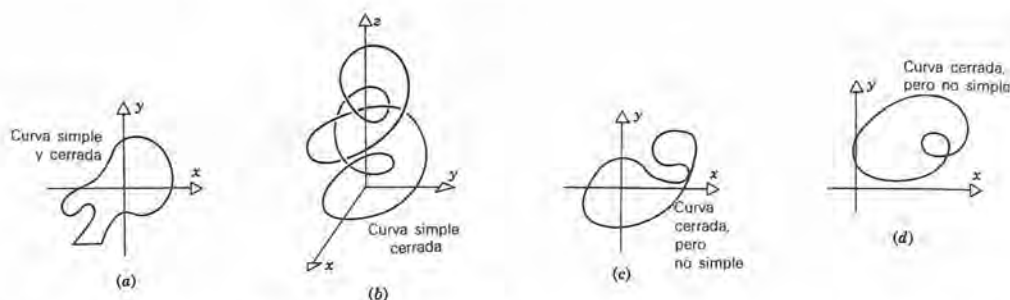
Se dice que un conjunto abierto de puntos es **conexo** si dos puntos cualesquiera del conjunto se pueden unir mediante una curva suave por pedazos que quede completamente dentro del conjunto. En la figura 18.2.1 los conjuntos abiertos (a), (b) y (c) son



**Figura 18.2.1** (a), (b) y (c) representan conjuntos abiertos conexos; (d) muestra un conjunto abierto inconexo.

conexos; el conjunto abierto (d) no es conexo. Para nuestros fines podemos pensar que un conjunto conexo en dos dimensiones es un disco abierto y en tres dimensiones es una esfera abierta (sección 16.1). Un conjunto abierto conexo recibe el nombre de **dominio**.

Una curva cerrada  $C$  es **simple** si, al recorrer la curva desde un punto inicial y regresar a él no pasamos dos veces por cualquier otro punto de  $C$ . Así, una **curva cerrada simple** no se toca ni se cruza a sí misma. En la figura 18.2.2 las curvas cerradas



**Figura 18.2.2** (a) y (b) muestran curvas cerradas simples; (c) y (d) son curvas que no son simples.

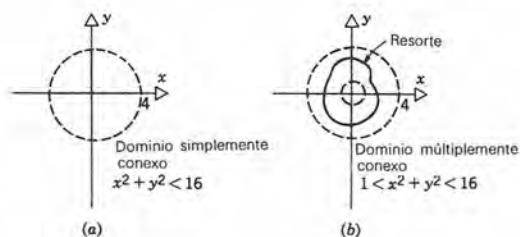
(a) y (b) son cerradas simples y (c) y (d) no lo son. Nótese que (a) es suave por pedazos. Cuando la trayectoria  $C$  es una curva cerrada simple en dos dimensiones, la integral de línea se representa comúnmente mediante

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o bien} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

según si  $C$  se recorre en sentido levógiro o dextrógiro.

Por último, un dominio  $D$  es **simplemente conexo** si toda curva cerrada simple en  $D$  se puede colapsar continuamente hasta llegar a un punto en  $D$  sin cruzar puntos que no estén en el dominio. Así, si representamos a la curva simple cerrada como un rizo de una cuerda, debemos poder contraer dicho rizo hasta un punto sin abandonar el dominio. En la figura 18.2.3 el dominio bidimensional (a) es **simplemente conexo**, pero el dominio (b) no lo es debido al agujero. Una cuerda que corresponda a, digamos



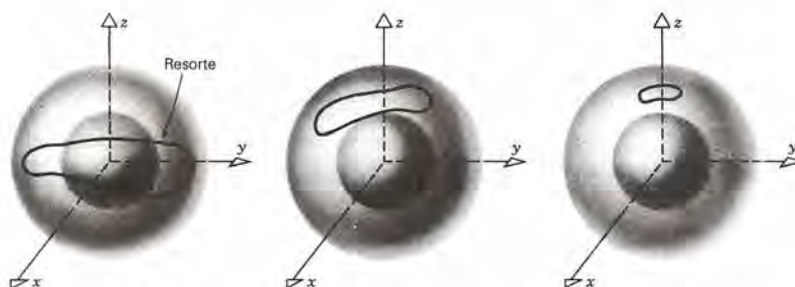


**Figura 18.2.3**

(a) dominio simplemente conexo. (b) Dominio múltiplemente conexo.

$x^2 + y^2 = 9$ , no puede contraerse a un punto sin pasar a través de puntos que no están en el dominio.

En general, los dominios bidimensionales con agujeros no son simplemente conexos. Sin embargo, nótese que un dominio en tres dimensiones puede ser simplemente conexo aun cuando tenga un agujero; por ejemplo, el cascarón esférico de la figura 18.2.4. Un ejemplo de dominio tridimensional que no es simplemente conexo es un



**Figura 18.2.4** Un dominio simplemente conexo en tres dimensiones puede tener un agujero.

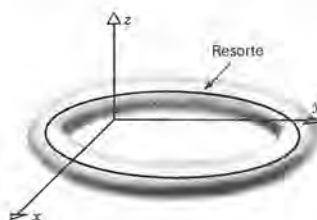
toro, o dona (ver figura 18.2.5). Se dice que un dominio que no es simplemente conexo es **múltiplemente conexo**.

Con estas ideas topológicas en mente, podemos ahora enunciar y discutir algunos resultados acerca de las integrales de línea y de la independencia de la trayectoria. El siguiente teorema describe una clase grande e importante de integrales que tiene esta propiedad.

### Teorema 18.2.1

Sean  $\phi$  y sus primeras derivadas parciales continuas en un dominio  $D$ . Sean  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}_b$  dos puntos de  $D$ , y sea  $C$  cualquier curva suave por pedazos que está en  $D$  y conecta a  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}_b$ . Si  $\mathbf{F} = \nabla \phi$ , entonces  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria  $C$  y

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_b) - \phi(\mathbf{r}_a). \quad (1)$$



**Figura 18.2.5** Dominio múltiplemente conexo en tres dimensiones.

La integral de línea es independiente de la trayectoria, porque su valor está determinado únicamente por los valores de  $\phi$  en los extremos. En especial, si  $\mathbf{F}$  es un campo de fuerzas, entonces la integral (1) es el trabajo efectuado por  $\mathbf{F}$  al mover una masa de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$ , y este trabajo es independiente de la trayectoria que se tome de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$ . El teorema 18.2.1 es semejante al teorema fundamental del cálculo (teorema 6.4.3) porque brinda una manera de evaluar una integral de línea, calculando determinada función en los puntos extremos. La función  $\phi$  desempeña el papel de una antiderivada.

**Demostración.** No es difícil la demostración de este problema. Por simplicidad, supondremos primero que  $C$  es suave y que está dada por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , y  $a \leq t \leq b$ , donde  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}_b$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \nabla\phi[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt, \end{aligned} \quad (2)$$

en las que  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  y  $\phi_z$  se evalúan en  $(x(t), y(t), z(t))$ . Sin embargo, el integrando de la última integral es, según la regla de la cadena, precisamente  $d\phi[\mathbf{r}(t)]/dt$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi[\mathbf{r}(t)] dt \\ &= \phi[\mathbf{r}(b)] - \phi[\mathbf{r}(a)] \\ &= \phi(\mathbf{r}_b) - \phi(\mathbf{r}_a), \end{aligned}$$

lo cual es el resultado que se deseaba. Si la curva  $C$  es suave por pedazos, entonces se aplica este resultado a cada uno de los arcos suaves que forman a  $C$ , y a continuación sumamos los resultados para obtener la ecuación 1.  $\square$

Si el campo vectorial  $F$  es el gradiente de una función escalar, entonces se dice que es un **campo gradiente**, o **conservativo**. La función  $\phi$ , o en mecánica  $-\phi$ , se llama **función potencial**. El motivo de esta terminología se debe a su uso en la mecánica. Un campo de fuerzas para el que el trabajo efectuado sobre una masa sea independiente de la trayectoria del movimiento se conoce como un campo de fuerza conservativo, y para ese tipo de campos la función  $-\phi$  es la energía potencial de la masa. Al final de esta sección estudiaremos los campos conservativos de fuerzas.

### EJEMPLO 1

La fuerza gravitatoria que ejerce una masa  $M$  en el origen sobre una masa  $m$  en el punto  $(x, y, z)$  es

$$\mathbf{f}(x, y, z) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -GMm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3} \quad (3)$$

en la cual  $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , y  $G$  es la constante de gravitación universal. Comprobar que

$$\mathbf{f} = GMm \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \quad (4)$$

y calcular el trabajo efectuado por  $\mathbf{f}$  para mover la masa  $m$  desde el punto  $\mathbf{r}_1$  hasta el punto  $\mathbf{r}_2$ .

Primero,

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{k}.$$

Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x = -\frac{x}{r^3},$$

y por simetría

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}.$$

Por tanto

$$\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3},$$



y se comprueba la ecuación 4 haciendo uso de la ecuación 3. Así, el campo de fuerza gravitatoria es conservativo en cualquier región que no comprenda al origen.

El trabajo  $W$  efectuado para mover la masa  $m$  de  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  es independiente de la trayectoria, y

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_C GMm \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= GMm \int_C \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= GMm \left. \frac{1}{r} \right|_{r_1}^{r_2} \end{aligned}$$

en las cuales  $r_1 = \|\mathbf{r}_1\|$  y  $r_2 = \|\mathbf{r}_2\|$ . Por tanto

$$W = GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad \blacksquare \quad (5)$$

También es cierto el inverso del teorema 18.2.1. Enunciaremos este resultado como un teorema sin demostración. En el problema 26 se desarrolla una demostración para el caso de dos dimensiones.

### Teorema 18.2.2

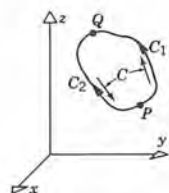
Supongamos que la función vectorial  $\mathbf{F}$  es continua en un dominio  $D$ , y que la integral de línea de  $\mathbf{F}$  es independiente de la trayectoria. Esto es, para cada par de puntos  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}_b$  de  $D$ , la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

tiene el mismo valor para toda curva suave por pedazos que quede en  $D$  y que conecte a  $\mathbf{r}_a$  y  $\mathbf{r}_b$ . Entonces, existe una función escalar  $\phi$  que es continua y que tiene primeras derivadas parciales continuas en  $D$ , y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z).$$

Los teoremas 18.2.1 y 18.2.2, juntos, dicen que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria  $C$  si y sólo si  $\mathbf{F} = \nabla \phi$  para una función potencial  $\phi$ . También hay una equivalencia entre la independencia de la trayectoria y las integrales a lo largo de curvas



**Figura 18.2.6**  
 $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$

cerradas. Supongamos primero que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria. Sea  $C$  una curva cerrada simple suave por pedazos y sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de  $C$  (véase figura 18.2.6). Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos arcos de  $P$  a  $Q$ , estando constituido  $C$  por  $C_1$  en la dirección positiva, y a continuación por  $C_2$  en la dirección negativa. Independencia de la trayectoria quiere decir que

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (6)$$

o sea

$$\left( \int_{C_1} - \int_{C_2} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

La última ecuación es lo mismo que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (7)$$

Así, la independencia de la trayectoria implica que la ecuación 7 es válida para toda curva cerrada simple suave por pedazos  $C$ . La inversa de esta afirmación también es cierta, ya que podemos invertir el argumento que acabamos de dar para deducir las ecuaciones 6 ó 7. Estos resultados, junto con los teoremas 18.2.1 y 18.2.2 se pueden combinar en la siguiente afirmación:

### Teorema 18.2.3

Sea  $\mathbf{F}$  un campo vectorial continuo en  $D$ . Entonces, los tres enunciados siguientes son equivalentes:

- (a)  $\mathbf{F}$  es el gradiente de una función potencial en  $D$ ,  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ .
- (b) La integral de línea de  $\mathbf{F}$  entre dos puntos cualesquiera de  $D$  es independiente de la trayectoria.
- (c) La integral de línea de  $\mathbf{F}$  alrededor de cualquier curva cerrada suave por pedazos en  $D$  es cero.

De acuerdo con el teorema 18.2.1 es claro que se facilita especialmente evaluar la integral  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  si  $\mathbf{F}$  es un campo vectorial conservativo, o gradiente. De aquí que las dos preguntas siguientes sean de interés:

1. ¿Cómo se puede decir si un campo vectorial dado  $\mathbf{F}$  es conservativo? En otras palabras, ¿cómo podemos saber si existe una función potencial tal que  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ?

2. Si existe una función potencial  $\phi$ , ¿cómo la podemos encontrar?

Responderemos primero la segunda pregunta. Supongamos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (8)$$

Si hay un potencial  $\phi$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ , entonces

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = R. \quad (9)$$

Para determinar a  $\phi$  debemos resolver, en caso de ser posible, estas tres ecuaciones simultáneamente. Esto se hace mediante un proceso de integración sucesiva que se muestra en los dos ejemplos siguientes.

## EJEMPLO 2

Determinar si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (xz + y)\mathbf{j} + (xy + 2)\mathbf{k} \quad (10)$$

es conservativo, y si es así, determinar una función potencial  $\phi$ .

Si existe una función potencial  $\phi$ , entonces se debe cumplir

$$\phi_x(x, y, z) = yz, \quad \phi_y(x, y, z) = xz + y, \quad \phi_z(x, y, z) = xy + 2. \quad (11)$$

Una solución de la primera de estas ecuaciones es

$$\phi(x, y, z) = xyz + f(y, z), \quad (12)$$

en la cual  $f$  es una función arbitraria de  $y$  y de  $z$ , pero no de  $x$ . Sustituyendo esta expresión en la segunda de las ecuaciones 11, se obtiene

$$xz + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = xz + y.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} &= y \\ f(y, z) &= \frac{1}{2}y^2 + g(z). \end{aligned}$$

Así,

$$\phi(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}y^2 + g(z), \quad (13)$$



en la cual  $g$  es una función arbitraria de  $z$  solamente. Por último, sustituyendo esta expresión de  $\phi$  en la última de las ecuaciones 11, se obtiene

$$xy + g'(z) = xy + 2.$$

Esta ecuación será válida si seleccionamos

$$g(z) = 2z + k,$$

en la que  $k$  es una constante arbitraria. Sustituyendo a  $g(z)$  en la ecuación 13, obtenemos

$$\phi(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2}y^2 + 2z + k. \quad (14)$$

El lector puede comprobar, mediante un cálculo directo, que en efecto  $\nabla\phi = \mathbf{F}$ . Como en realidad hemos formulado una función potencial  $\phi$  para  $\mathbf{F}$ , llegamos a la conclusión de que el campo vectorial (10) es conservativo. ■

### EJEMPLO 3

¿Es conservativo el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}? \quad (15)$$

Si lo es, debe haber una función  $\phi$  tal que

$$\phi_x(x, y) = 3x^2 + 2xy, \quad \phi_y(x, y) = x + y^2. \quad (16)$$

De la primera de las ecuaciones anteriores vemos que

$$\phi(x, y) = x^3 + x^2y + h(y), \quad (17)$$

en la que  $h$  es una función arbitraria sólo de  $y$ . Sustituyendo esta expresión para  $\phi$  en la segunda de las ecuaciones 16, obtenemos

$$x^2 + h'(y) = x + y^2$$

o sea

$$h'(y) = -x^2 + x + y^2. \quad (18)$$

Como el lado derecho de la ecuación 18 depende de  $x$  al igual que de  $y$ , es imposible despejar  $h(y)$  de la ecuación 18. Por tanto el campo vectorial 15 es no conservativo. ■

Regresaremos ahora a la primera pregunta, que es ¿cómo se puede decir si un campo vectorial dado es conservativo? Un modo consiste en simplemente tratar de construir una función potencial. Si se puede hacer esto, como en el ejemplo 2, entonces el campo vectorial es conservativo; si no es así, como en el ejemplo 3, no es conservativo. Sin embargo, es deseable tener un modo de probar las componentes de  $\mathbf{F}$  para determinar si existe o no una función potencial  $\phi$ . Deseamos especialmente poder identificar cuándo  $\phi$  no exista, para no desperdiciar el tiempo tratando de resolver las ecuaciones 9 cuando sean inconsistentes.

Para el caso de un campo vectorial en dos dimensiones

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

que tenga primeras derivadas parciales en un dominio  $D$  podemos deducir fácilmente una condición necesaria. Supongamos que existe una  $\phi(x, y)$  tal que

$$\phi_x(x, y) = P(x, y), \quad \phi_y(x, y) = Q(x, y).$$

Como  $\phi_{xy} = \phi_{yx}$ , entonces, de acuerdo con estas ecuaciones,

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y)$$

es una condición necesaria para la existencia de una función potencial  $\phi$ ; esto es, si  $\mathbf{F}$  tiene un potencial, entonces  $P_y = Q_x$ . Por otro lado, esta condición no es suficiente; aun si  $P_y = Q_x$  en cada punto de  $D$ , puede sin embargo no existir la función potencial  $\phi$ . Para garantizar la existencia de una función potencial, debemos tener otra restricción en  $D$ , que es que el dominio  $D$  sea *simplemente conexo*. Podemos enunciar el resultado en forma de teorema.

### Teorema 18.2.4

#### (Independencia de la trayectoria)

Sea  $D$  un dominio simplemente conexo en un espacio bi o tridimensional. Sea

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \quad (19)$$

en dos dimensiones, o bien

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad (20)$$

en tres dimensiones, y supongamos que tiene  $\mathbf{F}$  primeras derivadas parciales continuas en  $D$ . Una condición necesaria y suficiente para la existencia de una función potencial  $\phi$  tal que  $\nabla\phi = \mathbf{F}$  y, por tanto, para que la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  sea independiente de la trayectoria, es que

$$Q_x(x, y) = P_y(x, y) \quad (21)$$

en dos dimensiones, y que

$$R_y(x, y, z) = Q_z(x, y, z), \quad P_z(x, y, z) = R_x(x, y, z), \\ Q_x(x, y, z) = P_y(x, y, z) \quad (22)$$

en tres dimensiones.

Hemos demostrado ya que la ecuación (21) es necesaria. En la sección 18.3 deduciremos la suficiencia de esa misma condición para un dominio simplemente conexo en dos dimensiones. El caso en tres dimensiones se describirá en la sección 18.8; véase también el problema 24. A continuación mostraremos que es crucial el requisito de que  $D$  sea simplemente conexo.

### EJEMPLO 4

Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} \quad (23)$$

definido en el dominio  $D: 1 < x^2 + y^2 < 9$ . Demostrar que  $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$  en todos los puntos de  $D$ , pero que la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  no es independiente de la trayectoria.

El dominio  $D$  se muestra en la figura 18.2.7. Nótese que las funciones  $P$  y  $Q$  no están acotadas cerca del origen y, que por tanto, no es posible definir a  $\mathbf{F}$  como una función continua en un dominio que incluya el origen. En consecuencia, hemos omitido el origen introduciendo el agujero  $x^2 + y^2 \leq 1$ , y así el dominio  $D$  es múltiplemente conexo.

Mediante un cálculo sencillo se demuestra que

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{en } D. \quad (24)$$

Demostraremos que la integral de línea  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  no es independiente de la trayectoria en  $D$  si demostramos que  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ , donde  $C$  es la trayectoria circular  $x = 2 \cos \theta$ ,  $y = 2 \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  (véase figura 18.2.7). Tenemos que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ = \oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

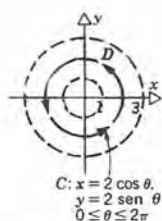


Figura 18.2.7



$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-2 \operatorname{sen} \theta)(-2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta) + (2 \cos \theta)(2 \cos \theta \, d\theta)}{4 \cos^2 \theta + 4 \operatorname{sen}^2 \theta} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \blacksquare
\end{aligned} \tag{25}$$

Para evaluar una integral de línea en un campo vectorial conservativo tenemos la alternativa de determinar la función potencial  $\phi$ . Como la integral de línea es independiente de la trayectoria, puede, en algunos casos, ser más fácil seleccionar una trayectoria especialmente conveniente sobre la cual llevar a cabo la integración. Mostraremos esta posibilidad en el próximo ejemplo.

### EJEMPLO 5

Evaluar la integral

$$\int_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \int_C \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} \tag{26}$$

a lo largo de la trayectoria  $C$  que se muestra en la figura 18.2.8.

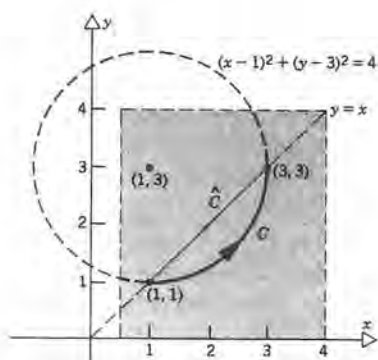


Figura 18.2.8

Nótese que  $P$  y  $Q$  son las mismas funciones que teníamos en el ejemplo 4, y que  $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ , siempre que  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Así, si tomamos en consideración un dominio  $D$  simplemente conexo que incluya a la trayectoria  $C$ , digamos  $\frac{1}{2} < x < 4$ ,  $0 < y < 4$ , sabemos entonces que la integral de línea (26) es independiente de la trayectoria en este dominio.

Podemos evaluar la integral de línea formulando una función potencial  $\phi$  tal que

$$\phi_x(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \phi_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (27)$$

En este caso,

$$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \phi(3, 3) - \phi(1, 1). \quad (28)$$

Por otro lado, podemos escoger simplemente una trayectoria más conveniente sobre la cual evaluar la integral de línea. En especial, si escogemos la trayectoria  $\hat{C}$ :  $y = x$ ,  $1 \leq x \leq 3$ , entonces observamos de inmediato que

$$-y dx + x dy = -x dx + x dx = 0.$$

Por tanto,

$$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 0. \blacksquare$$

*Aplicaciones a la mecánica.* Veamos el movimiento de una partícula de masa  $m$  en un campo de fuerzas  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . En los párrafos 1, 2 y 3 que siguen supondremos que el campo de fuerza es conservativo; en el párrafo 4 veremos el caso en el que ese campo no es conservativo.

1. **Trabajo y energía potencial.** Como el campo de fuerza es conservativo, el trabajo  $W$  que se efectúa para mover a la partícula de cualquier punto  $\mathbf{r}_a$  a cualquier otro punto  $\mathbf{r}_b$  es independiente de la trayectoria y existe una función potencial  $\phi$  tal que  $\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\phi(x, y, z)$ . Nótese la introducción del signo menos. Tenemos que

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C -\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_a) - \phi(\mathbf{r}_b). \quad (29)$$

A la función  $\phi$  se le conoce como la energía potencial. De acuerdo con esta ecuación, el trabajo efectuado es igual a la energía potencial en la posición inicial menos la energía potencial en la posición final, a lo que a veces se le llama la "pérdida" de energía potencial. Si  $C$  es una curva cerrada, entonces  $W$  es cero, ya que  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_b$ ; por tanto no hay ni pérdida ni ganancia de energía potencial de la partícula al final del movimiento. Así, *en una trayectoria cerrada en un campo de fuerza conservativo, se conserva la energía potencial.*

2. **Trabajo y energía cinética.** Otra manera de calcular el trabajo efectuado para mover a la partícula de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$  es emplear la segunda ley de Newton del movimiento:  $\mathbf{F} = m d^2\mathbf{r}/dt^2$ . Entonces

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right] dt \\
&= \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt \\
&= \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}(a)\|^2,
\end{aligned} \tag{30}$$

en donde  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  es la velocidad de la partícula. Como  $m\|\mathbf{v}\|^2/2$  es la energía cinética de la partícula, el trabajo efectuado para moverla de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$  es igual a la energía cinética al final menos la energía cinética al principio, a lo cual con frecuencia se le llama la “ganancia” de energía cinética. Si la partícula se mueve en una curva cerrada de tal modo que  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_b$ , entonces, ya que el campo de fuerzas es conservativo, el trabajo efectuado es cero. En consecuencia, la energía cinética al final del trayecto es la misma que al principio, y *en un campo de fuerza conservativo también se conserva la energía cinética en cualquier trayectoria cerrada*.

3. **Principio de la conservación de la energía.** Si el campo de fuerzas es conservativo, entonces son válidas tanto la ecuación 29 como la 30. Por tanto

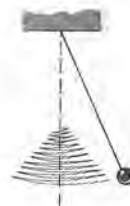
$$\phi(\mathbf{r}_a) - \phi(\mathbf{r}_b) = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}(a)\|^2$$

o bien

$$\phi(\mathbf{r}_a) + \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}(a)\|^2 = \phi(\mathbf{r}_b) + \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}(b)\|^2. \tag{31}$$

De acuerdo con esta ecuación, la suma de la energía potencial y de la energía cinética, llamada la energía mecánica, es constante durante el movimiento de la partícula. Un decremento en la energía potencial debe corresponder a un aumento en la energía cinética, y viceversa. Resumiendo: *para un campo de fuerza conservativo, la energía potencial y la energía cinética se conservan por separado en cualquier trayectoria cerrada y su suma se conserva durante el movimiento*.

4. **Campo de fuerzas no conservativo.** Veamos ahora el caso en el que el campo de fuerzas no es conservativo. Un ejemplo de este caso es la oscilación amortiguada de un péndulo en un fluido viscoso (véase figura 18.2.9). Cada vez que la lenteja del péndulo pasa por la vertical, su velocidad es menor que la vez anterior; así, la lenteja tiene diferentes velocidades en la misma posición a diferentes tiempos, y es claro que las trayectorias para alcanzar la misma posición son distintas. Si el campo de fuerzas es no conservativo, entonces la ecuación 29 ya no es válida, porque no hay una función potencial  $\phi$  cuyo gradiente sea  $\mathbf{F}$ , pero el trabajo efectuado para mover a la partícula de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$  lo sigue dando la ecuación 30. Sin embargo, en este caso debemos especificar la trayectoria que toma la partícula de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$ , ya que la velocidad en  $\mathbf{r}_b$  puede depender del tiempo que se tarda en alcanzar



**Figura 18.2.9** Oscilaciones decrecientes de un péndulo simple en el aire.



esta posición. Aun si  $\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_a$ , el trabajo efectuado no es cero, y entonces no se conserva la energía cinética en una trayectoria cerrada. Tampoco se conserva la energía mecánica durante el movimiento; algo de ella se convierte en energía térmica por disipación.

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, determinar si el campo vectorial es conservativo y, si es así, determinar la función potencial  $\phi$  correspondiente.

1.  $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + 6)\mathbf{i} + (x^2 - 3)\mathbf{j}$
2.  $\mathbf{F}(x, y) = (6xy - 4y^2)\mathbf{i} + (3x^2 + 3y^2 - 8xy)\mathbf{j}$
3.  $\mathbf{F}(x, y) = (y \cos x + 2xe^y)\mathbf{i} + (\sin x + x^2e^y + 2)\mathbf{j}$
4.  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - 2zx)\mathbf{i} + (z^2 + 2x)\mathbf{j} + (2yz - x^2)\mathbf{k}$
5.  $\mathbf{F}(x, y) = (2x + 4y)\mathbf{i} + (2x - 2y)\mathbf{j}$
6.  $\mathbf{F}(x, y) = \left(6x + \frac{y}{x}\right)\mathbf{i} + (\ln x - 2)\mathbf{j}$
7.  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{z} - e^z\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x}{z} + 3\right)\mathbf{j} - \left(xe^z + \frac{xy}{z^2}\right)\mathbf{k}$
8.  $\mathbf{F}(x, y) = (e^x \sin y + 3y)\mathbf{i} - (3x - e^x \sin y)\mathbf{j}$

En los problemas 9 a 14 demostrar que la integral de línea es independiente de la trayectoria, y a continuación evaluar la integral.

9.  $\int_C (2 \sin x + y^2) dx + (2xy + e^y) dy;$   
(0, 1) a  $(\pi, 2)$
10.  $\int_C (2xy^2 + 2y) dx + (2x^2y + 2x) dy;$   
(0, 0) a  $(-2, 4)$
11.  $\int_C (z^2 - y \sin x) dx + (\cos x - 2z) dy + (2zx - 2y + z) dz;$   
de  $\left(\frac{\pi}{4}, 1, 1\right)$  a  $(\pi, 0, 2)$

12.  $\int_C \frac{x}{1+r^2} dx + \frac{y}{1+r^2} dy, \quad r^2 = x^2 + y^2;$   
de (0, 0) a (a, b)
13.  $\int_C xe^x dx + ye^x dy + ze^x dz,$   
 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$  de (0, 0, 0) a (a, b, c)
14.  $\int_C (ye^{xy} \cos z - 2e^{-2x} \sin \pi y) dx + (\pi e^{-2x} \cos \pi y + xe^{xy} \cos z) dy - (e^{xy} \sin z) dz;$  de  $\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$  a  $\left(-1, -\frac{1}{2}, \pi\right)$

En los problemas 15 y 16 determinar el valor de  $\alpha$  para el cual la integral de línea que aparece es independiente de la trayectoria, y a continuación evaluar la integral.

15.  $\int_C (xy^2 + \alpha x^2y) dx + (x^3 + x^2y) dy;$  de (0, 0) a (1, -1)
16.  $\int_C (ye^{2xy} + x) dx + \alpha xe^{2xy} dy;$  de (1, 1) a (2, 0)
17. Evaluar

$$\int_C \cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy$$

en la cual  $C$  es la trayectoria octagonal que se ve en la figura 18.2.10.

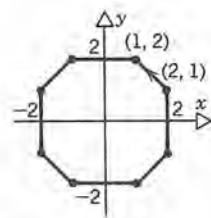


Figura 18.2.10

18. Evaluar

$$\int_C (e^x + y) dx + (e^y + x) dy$$

en la cual  $C$  es la curva de  $(0, 0)$  a  $(\frac{1}{4}, 1)$  dada por  $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ .

19. Evaluar

$$\int_C \left( \frac{y}{x} + z - 4x \right) dx + (3 + \ln x) dy + x dz$$

en la cual  $C$  es la curva que va de  $(1, 0, 0)$  a  $(e, 2, 1)$  definida por  $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

20. Considerar el campo de fuerza gravitacional debido a una masa de 200 kg ubicada en el origen. Calcular el trabajo que se efectúa al mover una masa de 5 kg de  $(5, 0, 0)$  a  $(0, 5, 2)$  a lo largo de la curva  $x = 5 \cos t$ ,  $y = 5 \sin t$ ,  $z = 4t/\pi$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ . En este caso las distancias se miden en metros, y recuérdese que  $G \cong 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ .

21. Demostrar que  $\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria y que la integral de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$  es  $(r_b^2 - r_a^2)/2$ , en donde  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

22. Un campo de fuerza de la forma

$$\mathbf{F} = f(r^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

en el cual  $f$  es una función continua, se llama **campo de fuerza central**. ¿Por qué? Demostrar que un campo de fuerza central es conservativo y que si  $\mathbf{F} = \nabla \phi$ , entonces  $\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}g(r^2)$ , donde  $g(t) = \int f(t) dt$ . Los problemas 12 y 13 son casos especiales de este resultado.

23. Evaluar

$$\int_C y \sin(x^2 y^2) dx + x \sin(x^2 y^2) dy,$$

en la cual  $C$  es la recta que va de  $(0, 2)$  a  $(2, 0)$ .

24. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

un campo de fuerza conservativo con primeras derivadas parciales continuas. Demostrar que

$$R_y(x, y, z) = Q_z(x, y, z),$$

$$P_z(x, y, z) = R_x(x, y, z),$$

$$Q_x(x, y, z) = P_y(x, y, z).$$

Esto demuestra la parte necesaria del teorema 18.2.4 para campos vectoriales tridimensionales.

25. Este problema es una generalización de la técnica de integración por partes. Supongamos que  $\phi$  y  $\psi$  tienen derivadas parciales continuas en un dominio  $D$  tridimensional. Sea  $C$  una curva suave por pedazos,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , de  $\mathbf{r}_a$  a  $\mathbf{r}_b$ . Demostrar que

$$\int_C \psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \psi(\mathbf{r}_b)\phi(\mathbf{r}_b) - \psi(\mathbf{r}_a)\phi(\mathbf{r}_a) - \int_C \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{r}.$$

26. En este problema haremos un esquema de la demostración del teorema 18.2.2. Con fines de simplicidad sólo consideraremos el caso de dos dimensiones. Supongamos que las funciones  $P$  y  $Q$  son continuas en un dominio  $D$  y que la integral de línea  $\int_C (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$  es independiente de la trayectoria en  $D$ . Deseamos entonces demostrar que existe una función  $\phi$  tal que

$$\phi_x(x, y) = P(x, y), \quad \phi_y(x, y) = Q(x, y).$$

(a) Seleccionar un punto  $(a, b)$  en  $D$  y definir  $\phi$  mediante

$$\phi(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} P(s, t) ds + Q(s, t) dt.$$

Nótese que  $\phi$  no depende de la trayectoria que une a  $(a, b)$  con  $(x, y)$ . Demostrar que

$$\phi(x + \Delta x, y) - \phi(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(s, y) ds,$$

en la que la integración es a lo largo del segmento de recta de  $(x, y)$  a  $(x + \Delta x, y)$  como se ve en la figura 18.2.11. A continuación emplear el teorema del valor medio para integrales (teorema 6.3.5) para demostrar que  $\phi_x(x, y) = P(x, y)$ .

(b) De modo análogo al argumento de la parte (a), demostrar que

$$\phi(x, y + \Delta y) - \phi(x, y) = \int_{(x,y)}^{(x,y+\Delta y)} Q(x, t) dt$$

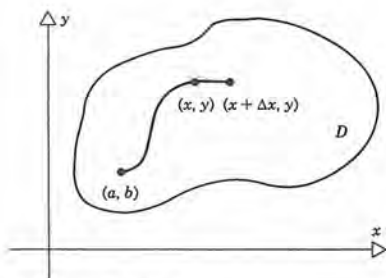


Figura 18.2.11

y usar el teorema del valor medio para integrales para demostrar que  $\phi_y(x, y) = Q(x, y)$ .

27. Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo del eje  $x$ . En el tiempo  $t$ , su posición es  $x = x(t)$ , y está bajo la acción de una fuerza  $F = -kx$ , donde  $k > 0$ .

- (a) Demostrar que el campo de fuerza es conservativo y determinar una función energía potencial.

- (b) Si la partícula está en  $x_a$  cuando el tiempo es  $t = a$ , y en  $x_b$  cuando  $t = b$  ( $b > a$ ), determinar el trabajo efectuado durante el movimiento.

28. Para la partícula del problema 27, suponer que el campo de fuerzas es  $F = -kx - cv$ , donde  $v = dx/dt$  es la velocidad y  $c$  es una constante positiva. El término  $-cv$  representa una fuerza de amortiguamiento.

- (a) Demostrar que el trabajo efectuado al mover a la partícula de  $x_a$  a  $x_b$  es

$$W = \int_a^b \left[ -kx(t) \frac{dx(t)}{dt} - c \frac{dx(t)}{dt} \frac{dx(t)}{dt} \right] dt$$

$$= \frac{1}{2}k(x_a^2 - x_b^2) - c \int_a^b \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] dt.$$

No es posible encontrar una función  $\phi(x)$  tal que  $\phi_x[x(t)] = [dx(t)/dt]^2$ , y por tanto, este campo de fuerzas es no conservativo.

- (b) Si  $x(t) = A \sin t$  y  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ , determinar a  $W$ .

## 18.3 TEOREMA DE GREEN

En esta sección deduciremos una relación importante entre las integrales de línea a lo largo de curvas cerradas simples suaves por pedazos en un plano, y una integral doble tomada sobre la región encerrada por la curva.

### Teorema 18.3.1

#### (Teorema de Green)

Sea  $D$  un dominio simplemente conexo del plano, y sea  $C$  una curva suave por pedazos, simple y cerrada en  $D$ , que forma la frontera de una región  $\Omega$ . Supóngase que  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son continuas y que tienen primeras derivadas parciales continuas en  $D$ . Entonces

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (1)$$

\* Este teorema debe su nombre a George Green (1793-1841). Nació en Nottingham, Inglaterra, y su educación fue escasa. Sin embargo, hizo contribuciones importantes a las matemáticas, en especial en su ensayo sobre la aplicación del análisis matemático a la electricidad y el magnetismo, en 1828. El teorema de Green aparece



**Demostración.** No trataremos de demostrar el teorema de Green para el caso más general. En lugar de ello, sólo consideraremos regiones  $\Omega$  que se puedan definir tanto por

$$a \leq x \leq b, \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \quad (2a)$$

como por

$$c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y). \quad (2b)$$

En la figura 18.3.1 se muestra una región como esas. Recuerdese que las regiones de este tipo se estudiaron en la sección 17.2, en donde se llamó región estándar a una que se puede describir ya sea mediante la ecuación 2a ó la 2b.

Consideremos primero a

$$\iint_{\Omega} -\frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Según la figura 18.3.1a tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} -\frac{\partial P}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b P[x, f_1(x)] dx - \int_a^b P[x, f_2(x)] dx \\ &= \int_a^b P[x, f_1(x)] dx + \int_b^a P[x, f_2(x)] dx \\ &= \oint_C P dx. \end{aligned} \quad (3)$$

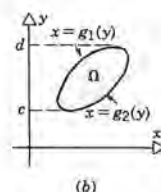
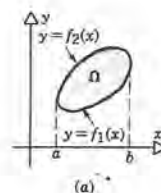


Figura 18.3.1

Análogamente, de acuerdo con la figura 18.3.1b, obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dA &= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy \\ &= \int_c^d Q[g_2(y), y] dy - \int_c^d Q[g_1(y), y] dy \\ &= \int_c^d Q[g_2(y), y] dy + \int_d^c Q[g_1(y), y] dy \\ &= \oint_C Q dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Al sumar las ecuaciones 3 y 4 se obtiene la ecuación 1.  $\square$

en este ensayo, así como las funciones de potencial, y lo que ahora llamamos funciones de Green en las ecuaciones diferenciales. Finalmente, Green recibió el grado de bachiller del Caius College de la Universidad de Cambridge en 1837, pasando a formar parte del cuerpo de profesores en 1839. Desafortunadamente, Green murió poco después. Su ensayo de 1828 tuvo muy poca difusión y permaneció prácticamente ignorado mientras él vivió. Se volvió a publicar hacia 1850 debido al interés de William Thomson, posteriormente conocido como Lord Kelvin, y gracias a quien las importantes ideas de Green son bien conocidas.

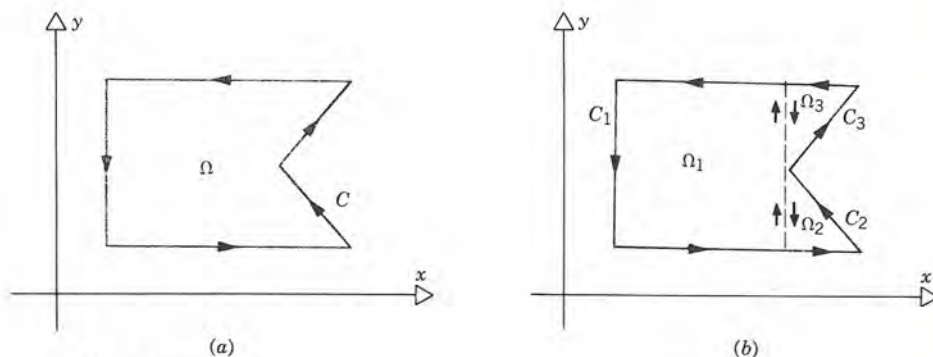


Figura 18.3.2

Podemos ampliar con facilidad este resultado a regiones que se pueden descomponer en una unión de subregiones de la forma (2); una de estas regiones se muestra en las figuras 18.3.2a y 18.3.2b. Aplicaremos el teorema de Green a cada una de las subregiones  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  cuyas fronteras son  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , y sumaremos los resultados para obtener

$$\begin{aligned} & \oint_{C_1} (P dx + Q dy) + \oint_{C_2} (P dx + Q dy) + \oint_{C_3} (P dx + Q dy) \\ &= \iint_{\Omega_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA + \iint_{\Omega_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ & \quad + \iint_{\Omega_3} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (5) \end{aligned}$$

Cada una de las líneas de puntos de la figura 18.3.2b se recorre dos veces en direcciones opuestas; por tanto, se anulan esas contribuciones a la suma de las integrales de línea del lado izquierdo de la ecuación 5. Así, la suma de las integrales de línea sobre  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se reduce a la integral de línea a lo largo de  $C$ . También, la suma de las integrales dobles sobre  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  es igual a la integral doble sobre  $\Omega$ . En consecuencia, tenemos que para la región más general

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

En la figura 18.3.3 se muestra una región aún más complicada, al igual que su subdivisión en subregiones de la forma (2).

De acuerdo con la ecuación 1, es claro que el teorema de Green relaciona el comportamiento de las derivadas parciales de  $P$  y  $Q$  en  $\Omega$  con los valores de las propias  $P$  y  $Q$  en la frontera. A este respecto, el comportamiento es semejante al teorema fundamental del cálculo en la forma

$$\int_a^b \frac{dF(x)}{dx} = F(b) - F(a),$$

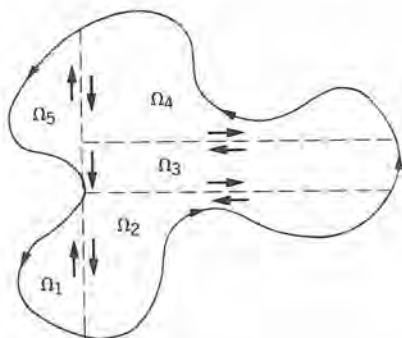


Figura 18.3.3

en el que la integral de la derivada se relaciona con el valor de la función en los puntos extremos (frontera).

Podemos emplear el teorema de Green para demostrar la parte de suficiencia del teorema 18.2.4 para dos dimensiones: que si  $Q_x - P_y = 0$ , en un dominio  $D$  simplemente conexo, entonces la integral de línea  $\int_C P dx + Q dy$  es independiente de la trayectoria. Se infiere de inmediato de la ecuación 1 que, si  $Q_x - P_y = 0$  en  $D$ , entonces  $\int_C P dx + Q dy = 0$  para toda curva suave por pedazos, simple y cerrada en  $D$ . De acuerdo con el teorema 18.2.3 esto equivale a la independencia de la trayectoria. Recordemos también que si  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  es un campo vectorial conservativo ( $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ), entonces la integral de línea en la ecuación 1 es cero. Es fácil confirmar que la integral doble correspondiente es cero. Como

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] dA = 0. \quad (6)$$

Por último, nótese que el teorema de Green nos suministra un segundo método de evaluar integrales de línea e integrales dobles. Dada una integral de línea a lo largo de una curva suave por pedazos, simple y cerrada, podemos evaluar ya sea la integral directamente, o bien emplear el teorema de Green y evaluar la integral doble correspondiente. En forma alternativa, podemos evaluar una integral doble de  $f(x, y)$  seleccionando las funciones  $P$  y  $Q$  de tal modo que  $\partial Q(x, y)/\partial x - \partial P(x, y)/\partial y = f(x, y)$ , y a continuación evaluar la integral correspondiente de línea. Ilustraremos estos conceptos en los ejemplos siguientes.

### EJEMPLO 1

Emplear el teorema de Green para evaluar

$$\oint_C (2x - y^2) dx + (xy - 1) dy$$

en la que  $C$  es el triángulo que se muestra en la figura 18.3.4.

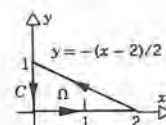


Figura 18.3.4



Tenemos

$$\begin{aligned}
 \oint_C (2x - y^2) dx + (xy - 1) dy &= \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (xy - 1) - \frac{\partial}{\partial y} (2x - y^2) \right] dA \\
 &= \iint_{\Omega} 3y dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^{-(x-2)/2} 3y dy dx \\
 &= 3 \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (x-2)^2 dx \\
 &= \frac{3}{8} \frac{(x-2)^3}{3} \Big|_0^2 = 1. \blacksquare
 \end{aligned}$$

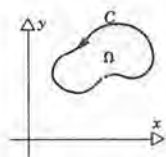


Figura 18.3.5

## EJEMPLO 2

Deducir una fórmula para el área de una región  $\Omega$  acotada por una curva suave por pedazos, simple y cerrada  $C$  en términos de una integral de línea alrededor de  $C$  (véase figura 18.3.5).

De acuerdo con la ecuación 1, si escogemos a  $P$  y  $Q$  de tal modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = k, \quad (7)$$

en la cual  $k$  es una constante, entonces la integral doble es igual a  $k \times (\text{área de } \Omega)$ . Así,

$$\text{Área de } \Omega = \frac{1}{k} \oint_C P dx + Q dy. \quad (8)$$

Hay muchas maneras de seleccionar a  $P$  y a  $Q$ . A continuación presentamos tres fáciles.

1.  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = 0$ , por tanto  $k = -1$  y

$$\text{Área de } \Omega = \oint_C -y dx. \quad (9)$$

2.  $P(x, y) = 0$ ,  $Q(x, y) = x$ , por tanto  $k = 1$  y

$$\text{Área de } \Omega = \oint_C x dy. \quad (10)$$

3.  $P(x, y) = -y$ ,  $Q(x, y) = x$ ; por tanto  $k = 2$  y

$$\text{Área de } \Omega = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy. \blacksquare \quad (11)$$

**EJEMPLO 3**

Usar la ecuación 11 para calcular el área de la región dentro de la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ .

Una representación paramétrica sencilla de esta elipse es

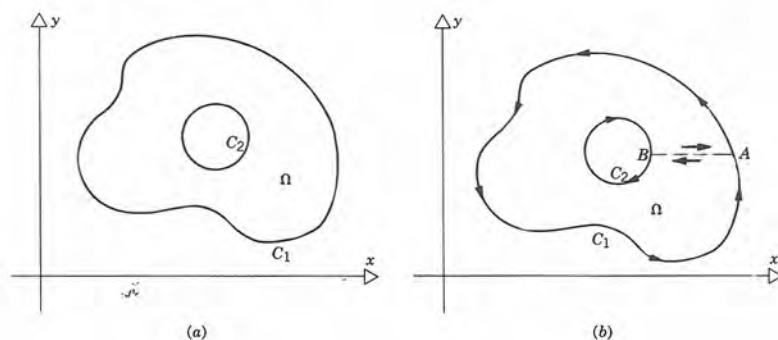
$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Empleando la ecuación 11 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b \sin t)(-a \sin t \, dt) + (a \cos t)(b \cos t \, dt) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = \pi ab. \blacksquare \end{aligned}$$

No es difícil ampliar el teorema de Green a dominios múltiplemente conexos, o sea, dominios con agujeros. Por ejemplo, consideremos la región  $\Omega$  cuya frontera consta de dos curvas suaves por pedazos, simples y cerradas,  $C_1$  y  $C_2$ , como se ve en la figura 18.3.6a.

Para aplicar el teorema de Green, hacemos un “corte,” digamos de  $A$  a  $B$ , que une a las fronteras interior y exterior  $C_2$  y  $C_1$  (véase figura 18.3.6b). El efecto del corte consiste en convertir a  $\Omega$  en una región simplemente conexa. Al aplicar el teorema de Green a la región con el corte, y partiendo del punto  $A$ , tenemos



**Figura 18.3.6** (a) Dominio múltiplemente conexo. (b) Aplicación del teorema de Green a un dominio múltiplemente conexo.

$$\left( \oint_{C_1} + \int_{AB} + \oint_{C_2} + \int_{BA} \right) (P dx + Q dy) = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Como el corte se recorre dos veces, una en cada dirección, se anulan las integrales de línea a lo largo del corte, y obtenemos

$$\oint_{C_1} (P dx + Q dy) + \oint_{C_2} (P dx + Q dy) = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA. \quad (12)$$

Nótese que las curvas frontera  $C_1$  y  $C_2$  se recorren de tal modo que la región  $\Omega$  siempre queda a la izquierda. Si seguimos esta convención, podemos entonces escribir el teorema de Green en la siguiente forma:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA, \quad (13)$$

donde  $C$  es la frontera completa de  $\Omega$  y se recorre de tal modo que  $\Omega$  queda siempre a la izquierda.

#### EJEMPLO 4

Sea  $C$  una curva suave por pedazos, simple y cerrada. Demostrar que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \begin{cases} 0, & \text{si } C \text{ no encierra al origen;} \\ 2\pi, & \text{si } C \text{ encierra al origen.} \end{cases} \quad (14)$$

Esta integral de línea se estudió en el ejemplo 4 de la sección 18.2. En ese momento hicimos la observación de que  $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$  y  $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$  son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas excepto en el origen, y que

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Si  $C$  no encierra al origen, entonces se puede emplear el teorema de Green para un dominio simplemente conexo, ecuación 1, y entonces

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Supongamos ahora que  $C$  encierra al origen. Tracemos un círculo  $C_\epsilon$  de radio  $\epsilon$  alrededor del origen, y escojamos a  $\epsilon$  lo suficientemente pequeña como para que  $C_\epsilon$  quede dentro de  $C$  (véase figura 18.3.7). Para esta región anular se puede emplear el teorema de Green para un dominio múltiplemente conexo, ecuación 12, y obtenemos



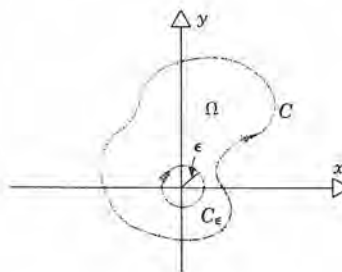


Figura 18.3.7

$$\oint_C (P dx + Q dy) + \oint_{C_\epsilon} (P dx + Q dy) = \iint_\Omega \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Por tanto,

$$\oint_C P dx + Q dy = - \oint_{C_\epsilon} P dx + Q dy = \oint_{C_\epsilon} P dx + Q dy.$$

Podemos evaluar la integral de línea a lo largo de  $C_\epsilon$  haciendo que  $x = \epsilon \cos \theta$ ,  $y = \epsilon \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ; véase el ejemplo 4 de la sección 18.2, donde aparece un cálculo semejante. El resultado es

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_{C_\epsilon} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi. \blacksquare$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 4 comprobar que el teorema de Green se cumple calculando ambos lados de la ecuación 1.

1.  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ ;  $C$  es el círculo  $x^2 + y^2 = a^2$
2.  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ ;  $C$  es el cuadrado cuyos vértices están en  $(\pm a, \pm a)$ .
3.  $\mathbf{F}(x, y) = (2y - x)\mathbf{i} + (3x + y)\mathbf{j}$ ;  $\Omega$  es la región acotada por  $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
4.  $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i}$ ;  $\Omega$  es el cuadrado cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, a)$ ,  $(0, a)$ .

En los problemas 5 a 10 emplear el teorema de Green para evaluar la integral de línea dada.

5.  $\oint_C 2 dx - 3 dy$ ;  $C$  es el triángulo cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(a, a)$  y  $(0, 2a)$ .
6.  $\oint_C 2y dx - 3x dy$ ;  $C$  es el triángulo cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(a, a)$  y  $(0, 2a)$ .
7.  $\oint_C xy dy$ ;  $C$  es el semicírculo  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y > 0$ , y la recta  $y = 0$ ,  $-a \leq x \leq a$ .
8.  $\oint_C (xy + y^2)dx + (2xy + x^2)dy$ ;  $C$  es el círculo  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

1094 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

9.  $\oint_C 3xy^2 dx - 5x^2y dy$ ;  $C$  es el cuadrado con vértices en  $(\pm 1, \pm 1)$ .

10.  $\oint_C e^x \cos y dx + e^x \sin y dy$ ;  $C$  es el rectángulo con vértices en  $(\pm 1, 0)$  y  $(\pm 1, \pi/2)$ .

En los problemas 11 a 14 emplear una de las fórmulas (9), (10) u (11) para evaluar el área de la región dada.

11. El interior del círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ .  
 12. El interior de la asteroide  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ . *Sugerencia:* emplear la representación paramétrica  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .  
 13. La región acotada por la cicloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , y el eje  $x$ .  
 14. La región acotada por  $y = x^2$  y  $y = x + 2$ .  
 15. Si  $\phi$  satisface la ecuación de Laplace,  $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ , demostrar que en un dominio  $D$  simplemente conexo

$$\oint_C \phi_y dx - \phi_x dy = 0$$

para toda curva  $C$  suave por pedazos, simple y cerrada en  $D$ .

16. Suponer que  $\phi$  y  $\psi$  son funciones continuas de dos variables con primeras derivadas parciales continuas en un dominio  $D$  simplemente conexo. Si  $C$  es cualquier curva suave por pedazos, simple y cerrada en  $D$ , demostrar que

$$\oint_C \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \psi \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

17. Sea  $(\hat{x}, \hat{y})$  el centroide (sección 17.3) de una región plana  $\Omega$  de área  $A$  que está acotada por una curva suave por pedazos, simple y cerrada. Demostrar que

$$\hat{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy, \quad \hat{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx.$$

18. El momento polar de inercia con respecto al eje  $z$  de una región  $\Omega$  del plano  $xy$  (sección 17.3) es

$$I_0 = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dA.$$

Si  $\Omega$  es una región en un dominio simplemente conexo con una frontera  $C$  que es una curva suave por pedazos, simple y cerrada, demostrar que

$$I_0 = \frac{1}{3} \oint_C -y^3 dx + x^3 dy.$$

19. Considerar la integral de línea

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

- (a) Demostrar que  $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$  para  $(x, y)$  en el anillo  $D$ :  $0 < \epsilon^2 < x^2 + y^2 < R^2$  para cualesquiera  $\epsilon > 0$  y  $R > \epsilon$ .  
 (b) Demostrar que  $\int_C P dx + Q dy = 0$ , donde  $C$  es cualquier círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ .  
 (c) Demostrar que  $\int_C P dx + Q dy = 0$  a lo largo de cualquier curva suave por pedazos, simple y cerrada que quede enteramente dentro de  $D$ , ya sea que  $C$  encierre al origen o no. Comparar este resultado con el del ejemplo 4.  
 (d) Determinar una función potencial  $\phi$  tal que  $\phi_x(x, y) = P(x, y)$  y  $\phi_y(x, y) = Q(x, y)$  para  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

En los problemas 20 y 21, sea  $C$  una curva lisa por pedazos, simple y cerrada, en un dominio  $D$  simplemente conexo, y sea  $\Omega$  el interior de  $C$ . Sean

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}$$

el vector tangente unitario y el vector normal unitario hacia afuera, respectivamente, a la curva  $C$  (véase figura 18.3.8). Se define el símbolo  $\nabla^2 \phi$  como  $\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy}$ , y  $\partial \phi / \partial n$  representa la derivada direccional de  $\phi$  en la dirección de  $\mathbf{N}$ .

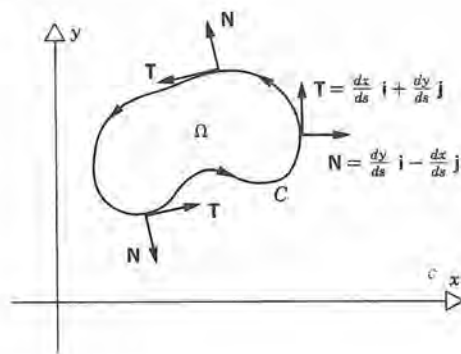


Figura 18.3.8

20. Si  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ , demostrar que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int \int_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

y

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds = \int \int_R \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA.$$

\*21. Si  $u$  y  $v$  son funciones con segundas derivadas parciales continuas, deducir las siguientes identidades:

$$(a) \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int \int_R \nabla^2 u \, dA$$

$$(b) \oint_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int \int_R (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dA$$

$$(c) \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds = \int \int_R [u \nabla^2 v + (\nabla u) \cdot (\nabla v)] \, dA$$

$$(d) \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int \int_R (u \nabla^2 u + \|\nabla u\|^2) \, dA$$

Las identidades (b) y (c) reciben el nombre de identidades de Green.

## 18.4 ÁREA DE UNA SUPERFICIE E INTEGRALES DE SUPERFICIE

La meta principal de las secciones siguientes de este capítulo consiste en extender la relación expresada en el teorema de Green de dos dimensiones, a tres. El primer paso consiste en definir e interpretar una clase de integrales sobre superficies curvas. Comenzaremos mostrando cómo calcular el área de una superficie esencialmente arbitraria, y con ello generalizaremos el resultado que obtuvimos en la sección 7.3 para superficies de revolución. Procederemos de modo bastante intuitivo para evitar complicaciones que sólo pertenecen a un curso más avanzado.

Se puede describir una superficie  $S$  mediante una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

También, podemos expresar a una de las variables en términos de las otras dos, como en

$$z = f(x, y). \quad (2)$$

Para una superficie  $S$  dada por la ecuación 1, el vector gradiente

$$\nabla F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (3)$$

es normal a ella. Así, una normal unitaria a  $S$  es

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}}. \quad (4)$$

Obsérvese que  $-\mathbf{N} = -\nabla F / \|\nabla F\|$  también es un vector normal unitario posible. Para una superficie dada por la ecuación 2, los vectores unitarios posibles son

$$\mathbf{N} = \pm \frac{-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{(f_x^2 + f_y^2 + 1)^{1/2}}. \quad (5)$$



en este caso el signo positivo da la normal que apunta hacia arriba, esto es, la que tiene la componente  $z$  positiva.

Se dice que la superficie  $S$  es **suave** si  $\mathbf{N}$  varía en forma continua en  $S$ . Si  $S$  está dada por la ecuación 1, entonces es suficiente que  $F$  tenga las primeras derivadas parciales continuas y que

$$\|\nabla F\| = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2} \neq 0 \quad (6)$$

para todo punto de  $S$ . Si  $S$  está definida por la ecuación 2, entonces es suficiente que  $f$  tenga las primeras derivadas parciales continuas en el dominio en el plano  $xy$  que corresponde a  $S$ . Por último, si  $S$  consta de un número finito de partes suaves unidas entre sí por sus orillas, entonces se dice que  $S$  es **suave por pedazos**. Así, por ejemplo, una elipsoide o una paraboloides son suaves, mientras que un cubo o un tetraedro son suaves por pedazos.

A continuación deduciremos una fórmula de integrales para el área de una superficie suave. Considere primero el elemento plano  $\Delta S$  en forma de un paralelogramo, que se ve en la figura 18.4.1, que queda arriba de un rectángulo  $\Delta R$  en el plano  $xy$ .

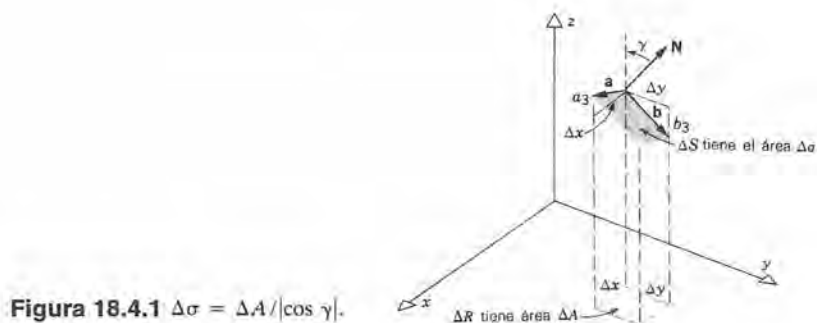


Figura 18.4.1  $\Delta\sigma = \Delta A / |\cos \gamma|$ .

cuyos lados son  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , y su área  $\Delta A = \Delta x \Delta y$ . Los lados del paralelogramo son paralelos a los planos  $xz$  y  $yz$ , respectivamente, y se describen mediante los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , donde

$$\mathbf{a} = \Delta x \mathbf{i} + a_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \Delta y \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}.$$

Además, la orientación del paralelogramo está dada por el vector normal unitario  $\mathbf{N}$ . En términos de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , el vector normal unitario que apunta hacia arriba es

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}. \quad (7)$$

Recordemos que, de acuerdo con la sección 15.4,  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$  representa el área del paralelogramo, que representaremos por  $\Delta\sigma$ . Así, la ecuación 7 se puede escribir en la siguiente forma:

$$(\Delta\sigma) \mathbf{N} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad (8)$$

y tomando la componente de la ecuación 8 en la dirección  $z$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta\sigma (\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \Delta x & 0 & a_3 \\ 0 & \Delta y & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Delta x \Delta y = \Delta A. \end{aligned}$$

Si se usa la normal unitaria que apunta hacia abajo, entonces  $-\Delta\sigma(\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}) = \Delta A$ . Para permitir el uso de ambas normales introducimos el valor absoluto de  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}$  para que, en todos los casos,

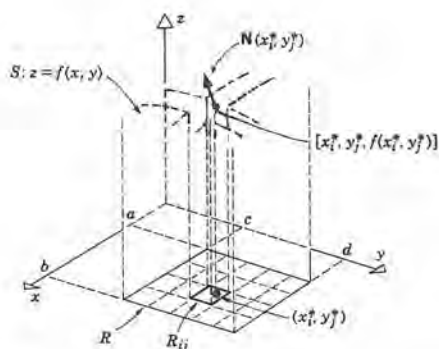
$$\Delta\sigma = \frac{\Delta A}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}|} = \frac{\Delta A}{|\cos \gamma|}, \quad (9)$$

en la cual  $\gamma$  es el ángulo entre  $\mathbf{N}$  y el eje  $z$  positivo.

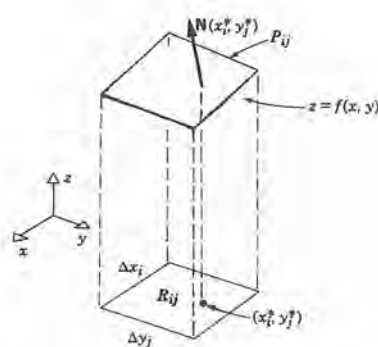
Supongamos ahora que  $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  es un rectángulo en el plano  $xy$  y que  $S$  es la superficie definida por

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in R$$

(véase figura 18.4.2). Supóngase que  $f$  tiene primeras derivadas continuas en  $R$  y, por tanto,  $S$  es suave. Como en la discusión de las integrales dobles de la sección 17.1,



**Figura 18.4.2** Una partición del rectángulo  $R$ , que también es una partición de la superficie  $S$ .



**Figura 18.4.3** Aproximación de un elemento de superficie mediante un elemento plano tangente.

tomamos una partición  $\Delta$  de  $R$ , que consta de subrectángulos cuyos lados son paralelos a los ejes  $x$  y  $y$ :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

Un subrectángulo típico es  $R_{ij}$ :  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ ,  $y_{j-1} \leq y \leq y_j$ , cuya área es  $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ . La norma  $\|\Delta\|$  de la partición es la longitud de la diagonal más larga de todas las de los subrectángulos  $R_{ij}$ . Seleccionemos un punto estrella arbitrario  $(x_i^*, y_j^*)$  en  $R_{ij}$  y construyamos el plano tangente  $P_{ij}$  en el punto correspondiente  $[x_i^*, y_j^*, f(x_i^*, y_j^*)]$  de la superficie  $S$ ; eso se indica en la figura 18.4.3. Según la ecuación 5, el vector normal unitario que apunta hacia arriba en este punto es

$$\mathbf{N}(x_i^*, y_j^*) = \frac{-f_x(x_i^*, y_j^*)\mathbf{i} - f_y(x_i^*, y_j^*)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{[f_x^2(x_i^*, y_j^*) + f_y^2(x_i^*, y_j^*) + 1]^{1/2}} \quad (10)$$

Sea  $\Delta\sigma_{ij}$  el área de aquella porción del plano tangente  $P_{ij}$  que queda directamente arriba de  $R_{ij}$ . Entonces, de acuerdo con la ecuación 9, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij} &= \frac{\Delta A_{ij}}{|\mathbf{N}(x_i^*, y_j^*) \cdot \mathbf{k}|} \\ &= [f_x^2(x_i^*, y_j^*) + f_y^2(x_i^*, y_j^*) + 1]^{1/2} \Delta A_{ij}. \end{aligned} \quad (11)$$

Procediendo del mismo modo en cada uno de los subrectángulos y sumando a continuación los resultados, obtenemos la suma siguiente:

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} [f_x^2(x_i^*, y_j^*) + f_y^2(x_i^*, y_j^*) + 1]^{1/2} \Delta A_{ij}. \quad (12)$$

Esta suma es una suma de Riemann en dos dimensiones, y entonces, cuando  $m, n \rightarrow \infty$  y  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , tiende a la integral correspondiente sobre el rectángulo  $R$ . Definimos el valor de esta integral como igual al área  $A(S)$  de la superficie  $S$ ,

$$A(S) = \iint_R [f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1]^{1/2} dA. \quad (13)$$

## EJEMPLO 1

Calcular el área de la superficie  $z = 4 - \frac{2}{3}x^{3/2}$  que queda arriba del rectángulo  $R$ :  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 2$  (véase figura 18.4.4).

En este caso  $f_x = -x^{1/2}$  y  $f_y = 0$ , por lo que

$$(f_x^2 + f_y^2 + 1)^{1/2} = (1 + x)^{1/2}.$$



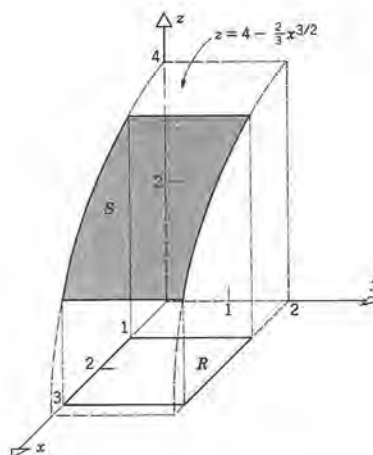


Figura 18.4.4

Entonces el área de la superficie está definida por la ecuación 13,

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \iint_R (1+x)^{1/2} dA = \int_1^3 \int_0^2 (1+x)^{1/2} dy dx \\
 &= 2 \int_1^3 (1+x)^{1/2} dx = \frac{4}{3} (1+x)^{3/2} \Big|_1^3 \\
 &= \frac{4}{3} (8 - 2\sqrt{2}) \cong 6.895. \blacksquare
 \end{aligned}$$

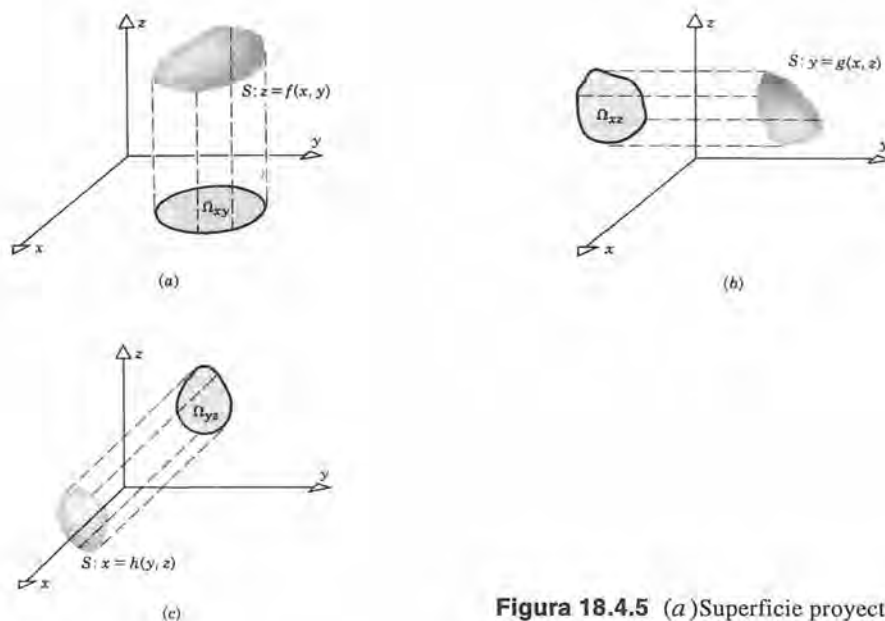
Como en la sección 17.1, es posible ampliar el concepto de área de una superficie a modo de integrar en regiones que no sean rectángulos. Si la superficie está definida por una ecuación de la forma

$$z = f(x, y), \quad (14)$$

se dice entonces que es proyectable en el plano  $xy$ . Sea  $\Omega_{xy}$  la región del plano  $xy$  que es la proyección de la superficie (véase figura 18.4.5a). Entonces, el área de  $S$  está dada por

$$A(S) = \iint_{\Omega_{xy}} (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} dA_{xy}; \quad (15a)$$

los subíndices del elemento de área  $dA_{xy}$  denotan a las variables de integración.



**Figura 18.4.5** (a) Superficie proyectable en el plano  $xy$ . (b) Superficie proyectable en el plano  $xz$ . (c) Superficie proyectable en el plano  $yz$ .

También, de modo alternativo, se puede escribir

$$A(S) = \iint_{\Omega_y} |\sec \gamma| dA_{xy} = \iint_{\Omega_y} \frac{dA_{xy}}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}|} \quad (15b)$$

Igualmente, si la superficie está dada por

$$y = g(x, z), \quad (16)$$

entonces es proyectable en el plano  $xz$  (véase figura 18.4.5b), y su área es

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_{\Omega_z} |\sec \beta| dA_{xz} = \iint_{\Omega_z} \frac{dA_{xz}}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}|} \\ &= \iint_{\Omega_z} [1 + g_x^2 + g_z^2]^{1/2} dA_{xz}, \end{aligned} \quad (17)$$

en las que  $\Omega_{xz}$  es la región adecuada del plano  $xz$  y  $\beta$  es el ángulo entre  $\mathbf{N}$  y el eje  $y$  positivo. Por último, si la superficie tiene la ecuación

$$x = h(y, z), \quad (18)$$

entonces, como se ve en la figura 18.4.5c, es proyectable en el plano  $yz$ , y tiene un área

de superficie representada por

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_{\Omega_{yz}} |\sec \alpha| dA_{yz} = \iint_{\Omega_{yz}} \frac{dA_{yz}}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}|} \\ &= \iint_{\Omega_{yz}} [1 + h_y^2 + h_z^2]^{1/2} dA_{yz}, \end{aligned} \quad (19)$$

en las que  $\Omega_{yz}$  es la región correspondiente en el plano  $yz$  y  $\alpha$  es el ángulo entre  $\mathbf{N}$  y el eje  $x$  positivo. Desde luego, una superficie dada puede ser proyectable en dos o hasta en los tres planos coordenados. En este caso se debe escoger, normalmente, la proyección que conduzca a la integración más sencilla.

También, una superficie puede estar definida por una ecuación de la forma

$$F(x, y, z) = 0 \quad (20)$$

y puede ser proyectable en cualquiera de los planos coordenados. Si es proyectable en el plano  $xy$ , entonces el elemento de área de superficie  $d\sigma$  satisface la ecuación

$$|\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}| d\sigma = dA_{xy},$$

en la que  $\mathbf{N}$  está definida por la ecuación 4 y, en consecuencia,

$$|\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}| = \frac{|F_z|}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}}.$$

Así, el área de la superficie es

$$A(S) = \iint_{\Omega_{xy}} \frac{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}}{|F_z|} dA_{xy}, \quad (21)$$

en la que  $\Omega_{xy}$  es la proyección de la superficie en el plano  $xy$ . Obsérvese que en el integrando de la ecuación 21, las diversas derivadas parciales de  $F$  dependen en general de  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Antes de evaluar la integral se debe despejar a  $z$  de la ecuación 20 en términos de  $x$  y  $y$ , para luego sustituir a  $z$  en el integrando. Recuérdese que en la sección 16.8, si  $F_z \neq 0$ , entonces la ecuación 20 sí define a  $z$  en forma implícita como función de  $x$  y  $y$ .

Si la superficie (20) es proyectable en los planos  $xz$  ó  $yz$ , entonces obtendremos otras integrales que corresponden a la ecuación 21, de una manera obvia, que son

$$A(S) = \iint_{\Omega_{xz}} \frac{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}}{|F_y|} dA_{xz} \quad (22)$$

y

$$A(S) = \iint_{\Omega_{yz}} \frac{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}}{|F_x|} dA_{yz}, \quad (23)$$



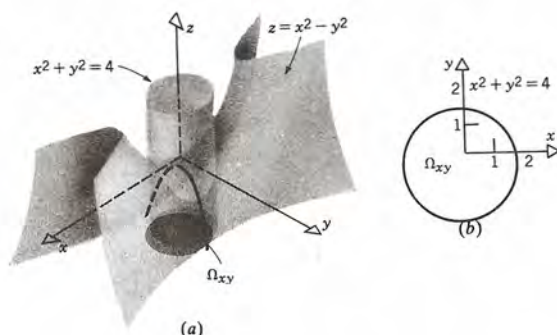


Figura 18.4.6

respectivamente. En cada caso se debe expresar al integrando completamente en términos de las dos variables de integración antes de evaluar la integral.

### EJEMPLO 2

Calcular el área de la superficie de la parte de la paraboloides hiperbólicas  $z = x^2 - y^2$  que queda dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  (véase figura 18.4.6a).

En este problema  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , y  $\Omega_{xy}$  es el disco circular con centro en  $(0, 0)$  y radio 2 que se ve en la figura 18.4.6b. Así, de acuerdo con la ecuación 15,

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_{\Omega_{xy}} (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} dA_{xy} \\ &= \iint_{\Omega_{xy}} (1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2} dA_{xy}. \end{aligned}$$

Conviene evaluar la integral empleando coordenadas polares. Entonces

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (1 + 4r^2)^{1/2} r dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{8} \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{\pi}{6} [(17)^{3/2} - 1] \approx 36.18 \blacksquare \end{aligned}$$

### EJEMPLO 3

Determinar el área de la superficie de la parte del cilindro  $x^2 + z^2 = a^2$  que queda dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  (véase figura 18.4.7).

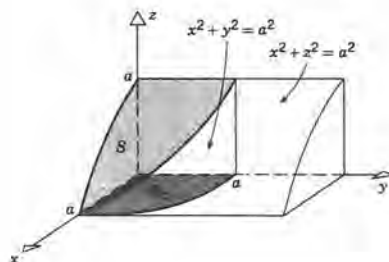


Figura 18.4.7

Debido a la simetría del problema, podemos determinar el área de la superficie en el primer octante, para luego multiplicar por ocho. Para la superficie dada tenemos que

$$F(x, y, z) = x^2 + z^2 - a^2 = 0. \quad (24)$$

Entonces

$$F_x = 2x, \quad F_y = 0, \quad F_z = 2z,$$

así que

$$\mathbf{N} = \frac{x}{a} \mathbf{i} + \frac{z}{a} \mathbf{k},$$

en la que hemos empleado la ecuación 24 para simplificar la ecuación de  $\mathbf{N}$ . En consecuencia,

$$d\sigma = \frac{dA_{xy}}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{k}|} = \frac{a}{z} dA_{xy}, \quad (25)$$

y

$$A(S) = \iint_{\Omega_{xy}} \frac{a}{z} dA_{xy},$$

en la que  $\Omega_{xy}$  es el primer cuadrante del disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , que se ve en la figura 18.4.8a. Empleando la ecuación 24 podemos expresar al integrando de la ecuación 25

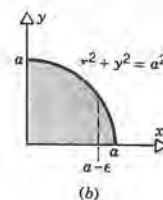
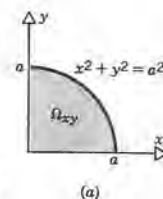


Figura 18.4.8

en términos de  $x$  y  $y$ , y con ello obtenemos

$$A(S) = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx. \quad (26)$$

También se obtiene la misma integral por sustitución directa en la ecuación 21. Como el integrando sólo depende de  $x$ , hemos escogido integrar primero con respecto a  $y$ . Nótese que el integrando también se hace no acotado cuando  $x \rightarrow a$  y, por tanto, evaluaremos la integral mediante un proceso de límite, semejante al que empleamos en la sección 11.3 para integrales impropias unidimensionales. Esto es, primero restringimos a  $x$  de modo que  $0 \leq x \leq a - \epsilon$ , en donde  $\epsilon$  es un número positivo arbitrario pequeño; esto corresponde a integrar en la región que se muestra en la figura 18.4.8b. Después hacemos que  $\epsilon \rightarrow 0$ . De este modo encontramos que

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\epsilon} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\epsilon} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} a \int_0^{a-\epsilon} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} a(a - \epsilon) = a^2. \end{aligned}$$

Así, el área total es  $8a^2$ . ■

#### EJEMPLO 4

La gráfica de la ecuación

$$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

es una hiperboloide de un manto (véase figura 18.4.9). Proyectando la gráfica en los planos  $yz$  y  $xz$ , respectivamente, formular integrales que representen al área de la parte de esta superficie en el primer octante entre los planos  $x = 0$  y  $x = 1$ .

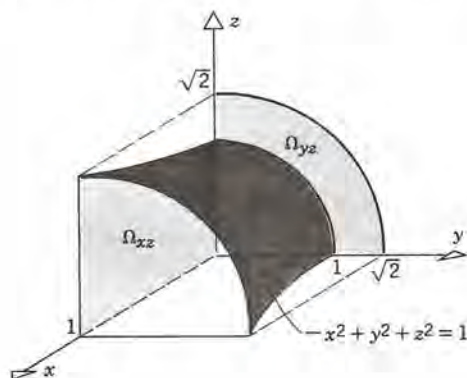


Figura 18.4.9



Si proyectamos en el plano  $yz$ , podemos emplear la ecuación 23, lo cual resulta en

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_{\Omega_{yz}} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{x} dA_{yz} \\ &= \iint_{\Omega_{yz}} \left[ \frac{2(y^2 + z^2) - 1}{y^2 + z^2 - 1} \right]^{1/2} dA_{yz}, \end{aligned}$$

en las que  $\Omega_{yz}$  es el cuarto de anillo que se ve en la figura 18.4.10. Introduciendo coordenadas polares en el plano  $yz$ , podemos reformular la integral del siguiente modo:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{2r^2 - 1}{r^2 - 1} \right)^{1/2} r d\theta dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \left( \frac{2r^2 - 1}{r^2 - 1} \right)^{1/2} r dr. \end{aligned} \quad (28)$$

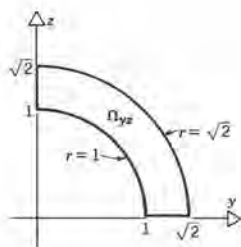


Figura 18.4.10

Obsérvese que la integral (28) es impropia porque el integrando se hace no acotado cuando  $r \rightarrow 1$ . Sin embargo, no es difícil demostrar que la integral converge.

Si optamos por proyectar en el plano  $xz$ , entonces el área de la superficie está representada por la ecuación 22, esto es,

$$A(S) = \iint_{\Omega_{xz}} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{y} dA_{xz},$$

en la que  $\Omega_{xz}$  es la que se muestra en la figura 18.4.11. Escribiendo el integrando en términos de  $x$  y  $z$  e insertando los límites de integración, obtenemos

$$A(S) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{(1 + 2x^2)^{1/2}}{(1 + x^2 - z^2)^{1/2}} dz dx.$$

La integral interior de nuevo es impropia, pero se puede evaluar con facilidad en

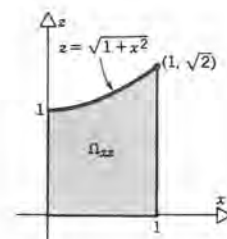


Figura 18.4.11

términos de la función arc sen; así,

$$A(S) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1 + 2x^2)^{1/2} dx.$$

Esta integral que resulta se puede evaluar consultando una tabla de integrales, o bien llevando a cabo la sustitución  $\sqrt{2}x = \tan u$ , y el resultado es

$$A(S) = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right] \cong 1.997. \blacksquare$$

La extensión de las integrales para el área de una superficie a integrales de otras funciones sobre superficies es directa. Supongamos que  $S$  está expresada por

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad (27)$$

y que  $\phi(x, y, z)$  es continua en una región que contiene a  $S$ . Deseamos definir  $\iint_S \phi(x, y, z) d\sigma$ , la integral de  $\phi$  sobre la superficie  $S$ . Sea

$$\Phi(x, y) = \phi[x, y, f(x, y)]$$

y notemos que  $\Phi(x, y)$  es el valor de  $\phi$  en el punto de  $S$  que queda directamente arriba (o abajo) del punto  $(x, y)$  en  $\Omega_{xy}$ . Recuérdese que, para una superficie descrita mediante la ecuación 27, el elemento de área de superficie es

$$d\sigma = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} dA_{xy}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_S \phi(x, y, z) d\sigma &= \iint_{\Omega_{xy}} \Phi(x, y) [1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)]^{1/2} dA_{xy} \\ &= \iint_{\Omega_{xy}} \phi[x, y, f(x, y)] [1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)]^{1/2} dA_{xy}. \end{aligned}$$

De igual modo, podemos generalizar las demás integrales de área de superficie. Por ejemplo, si  $S$  es la superficie

$$F(x, y, z) = 0, \quad (28)$$

y si  $S$  se puede proyectar en la región  $\Omega_{xy}$ , entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \phi(x, y, z) d\sigma \\ = \iint_{\Omega_{xy}} \frac{\phi(x, y, z) [F_x^2(x, y, z) + F_y^2(x, y, z) + F_z^2(x, y, z)]^{1/2}}{|F_z(x, y, z)|} dA_{xy}. \end{aligned} \quad (29)$$

Desde luego, antes de evaluar este integrando debemos despejar a  $z$  de la ecuación 28, en términos de  $x$  y  $y$ , y sustituir en el integrando.

La integral de superficie  $\iint_S \phi(x, y, z) d\sigma$  tiene con frecuencia una interpretación física. Una posibilidad es que  $\phi$  sea la densidad, o masa por unidad de área, de una membrana con la forma de la superficie  $S$ . Entonces  $\iint_S \phi(x, y, z) d\sigma$  es la masa total de la membrana o superficie. En la sección 18.7 se describen otras aplicaciones de las integrales de superficie.

## EJEMPLO 5

Se tiene la superficie  $S$  definida mediante  $x^2 + z^2 = a^2$  que queda en el primer octante entre el plano  $xz$  y el plano  $y = x$  (véase figura 18.4.12a). Si la densidad de esta superficie está representada por  $\rho(x, y, z) = a - z$ , determinar la masa total  $M$  de la superficie.

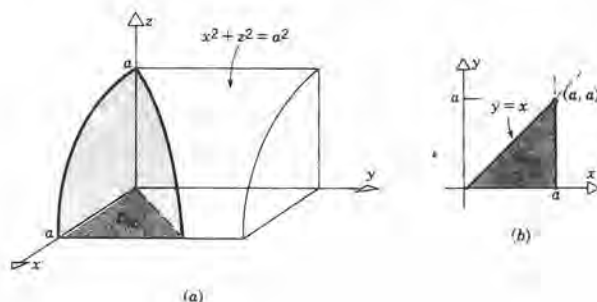


Figura 18.4.12

La masa total es

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) d\sigma.$$



## 1108 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

Como en la ecuación 25 del ejemplo 3,

$$d\sigma = \frac{a}{z} dA_{xy},$$

de modo que

$$M = \iint_{\Omega_{xy}} (a - z) \frac{a}{z} dA_{xy},$$

en la que  $\Omega_{xy}$  es el triángulo  $0 \leq y \leq x$ ,  $0 \leq x \leq a$  que se ve en la figura 18.4.12b. Expresando a  $z$  en términos de  $x$  y  $y$ , e integrando después, obtenemos

$$\begin{aligned} M &= a^2 \int_0^a \int_0^x (a^2 - x^2)^{-1/2} dy dx - a \int_0^a \int_0^x dy dx \\ &= a^2 \int_0^a (a^2 - x^2)^{-1/2} x dx - a \int_0^a x dx \\ &= a^3 - \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 determinar el área de la superficie dada.

1. La esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
2. La parte de la paraboloides elíptica  $z = 4 - x^2 - y^2$  para la cual  $z \geq 0$ .
3. La parte del plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad a, b, c > 0$$

que pertenece al primer octante.

4. La parte del cilindro parabólico  $z = 4 - y^2$  que queda en el primer octante y entre los planos  $yz$  y  $x = 2y$ .
5. La parte de la paraboloides hiperbólica  $x = yz$  que queda dentro del cilindro  $y^2 + z^2 = a^2$ .
6. La parte del plano  $Ax + By + Cz = D$ , donde  $C \neq 0$ , que está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ .
7. La parte del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  que está en el primer octante entre el plano  $xy$  y el plano  $z - 2y = 3$ .
8. La parte de la superficie  $x + \frac{2}{3}z^{3/2} = 1$  que está en el primer octante entre el plano  $xy$ , el plano  $xz$  y el plano  $y + z = 1$ .

9. La parte del cilindro cúbico  $y = 8 - x^3$  que está en el primer octante entre el plano  $z = 0$  y el cilindro  $z = x^3$ .
10. La parte del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  que está dentro del cilindro  $(y^2/a^2) + (z^2/b^2) = 1$ .
11. Determinar el área de la superficie lateral de un cono circular recto de radio  $R$  y altura  $H$ .

En los problemas 12 a 16 determinar la masa de la superficie dada con la función densidad que se menciona.

12. El hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ , donde  $\rho(x, y, z) = k(a - z)$ , donde  $k$  es una constante positiva.
13. El hemisferio del problema 12 en el que  $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)^{1/2}$ , donde  $k$  es una constante positiva.
14. La paraboloides  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$ , donde  $\rho(x, y, z) = k(1 - z)$ , donde  $k$  es una constante positiva.
15. La parte del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  que está en el primer octante entre los planos  $z = 0$  y  $z = y$ , donde  $\rho(x, y, z) = a - x$ .
16. La parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  para la cual  $0 \leq z \leq a$ , donde  $\rho(x, y, z) = kz$ , en la que  $k$  es una constante positiva.

En los problemas 17 a 20 formular, pero no evaluar, la integral adecuada.

17. Para el área de la superficie de la elipsoide  $(x^2/4) + (y^2/4) + z^2 = 1$ .

18. Para el área de la superficie de la parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  cortada por el plano  $y + z = a$ .

19. Para la masa de la parte del cilindro parabólico  $z = 1 - x^2, x \geq 0$  que queda entre los planos coordenados y el cilindro parabólico  $x = 1 - y^2$ , donde  $\rho(x, y, z) = 1 - z$ .

20. Para la masa de la parte de la paraboloides hiperbólica  $z = x^2 + y^2$  que está dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ , donde  $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)^{1/2}$  donde  $k$  es una constante positiva.

## 18.5 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE SUPERFICIES

Las superficies, al igual que las curvas, se pueden describir ya sea mediante ecuaciones cartesianas o paramétricas. Las ventajas de emplear representaciones paramétricas son semejantes tanto para curvas como para superficies, a saber: constituyen un marco más general y unificado para su discusión. Si bien las curvas son unidimensionales y por consiguiente sólo necesitan de un parámetro, las superficies son de naturaleza intrínseca bidimensional y, por tanto, es necesario emplear dos parámetros para describirlas.

### EJEMPLO 1

Sean

$$x = R \cos \theta \sin \phi, \quad y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z = R \cos \phi, \quad (1)$$

donde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi/2$ , y  $R$  es una constante positiva. Para cada par de valores de  $\theta$  y  $\phi$ , las ecuaciones 1 dan valores correspondientes para  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . En este caso, es fácil obtener una ecuación cartesiana que satisfacen esos valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones 1 y sumando a continuación, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + R^2 \cos^2 \phi \\ &= R^2, \end{aligned} \quad (2)$$

que es la ecuación de la esfera que tiene el centro en el origen y su radio es  $R$ . Para las variaciones dadas de  $\theta$  y  $\phi$ , las ecuaciones 1 describen sólo al hemisferio superior (véase figura 18.5.1).

Desde luego que las ecuaciones 1 son tan sólo las ecuaciones de la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares que empleamos en la sección 17.7. Como se hizo notar allí, es fácil interpretar a  $\theta$  y a  $\phi$  en términos de la longitud y la latitud. ■

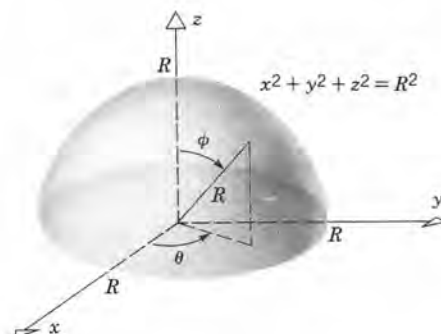


Figura 18.5.1

## EJEMPLO 2

Suponer que

$$x = 2 \cosh u \cos v, \quad y = \cosh u \sin v, \quad z = 3 \sinh u. \quad (3)$$

Deducir una ecuación cartesiana que satisfagan  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Determinar las coordenadas rectangulares del punto para el que  $u = \ln 2$ ,  $v = \pi/6$ . Nótese que

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \cosh^2 u \cos^2 v, \quad y^2 = \cosh^2 u \sin^2 v, \quad \left(\frac{z}{3}\right)^2 = \sinh^2 u.$$

Entonces se infiere de inmediato que,

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1, \quad (4)$$

que es una ecuación de una hiperboloide de un manto. La superficie completa está cubierta si  $-\infty < u < \infty$  y  $0 \leq v \leq 2\pi$  (véase figura 18.5.2).

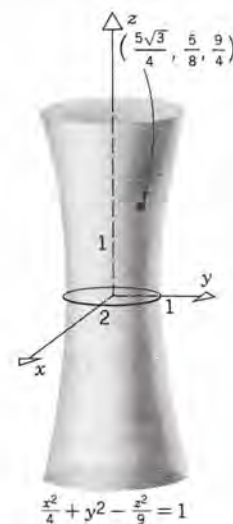


Figura 18.5.2



Si  $u = \ln 2$ , entonces

$$\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2} (e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4},$$

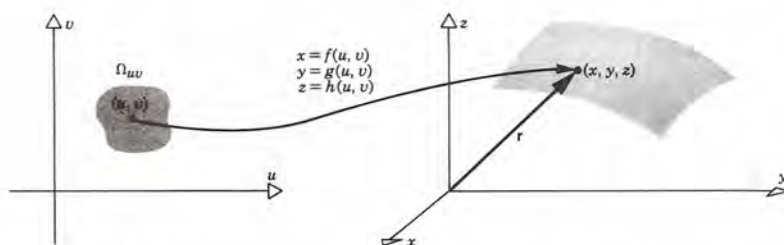
$$\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2} (e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

En consecuencia, el punto que corresponde a los valores dados de  $u$  y  $v$  tiene las coordenadas rectangulares  $x = 5\sqrt{3}/4$ ,  $y = \frac{5}{8}$ ,  $z = \frac{9}{4}$ . ■

Los ejemplos 1 y 2 demuestran que las superficies conocidas se pueden describir mediante los conjuntos de ecuaciones de la forma

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad z = h(u, v), \quad (u, v) \in \Omega_{uv}, \quad (5)$$

en las que  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones continuas dadas, de dos variables, y  $\Omega_{uv}$  es una región dada en el plano  $uv$ . Para cada punto  $(u, v)$  de  $\Omega_{uv}$ , las ecuaciones 5 producen un punto  $(x, y, z)$  del espacio  $xyz$  tridimensional. El conjunto de todos esos puntos es una superficie  $S$ . Las ecuaciones 5 son una aplicación o transformación del plano  $uv$  al espacio  $x, y, z$ , como se ve en la figura 18.5.3, o bien una representación paramétrica de  $S$  con parámetros  $u$  y  $v$ .



**Figura 18.5.3** Representación paramétrica de una superficie  $S$ .

A veces, como en los ejemplos 1 y 2, es posible eliminar los parámetros  $u$  y  $v$  de las ecuaciones 5, obteniendo así una ecuación cartesiana de la forma

$$F(x, y, z) = 0. \quad (6)$$

Si se hace esto, debemos tener cuidado de comprobar que todos los puntos que satisfacen a la ecuación 6 se obtienen de  $\Omega_{uv}$ , y si algunos de ellos se pueden obtener más de una vez. Recuerdese que surgieron cuestiones semejantes al emplear representaciones paramétricas de curvas.

El vector de posición  $\mathbf{r}$  de un punto de la superficie  $S$  dada por las ecuaciones 5 es

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ &= f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}.\end{aligned}\quad (7)$$

Si mantenemos constante a  $u$ , digamos  $u = u_0$ , entonces la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = f(u_0, v)\mathbf{i} + g(u_0, v)\mathbf{j} + h(u_0, v)\mathbf{k}, \quad (8)$$

o las ecuaciones escalares correspondientes

$$x = f(u_0, v), \quad y = g(u_0, v), \quad z = h(u_0, v), \quad (9)$$

sólo dependen del parámetro único  $v$ . En consecuencia, las ecuaciones 8 y 9 son las ecuaciones paramétricas de una curva en la superficie  $S$  (véase figura 18.5.4). Como

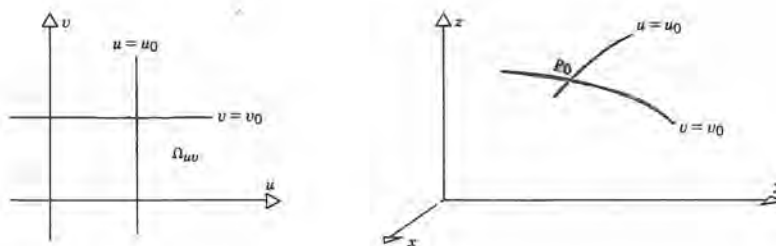


Figura 18.5.4

esa curva está asociada con un valor particular de  $u$ , a saber,  $u = u_0$ , nos referiremos a ella como una curva  $u$ . Igualmente, si  $v = v_0$ , entonces

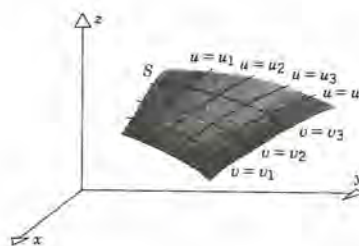
$$\mathbf{r} = f(u, v_0)\mathbf{i} + g(u, v_0)\mathbf{j} + h(u, v_0)\mathbf{k}, \quad (10)$$

o sea, que

$$x = f(u, v_0), \quad y = g(u, v_0), \quad z = h(u, v_0), \quad (11)$$

son representaciones paramétricas de una curva diferente en la superficie  $S$ . Llamaremos a esa curva una curva  $v$ .

Supongamos que la curva (8), (9) y la curva (10), (11) se intersecan en un punto  $P_0$  de la superficie, como se ve en la figura 18.5.4. Este punto se puede identificar mediante sus coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , pero también se puede identificar mediante los valores  $u_0$  y  $v_0$  asociados con la curva  $u$  y la curva  $v$ , que se intersecan en ese punto. Para diferentes valores constantes de  $u$  y  $v$ , las curvas  $u$  (8), (9) y las curvas  $v$  (10), (11) forman dos familias de curvas en la superficie  $S$ , como se ve en la figura 18.5.5. Aunque puede haber algunos pocos puntos excepcionales, en forma típica un punto de la superficie es la intersección de una curva  $u$  y una curva  $v$ . Entonces se



**Figura 18.5.5** Coordenadas paramétricas sobre una superficie  $S$ .

puede identificar este punto con los valores de  $u$  y  $v$ , respectivamente, asociados con esas curvas. Un ejemplo familiar de lo anterior es el empleo de meridianos de longitud y paralelos de latitud para localizar puntos en la superficie terrestre. En este caso, los polos norte y sur son puntos de excepción, porque en ellos pasan todos los meridianos de longitud. En consecuencia, la longitud no queda determinada de manera única en los polos.

### Planos tangentes y rectas normales

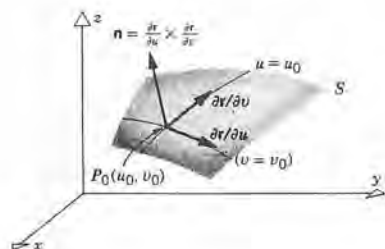
Considere la curva representada por la ecuación 10,

$$\mathbf{r} = f(u, v_0)\mathbf{i} + g(u, v_0)\mathbf{j} + h(u, v_0)\mathbf{k},$$

que queda en la superficie  $S$  definida mediante las ecuaciones 5 ó 7. Derivando a  $\mathbf{r}$  con respecto a  $u$ , manteniendo constante a  $v$ , obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u}(u, v_0)\mathbf{k}, \quad (12)$$

que es un vector tangente a la curva (véase figura 18.5.6). Análogamente,



**Figura 18.5.6** Vector normal sobre la superficie  $S$ .



$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v)\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v)\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v)\mathbf{k}, \quad (13)$$

es tangente a la curva dada por la ecuación 8, la cual también queda en  $S$ . Es fácil ahora determinar un vector normal  $\mathbf{n}$  a  $S$  en el punto de intersección de las dos curvas si se calcula el producto vectorial de  $\partial \mathbf{r}/\partial u$  y  $\partial \mathbf{r}/\partial v$  en  $(u_0, v_0)$ . Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} g_u & h_u \\ g_v & h_v \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} h_u & f_u \\ h_v & f_v \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} f_u & g_u \\ f_v & g_v \end{vmatrix} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (14)$$

Desarrollando los determinantes del lado derecho de esta ecuación llegamos a

$$\mathbf{n} = (g_u h_v - h_u g_v)\mathbf{i} + (h_u f_v - f_u h_v)\mathbf{j} + (f_u g_v - g_u f_v)\mathbf{k}. \quad (15)$$

Desde luego, todas las funciones de las ecuaciones 14 y 15 se evalúan en el punto  $(u_0, v_0)$ .

### EJEMPLO 3

Determinar un vector normal a la superficie (3) en el punto en el que  $u = \ln 2$  y  $v = \pi/6$ . Determinar también la recta normal y el plano tangente a la superficie en este punto. Obsérvese que la superficie es la misma que en el ejemplo 2.

En este caso,

$$\mathbf{r} = 2 \cosh u \cos v \mathbf{i} + \cosh u \sin v \mathbf{j} + 3 \sinh u \mathbf{k}. \quad (16)$$

Por tanto

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 2 \sinh u \cos v \mathbf{i} + \sinh u \sin v \mathbf{j} + 3 \cosh u \mathbf{k}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -2 \cosh u \sin v \mathbf{i} + \cosh u \cos v \mathbf{j}. \quad (18)$$

Si  $u = \ln 2$  y  $v = \pi/6$ , entonces

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \left( \ln 2, \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \mathbf{i} + \frac{3}{8} \mathbf{j} + \frac{15}{4} \mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \left( \ln 2, \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{5}{4} \mathbf{i} + \frac{5\sqrt{3}}{8} \mathbf{j},$$

y

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \left( \ln 2, \frac{\pi}{6} \right) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{8} & \frac{15}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5\sqrt{3}}{8} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{15}{32} (-5\sqrt{3}\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (19)$$

Desde luego que cualquier vector proporcional a  $\partial \mathbf{r} / \partial u \times \partial \mathbf{r} / \partial v$  se puede emplear también como vector normal, por ejemplo

$$\mathbf{n} = 5\sqrt{3}\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \quad (20)$$

En el ejemplo 2, encontramos que el punto de la superficie que corresponde a  $u = \ln 2$ , y  $v = \pi/6$  es  $(5\sqrt{3}/4, \frac{5}{8}, \frac{9}{4})$ . Por tanto, si usamos el vector normal (20), entonces la recta normal a la superficie en este punto es

$$\frac{x - 5\sqrt{3}/4}{5\sqrt{3}} = \frac{y - 5/8}{10} = \frac{z - 9/4}{-4}. \quad (21)$$

El plano tangente es

$$5\sqrt{3}\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right) + 10\left(y - \frac{5}{8}\right) - 4\left(z - \frac{9}{4}\right) = 0,$$

o sea

$$5\sqrt{3}x + 10y - 4z = 16. \quad (22)$$

### El área de superficie en coordenadas paramétricas

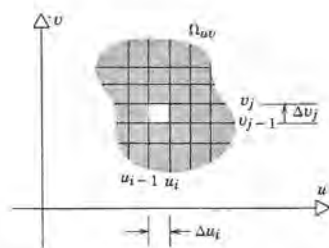
Hemos visto que la ecuación vectorial (7)

$$\mathbf{r} = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k},$$

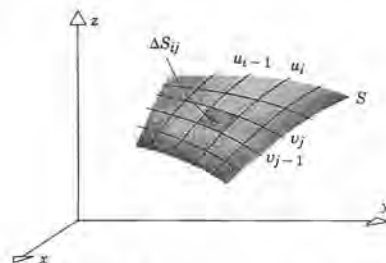
para  $(u, v)$  en una región  $\Omega_{u,v}$  del plano  $u, v$ , es una representación paramétrica de una superficie  $S$ . Como en la sección 18.4, se dice que  $S$  es suave si tiene un vector normal  $\mathbf{n}$  que varía en forma continua. Para asegurarse que esto es así, es suficiente suponer que  $f, g$  y  $h$  tienen primeras derivadas parciales continuas y que  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  en toda  $\Omega_{uv}$ . Suponemos que  $S$  es al menos suave por pedazos, esto es, que consta a lo más de un número finito de pedazos suaves, unidos a lo largo de arcos suaves rectificables, y que la frontera de  $\Omega_{uv}$  consta también de a lo más un número finito de arcos rectificables

suaves. En estas condiciones podemos deducir una expresión para el área de  $S$  en términos de una integral sobre  $\Omega_{uv}$ .

El primer paso consiste en formar una partición,  $\Delta$  de  $\Omega_{uv}$  mediante rectas paralelas a los ejes  $u$  y  $v$ , respectivamente (véase figura 18.5.7). Como de costumbre, la norma de la partición  $\Delta$ , representada mediante  $\|\Delta\|$  es la longitud de la diagonal más larga de



**Figura 18.5.7** Una partición de la región  $\Omega_{uv}$ .



**Figura 18.5.8** La partición correspondiente de la superficie  $S$ .

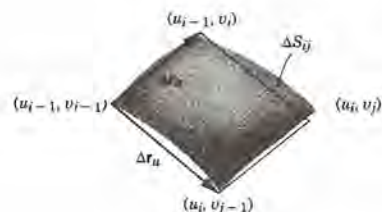
los subrectángulos que se forman de esta manera. La partición de  $\Omega_{uv}$  induce una partición de la superficie  $S$  mediante familias de curvas  $u$  y curvas  $v$ , respectivamente, como se indica en la figura 18.5.8. La región sombreada de la figura 18.5.8, representada mediante  $\Delta S_{ij}$ , es la parte de la superficie acotada por las curvas  $\mathbf{r}(u_{i-1}, v)$ ,  $\mathbf{r}(u_i, v)$ ,  $\mathbf{r}(u, v_{j-1})$ , y  $\mathbf{r}(u, v_j)$ . Corresponde al rectángulo sombreado de la figura 18.5.7, acotado por las líneas  $u = u_{i-1}$ ,  $u = u_i$ ,  $v = v_{j-1}$  y  $v = v_j$ .

A continuación, deseamos calcular el área  $\Delta S_{ij}$  del elemento de superficie  $\Delta S_{ij}$ . Como se ve en la figura 18.5.9,  $\Delta S_{ij}$  es aproximadamente un paralelogramo, cuyos lados están determinados por los vectores  $\Delta \mathbf{r}_u$  y  $\Delta \mathbf{r}_v$ , donde

$$\Delta \mathbf{r}_u = \mathbf{r}(u_i, v_{j-1}) - \mathbf{r}(u_{i-1}, v_{j-1}), \quad (23a)$$

$$\Delta \mathbf{r}_v = \mathbf{r}(u_{i-1}, v_j) - \mathbf{r}(u_{i-1}, v_{j-1}); \quad (23b)$$

por tanto  $\Delta S_{ij}$  está determinado, en forma aproximada, por el área del paralelogramo, esto es,



**Figura 18.5.9** Aproximación a  $\Delta S_{ij}$  mediante un paralelogramo.



$$\Delta\sigma_{ij} \cong \|\Delta\mathbf{r}_u \times \Delta\mathbf{r}_v\|. \quad (24)$$

Se puede obtener una ecuación más útil si observamos que

$$\Delta\mathbf{r}_u \cong \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta u_i, \quad \Delta\mathbf{r}_v \cong \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \Delta v_j, \quad (25)$$

en las que  $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$  y  $\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$ . Entonces, sustituyendo en la ecuación 24 tenemos que

$$\Delta\sigma_{ij} \cong \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right\| \Delta u_i \Delta v_j. \quad (26)$$

Se aproxima entonces el área de  $S$  sumando sobre  $i$  y  $j$  para incluir la contribución de cada elemento de superficie. En consecuencia,

$$A(S) = \sum_{i,j} \Delta\sigma_{ij}, \quad (27)$$

en la cual  $\Delta\sigma_{ij}$  está dada por la ecuación 26. Por último, pasamos al límite cuando  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  y obtenemos la expresión con integrales

$$A(S) = \iint_{\Omega_{uv}} d\sigma = \iint_{\Omega_{uv}} \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| dA_{uv}. \quad (28)$$

La integral de la derecha de esta ecuación es una integral doble sobre la región  $\Omega_{uv}$  del plano  $uv$ . Se puede evaluar remplazándola por las integrales iteradas adecuadas para, a continuación, integrar con respecto a cada variable a su vez.

Para el caso de la esfera cuyas ecuaciones paramétricas son las expresiones (1), tenemos que

$$\mathbf{r} = R \cos \theta \sin \phi \mathbf{i} + R \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + R \cos \phi \mathbf{k}.$$

Entonces

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = -R \sin \theta \sin \phi \mathbf{i} + R \cos \theta \sin \phi \mathbf{j},$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = R \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + R \sin \theta \cos \phi \mathbf{j} - R \sin \phi \mathbf{k},$$

y

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -R^2 \cos \theta \sin^2 \phi \mathbf{i} - R^2 \sin \theta \sin^2 \phi \mathbf{j} - R^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}.$$

Elevando al cuadrado cada componente y sumando a continuación llegamos a

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|^2 = R^4 \sin^2 \phi,$$

o sea

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right| = R^2 \sin \phi.$$

En otras palabras, el elemento de área sobre la superficie de una esfera de radio  $R$ , en términos de las coordenadas angulares  $\theta$  y  $\phi$  es

$$d\sigma = R^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi. \quad (29)$$

### EJEMPLO 4

El estado de Colorado (en Estados Unidos) está limitado por los meridianos  $102^\circ 3'$  y  $109^\circ 3'$  longitud oeste y por los paralelos  $37^\circ$  y  $41^\circ$  latitud norte (véase figura 18.5.10). Suponiendo que la Tierra es una esfera de 3960 millas de radio, calcular el área de Colorado.

Empleando la ecuación 29 para el área de un elemento de superficie de una esfera, tenemos que

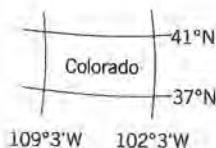


Figura 18.5.10

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} R^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= R^2(\theta_2 - \theta_1)(\cos \phi_1 - \cos \phi_2). \end{aligned} \quad (30)$$

De acuerdo con los datos,  $\theta_2 - \theta_1 = 7^\circ \cong 0.12217305$  radianes. El ángulo  $\phi$  es el complemento de la latitud, de modo que  $\phi_1 = 49^\circ \cong 0.85521133$  radianes, y  $\phi_2 = 53^\circ \cong 0.92502450$  radianes, respectivamente. Así, evaluando la ecuación 30, obtenemos que

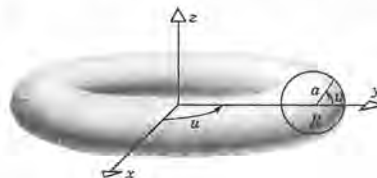
$$A(S) \cong 0.0066271555 R^2 \cong 103,924 \text{ millas cuadradas.}$$

El área oficial del estado de Colorado es de 104,247 millas cuadradas. ■

### EJEMPLO 5

La superficie que se forma al girar el círculo que se ve en la figura 18.5.11 en torno al eje  $z$  se llama **toro**; tiene el aspecto de una dona. Viendo esta figura podemos formular la siguiente representación paramétrica de la superficie toroidal:

$$\mathbf{r} = (R + a \cos v) \cos u \mathbf{i} + (R + a \cos v) \sin u \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}. \quad (31)$$



**Figura 18.5.11** Un toro, formado al girar un círculo alrededor del eje  $z$ .

El parámetro  $u$  es el familiar ángulo polar del plano  $xy$  (que con frecuencia se le representa mediante  $\theta$ ),  $a$  es el radio del círculo que se hace girar, y  $R$  es la distancia del eje de revolución al centro de este círculo. La cantidad  $R + a \cos v$  es el radio del círculo que un punto genérico describe al girar alrededor del eje  $z$ . Para cubrir a todo el toro necesitamos dejar que  $u$  y  $v$  varíen en intervalos de longitud  $2\pi$ , como por ejemplo  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq 2\pi$ . Calcular el área de la superficie del toro.

Derivando la ecuación 31, obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -(R + a \cos v) \sin u \mathbf{i} + (R + a \cos v) \cos u \mathbf{j},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -a \sin v \cos u \mathbf{i} - a \sin v \sin u \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}.$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a(R + a \cos v)(\cos u \cos v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}),$$

y

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a(R + a \cos v). \quad (32)$$

Por tanto, el área de la superficie del toro es

$$\begin{aligned} A &= a \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + a \cos v) \, du \, dv \\ &= 2\pi a \int_0^{2\pi} (R + a \cos v) \, dv \\ &= 2\pi a(Rv + a \sin v) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi^2 aR. \end{aligned} \quad (33)$$

Obsérvese que el resultado es el producto  $(2\pi a)(2\pi R)$  de las circunferencias de dos círculos:  $2\pi a$  es la circunferencia del círculo original y  $2\pi R$  es la circunferencia del círculo descrito por el centro del círculo original al girar en torno al eje  $z$ . ■



## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6 deducir una ecuación cartesiana para la superficie dada. Dar nombre y describir a la superficie, observando en particular si la representación paramétrica dada describe toda la superficie definida por la ecuación cartesiana.

1.  $x = 2u - v$ ,  $y = u + 2v$ ,  $z = u - v$ ;  
 $-\infty < u < \infty$ ,  $-\infty < v < \infty$
2.  $x = 2 \operatorname{sen} u \cos v$ ,  $y = 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ ,  
 $z = 4 \cos u$ ;  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$
3.  $x = v\sqrt{1-u^2}$ ,  $y = \sqrt{u^2+v^2}$ ,  
 $z = u\sqrt{1+v^2}$ ;  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v \geq 0$
4.  $x = 2 \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$ ,  $y = 2 \operatorname{senh} u \cos v$ ,  
 $z = 5 \cosh u$ ;  $0 \leq u < \infty$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$
5.  $x = \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v$ ,  $y = 2 \cos u \operatorname{senh} v$ ,  
 $z = \operatorname{senh}^2 v$ ;  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $v \geq 0$
6.  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ ,  $z = uv$ ;  
 $-\infty < u < \infty$ ,  $-\infty < v < \infty$

En los problemas 7 a 12 determinar la recta normal y el plano tangente a la superficie dada en el punto dado. Las superficies son las mismas que las de los problemas 1 a 6, respectivamente.

7.  $x = 2u - v$ ,  $y = u + 2v$ ,  $z = u - v$ ;  
(1, 8, -1)
8.  $x = 2 \operatorname{sen} u \cos v$ ,  $y = 3 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ ,  
 $z = 4 \cos u$ ;  $(1, \frac{3}{2}, 2\sqrt{2})$
9.  $x = v\sqrt{1-u^2}$ ,  $y = \sqrt{u^2+v^2}$ ,  
 $z = u\sqrt{1+v^2}$ ;  $(1, 1, 0)$
10.  $x = 2 \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v$ ,  $y = 2 \operatorname{senh} u \cos v$ ,  
 $z = 5 \cosh u$ ;  $(-\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{25}{3})$
11.  $x = \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v$ ,  $y = 2 \cos u \operatorname{senh} v$ ,  
 $z = \operatorname{senh}^2 v$ ;  $(\frac{3}{4}, 0, \frac{9}{16})$
12.  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ ,  $z = uv$ ; (1, 3, -2)
13. Calcular el área de los estados de la Unión Americana  
(a) Wyoming (véase figura 18.5.12); y (b) Utah (véase figura 18.5.13).
14. En la superficie de la Tierra, los trópicos abarcan

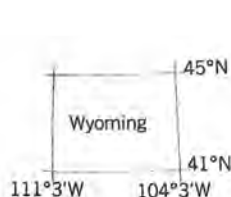


Figura 18.5.12



Figura 18.5.13

desde el ecuador hasta las latitudes  $23.5^\circ$  norte y sur, las zonas templadas de las latitudes  $23.5^\circ$  a las latitudes  $66.5^\circ$  y las zonas polares de las latitudes  $66.5^\circ$  hasta los polos. Calcular el porcentaje de la superficie terrestre que queda en los trópicos, en las zonas templadas y en las zonas polares, respectivamente.

15. (a) Demostrar que

$$\mathbf{r} = \rho \operatorname{sen} \phi_0 \cos \theta \mathbf{i} + \rho \operatorname{sen} \phi_0 \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + \rho \cos \phi_0 \mathbf{k},$$

para  $\phi_0$  fijo, es una representación paramétrica de un cono circular recto.

- (b) Determinar el área de la superficie del elemento  $d\sigma$  en términos de  $d\rho$  y  $d\theta$ .

- (c) Determinar el área de la superficie lateral de un cono cuyo radio de la base es  $r$  y su altura es  $h$ .

16. Considerar el toro que se describió en el ejemplo 5 y también un cilindro circular recto de radio  $R$  cuyo eje es el eje  $z$ .

- (a) Determinar el área de la superficie  $S_1$  de la parte del toro que queda fuera del cilindro.

- (b) Determinar el área de la superficie  $S_2$  de la parte del toro que queda dentro del cilindro.

- (c) Determinar la razón  $a/R$  para la cual  $S_1/S_2 = 2$ .

17. Una rampa en espiral está determinada mediante la ecuación

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + cv \mathbf{k},$$

$$a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

en la cual  $c$  es un parámetro que determina la pendiente de la rampa. Determinar el área de la superficie de esta rampa.

18. Formular una integral que represente el área de la superficie de la parte de la hiperboloide

$$\mathbf{r} = 2 \cosh u \cos v \mathbf{i} + 3 \cosh u \sin v \mathbf{j} + \sinh u \mathbf{k}$$

que está en el primer octante entre los planos  $z = 0$  y  $z = \frac{15}{8}$ .

19. Formular una integral que represente el área de la superficie de la elipsoide

$$\mathbf{r} = a \sin u \cos v \mathbf{i} + b \sin u \sin v \mathbf{j} + c \cos u \mathbf{k}.$$

20. Demostrar que

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = EG - F^2,$$

en la cual

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2.$$

## 18.6 LA DIVERGENCIA Y EL ROTACIONAL

El operador gradiente se define como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

y se introdujo en la sección 16.4. Aplicando  $\nabla$  a una función escalar  $f$  se produjo el vector gradiente  $\nabla f$ , cuyas componentes son  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$  y  $\partial f/\partial z$ , respectivamente. En esta sección estudiaremos cómo se puede emplear  $\nabla$  también como un operador sobre vectores. Si tratamos formalmente a  $\nabla$  como un vector, entonces podemos aplicarlo a un campo vectorial  $\mathbf{v}(x, y, z)$  al menos de dos formas.

El primer modo consiste en formar el “producto escalar” de  $\nabla$  con  $\mathbf{v}$  como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

A la cantidad  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  se le llama la **divergencia** de  $\mathbf{v}$  y a veces se le representa con  $\text{div } \mathbf{v}$ . Para un vector en dos dimensiones,

$$\mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y) \mathbf{i} + v_2(x, y) \mathbf{j}$$

tenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}. \quad (2)$$

Obsérvese que  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  es una cantidad escalar y no un vector.

**EJEMPLO 1**

Determinar la divergencia de

$$\mathbf{v}(x, y, z) = 4x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} - 3xyz\mathbf{k}.$$

De acuerdo con la ecuación 1 obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-3xyz) \\ &= 8xy + 2yz - 3xy = 5xy + 2yz. \blacksquare\end{aligned}$$

**EJEMPLO 2**

Según la ley del inverso de los cuadrados (ejemplo 1 de la sección 18.2), la fuerza de atracción que ejerce una masa  $M$  en el origen sobre una masa  $m$  en  $(x, y, z)$  es

$$\mathbf{f}(x, y, z) = -GMm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Calcular la divergencia de  $\mathbf{f}$ .

Excepto por la constante de multiplicación  $-GMm$ , el primer término de  $\nabla \cdot \mathbf{f}$  es

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} [x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + x \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(2x) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2) \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (-2x^2 + y^2 + z^2)\end{aligned}$$

para  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ . De igual manera obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} [y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (x^2 - 2y^2 + z^2), \\ (x, y, z) &\neq (0, 0, 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} [z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (x^2 + y^2 - 2z^2), \\ (x, y, z) &\neq (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Sumando estos resultados encontramos que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{f} &= -GMm(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\ &\quad \times (-2x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - 2z^2) \\ &= 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).\end{aligned}$$



En otras palabras, la divergencia de  $\mathbf{f}$  es cero en todos los puntos, excepto en el origen, en el cual no está definida porque no existen las derivadas parciales necesarias. ■

Un segundo modo de aplicar  $\nabla$  a un campo vectorial  $\mathbf{v}(x, y, z)$  consiste en formar el “producto vectorial” de  $\nabla$  con  $\mathbf{v}$ . Así,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) \\ &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (4)\end{aligned}$$

El vector  $\nabla \times \mathbf{v}$ , definido arriba, se conoce como el **rotacional** de  $\mathbf{v}$ , y también se le representa mediante  $\text{rot } \mathbf{v}$ . Para evitar confundir el orden de los signos de los términos en la ecuación 4 podemos expresar a  $\nabla \times \mathbf{v}$  en notación de determinantes como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

El lector debe comprobar que se obtiene la ecuación 4 si el determinante 5 se desarrolla formalmente a partir de los elementos del primer renglón de acuerdo con las reglas usuales para los determinantes.

### EJEMPLO 3

Determinar el rotacional de

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x^2 y \mathbf{i} - 2xyz \mathbf{j} + 2yz^2 \mathbf{k}.$$

De acuerdo con las ecuaciones 4 ó 5, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -2xyz & 2yz^2 \end{vmatrix} \\ &= (2z^2 + 2xy) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + (-2yz - x^2) \mathbf{k} \\ &= 2(z^2 + xy) \mathbf{i} - (2yz + x^2) \mathbf{k}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

### EJEMPLO 4

Determinar el rotacional del campo de fuerzas

$$\mathbf{f}(x, y, z) = -GMm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

que se presentó en el ejemplo 2.

La primera componente de  $\nabla \times \mathbf{f}$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} &= -GMm \left( \frac{\partial}{\partial y} [z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} [y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] \right) \\ &= -GMm \left[ z \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2y) \right. \\ &\quad \left. - y \left( -\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} (2z) \right] \\ &= 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Se pueden calcular igualmente las otras dos componentes de  $\nabla \times \mathbf{f}$ . Así,  $\nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$  en todos los puntos, excepto en el origen, en el cual no está definido. ■

La divergencia y el rotacional tiene interpretaciones importantes en la física, que exploraremos después con cierto detalle. Sin embargo, por el momento los consideraremos simplemente como variaciones del tema de derivación. Así, se debería esperar que compartan ciertas propiedades con otros operadores de derivación, lo cual es realmente el caso. Por ejemplo, si  $\mathbf{u}(x, y, z)$  y  $\mathbf{v}(x, y, z)$  son campos vectoriales cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas, entonces

$$\nabla \cdot (c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}) = c_1 \nabla \cdot \mathbf{u} + c_2 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (6)$$

y

$$\nabla \times (c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}) = c_1 \nabla \times \mathbf{u} + c_2 \nabla \times \mathbf{v}. \quad (7)$$

Se dejan al lector las demostraciones de estas fórmulas; en la demostración no se hace más que escribir el lado izquierdo de cada ecuación y agrupar los términos para formar la expresión del lado derecho.

Si el campo vectorial  $\mathbf{u}(x, y, z)$  y la función escalar  $\phi(x, y, z)$  tienen derivadas continuas hasta de orden dos, entonces son válidas las tres ecuaciones siguientes:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \text{rot}(\text{grad } \phi) = \mathbf{0}; \quad (8)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \phi) &= \text{div}(\text{grad } \phi) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi. \end{aligned} \quad (10)$$

Es directa la demostración de cada uno de estos resultados. Por ejemplo, para demostrar la ecuación 8, podemos sustituir a  $\mathbf{v}$  por  $\nabla\phi$  en la ecuación 4. Con ello obtenemos

$$\nabla \times (\nabla\phi) = (\phi_{yz} - \phi_{zy})\mathbf{i} + (\phi_{zx} - \phi_{xz})\mathbf{j} + (\phi_{xy} - \phi_{yx})\mathbf{k}. \quad (11)$$

Si  $\phi$  tiene derivadas parciales continuas al menos de orden dos, entonces cada componente del lado derecho de la ecuación 11 es cero, lo cual demuestra la ecuación 8.

De igual manera, podemos tomar la divergencia de  $\nabla \times \mathbf{v}$  que aparece en la ecuación 4; así,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

de nuevo siempre que se pueda invertir el orden de la derivación. Con esto se demuestra la ecuación 9.

La ecuación 10 es consecuencia inmediata de evaluar  $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ . En los problemas 12, y del 14 al 18, se pueden encontrar algunos ejemplos más en los cuales intervienen la divergencia y el rotacional.

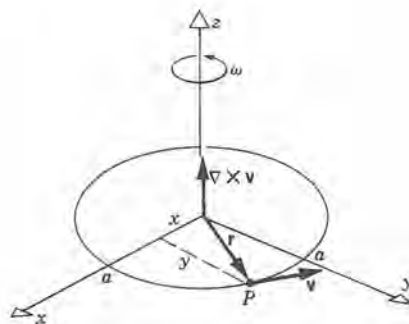
## Campos irrotacionales

Se puede describir la posición de una partícula  $P$  que se mueve en una órbita circular de radio  $a$  con una velocidad angular  $\omega$  en radianes/segundo como se ve en la figura 18.6.1, mediante la ecuación

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (12)$$

El vector de velocidad correspondiente,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega a \sin \omega t \mathbf{i} + \omega a \cos \omega t \mathbf{j}$$



**Figura 18.6.1** Una partícula  $P$  que se mueve en una órbita circular.



$$= -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}, \quad (13)$$

es tangente a la trayectoria circular que sigue la partícula, y tiene como magnitud  $\|\mathbf{v}\| = a\omega$ . El rotacional de  $\mathbf{v}$  es

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k}. \quad (14)$$

Así, la magnitud de  $\nabla \times \mathbf{v}$  es el doble de la velocidad angular, y su dirección es perpendicular al plano de rotación. En un movimiento más general, el rotacional del vector de velocidad es una medida de la componente de la rotación.

En mecánica de fluidos se acostumbra llamar a

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (15)$$

el vector de **vorticidad**. Si  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ , entonces el movimiento del fluido no tiene componente rotacional, y se dice que el flujo es **irrotacional**. Este término también se usa comúnmente para describir a cualquier vector cuyo rotacional es cero, aun si el campo vectorial no tiene nada que ver con la mecánica de fluidos.

Por último, recordemos que el teorema 18.2.4 afirma, en parte, que si

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (16)$$

en una región  $D$  simplemente conexa, entonces el vector

$$\mathbf{v} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

es el gradiente de alguna función potencial escalar  $\phi$ . En notación vectorial, las ecuaciones 16 se transforman en

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

de modo que, de acuerdo con el teorema 18.2.4, si  $\mathbf{v}$  es irrotacional en una región simplemente conexa, entonces  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  en ella. Esto es en esencia la inversa de la ecuación 8, que afirma que un vector gradiente es irrotacional (en cualquier región). En otras palabras, en una región simplemente conexa, un campo vectorial es irrotacional si y sólo si es conservativo, esto es, si y sólo si es el gradiente de una función potencial escalar.

Existe un resultado algo semejante en el que intervienen la divergencia y el rotacional. Si  $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{v}$ , entonces la ecuación 9 afirma que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ . Bajo ciertas restricciones moderadas, también es cierto lo inverso, esto es, si  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ , entonces hay un vector  $\mathbf{v}$  cuyo rotacional es  $\mathbf{u}$ . En este caso a  $\mathbf{v}$  se le llama el potencial vectorial de  $\mathbf{u}$ . En el problema 19 se describe una manera de construir a  $\mathbf{v}$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10, determinar la divergencia y el rotacional del campo vectorial dado.

1.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xy \sin z \mathbf{i} + x^2 z \mathbf{j} - y \cos z \mathbf{k}$

2.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2x^2 y \mathbf{i} + 4y^2 z \mathbf{j} + 3z^2 x \mathbf{k}$

3.  $\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r},$   
 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

4.  $\mathbf{v}(x, y, z) = r\mathbf{r} = r(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$   
 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

5.  $\mathbf{v}(x, y) = -ry\mathbf{i} + rx\mathbf{j}, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

6.  $\mathbf{v}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j}$

7.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2xyz\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$

8.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xye^z\mathbf{i} + yze^{-x}\mathbf{k}$

9.  $\mathbf{v}(x, y, z) = \sin x \sin y \mathbf{i} + \cos y \sin z \mathbf{j}$   
 $+ \cos z \cos x \mathbf{k}$

10.  $\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2}$

11. Si  $\mathbf{u}(x, y, z)$  y  $\mathbf{v}(x, y, z)$  son campos vectoriales diferenciables, y si  $c_1$  y  $c_2$  son constantes cualesquiera, demostrar que

(a)  $\nabla \cdot (c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}) = c_1 \nabla \cdot \mathbf{u} + c_2 \nabla \cdot \mathbf{v}.$

(b)  $\nabla \times (c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}) = c_1 \nabla \times \mathbf{u} + c_2 \nabla \times \mathbf{v}.$

12. Si  $\mathbf{u}(x, y, z)$  tiene derivadas continuas hasta de orden dos, demostrar que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u},$$

en donde

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 u_1 \mathbf{i} + \nabla^2 u_2 \mathbf{j} + \nabla^2 u_3 \mathbf{k}.$$

13. Si  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , y si  $\mathbf{A}$  es un vector constante, demostrar que

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{A},$$

y que

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = 0.$$

En los problemas 14 a 18, suponer que los campos vectoriales  $\mathbf{u}(x, y, z)$ , y  $\mathbf{v}(x, y, z)$ , y las funciones escalares  $\phi(x, y, z)$  y  $\psi(x, y, z)$  tienen tantas derivadas continuas como sea necesario. Bajo esta base, deducir cada una de las relaciones siguientes:

14.  $\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{u} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{u})$

15.  $\nabla \times (\phi \mathbf{u}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{u} + \phi(\nabla \times \mathbf{u})$

16.  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$

17.  $\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi$

18.  $\nabla \times (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \times \nabla \psi$

19. En el texto hemos hecho notar que si  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{v}$ , entonces  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . En esta ocasión discutiremos el inverso: si  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (en una región de tipo algo restringida), entonces existe un vector  $\mathbf{v}$  tal que  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{v}$ . Supongamos que  $D$  es una caja rectangular abierta en el espacio  $xyz$ , y que

$$\mathbf{u}(x, y, z) = L(x, y, z)\mathbf{i} + M(x, y, z)\mathbf{j} + N(x, y, z)\mathbf{k}$$

está definida en  $D$ , y que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0. \quad (i)$$

Deseamos formar un vector

$$\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

tal que  $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{v}$ . En otras palabras, deseamos seleccionar a  $P$ ,  $Q$  y  $R$  de tal forma que

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = L, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = N. \quad (ii)$$

A continuación se describe una manera de formar a  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . La deducción emplea el hecho de que si  $f$  y  $\partial f / \partial x$  son continuas, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_c^d f(x, y, z) dz = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dz.$$

- (a) Sean  $(x_0, y_0, z_0)$  y  $(x, y, z)$  puntos en  $D$ . Seleccionamos a  $R(x, y, z) = 0$ . Demostrar entonces que las primeras dos de las ecuaciones (ii) se satisfacen en caso de que

$$Q(x, y, z) = - \int_{z_0}^z L(x, y, \zeta) d\zeta,$$

$$P(x, y, z) = \int_{z_0}^z M(x, y, \zeta) d\zeta + g(x, y),$$

en las que  $g$  es una función arbitraria de  $x$  y  $y$ .

- (b) Emplear la ecuación (i) para demostrar que la tercera de las ecuaciones (ii) se satisface siempre que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -N(x, y, z_0),$$

o bien

$$g(x, y) = - \int_{y_0}^y N(x, \eta, z_0) d\eta.$$

Obsérvese que  $\mathbf{v}$  está determinado sólo hasta un vector irrotacional aditivo. También, nótese que se puede partir escogiendo ya sea a  $P$  ó a  $Q$  como igual a cero, en lugar de  $R$ .

En los problemas 20 a 25, emplear el método del problema 19 para determinar un vector  $\mathbf{v}$  tal que  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{u}$ , o en caso contrario demostrar que no existe ese vector. Suponer que  $D$  es la totalidad del espacio  $xyz$ .

20.  $\mathbf{u}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

21.  $\mathbf{u}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$

22.  $\mathbf{u}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

23.  $\mathbf{u}(x, y, z) = xysen z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} - y\cos z\mathbf{k}$

24.  $\mathbf{u}(x, y, z) = ye^x\mathbf{i} + \left(yz^2 - \frac{y^2e^x}{2}\right)\mathbf{j} - \frac{z^3}{3}\mathbf{k}$

25.  $\mathbf{u}(x, y, z) = xy\sen z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + y\cos z\mathbf{k}$

## 18.7 EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

Hay muchas aplicaciones importantes de las integrales de superficie en las que intervienen campos vectoriales que dependen de variables en el espacio, y posiblemente en el tiempo. Por ejemplo, la fuerza resultante que se ejerce a través de una superficie, o bien la rapidez del flujo (masa por unidad de tiempo) de un fluido a través de una superficie, están determinadas por integrales de este tipo.

Supongamos que la superficie  $S$  está descrita por

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}. \quad (1)$$

Entonces, como se indica en la figura 18.7.1, en cada punto de la superficie hay dos vectores normales unitarios posibles, que son

$$\mathbf{N} = \pm \frac{-f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{[f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1]^{1/2}}. \quad (2)$$

Análogamente, si la superficie está determinada por

$$F(x, y, z) = 0, \quad (3)$$



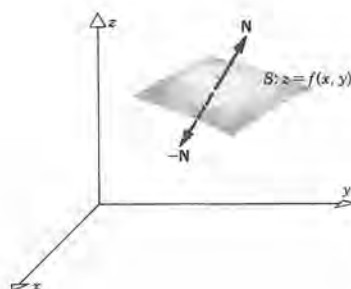


Figura 18.7.1

entonces

$$\mathbf{N} = \pm \frac{F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k}}{[F_x^2(x, y, z) + F_y^2(x, y, z) + F_z^2(x, y, z)]^{1/2}}. \quad (4)$$

Para evitar ambigüedades, debemos seleccionar a una de esas normales para identificar la dirección normal positiva en cada punto. Por ejemplo, podríamos escoger al vector que corresponde al signo más en la ecuación 2 o en la ecuación 4, como vector normal unitario positivo  $\mathbf{N}$ . Si  $S$  es una superficie cerrada, como por ejemplo una esfera, siempre escogeremos el vector normal que apunta hacia afuera como positivo; en cualquier otro caso, la selección será arbitraria. Sin embargo, una vez hecha la selección de  $\mathbf{N}$ , entonces el lado de la superficie  $S$  sobre la que queda  $\mathbf{N}$  se llama lado positivo, y al otro lado se le llama lado negativo.

En esta discusión suponemos que  $S$  tiene en realidad dos lados; a estas superficies se les llama **orientables**. No es ésta una trivialidad, ya que hay superficies que no tienen esa propiedad. El ejemplo más común de una superficie de un lado, o no orientable, es la banda de Möbius, que se puede formar con una banda rectangular larga de papel, torciéndola una vez y pegando los extremos.

Supongamos ahora que se define un campo vectorial  $\mathbf{v}(x, y, z)$  en una región  $xyz$  del espacio que contiene a  $S$ . Entonces  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(x, y, z)$  es la componente de  $\mathbf{v}$  en la dirección del vector normal positivo y

$$\iint_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(x, y, z) \, d\sigma \quad (5)$$

es el **flujo** total de  $\mathbf{v}$  a través de  $S$  desde el lado negativo al positivo. Por ejemplo, si  $\mathbf{v}(x, y, z)$  es la velocidad en el punto  $(x, y, z)$  de un fluido, entonces la integral (5) es la rapidez (volumen por unidad de tiempo) a la cual fluye el fluido a través de la superficie  $S$  del lado negativo al lado positivo. Si  $\rho(x, y, z)$  es la densidad del fluido, entonces

$$\iint_S \rho(x, y, z)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(x, y, z) \, d\sigma \quad (6)$$

es la rapidez del flujo de la masa del fluido a través de  $S$ . Análogamente, si  $\tau(x, y, z)$

representa la fuerza por unidad de área, o **esfuerzo**, entonces  $(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N})(x, y, z) d\sigma$  es la fuerza que se ejerce a través del elemento de área  $d\sigma$  en la dirección de la normal positiva, y

$$F_n = \iint_S (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{N})(x, y, z) d\sigma \quad (7)$$

es la fuerza normal que ejerce el material a través de  $S$  sobre el lado positivo, sobre el material que está en el lado negativo. De igual manera,

$$\mathbf{F} = \iint_S \boldsymbol{\tau}(x, y, z) d\sigma \quad (8)$$

es la fuerza resultante, o total, que se ejerce a través de  $S$ .

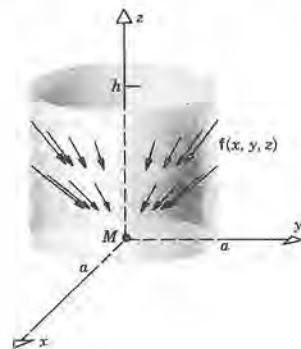
### EJEMPLO 1

Como en el ejemplo 2 de la sección 18.6, la fuerza de atracción que ejerce una masa  $M$  en el origen sobre una masa  $m$  en  $(x, y, z)$  es

$$\mathbf{f}(x, y, z) = -GMm \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (9)$$

Si la superficie cilíndrica  $x^2 + y^2 = a^2$  tiene una densidad constante (masa por unidad de área)  $\rho$ , calcular la fuerza  $\mathbf{F}$  resultante que ejerce la masa  $M$  sobre la parte del cilindro para la cual  $0 \leq z \leq h$ .

La figura 18.7.2 indica la distribución de fuerzas en el cilindro. Debido a la simetría de las fuerzas con respecto al eje  $z$ , las componentes netas  $F_1$  y  $F_2$  en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente, son cero. Por tanto, sólo necesitaremos calcular la componente  $z$ ,  $F_3$ , de la fuerza resultante sobre el cilindro. La masa de un elemento  $d\sigma$  del cilindro



**Figura 18.7.2** Atracción gravitatoria en un cilindro.

es  $\rho d\sigma$ . Por tanto, empleando la ecuación 9 en la que  $m$  se reemplaza por  $\rho d\sigma$ , e integrando después en el cilindro, obtenemos

$$F_3 = -GM\rho \int \int_S \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} d\sigma, \quad (10)$$

en donde  $S$  es la superficie del cilindro. Aprovechando de nuevo la ventaja de la simetría de este caso, podemos calcular  $F_3$  si integramos sobre la parte de  $S$  del primer octante, para después multiplicar por cuatro. Para evaluar la integral podemos proyectar ya sea sobre el plano  $xz$  o el plano  $yz$ . Escogemos este último y tenemos que

$$\begin{aligned} F_3 &= -4GM\rho \int \int_{\Omega_{yz}} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \frac{dA_{yz}}{x/a} \\ &= -4GM\rho \int_0^h \int_0^a \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \frac{a}{(a^2 - y^2)^{1/2}} dy dz \\ &= -4GM\rho a \left[ -(a^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^h \left[ \arcsen \frac{y}{a} \right]_0^a \\ &= -4GM\rho a \frac{\pi}{2} \left[ -(a^2 + h^2)^{-1/2} + a^{-1} \right] \\ &= -2\pi GM\rho [1 - a(a^2 + h^2)^{-1/2}]. \end{aligned} \quad (11)$$

El resultado es negativo debido a que la fuerza se dirige hacia abajo (en dirección de  $z$  negativo). Obsérvese que la cantidad entre paréntesis tiende a 1 cuando  $h \rightarrow \infty$ . Así,

$$\mathbf{F} = -2GM\rho \mathbf{k}$$

es la fuerza resultante en un cilindro semiinfinito. ■

## EJEMPLO 2

Suponer que pasa un fluido de densidad constante  $\rho$  por un tubo circular de radio interior  $a$ . Sea  $y$  el eje del tubo, como se ve en la figura 18.7.3. Si la velocidad del fluido es

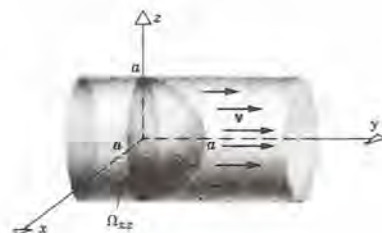
$$\mathbf{v} = (a^2 - x^2 - z^2)^{1/2} \mathbf{j}, \quad (12)$$

donde  $x^2 + y^2 \leq a^2$ , determinar la rapidez con que pasa el fluido a través de la superficie hemisférica  $S$ ,

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y \geq 0.$$

El flujo del fluido a través de  $S$  es





**Figura 18.7.3** Flujo a través de una superficie hemisférica en un tubo.

$$\rho \int \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(x, y, z) d\sigma.$$

El vector normal unitario  $\mathbf{N}$  que apunta alejándose del origen es

$$\mathbf{N} = \frac{x}{a} \mathbf{i} + \frac{y}{a} \mathbf{j} + \frac{z}{a} \mathbf{k}.$$

Es conveniente integrar sobre el plano  $xz$ , así que

$$d\sigma = \frac{dA_{xz}}{|\mathbf{N} \cdot \mathbf{j}|} = \frac{dA_{xz}}{y/a}$$

y la región de integración  $\Omega_{xz}$  es el disco  $x^2 + z^2 \leq a^2$ . Con ello, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho \int \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(x, y, z) d\sigma &= \rho \int \int_{\Omega_{xz}} \frac{(a^2 - x^2 - z^2)^{1/2} (y/a)}{y/a} dA_{xz} \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2)^{1/2} r dr d\theta \\ &= 2\pi\rho \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^a \\ &= \frac{2\pi\rho a^3}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

### Otra vez el teorema de Green

Como mencionábamos al principio de la sección 18.4, deseamos ampliar la relación que expresa el teorema de Green (teorema 18.3.1) de dos a tres dimensiones. Para lograrlo será adecuado escribir el teorema de Green en notación vectorial, la cual es esencialmente independiente de las dimensiones. Resulta que hay dos modos de hacerlo, que conducen a resultados importantes, y ambos se pueden considerar como

versiones tridimensionales del teorema de Green. Veremos ahora el primero, mientras que el segundo aparecerá en la sección siguiente.

Sea  $C$  una curva suave por pedazos, simple y cerrada en el plano  $xy$ , descrita en forma paramétrica mediante

$$x = f(s), \quad y = g(s),$$

donde  $s$  es la longitud del arco medida en sentido levógiro a partir de un punto fijo en la curva (véase figura 18.7.4). El vector tangente  $\mathbf{T}$  unitario en un punto  $P$  está definido por

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}$$

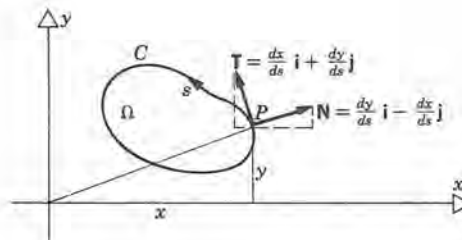


Figura 18.7.4

y el vector normal unitario  $\mathbf{N}$  en dirección hacia afuera es

$$\mathbf{N} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}.$$

Si escribimos  $\mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y)\mathbf{i} + v_2(x, y)\mathbf{j}$ , y a continuación identificamos a  $v_1(x, y)$  con  $Q(x, y)$  y a  $v_2(x, y)$  con  $-P(x, y)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{N}(x, y) \, ds &= \oint_C v_1(x, y) \, dy - v_2(x, y) \, dx \\ &= \oint_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy. \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $\Omega$  es la región delimitada por  $C$ , entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dA. \end{aligned}$$

Con ello se puede escribir la conclusión del teorema de Green en la forma vectorial

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, ds = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dA. \quad (13)$$

El lado izquierdo de la ecuación 13 es el flujo neto hacia afuera de  $\mathbf{v}$  a través de  $C$ . El teorema de Green dice que esta cantidad está compensada por la integral de la divergencia de  $\mathbf{v}$  en todo el interior de  $C$ .

### El teorema de la divergencia

Para extender a tres dimensiones el resultado expresado por la ecuación 13, parece natural tomar en cuenta, en lugar de  $C$  y  $\Omega$ , a una superficie cerrada  $S$  que contenga a la región  $D$ . Al mismo tiempo, podemos considerar que  $\mathbf{v}$  es un campo vectorial en tres dimensiones. Con ello llegamos a un resultado importante que se enuncia en el siguiente teorema\*.

#### Teorema 18.7.1

##### (Teorema de la divergencia)

Sea  $S$  una superficie suave por pedazos, cerrada y orientable, con un vector normal unitario  $\mathbf{N}$ , y sea  $D$  la región acotada por  $S$ . Si  $\mathbf{v}(x, y, z)$  es un campo vectorial con derivadas parciales continuas en  $D$ , entonces

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV. \quad (14)$$

*Demostración parcial.* Obsérvese primero que

$$\mathbf{N} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k},$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  los ángulos entre  $\mathbf{N}$  y los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  positivos, respectivamente. Entonces

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iint_S v_1 \cos \alpha \, d\sigma + \iint_S v_2 \cos \beta \, d\sigma + \iint_S v_3 \cos \gamma \, d\sigma. \quad (15)$$

También,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \iiint_D \frac{\partial v_1}{\partial x} \, dV + \iiint_D \frac{\partial v_2}{\partial y} \, dV + \iiint_D \frac{\partial v_3}{\partial z} \, dV. \quad (16)$$

\* Es algo incierto el origen del teorema de la divergencia. Como hemos visto, equivale esencialmente al teorema enunciado por Green en 1928, pero el apellido Green se reserva en general a la versión del teorema en dos dimensiones. El matemático ruso Mijail Ostrogradsky (1801-1862) también empleó el resultado en un trabajo presentado en 1828, y resultados semejantes aparecen en un trabajo inicial de Gauss y de Lagrange. A veces el teorema se asocia con los nombres de Gauss y de Ostrogradsky, pero en general se le llama simplemente teorema de la divergencia.



Se demostrará ahora el teorema de la divergencia, siempre que podamos demostrar que los términos correspondientes de los lados derechos de las ecuaciones 15 y 16 son iguales, esto es, que

$$\iint_S v_3 \cos \gamma \, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial v_3}{\partial z} \, dV, \quad (17)$$

y análogamente para los términos en los que aparecen  $v_1$  y  $v_2$ . Para demostrar la ecuación 17 supondremos que se puede describir a  $D$  mediante las desigualdades

$$D : f(x, y) \leq z \leq g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy},$$

Se dice que esa región  $D$  es proyectable en el plano  $xy$ . Como se indica en la figura 18.7.5, la frontera  $S$  de  $D$  consta de al menos una parte inferior  $S_1$ , dada por  $z = f(x, y)$ ,

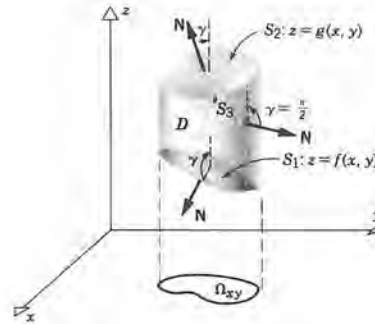


Figura 18.7.5

y una parte superior  $S_2$  representada por  $z = g(x, y)$ . Puede también haber una parte lateral  $S_3$ , que es una parte del cilindro con sección transversal  $\Omega_{xy}$  y generatrices paralelas al eje  $z$ . Entonces, partiendo del lado derecho de la ecuación 17 e integrando con respecto a  $z$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) \, dV &= \iint_{\Omega_{xy}} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \, dA_{xy} \\ &= \iint_{\Omega_{xy}} v_3[x, y, g(x, y)] \, dA_{xy} - \iint_{\Omega_{xy}} v_3[x, y, f(x, y)] \, dA_{xy}. \end{aligned}$$

Pasando ahora al lado izquierdo de la ecuación 17, tenemos que

$$\iint_S v_3 \cos \gamma \, d\sigma = \left( \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} \right) v_3 \cos \gamma \, d\sigma.$$

La integral sobre  $S_3$  es cero, porque el vector normal en  $S_3$  es paralelo al plano  $xy$ ; por tanto  $\cos \gamma = 0$ . En  $S_2$ ,  $\cos \gamma \geq 0$  y, por consiguiente  $(\cos \gamma) d\sigma = dA_{xy}$ , y

$$\int \int_{S_2} v_3 \cos \gamma \, d\sigma = \int \int_{\Omega_{xy}} v_3[x, y, g(x, y)] \, dA_{xy}.$$

Por último, en  $S_1$ ,  $\cos \gamma \leq 0$ , y así  $(\cos \gamma) d\sigma = -dA_{xy}$ , y

$$\int \int_{S_1} v_3 \cos \gamma \, d\sigma = - \int \int_{\Omega_{xy}} v_3[x, y, f(x, y)] \, dA_{xy}.$$

En consecuencia,

$$\int \int_S v_3 \cos \gamma \, d\sigma = \int \int_{\Omega_{xy}} v_3[x, y, g(x, y)] \, dA_{xy} - \int \int_{\Omega_{xy}} v_3[x, y, f(x, y)] \, dA_{xy}.$$

Así, hemos demostrado la ecuación 17 para regiones que son proyectables en el plano  $xy$ . De modo semejante, si se puede describir a  $D$  mediante

$$D : h(y, z) \leq x \leq k(y, z), \quad (y, z) \in \Omega_{yz}$$

o mediante

$$D : l(x, z) \leq y \leq m(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_{xz},$$

esto es, si  $D$  es proyectable en los planos  $yz$  o  $xz$ , entonces se infiere que

$$\int \int_S v_1 \cos \alpha \, d\sigma = \int \int \int_D \frac{\partial v_1}{\partial x} \, dV, \quad (18)$$

o también

$$\int \int_S v_2 \cos \beta \, d\sigma = \int \int \int_D \frac{\partial v_2}{\partial y} \, dV, \quad (19)$$

respectivamente. Por último, si  $D$  es proyectable en los tres planos coordenados, entonces son válidas las ecuaciones 17, 18 y 19, y la ecuación 14 se sigue de inmediato.  $\square$

La demostración que hemos presentado del teorema de la divergencia se aplica a regiones que son proyectables en cada uno de los tres planos coordenados. Se puede ampliar el teorema para regiones que se componen de un número finito de subregiones de este tipo, mediante un argumento semejante al que usamos para el teorema de Green en la sección 18.3. También se puede extender el teorema de la divergencia a regiones cuya frontera conste de dos o más superficies separadas. Por ejemplo, en la figura

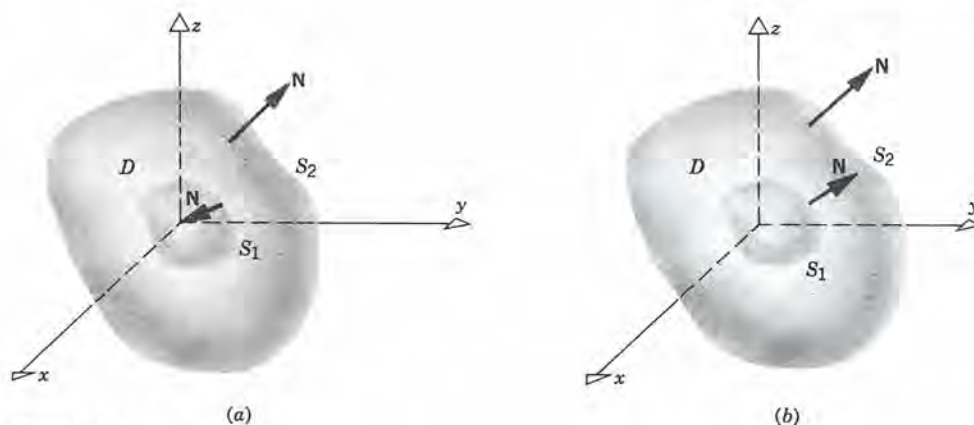


Figura 18.7.6

18.7.6a,  $D$  es la región entre las superficies  $S_1$  y  $S_2$ . Entonces

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma, \quad (20)$$

en donde en cada una de las integrales del lado derecho de la ecuación 20,  $\mathbf{N}$  se dirige hacia el origen en  $S_1$ , y se aleja del origen en  $S_2$ . También, podemos seleccionar en forma alternativa a  $\mathbf{N}$  como la normal que apunta alejándose del origen en ambos casos, como se ve en la figura 18.7.6b; entonces, ya que si se invierte la dirección de  $\mathbf{N}$  se cambia el signo de la integral sobre  $S_1$ ,

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = -\iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma. \quad (21)$$

En las figuras 18.7.6a y 18.7.6b se muestran ambas superficies en las que se encierra al origen, pero la ecuación 21 es válida sea éste el caso o no.

El teorema de la divergencia es útil en el estudio de la física y de las matemáticas aplicadas, para desarrollar las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos y de la teoría electromagnética, por ejemplo. También se usa en la evaluación de determinadas integrales, porque da una expresión diferente, pero equivalente, de ellas. Con más frecuencia, esto brinda un medio para evaluar una integral sobre una superficie cerrada cuando el campo vectorial tiene una divergencia sencilla.

### EJEMPLO 3

Determinar el valor de

$$\iint_S [(2x + yz)\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} - 3xy\mathbf{k}] \cdot \mathbf{N} \, d\sigma,$$



en la cual  $S$  es la frontera de la región cilíndrica

$$D : 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, \quad 0 \leq z \leq h.$$

Notemos que  $S$  comprende los extremos del cilindro en los planos  $z = 0$  y  $z = h$ , así como la superficie lateral. Si representamos al vector del integrando mediante  $\mathbf{v}$ , entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-3xy) = 2.$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema de la divergencia y observando que el volumen de  $R$  es  $\pi a^2 h$ ,

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = 2 \iiint_D dV = 2\pi a^2 h. \quad \blacksquare$$

### EJEMPLO 4

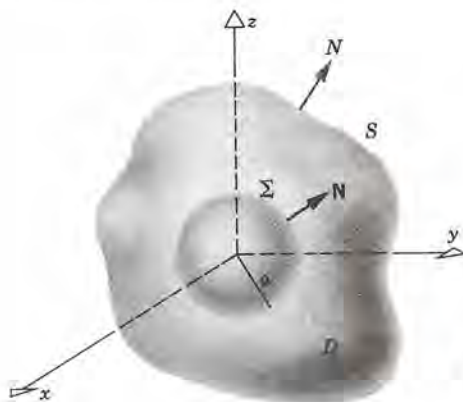
Consideremos de nuevo la fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, que representa la ecuación 9 del ejemplo 1,

$$\mathbf{f}(x, y, z) = -K \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (22)$$

donde  $K$  es una constante positiva. Determinar

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma, \quad (23)$$

en la que  $S$  es cualquier superficie suave por pedazos, cerrada, que contiene al origen (véase figura 18.7.7).



**Figura 18.7.7** La fuerza gravitacional normal en la superficie  $S$  es la misma que en la esfera  $\Sigma$ .

Parecerá improbable que se pueda evaluar la integral sin especificar a  $S$  con más precisión. Sin embargo, recuérdese que en el ejemplo 2 de la sección 18.6 demostramos que  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  para todos los puntos que no sean el origen. Para aprovechar la ventaja de este hecho, podemos introducir la esfera  $\Sigma$  cuyo centro está en el origen y cuyo radio es  $a$ , escogiéndolo a  $a$  lo suficientemente pequeño como para que  $\Sigma$  esté dentro de  $S$  (véase figura 18.7.7). Si  $D$  es la región comprendida entre  $\Sigma$  y  $S$ , entonces  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  en toda  $D$ . En consecuencia, aplicando a  $D$  el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int \int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma + \int \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \int \int \int_D \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = 0,$$

en donde  $\mathbf{N}$  es la normal unitaria dirigida hacia afuera de  $D$ , tanto en  $\Sigma$  como en  $S$ . Si invertimos la dirección del vector normal  $\mathbf{N}$  en  $\Sigma$ , tenemos que

$$\int \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \int \int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma, \quad (24)$$

en la cual ahora  $\mathbf{N}$  se dirige alejándose del origen tanto en  $\Sigma$  como en  $S$ . Sucede que la integral sobre  $\Sigma$  es fácil de evaluar; en realidad esto es por lo que hemos escogido a  $\Sigma$  como una esfera. En  $\Sigma$  tenemos que  $x^2 + y^2 = z^2$ , y

$$\mathbf{N} = \frac{x}{a} \mathbf{i} + \frac{y}{a} \mathbf{j} + \frac{z}{a} \mathbf{k}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \int_{\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= -K \int \int_{\Sigma} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, d\sigma \\ &= -\frac{K}{a^2} \int \int_{\Sigma} d\sigma \\ &= -\frac{K}{a^2} 4\pi a^2 = -4\pi K. \end{aligned}$$

De acuerdo con la ecuación 24 se tiene inmediatamente que

$$\int \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = -4\pi K$$

para una superficie  $S$  arbitraria que rodee el origen. Por tanto, la integral (23) es independiente de la superficie, de modo análogo a aquél en el que determinadas integrales de línea son independientes de la trayectoria. ■

Por último, podemos emplear el teorema de la divergencia para obtener una comprensión más clara del significado físico de la divergencia. Para hacer más específica nuestra discusión, sea  $\mathbf{v}$  la velocidad de un fluido que ocupa determinada región

del espacio, y sea  $S$  una esfera pequeña con centro en el punto  $P$ , sea  $D$  el interior de  $S$ . Entonces, empleamos el teorema de la divergencia y calculamos el valor de la integral sobre  $D$ . Para ello empleamos el valor de  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  en  $P$ , y obtenemos

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV \cong (\nabla \cdot \mathbf{v})(P) V(D),$$

en la cual  $V(D)$  es el volumen de  $D$ . Si  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  es continua, entonces la aproximación tiende a la igualdad cuando  $V(D) \rightarrow 0$ . En consecuencia, obtenemos

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(P) = \lim_{V(D) \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma}{V(D)}. \quad (25)$$

Así,  $(\nabla \cdot \mathbf{v})(P)$  es el flujo de salida por unidad de volumen a través de una esfera pequeña que rodea a  $P$ , o sea la densidad de flujo en  $P$ . Además, si el fluido no se crea ni se destruye en  $P$ , esto es, que no hay allí ni una fuente ni un sumidero, entonces el flujo neto es cero y por tanto la divergencia es cero. Si no es así, la divergencia de  $\mathbf{v}$  es una medida de la rapidez con la que se crea o se destruye el fluido en  $P$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 4 calcular el valor de la integral dada, (a) mediante el teorema de la divergencia, y (b) mediante una evaluación directa de la integral de superficie.

1.  $\iint_S (2xi - 3yj + 4zk) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $S$  es la superficie del cubo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
2.  $\iint_S (xi + 4yj - 3zk) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $S$  es la superficie del paralelepípedo rectangular  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
3.  $\iint_S (yzi + xzj + xyk) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $S$  es la superficie del cubo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .
4.  $\iint_S (x^2i + y^2j + z^2k) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $S$  es la superficie del paralelepípedo rectangular  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 3$ .

En los problemas 5 a 10 emplear el teorema de la divergencia para calcular el valor de  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $\mathbf{v}$  y  $S$  están dadas.

5.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2xi + yj + (1 - z)k$ ;  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

6.  $\mathbf{v}(x, y, z) = -xi + (3y + 1)j + (z - 2)k$ ;  $S$  consta del hemisferio  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  junto con el disco  $x^2 + y^2 \leq a^2$  en el plano  $z = 0$ .
7.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x^2i + y^2j$ ;  $S$  es la superficie del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 2$ , incluyendo la tapa y el fondo.
8.  $\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 + y^2)i + 2xyj$ ;  $S$  es la paraboloida  $z = 9 - x^2 - y^2$  para  $z \geq 0$  junto con el disco  $x^2 + y^2 \leq 9$  en el plano  $z = 0$ .
9.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x^2i + y^2j + z^2k$ ;  $S$  es la superficie del cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 3$ , incluyendo la tapa y el fondo.
10.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x^3i + y^3j + z^3k$ ;  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

En los problemas 11 a 16, calcular el valor de la integral dada.

11.  $\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $\mathbf{f}$  es la fuerza de atracción, que varía con el inverso del cuadrado de la distancia, de la ecuación 22 en el ejemplo 4,  $S$  es la superficie hemisférica  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  donde  $z \geq 0$  y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario superior.



12.  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $\mathbf{v}(x, y, z) = z(1 - z)\mathbf{i}$ ,  $S$  es la parte del plano  $y = 0$  para la cual  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario cuya componente  $y$  es positiva.
13.  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $\mathbf{v}(x, y, z) = Uz\mathbf{k}$  para alguna  $U$  constante positiva,  $S$  es la parte de la paraboloides  $z = a^2 - x^2 - y^2$  para la cual  $z \geq 0$ , y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario superior.
14.  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , en donde  $\mathbf{v}(x, y, z) = Uy\mathbf{j}$  para determinada constante positiva  $U$ ,  $S$  es el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , donde  $y \geq 0$  y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario con componente  $y$  positiva.
15.  $\iint_S (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , en donde  $S$  es la parte de la hiperboloides  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$  para la cual  $1 \leq z \leq 2$ , y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario que apunta hacia arriba.
16.  $\iint_S (yzi + xzj + xyk) \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $S$  es la parte de la superficie  $z = 4 - x^2 - y^2$  que está en el primer cuadrante, y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario superior.
17. Determinar la fuerza vertical total sobre el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  donde  $z \geq 0$ , si la fuerza por unidad de área es  $\mathbf{f}(x, y, z) = \alpha z\mathbf{k}$ , donde  $\alpha$  es una constante positiva.
18. Determinar la fuerza normal total sobre una parte del cilindro  $x^2 + z^2 = a^2$  donde  $z \geq 0$  y  $0 \leq y \leq b$ , si la fuerza por unidad de área es  $\mathbf{f}(x, y, z) = -\alpha(a - z)\mathbf{k}$ , en la cual  $\alpha$  es una constante positiva.
19. Sea  $\mathbf{v}(x, y, z) = [x/(x^2 + y^2)]\mathbf{i} + [y/(x^2 + y^2)]\mathbf{j}$ , y sea  $S$  la superficie del cubo  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ,  $-2 \leq z \leq 2$ . Calcular el valor de  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ .
- Sugerencia:* considere remplazar a  $S$  por la superficie  $\Sigma$  que consta del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  para  $-2 \leq z \leq 2$ , junto con los dos discos  $x^2 + y^2 \leq 1$  para  $z = 2$  y  $z = -2$ , respectivamente.

20. Demostrar que si  $\mathbf{v}$  tiene segundas derivadas continuas en una región que contiene a la superficie suave por pedazos y cerrada  $S$ , y su interior, entonces

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 0.$$

21. Demostrar que el volumen de una región  $D$  está determinado por

$$V(D) = \frac{1}{3} \iiint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma,$$

donde  $S$  es la superficie de  $D$  y  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ .

22. Si  $\mathbf{F}$  es un vector constante, demostrar que

$$\iiint_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 0$$

para cualquier superficie suave por pedazos y cerrada  $S$ .

23. En este problema, suponer que  $f(x, y, z)$  y  $g(x, y, z)$  tienen derivadas parciales continuas, al menos hasta el orden dos.

(a) Determinar la divergencia de  $g\nabla f$ .

(b) Demostrar que

$$\iiint_D g \frac{\partial f}{\partial n} \, d\sigma = \iiint_D (g \nabla^2 f + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV,$$

en donde  $\partial f / \partial n$  es la derivada direccional de  $f$  en la dirección del vector normal externo a  $S$ .

(c) Demostrar que

$$\begin{aligned} \iiint_D \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) d\sigma \\ = \iiint_D (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g) \, dV. \end{aligned}$$

A los resultados descritos en las partes (b) y (c) se les llama a veces la primera y la segunda identidades de Green, respectivamente. Son importantes en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales. Comparar estos resultados con los del problema 21 de la sección 18.3.

24. A una función que satisface la ecuación  $\nabla^2 f = 0$  en una región  $D$  se le llama **armónica** en  $D$ .

(a) Demostrar que si  $f$  es armónica en  $D$ , entonces

$$\iint_S \partial f / \partial n \, d\sigma = 0.$$

*Sugerencia:* hacer que  $g = 1$  en el problema 23(b).

(b) Demostrar que si  $f$  es armónica en  $D$ , y si  $f = 0$  en cada punto de  $S$ , entonces

$$\iiint_D \|\nabla f\|^2 \, dV = 0.$$

*Sugerencia:* En el problema 23(b), hacer que  $g = f$ .

- (c) Bajo las condiciones de la parte (b), demostrar que  $\nabla f = 0$  en cada punto de  $D$ , y después que  $f = 0$  en cada punto de  $D$ . Así, la única función armónica que se anula en el límite de una región dada es la

función que es cero en toda la región. Es un *teorema de unicidad* fundamental en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales.

## 18.8 EL TEOREMA DE STOKES

En esta sección describiremos una segunda ampliación tridimensional del teorema de Green, a la que se conoce como el teorema de Stokes. Se relaciona estrechamente con el rotacional de un campo vectorial, de modo semejante a como el teorema de la divergencia se relaciona con la divergencia. Como en la sección 18.7, comenzaremos expresando el teorema de Green en forma vectorial para facilitar la generalización.

Supongamos que

$$\mathbf{v}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \quad (1)$$

es un campo vectorial en dos dimensiones, cuyo rotacional es

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Supongamos además que  $C$  es una curva suave por pedazos y cerrada en el plano  $xy$ , que contiene a la región  $\Omega$  (véase figura 18.8.1). El vector tangente unitario a  $C$  es

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j},$$

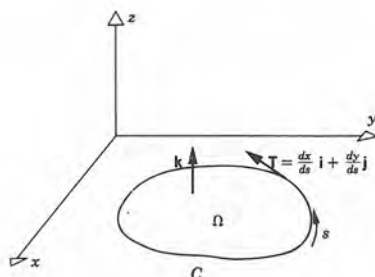


Figura 18.8.1

en donde  $s$  es la longitud de arco a lo largo de  $C$  en sentido levógiro. Entonces

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds \quad (3)$$

y

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} dA. \quad (4)$$

Obsérvese que  $\mathbf{k}$  es normal al plano de integración  $\Omega$ . Así, la conclusión del teorema de Green se puede expresar en la siguiente forma:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds = \iint_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} dA. \quad (5)$$

Para extender este resultado a tres dimensiones podemos remplazar a  $\Omega$  por una superficie  $S$ , suave por pedazos, en el espacio, acotada por una curva cerrada  $\Gamma$  (simple y cerrada). La normal unitaria  $\mathbf{N}$  en  $S$  y la tangente unitaria  $\mathbf{T}$  en  $\Gamma$  se relacionan como se ve en la figura 18.8.2; si se contempla a  $S$  desde el lado positivo, que es el lado en

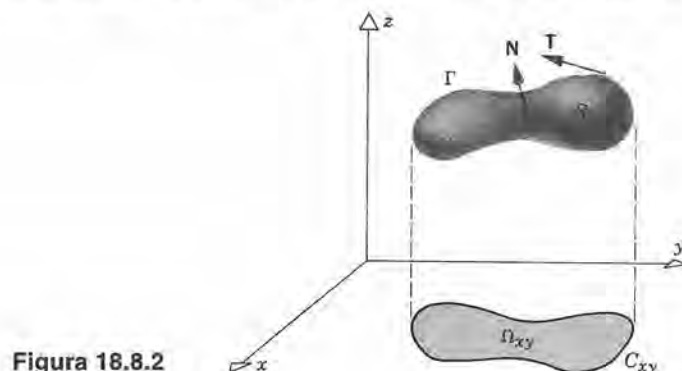


Figura 18.8.2

el que queda  $\mathbf{N}$ , entonces  $\mathbf{T}$  está dirigida de tal modo que  $S$  esté a la izquierda del trayecto sobre  $\Gamma$ . De este modo, llegamos al resultado importante conocido como el teorema de Stokes\* en tres dimensiones.

\* George Gabriel Stokes (1819-1903) nació en Irlanda y se educó en Cambridge. Fue profesor lucasiano de matemáticas en esa universidad en 1849 y continuó en este puesto hasta su muerte 54 años después. Más que nadie, es el responsable de haber terminado con el aislamiento, autoimpuesto, de los matemáticos ingleses respecto a los desarrollos generados en el continente europeo, situación que duró un siglo o más.

El teorema de Stokes aparecía en una carta de Thomson dirigida a Stokes en 1850, pero fue publicado por primera vez por Stokes, en calidad de pregunta de examen para un premio en Cambridge en 1854.

También se recuerda a Stokes debido a su trabajo pionero en la mecánica de fluidos y por el uso de las series asintóticas (divergentes). Las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso, que son las ecuaciones de Navier-Stokes, llevan parcialmente su nombre en su honor.



**Teorema 18.8.1****(Teorema de Stokes)**

Si  $S$  es una superficie suave por pedazos y orientable, acotada por una curva simple y cerrada  $\Gamma$ , y si  $\mathbf{v}(x, y, z)$  tiene derivadas parciales continuas en una región que contiene a  $S$ , entonces

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma, \quad (6)$$

en la cual el vector unitario tangente  $\mathbf{T}$  en  $\Gamma$  y el vector unitario normal  $\mathbf{N}$  en  $S$  se orientan como se muestra en la figura 18.8.2.

**Demostración parcial del teorema de Stokes.** Sea

$$\mathbf{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Entonces, en términos de  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , la ecuación 6 adquiere la forma

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz \\ = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) n_1 + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) n_2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) n_3 \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

Podemos demostrar la ecuación 7 si demostramos que

$$\oint_{\Gamma} P \, dx = \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} n_2 - \frac{\partial P}{\partial y} n_3 \right) d\sigma, \quad (8)$$

junto con las ecuaciones correspondientes para  $Q$  y  $R$ . Supongamos que  $S$  está representada por

$$S : z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad (9)$$

en la cual  $\Omega_{xy}$  es la proyección de  $S$  en el plano  $xy$  (véase figura 18.8.2). Entonces

$$\mathbf{N} = \frac{-f_x \mathbf{i} - f_y \mathbf{j} + \mathbf{k}}{(f_x^2 + f_y^2 + 1)^{1/2}}. \quad (10)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} n_2 - \frac{\partial P}{\partial y} n_3 \right) d\sigma &= \iint_{\Omega_{xy}} \left( -\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot 1 \right) dA_{xy} \\ &= - \iint_{\Omega_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} P[x, y, f(x, y)] dA_{xy}, \end{aligned}$$

en las cuales hemos empleado la regla de la cadena para escribir el último término. Empleando el teorema de Green en el plano (teorema 18.3.1), podemos convertir a la última integral en  $\Omega_{xy}$  en una integral de línea alrededor de su frontera  $C_{xy}$ . Así,

$$\begin{aligned} \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} n_2 - \frac{\partial P}{\partial y} n_3 \right) d\sigma &= \oint_{C_{xy}} P[x, y, f(x, y)] dx \\ &= \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

De modo semejante, podemos demostrar que si

$$S : y = g(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_{xz}, \quad (12)$$

entonces

$$\iint_S \left( -\frac{\partial Q}{\partial z} n_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} n_3 \right) d\sigma = \oint_{\Gamma} Q dy \quad (13)$$

y que si

$$S : x = h(y, z), \quad (y, z) \in \Omega_{yz}, \quad (14)$$

entonces

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} n_1 - \frac{\partial R}{\partial x} n_2 \right) d\sigma = \oint_{\Gamma} R dz. \quad (15)$$

Si son válidas las tres ecuaciones 9, 12 y 14, lo cual significa que  $S$  es proyectable en cada uno de los tres planos coordenados, entonces las tres ecuaciones 11, 13 y 15 son válidas en forma simultánea. Sumando esas ecuaciones se obtiene la ecuación 7, con lo cual se completa la demostración del teorema de Stokes para este tipo de superficies.  $\square$

Para superficies que no son proyectables en los tres planos coordenados, con frecuencia se puede demostrar el teorema de Stokes subdividiendo la superficie en un número finito de partes que tengan esa propiedad. El teorema de Stokes también se puede extender a superficies acotadas por dos o más curvas (esto es, superficies con agujeros) empleando argumentos semejantes a los que se vieron en el teorema de Green para casos análogos.

Una consecuencia importante del teorema de Stokes es la demostración del teorema 18.2.4, tal como se reformula en la sección 18.6, o sea, que si

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (16)$$

en una región simplemente conexa  $D$ , entonces  $\mathbf{v} = \nabla \phi$  en  $D$ , o, de modo equivalente,

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds = 0 \quad (17)$$

para toda curva continua por pedazos y cerrada  $\Gamma$  en  $D$ . Si la ecuación 16 es válida en  $D$ , entonces  $\nabla \times \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$  en cualquier superficie  $S$  en  $D$ , y la ecuación 17 es consecuencia del teorema de Stokes. La región debe ser simplemente conexa, ya que de otro modo una curva cerrada continua por pedazos y simple  $\Gamma$  podría no constituir la frontera completa de una superficie en  $D$ . Así, la ecuación 16 en una región simplemente conexa es suficiente como para garantizar que es válida la ecuación 17, así como las demás propiedades equivalentes a ella.

Aun si  $\nabla \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , a veces el teorema de Stokes brinda un medio para evaluar algunas integrales si un lado de la ecuación 6 se puede evaluar de manera apreciablemente más sencilla que el otro. Los ejemplos siguientes ilustran esto.

### EJEMPLO 1

Determinar el valor de la integral

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds,$$

en la cual

$$\mathbf{v} = y(1 + z)\mathbf{i} + z(2 + x)\mathbf{j} + x(-1 + y)\mathbf{k},$$

y  $\Gamma$  está representada por las ecuaciones paramétricas

$$\Gamma : x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \quad z = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Comencemos representando el problema en forma geométrica. Nótese que la curva  $\Gamma$  queda en la esfera con centro en el origen y de radio  $a$ , ya que  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Notemos también que  $y = x$ , por tanto,  $\Gamma$  es el círculo de intersección de la esfera con este plano (véase figura 18.8.3). Para  $0 \leq t \leq 2\pi$  partimos del punto  $(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, 0)$ , y avanzamos una vez alrededor del círculo en la dirección que se indica en la figura. En otras palabras, partimos del punto inicial en el plano  $xy$ , entramos al semiespacio superior  $z > 0$  para seguir el arco circular hasta el punto  $(0, 0, a)$  en el eje  $z$  positivo, para continuar después alrededor del círculo. Es natural escoger el disco encerrado por  $\Gamma$  en el plano  $y = x$  como superficie  $S$ . Entonces, las normales unitarias a  $S$  están definidas por  $\pm(\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$ . Para conservar la relación adecuada entre  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{T}$ , debemos escoger a

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}},$$



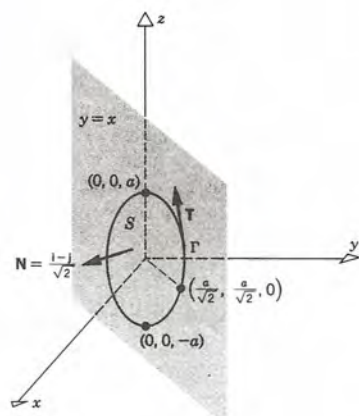


Figura 18.8.3

como se indica en la figura 18.8.3.

No es muy difícil la evaluación de la integral dada empleando las ecuaciones paramétricas de  $\Gamma$ , pero se necesita evaluar algunas integrales en las que intervienen potencias de  $\sin t$  y  $\cos t$ . Para determinar si podemos evitar esto empleando en su lugar el teorema de Stokes, calculamos el rotacional de  $\mathbf{v}$ :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y(1+z) & z(2+x) & x(-1+y) \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Así,

$$\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = \frac{-2 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

y

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = -\frac{3}{\sqrt{2}}\pi a^2.$$

De acuerdo con el teorema de Stokes, la integral de línea dada tiene el mismo valor, lo cual se puede comprobar evaluándola en forma directa. ■

**EJEMPLO 2**

Sea

$$\mathbf{v} = z^3 \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k},$$

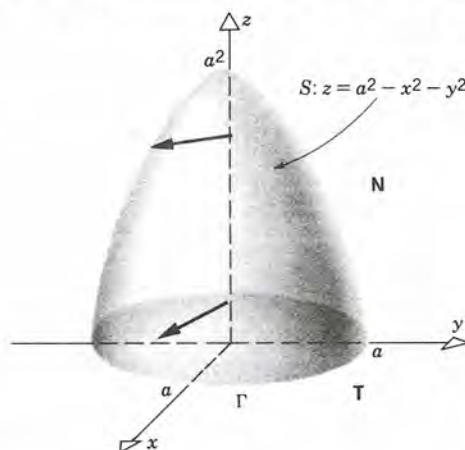
y sea  $S$  la parte de la paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2$$

para la que  $z \geq 0$ . Si  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario en  $S$  con componente  $z$  positiva, determinar el valor de

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma.$$

Es posible, y relativamente directo, evaluar la integral pedida como una integral de superficie, como se describió en la sección 18.4. Sin embargo, en lugar de hacerlo, transformaremos la integral de superficie en una integral de línea mediante el teorema de Stokes. El caso geométrico se representa en la figura 18.8.4. El límite  $\Gamma$  de  $S$  es el



**Figura 18.8.4**

círculo en el plano  $xy$  con centro en el origen y radio  $a$ . Se debe recorrer la curva  $\Gamma$  en la dirección que se ve en la figura, esto es, en sentido levógiro, vista desde un punto del eje  $z$  positivo. Una parametrización conveniente de  $\Gamma$  es

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (18)$$

De acuerdo con el teorema de Stokes, tenemos que

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma &= \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds \\ &= \oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz \\ &= \oint_{\Gamma} z^3 \, dx + x \, dy + y^2 \, dz \\ &= \oint_{\Gamma} x \, dy,\end{aligned}$$

ya que  $z = 0$  y  $dz = 0$  en  $\Gamma$ . Si introducimos las ecuaciones paramétricas (18), obtenemos

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} x \, dy &= \int_0^{2\pi} (a \cos t)(a \cos t) \, dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \, dt \\ &= a^2 \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi a^2,\end{aligned}$$

lo cual también es el valor de la integral de superficie que se necesitaba. ■

Como nota final observemos que el teorema de Stokes es la base de una mejor comprensión física del rotacional. Si  $\mathbf{v}(x, y, z)$  es el vector de velocidad de un fluido en movimiento, entonces

$$\gamma(\Gamma) = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

se llama la **circulación** producida por  $\mathbf{v}$  sobre la curva  $\Gamma$ . Obsérvese que  $\gamma$  es la integral de la componente tangencial de  $\mathbf{v}$  sobre la curva cerrada  $\Gamma$ , de manera que  $\gamma$  mide la rapidez del flujo alrededor de  $\Gamma$ . Consideremos ahora un elemento pequeño  $S$  del plano que contiene al punto  $P$  y que tiene un vector normal unitario  $\mathbf{N}$ . Sea  $\Gamma$  la frontera de  $S$  y sea  $A(S)$  su área. Entonces, aplicando el teorema de Stokes, y aproximando el integrando de  $S$  por su valor en  $P$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\gamma(\Gamma) &= \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma \\ &\cong (\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(P)A(S).\end{aligned}$$



Despejando a  $(\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(P)$  y tomando el límite cuando  $A(S) \rightarrow 0$ , obtenemos

$$(\nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N})(P) = \lim_{A(S) \rightarrow 0} \frac{\gamma(\Gamma)}{A(S)}.$$

Así, en un punto  $P$  la componente de  $\nabla \times \mathbf{v}$  en cualquier dirección  $\mathbf{N}$  es la densidad de circulación, por unidad de área, en un plano que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $\mathbf{N}$ .

## PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10 emplear el teorema de Stokes para evaluar  $\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds$  para el vector  $\mathbf{v}(x, y, z)$  dado y la curva  $\Gamma$  dada.

1.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la trayectoria triangular de  $(2, 0, 0)$  a  $(0, 2, 0)$  a  $(0, 0, 3)$  y a  $(2, 0, 0)$ .
2.  $\mathbf{v}(x, y, z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la trayectoria rectangular de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 2, 0)$ , a  $(1, 2, 3)$ , a  $(0, 0, 3)$  para terminar en  $(0, 0, 0)$ .
3.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 3y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la trayectoria triangular que va de  $(0, 0, 0)$  a  $(3, 1, 1)$ , a  $(1, 3, 3)$  y a  $(0, 0, 0)$ .
4.  $\mathbf{v}(x, y, z) = -z\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la trayectoria poligonal que parte de  $(2, -1, 0)$  y pasa por  $(0, 1, 0)$ ,  $(-1, 1, 2)$ ,  $(1, -1, 2)$  y termina en  $(2, -1, 0)$ .
5.  $\mathbf{v}(x, y, z) = -z\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la curva de intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $y = x$ , recorrida en sentido levógiro, vista desde un punto en el eje  $y$  positivo.
6.  $\mathbf{v}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} + (3y + z)\mathbf{j} + (-z + 2x)\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la curva de intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  para la cual  $z < 0$ , recorrida en sentido levógiro, vista desde el origen.
7.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la curva de intersección de la elipsoide  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$  y el plano  $y = 2x$ , recorrida en sentido levógiro, vista desde un punto del eje  $x$  positivo.
8.  $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la curva de intersección del cilindro  $4x^2 + y^2 = 4$  y el plano  $z = x + 2$ , recorrida en sentido levógiro, vista desde el origen.
9.  $\mathbf{v}(x, y, z) = (2xy + z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ ;  $\Gamma$  es la misma curva del problema 8.

10.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ ;  $\Gamma$  es la misma curva del problema 8.

En los problemas 11 a 16 emplear el teorema de Stokes para determinar el valor de  $\iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} d\sigma$  para el campo vectorial  $\mathbf{v}$  y la superficie  $S$  dados.

11.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3xy\mathbf{k}$ ;  $S$  es la parte de la superficie  $z = a^2 - x^2 - y^2$  para la cual  $z \geq 0$ , y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario que apunta hacia arriba.
12.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3xy\mathbf{k}$ ;  $S$  es la parte de la superficie  $z = a^2 - x^2 - y^2$  en el primer octante y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario que se aleja del origen.
13.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xzy\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$ ;  $S$  es la superficie  $z = a^2 - x^2 - y^2$  donde  $z \geq 0$  y  $\mathbf{N}$  el vector normal unitario que apunta hacia arriba.
14.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xzy\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x^2 - y^2)\mathbf{k}$ ;  $S$  es la parte de la superficie  $z = a^2 - x^2 - y^2$  en el primer octante y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario que se aleja del origen.
15.  $\mathbf{v}(x, y, z) = yz^2\mathbf{i} + 2xz^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ ;  $S$  es la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  donde  $z \geq a/2$  y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario que apunta hacia arriba.
16.  $\mathbf{v}(x, y, z) = 2y^2z\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} - xy^2z\mathbf{k}$ ;  $S$  es la parte de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  para la cual  $y \geq \sqrt{3}a/2$  y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario cuya componente  $y$  es positiva.
17. Si  $S$  es una superficie acotada por la curva  $\Gamma$  y si  $\mathbf{v}$  es un vector constante en una región que contiene a  $S$ , demostrar que  $\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} ds = 0$ .
18. Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies acotadas por la misma curva  $\Gamma$ , que tienen la misma orientación con respecto a  $\Gamma$ , y si  $\mathbf{v}(x, y, z)$  tiene derivadas parciales continuas en una región que contiene a  $S_1$  y  $S_2$ , demostrar que

$$\int \int_{S_1} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = \int \int_{S_2} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma.$$

19. Si  $S$  es una superficie suave por pedazos y cerrada, y

si  $\mathbf{v}(x, y, z)$  tiene derivadas parciales continuas en una región  $D$  que contiene a  $S$ , demostrar que  $\iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma = 0$ . Comparar este resultado con el del problema 20 de la sección 18.7.

## PROBLEMAS DE REPASO

En los problemas 1 a 4 evaluar  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  a lo largo de la curva dada.

1.  $\mathbf{F}(x, y) = \ln x \mathbf{i} + e^y \mathbf{j}$ ;  $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + \frac{t^2}{2} \mathbf{j}$ ,  
 $1 \leq t \leq 2$

2.  $\mathbf{F}(x, y) = xy \mathbf{i} + (4x^2 - y^2) \mathbf{j}$ ; el arco del círculo  $x^2 + y^2 = 16$  en el primer cuadrante de  $(4, 0)$  a  $(0, 4)$ .

3.  $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z \mathbf{i} + yz^2 \mathbf{j} + y^2 x \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ;  $0 \leq t \leq \pi/2$

4.  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - z) \mathbf{i} + (2y - x) \mathbf{j} + (2z - y) \mathbf{k}$ ; la recta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$ .

En los problemas 5 a 8 evaluar la integral de línea dada.

5.  $\int_C (x^2 + y^2) \, dx$ , a lo largo de la curva  $x = t$ ,  $y = t^3$ ;  $0 \leq t \leq 2$ .

6.  $\int_C (x^2 + y^2)^{-1} dy$ , a lo largo de la recta de  $(1, 3)$  a  $(2, 6)$ .

7.  $\int_C (x/y) \, dx$ , a lo largo de la parábola  $y = x^2 + 1$  de  $(0, 0)$  a  $(3, 10)$ .

8.  $\int_C (x^3 - y^2 x) dy$ , a lo largo de la hipérbola  $xy = 4$  de  $(1, 4)$  a  $(4, 1)$ .

En los problemas 9 a 12 determinar si el campo vectorial es conservativo y si lo es, determinar la función potencial  $\phi$  correspondiente.

9.  $\mathbf{F}(x, y) = \left( ye^{xy} + 1 - \frac{1}{x^2 y} \right) \mathbf{i} + \left( xe^{xy} - \frac{1}{xy^2} \right) \mathbf{j}$

10.  $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^x \mathbf{i} + \ln y \mathbf{j} - \cos(xy) \mathbf{k}$

11.  $\mathbf{F}(x, y, z) = 2 \mathbf{i} + \sin y \sin z \mathbf{j} - \cos y \cos z \mathbf{k}$

12.  $\mathbf{F}(x, y, z) = \left( \frac{1}{x} - 6xyz \right) \mathbf{i} + \left( \frac{1}{y} - 3x^2 z \right) \mathbf{j} - 3x^2 y \mathbf{k}$

En los problemas 13 a 16, demostrar que la integral de línea es independiente de la trayectoria y a continuación evaluar la integral.

13.  $\int_C y \left( x + \frac{y}{2} \right) dx + x \left( \frac{x}{2} + y \right) dy$  de  $(0, 1)$  a  $(1, 0)$

14.  $\int_C e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy$  de  $(0, 0)$  a  $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

15.  $\int_C \frac{1}{2} (y^2 z + z^2 y) \, dx + \left( xyz + \frac{xz^2}{2} \right) dy + \left( \frac{xy^2}{2} + xyz \right) dz$  de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$

16.  $\int_C \frac{1}{2} (y^2 e^x + z^2) \, dx + \left( ye^x + \frac{z^2}{2} \right) dy + (x + y)z \, dz$  de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$

En los problemas 17 a 20 emplear el teorema de Green para evaluar la integral de línea dada.

17.  $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$ ;  $C$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .

18.  $\oint_C \ln y \, dx - \ln x \, dy$ ;  $C$  es el cuadrado con vértices en  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ .

19.  $\oint_C -\cos^2 y \, dx + \sin^2 x \, dy$ ;  $C$  es el cuadrado con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(\pi, \pi)$ .

20.  $\oint_C -x^2 y \, dx + 6yx \, dy$ ;  $C$  es la elipse  $x^2/4 + y^2/9 = 1$ .

En los problemas 21 a 24, (a) determinar el área de la región dada  $\Omega$ , (b) emplear el problema 17, sección 18.3, para localizar el centroide de la región plana  $\Omega$ , (c) emplear el problema 18, sección 18.3, para evaluar  $I_0$  para  $\Omega$ .

21. La región acotada por  $x^2/4 + y^2/9 = 1$ .

22. La región acotada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = y + 2$ .



## 1152 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

23. La región acotada por  $y = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

24. La región del primer cuadrante acotada por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1 - x^2$ .

En los problemas 25 a 28 determinar el área de la superficie dada.

25. La parte del plano  $2x + y + 3z = 6$  arriba del rectángulo con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ .

26. La parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  arriba del círculo  $x^2 + y^2 = 1$  en el plano  $xy$ .

27. La parte del cono  $4(x^2 + y^2) = z^2$  que queda arriba del triángulo cuyos vértices están en  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ .

28. La parte de la paraboloides  $x^2 + y^2 = z$  que está cortada por el cilindro  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

En los problemas 29 a 32, (a) determinar la divergencia y (b) determinar el rotacional del campo vectorial dado.

29.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x^2 y \mathbf{i} + y^2 z \mathbf{j} + z^2 x \mathbf{k}$

30.  $\mathbf{v}(x, y, z) = e^{xyz} \mathbf{i} + e^{-xyz} \mathbf{j} + \ln(xyz) \mathbf{k}$

31.  $\mathbf{v}(x, y, z) = y^2(x^2 + y^2)^{-1/2} \mathbf{i} + z^2(y^2 + z^2)^{-1/2} \mathbf{j} + x^2(x^2 + z^2)^{-1/2} \mathbf{k}$

32.  $\mathbf{v}(x, y, z) = \cos x \sin y \mathbf{i} + \cos y \cos z \mathbf{j} + \sin z \cos x \mathbf{k}$

En los problemas 33 a 36 emplear el teorema de la divergencia para determinar el valor de  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$ , donde  $\mathbf{v}$  y  $S$  son las dadas.

33.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ ;  $S$  es la parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  arriba del plano  $xy$ ;  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario hacia arriba.

34.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + zy \mathbf{k}$ ;  $S$  es la superficie del cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , incluyendo la tapa y el fondo;  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario exterior.

35.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x(2y - z) \mathbf{i} + y(2z - x) \mathbf{j} + z(2x - y) \mathbf{k}$ ;  $S$  es la superficie del paralelepípedo  $0 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 2$ ;  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario exterior.

36.  $\mathbf{v}(x, y, z) = yz^2 \mathbf{i} + zx^2 \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ ;  $S$  es la superficie de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en el primer octante;  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario que se aleja del origen.

En los problemas 37 a 40, emplear el teorema de Stokes para evaluar a  $\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds$ , o  $\iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \, d\sigma$  para el campo  $\mathbf{v}$  y la curva  $C$  dadas sobre la superficie  $S$ .

37.  $\mathbf{v}(x, y, z) = (2 + z) \mathbf{i} + (2z + x) \mathbf{j} + (2x + y) \mathbf{k}$ ;  $S$  es la cara superior del cubo en el que  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ,  $-2 \leq z \leq 2$ ;  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario externo.

38.  $\mathbf{v}(x, y, z) = -yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ ;  $S$  es la superficie  $z = x^2 + y^2$  por debajo de  $z = 2$ ;  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario hacia arriba.

39.  $\mathbf{v}(x, y, z) = -yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ ;  $C$  es el triángulo cuyos vértices están en  $(0, 0, 1)$ ,  $(2, 0, 0)$  y  $(0, 2, 0)$  recorrida en sentido dextrógiro, vista desde el origen.

40.  $\mathbf{v}(x, y, z) = -xy \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ ;  $C$  es la intersección de  $x^2 + y^2 = 1$  y  $y = x$ , recorrida en sentido dextrógiro vista desde el eje de las  $y$  negativas.

41. Un electrón se desplaza a lo largo de la curva  $x = t$ ,  $y = t^2$ , sujeto a una fuerza  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y) \mathbf{i} + (xy^2 - x^2 y) \mathbf{j}$  newtons. Calcular el trabajo efectuado por la fuerza  $\mathbf{F}$  sobre el electrón en el período  $0 \leq t \leq 2$ .



# CÁLCULO

## Bibliografía recomendada

---

### CÁLCULO AVANZADO Y ANÁLISIS

Existen numerosos libros de cálculo y análisis, escritos desde varios puntos de vista, de nivel más avanzado que este libro. Listamos aquí algunos de ellos. Creemos que pueden ser muy útiles al estudiante para buscar en ellos las demostraciones que hemos omitido, o para proseguir la discusión y la elaboración de la teoría. Los títulos de Amazigo y Rubinfeld, y de Kaplan, tienen una orientación un poco menos teórica que los demás libros que se mencionan.

JOHN C. AMAZIGO and LESTER A. RUBENFELD, *Advanced Calculus and Its Applications to the Engineering and Physical Sciences*, Wiley, New York, 1980.

R. C. BUCK, *Advanced Calculus*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1978.

WATSON FULKS, *Advanced Calculus: An Introduction to Analysis*, Second Edition, Wiley, New York, 1969.

WILFRED KAPLAN, *Advanced Calculus*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, MA., 1973.

M. H. PROTTER and C. B. MORREY, *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1977.

WALTER RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1976.

---

## HISTORIA

Para continuar la lectura de la historia del cálculo puede uno consultar libros como los que listamos a continuación. El libro de Edwards se enfoca al cálculo, como dice su título; el libro de Kline es el más completo.

C. B. BOYER, *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.

C. H. EDWARDS, JR., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1979.

M. KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, New York, 1972.

El siguiente conjunto de libros es una fuente amplia de información acerca de la vida y logros de los matemáticos del pasado.

C. C. GILLESPIE (editor), *Dictionary of Scientific Biography*, fifteen volumes, Scribner's, New York, 1971.

# CÁLCULO

## CAPÍTULO 1

### 1.1 Respuestas

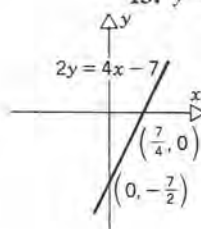
1.  $A \cup B = (-1, 4)$ ;  $A \cap B = [0, 2)$
3.  $A \cup B = \mathbb{R}^1 - \{0\}$ ;  $A \cap B = \emptyset$
5. (a) Cierto (b) Falso (c) Falso (d) Cierto
7.  $\{2, 3\}$  9.  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \cup \{1\}$
11. Sí, Sí 13. Sí, No
15. Sí, Sí 17.  $S = \{s | s < -\frac{1}{4}\}$
19.  $x = -1$ ,  $x = -2$  21.  $x \geq 1$
23.  $x = -\frac{9}{8}$ ,  $x = -5$
29. Máxima cota inferior = 0; mínima cota superior = 1
31. Máxima cota inferior = -1; mínima cota superior = 3

### 1.2 Respuestas

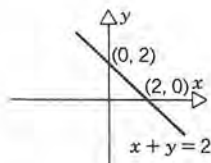
1.  $(-6, 0)$  3.  $(0, 1) \cup (1, 2)$
5.  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  7.  $[\frac{3}{4}, \infty)$
9.  $(1, \frac{7}{4}]$  11.  $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
13.  $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$  15.  $(\frac{1}{3}, 1)$
17.  $(-1, 3)$  19.  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
23. Igualdad si  $x \geq 0, y \leq 0$ , o si  $x \leq 0, y \geq 0$ .
25. Igualdad si  $x \geq y \geq 0$ , o si  $x \leq y \leq 0$ .
29. Igualdad si y sólo si  $a_1 b_2 = a_2 b_1$
31. Máxima cota inferior = -2; mínima cota superior = 3
33. No hay máxima cota inferior ni mínima cota superior.

### 1.3 Respuestas

1.  $\sqrt{58}$  3.  $2|t|$
7. Isósceles 9. Equilátero
11.  $y = x$  13.  $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$
- 15.



17.



21.  $x + 2y = 2$  23.  $2x - y = -6$
25.  $(3, 2)$ ;  $\sqrt{5}$  27.  $(-2, 2)$ ;  $2\sqrt{2}$

## Respuestas a los problemas de número impar

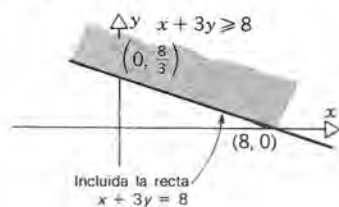


## A-2 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

29.  $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right)y\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$

31.  $(-1, 1)$

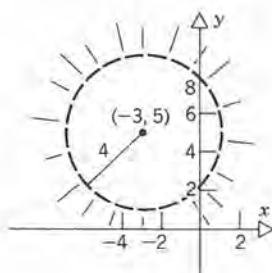
33.



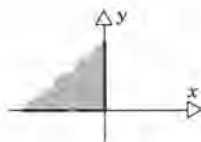
35.



37.



39.



41.  $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 < 4$

43.  $5x - y = 5$

45.  $(-4, \frac{3}{4})$

5.  $X = \{x \mid x \neq \pm 3\}$ ,

$f(X) = (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup (0, \infty)$

7.  $X = [-3, 3]$ ;  $f(X) = [0, 3]$

9. (a)  $\sqrt{1 - (s - 1)^2}$ ,  $0 \leq s \leq 2$

(b)  $\sqrt{1 - t^2}$ ,  $-1 \leq t \leq 1$

(c)  $\sqrt{1 - u^{-2}}$ ,  $|u| \geq 1$

(d)  $|w|$ ,  $-1 \leq w \leq 1$

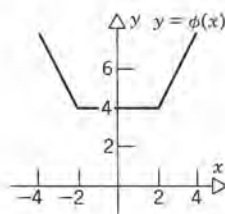
11. 2

13.  $4x + 3 + 2h$

15.  $\frac{-1}{(x + h)x}$

17.  $\phi(-3) = \phi(3) = 6$ ,  $\phi(-1) = \phi(1) = 4$

$$\phi(x) = \begin{cases} -2x, & -\infty < x < -2 \\ 4, & -2 \leq x < 2 \\ 2x, & 2 \leq x < \infty \end{cases}$$



19. No

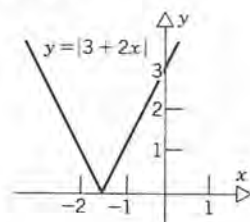
21. Sí

23. No

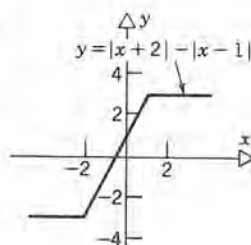
25.  $f(x) = 6(x + 2)(x - 3)$  es una función de esas.

## 1.5 Respuestas

1.  $[0, \infty)$



3.  $[-3, 3]$



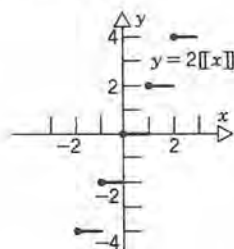
## 1.4 Respuestas

1. (a) -7 (b) 11 (c) 7 (d) -11

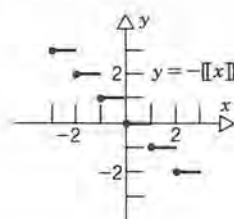
3.  $X = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ ;

$f(X) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

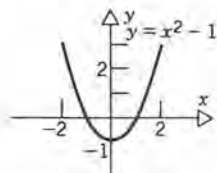
5.  $\{\pm 2n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$



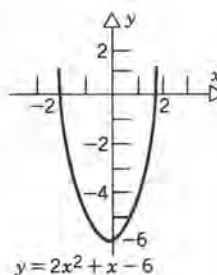
7.  $\{\pm n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$



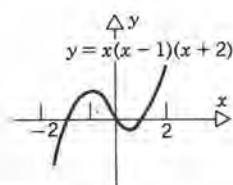
9.  $[-1, \infty)$



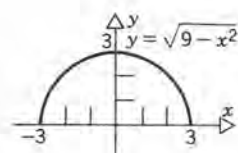
11.  $[-\frac{49}{8}, \infty)$



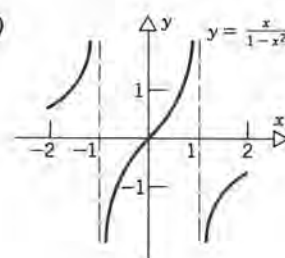
13.  $(-\infty, \infty)$



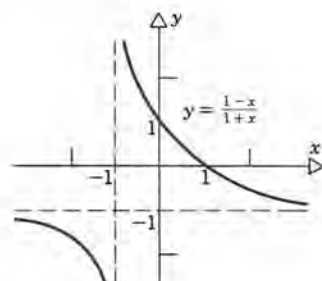
15.  $[0, 3]$



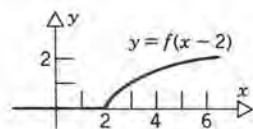
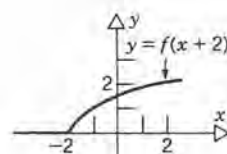
17.  $(-\infty, \infty)$



19.  $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$



21.



23.  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, 2]$ ,  $[0, 4]$ , 2 unidades de longitud por unidad de tiempo.

# A-4 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

25. Impar      27. Ninguna de las dos      29. Par  
31. No es impar ni es par, a menos que una función sea  
cero dondequiera.

29.  $2 \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right)$

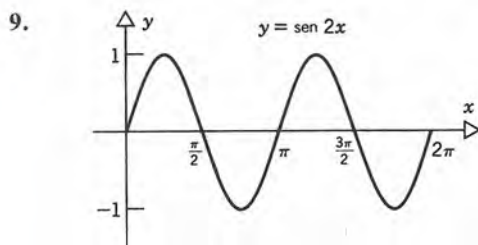
## 1.6 Respuestas

1.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

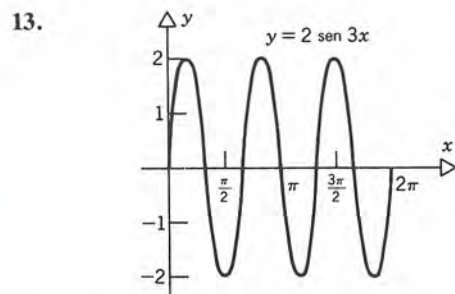
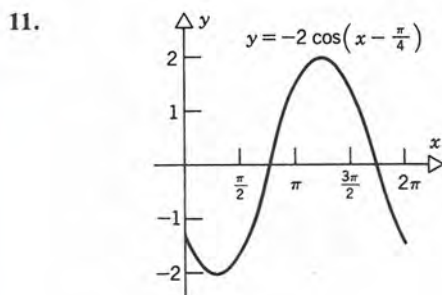
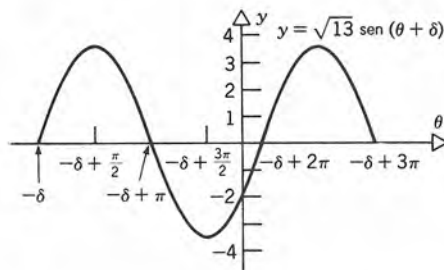
3.  $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

5.  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$

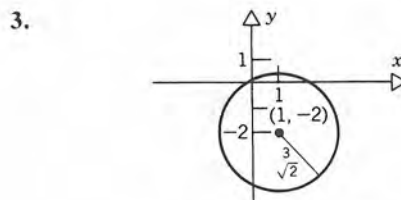
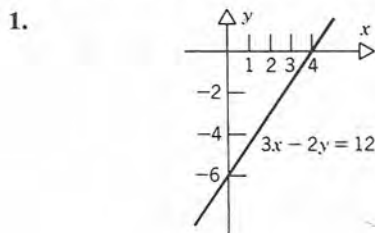
7.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$



31.  $\sqrt{13} \operatorname{sen}(\theta + \delta)$ ;  $\cos \delta = \frac{3}{\sqrt{13}}$  y  $\operatorname{sen} \delta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ , por  
tanto  $\delta \approx 5.6952$



## Respuestas a los problemas de repaso



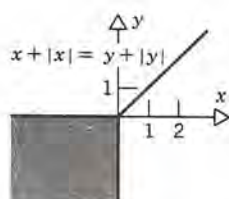
$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y + 1 = 0$   
o bien  
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{2}$

19.  $4\pi$

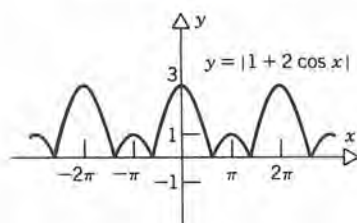
21.  $6\pi$



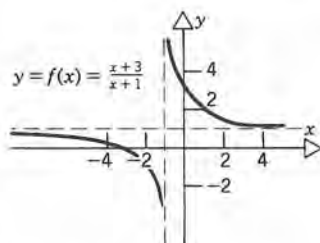
5.



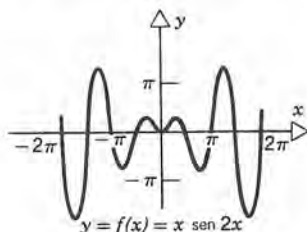
7.



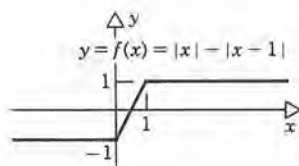
9.  $X = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ ,  
 $f(X) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$



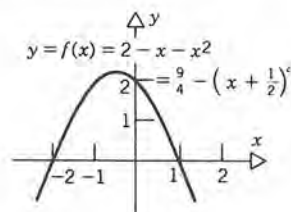
11.  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $f(X) = (-\infty, \infty)$



13.  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $f(X) = [-1, 1]$



15.  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $f(X) = (-\infty, \frac{9}{4}]$



17.  $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$  19.  $(-6, -1) \cup (2, 3)$

21.  $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$

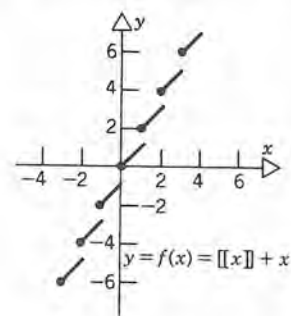
23.  $\dots \left[ -\pi - \frac{\pi}{6}, -\pi + \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup$   
 $\left[ \pi - \frac{\pi}{6}, \pi + \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ 2\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6} \right] \cup \dots$

25.  $x + 2y = 12$

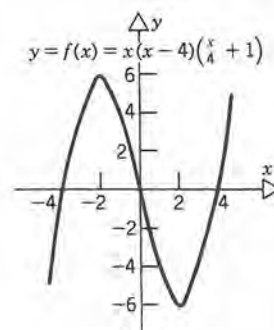
27.  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$

29.  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 52$

31.  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $f(X) = \dots [-4, -3]$   
 $\cup [-2, -1) \cup [0, 1) \cup [2, 3) \cup \dots$

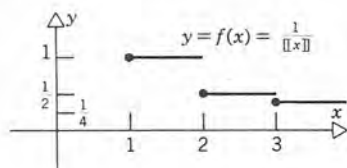


33.  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $f(X) = (-\infty, \infty)$ , función impar

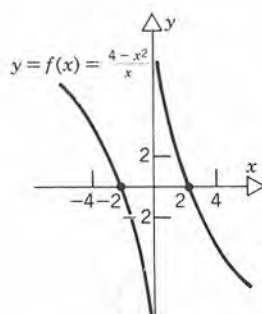


# A-6 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

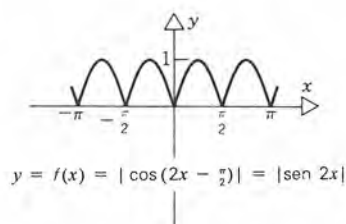
35.  $X = [1, \infty)$ ,  $f(X) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$



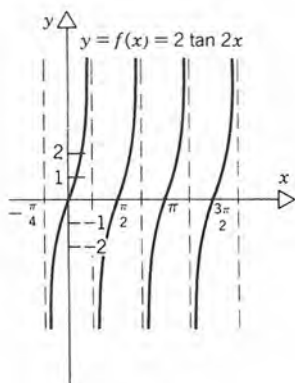
37.  $X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ,  $f(X) = (-\infty, \infty)$



39.



41.



43.  $\text{sen}^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

45. No

## CAPÍTULO 2

### 2.1 Respuestas

1.  $v_{\text{prom}} = \frac{5t^2 - 5}{t - 1}$ ,  $t \neq 1$ ;  $v = 10$

3.  $v_{\text{prom}} = \frac{2t^3 - t^2 - 12}{t - 2}$ ,  $t \neq 2$ ;  $v = 20$

5.  $m = 6$ ,  $6x - y = 2$

7.  $m = 5$ ,  $5x - y = 4$

9.  $m = -\frac{1}{5}$ ,  $x + 5y = 7$

11. (a)  $v_{\text{inst}} = v_{\text{prom}} = 32t_0$

(b)  $v_{\text{inst}} = 3t_0^2$ ,  $v_{\text{prom}} = 3t_0^2 + \tau^2$

13. (a)  $v = -gt + v_0$  (b)  $t = \frac{v_0}{g}$

15.  $\frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$ ;  $\frac{2}{3}$

17.  $\frac{(x^2 - 5)^{3/2} - 8}{x - 3}$ ; 18

19.  $\frac{\tan x + 1}{x - 3\pi/4}$ ; 2

21.  $\frac{\text{sen } 2x - \sqrt{3}/2}{x - \pi/3}$ ; -1

### 2.2 Respuestas

1. -4 3. 3 5.  $-\frac{1}{2}$ , sin límite

7. Sin límite,  $\frac{5}{3}$  9.  $\frac{1}{2}$  11. 1

13. Sin límite, -3 15. 0 17.  $\frac{1}{2}$

19. 2 21.  $\frac{1}{6}$  23. No hay recta tangente.

27. (a)  $\delta_1 \leq \frac{1}{20}$  (b)  $\delta_2 \leq \frac{1}{200}$  (c)  $\delta(\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}$

29.  $\delta_1 \leq \frac{1}{30}$ ,  $\delta_2 \leq \frac{1}{300}$ ,  $\delta(\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{3}$

31.  $\delta_1 \leq \frac{0.1}{|a|}$ ,  $\delta_2 \leq \frac{0.01}{|a|}$ ,  $\delta(\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{|a|}$

33.  $\delta_1 \leq \frac{1}{5}$ ,  $\delta_2 \leq \frac{1}{50}$ ,  $\delta(\epsilon) \leq 2\epsilon$

### 2.3 Respuestas

1. 16 3. -1 5.  $-\frac{3}{2}$

7.  $\frac{17}{4}$  9. 3 11.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

13.  $\frac{1}{2}$  17.  $\frac{4 - \sqrt{2}}{4}$  19.  $\frac{\pi}{2}$

21. 2      23. 0      25. 1      27. 0

29. Una posibilidad es que  $g(x) = 0$ ,  $f(x) = 1 + x^{-2}$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

31. (a) Una posibilidad es que  $f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ .  
(b) Una posibilidad es que  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^{-2}$  cuando  $x \rightarrow 0$ .

## 2.4 Respuestas

En los problemas 1 a 11 se dan las respuestas en el orden siguiente: límite por la derecha, límite por la izquierda, límite.

1.  $c = 2$ ; no tiene sentido, 0, no tiene sentido  
 $c = -2$ ; 0, no tiene sentido, no tiene sentido  
 $c = 1$ ;  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$

3. 0, 0, 0      5. 0, 0, 0

7. 1, 1, 1

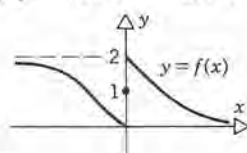
9. 0, no existe ( $\infty$ ), no existe

11. 0, 0, 0      13. -1      15. 0

17. 1      19.  $\sqrt{2}$       21. 0

23. No existe ( $\infty$ )      25. 0      27. 0      29.  $\frac{1}{2}$

31.



33.  $\delta \leq \epsilon^2$

35.  $\delta \leq \sqrt{\frac{1}{M}}$

## 2.5 Respuestas

1.  $x = -1, 1$ ; infinito  
3.  $x = 1, 2$ ; infinito      5.  $x = 0$ ; salto  
7.  $x = \pm 3n$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ; salto  
9.  $x = -1, 1$ ; salto

11.  $x = \frac{3\pi}{2} \pm$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  
removable

13.  $x = 0$ ; infinita      15. No

17. Sí;  $f(0) = 1$       19. Sí;  $f(0) = 0$

21.  $a + b = c + d + e$

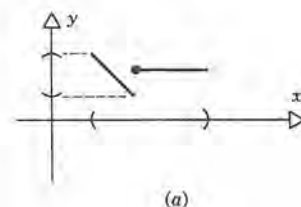
23.  $f$  no es continua en  $\epsilon = 0$ .

25. Un par de tales funciones es  $f(x) = 1$  para  $x \geq 0$ ,  
 $f(x) = -1$  para  $x < 0$ ; y  $g(x) = 2$  para  $x \geq 0$ , y  
 $g(x) = -2$  para  $x < 0$ ; en el punto  $c = 0$ .

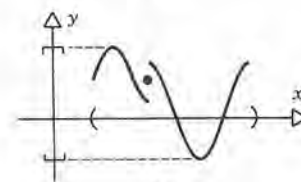
## 2.6 Respuestas

- Intervalo no cerrado;  $f$  no está acotada y no tiene ni máximo ni mínimo.
- Intervalo no cerrado, función discontinua;  $f$  no tiene máximo; la propiedad del valor intermedio no se da en algunos subintervalos.
- Función discontinua;  $f$  no tiene mínimo; la propiedad del valor intermedio no se da en algunos subintervalos.
- Intervalo no acotado, función discontinua;  $f$  no es acotada, no tiene máximo, y la propiedad del valor intermedio no se da en algunos subintervalos.
- Intervalo no cerrado;  $f$  no tiene mínimo; la propiedad del valor intermedio no se da en algunos subintervalos.
- $(-3, -2)$ ,  $(-2, -1)$ ,  $(3, 4)$
- $(-2, -1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(7, 8)$
- $(1.890625, 1.8984375)$
- $(10.2109375, 10.21875)$

27.

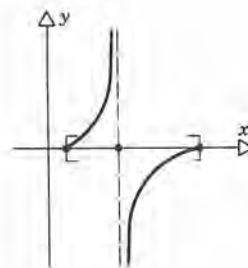


(a)



(b)

29.

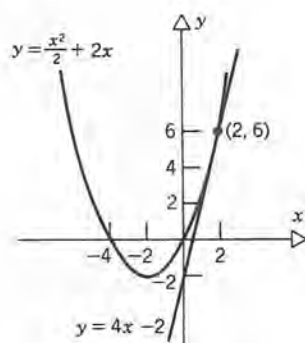




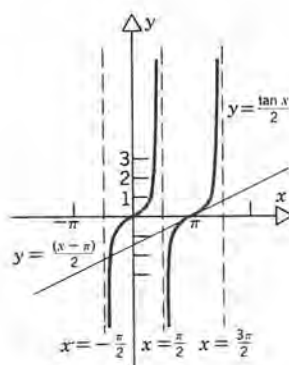
**A-8** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

**Respuestas a los problemas de repaso**

1.  $y = 4x - 2$



3.  $y = \frac{x - \pi}{2}$



5. 4

9. -2

13. No existe

17.  $\frac{1}{3}$

21. 2

25. -1

29.  $\frac{1}{3}$

33. Removable;  $f(1) = -\pi$

35. Removable;  $f(0) = 0$

37. (a) Sí; discontinuidad infinita

(b) Sí; por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq c \\ \frac{1}{x - c}, & c < x \leq b \end{cases}$$

7.  $\frac{3}{4}$

11. 1

15. 1

19.  $\frac{32}{3}$

23.  $\frac{1}{3}$

27. No existe ( $+\infty$ )

31. 0

39. (3, 4),  $r \approx 3.29$

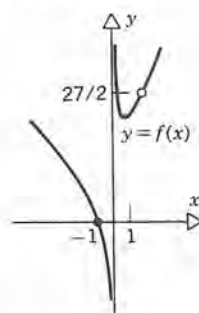
41. (a) Una de estas funciones es  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

(b) Una de estas funciones es  $g(x) = \frac{2}{x}$ .

(c) Una de estas funciones es  $h(x) = \frac{1}{x^2}$ .

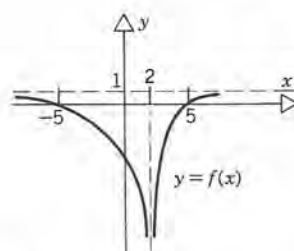
43. Una de estas funciones es

$$f(x) = (x + 1)^3(x - 2)/(x^2 - 2x).$$



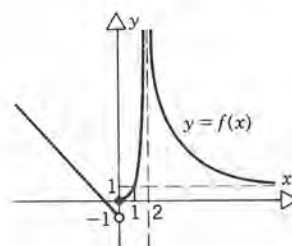
45. Una de estas funciones es

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{(x - 2)^2}.$$



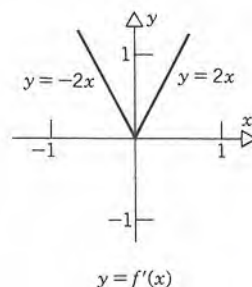
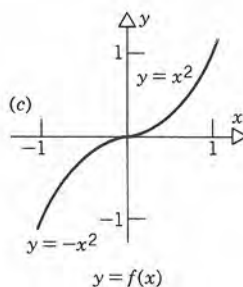
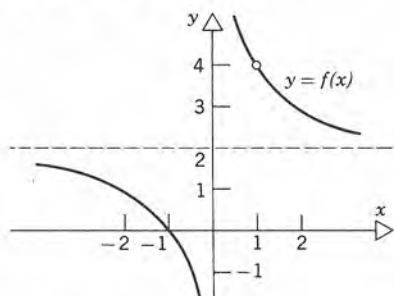
47. Una de estas funciones es

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x, & x < 0; \\ \frac{x^2}{(x - 2)^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$



49. Una de estas funciones es

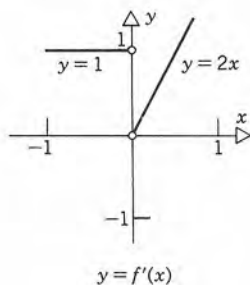
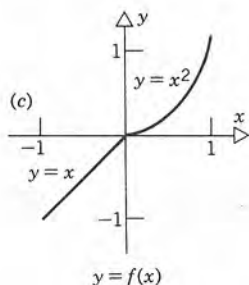
$$f(x) = 2(x^2 - 1)/(x^2 - x).$$



## CAPÍTULO 3

### 3.1 Respuestas

1.  $2x$
3.  $-2x^{-3}$
5.  $4s^3 + 2s$
7.  $1 + x^{-2}$
9.  $-\frac{1}{2\sqrt{u}(1 + \sqrt{u})^2}$
11.  $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x^{-3}$
13.  $6x^5$ ; toda  $x$
15.  $\frac{2}{3}x^{-4/7}$ ;  $x \neq 0$
17.  $-4x^{-5}$ ;  $x \neq 0$
19.  $\frac{3}{8}x^{-2/5}$ ;  $x \neq 0$
21.  $\frac{5}{2}x^{3/2}$ ;  $x > 0$
23.  $12x - y = 16$
25.  $3x + 16y = -8$
27.  $2x - y = 1$ ;  $x + y = 2$ ; no
29.  $4x + y = 4$ ;  $(1, 0), (0, 4)$
31.  $f'(-1) = -2$ ;  $f'(-a) = -b$
33.  $(9, 3)$
37. (a)  $f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$  (b) No



39. (a)  $f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$  (b)  $f'(0) = 0$

### 3.2 Respuestas

1.  $6x - 4$
3.  $20x^4 + 21x^2 - 6$
5.  $16x^3 + 8x$
7.  $3x^2 + 8x + 1$
9.  $4x^3 + 10x$
11.  $1 - 8x^{-2} + 10x^{-3}$
13.  $\frac{2x^5 - 15x^4 + 24x^3 + 15x^2 - 40x + 10}{(x^2 - 5x + 6)^2}$
15.  $6x + \frac{4}{3}x^{1/3} - x^{-2} + 6x^{-4}$
17.  $\frac{x^{1/2}(x + 3)}{2(x + 1)^2}$
19.  $4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{7(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$
21. (a)  $2x - 6$  (b)  $4x + y = 1$
- (c)  $(3, -7)$ ; es el punto mínimo de la gráfica
23. (a)  $\frac{3 - 3x^2}{(1 + x^2)^2}$  (b)  $(1, \frac{3}{2})$  y  $(-1, -\frac{3}{2})$
- (c) Valor máximo en  $(1, \frac{3}{2})$ ; valor mínimo en  $(-1, -\frac{3}{2})$
25. (a)  $5x - y = 17$ ,  $x - 4y = -8$  (b)  $19/9$
27.  $(-3, -16), (1, 4)$
29.  $(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}), (-2, 16)$
31.  $2x - y = 1$  en  $(1, 1)$ ;  $14x - y = 49$  en  $(7, 49)$
33. (a)  $t = 1, t = 2$  seg (b)  $t = \frac{3}{2}$  seg
35.  $a = 4, b = -4$
37.  $A' = 2\pi r$
39.  $V = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$ ;  $V' = \frac{\sqrt{S}}{4\sqrt{6}}$
41. (a)  $f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$
43.  $f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$

### 3.3 Respuestas

1.  $12x^2 - 12x + 10$
3.  $-\frac{2}{3}x^{-5/3} - 6x^{-4}$
5.  $-6x^{-4} - \frac{140}{27}x^{-14/3}$
7.  $12x^2 - 6$
9.  $\frac{9}{8}x^{-5/2} + 6x^{-4} - \frac{15}{2}x^{-7/2}$
11.  $\frac{x^2}{2} - 4x + c$
13.  $\frac{x^3}{3} - x^{-1} + c$
15.  $\frac{9}{8}x^{5/3} - 3x^{4/3} + c$

**A-10** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

17.  $6\sqrt{x} + c$

21.  $x^2 - 3x + 4$

25.  $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}$

29. 144 ft

19.  $-\frac{1}{2+x} + c$

23.  $x^4 - x^2 - 8$

27.  $3x^2 - 3x - 5$

31. (a) 50.4 m (b) 5.25 seg

**3.4 Respuestas**

1.  $y = -2x + 5$

3.  $4x - 3y = 2$

5.  $y = y_0 + (2x_0 - 3)(x - x_0)$

7.  $T(x; 2) = 4x - 3; \quad r(x; 2) = 0$

9.  $T(x; 0) = 2x - 4; \quad r(x; 0) = \frac{x}{3}$

11.  $T(x; 2) = \frac{4+x}{9};$

$$r(x; 2) = -\frac{x-2}{9(x+1)}, x \neq -1$$

13. 3.00593; correcto hasta la cuarta cifra decimal.

15. 2.24344; correcto hasta la cuarta cifra decimal.

17. 3.69 ft<sup>3</sup>; correcto hasta la primera cifra decimal.

19. 8.280; correcto hasta la segunda cifra decimal.

21.  $4x^3 + 4x; \quad 12x^2 + 4$

23.  $\frac{4x}{(x^2+1)^2}; \quad \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$

25.  $6x - \frac{4}{3}x^{1/3} - (x+1)^{-2};$   
 $6 - \frac{4}{3}x^{-2/3} + 2(x+1)^{-3}$

27.  $\frac{1}{(x+2)^2}; \quad -\frac{2}{(x+2)^3}$

31. (a) 0.5436 ft<sup>3</sup> (b)  $\frac{0.5436}{27} \approx 0.0201$

(c)  $\frac{(27)(0.02)}{27} = 0.02$

**3.5 Respuestas**

1.  $(f \circ g)(x) = 6x + 19, \quad -\infty < x < \infty;$

$(g \circ f)(x) = 6x + 3, \quad -\infty < x < \infty$

3.  $(f \circ g)(x) = -x, \quad -1 \leq x < \infty;$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{2-x^2}, \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

5.  $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}, \quad -\infty < x \leq 1$

o  $2 \leq x < \infty; \quad (g \circ f)(x) = x - 3\sqrt{x} + 2,$   
 $0 \leq x < \infty$

7.  $(f \circ g)(x)$  no existe

$(g \circ f)(x) = -(x - 3\sqrt{x} + 6), \quad 0 \leq x < \infty$

9.  $(f \circ g)(x) = \cos 2\sqrt{x^2 - 4}, \quad -\infty < x \leq -2$

o  $2 \leq x < \infty; \quad (g \circ f)(x)$  no existe

11.  $4(z+1)x$  13.  $\frac{12z}{(z^2+1)^2}$  15.  $\frac{2z-3}{(x+1)^2}$

17.  $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}, \quad -1 < x < \infty$

19.  $\frac{1}{3}x(x^2+5)^{4/3}, \quad -\infty < x < \infty$

21.  $-1, \quad -4 < x < \infty$

23.  $-16$  25.  $\frac{20}{3}$

27.  $6(2x-1)^2$

29.  $50 \left( \frac{x+1}{2} \right)^{99}$

31.  $\frac{(x-1)^3(9x-13)}{\sqrt{2x-3}}$

33.  $\frac{2}{3}x^{-5/2}\sqrt{2x-1}$

35.  $8x^2 + 4(z+1)$

37.  $-\frac{8}{3}x^4(x^3+1)^{-3/2} + 3x(x^3+1)^{-1/2}$

39.  $\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

41.  $-f'(-x)$

43.  $af'(ax)$

45.  $a^n f^{(n)}(ax)$

47.  $2u'(x)u''(x)$

49.  $2u'(x)[u''(x)]^2 + [u'(x)]^2 u'''(x)$

51.  $\frac{1}{3}(x-2)^5 + c$

$\frac{1}{3}(2x-1)^6 + c$

55.  $\frac{3}{14}(2x+1)^{7/3} + c$

$(x^2+4)^{3/2} + c$

59.  $f'\{g[h(x)]\}g'[h(x)]h'(x)$

61.  $\frac{g(gf'' - fg'') - 2g'(gf' - fg')}{g^3}$

63.  $-8\pi r^2$

65. 216 in<sup>3</sup>/seg

**3.6 Respuestas**

1.  $-4 \sin 4x$

3.  $4 \cos 4x + 6 \sin 2x$

5.  $2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x$

7.  $4 \sin 2x \cos 2x$

9.  $(1-x \sec x)(\sec x - \tan x)$

11.  $\frac{x \cos x - 2 \sin x - 2}{(x - \cos x)^2}$

13.  $\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^{3/2} (1 - \cos x)^{1/2}} = \frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1 + \cos x}$

15.  $-\sin x \cos(\cos x)$

17.  $2 \sec^2(\sec^2 x) \sec^2 x \tan x$

19.  $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$

21.  $\frac{2}{3} \sin 3x + c$

23.  $-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + c$

25.  $2 \sec \frac{x}{2} + c$

27.  $-\frac{1}{3} \cos 4x + c$

29.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

31.  $-\frac{1}{2} \cos x^2 + c$

33.  $\frac{1}{2} \sin(x - \pi)^2 + c$

35.  $\cos x$

37.  $-\left(\frac{1}{2}\right)^{11} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

39.  $2a^2 \sec^2 ax \tan ax$  41.  $\sec x (\tan^2 x + \sec^2 x)$

43.  $8 \csc^2 2x \cot 2x$

45.  $y = 5 - 4\sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

47.  $v = 6 \cos 3t + 6 \sin 2t;$

$a = -18 \sin 3t + 12 \cos 2t$



$$49. f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x - 3 \sin x + \frac{3}{\sqrt{2}} - 1$$

$$51. a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1 + \pi/4}{\sqrt{2}}, f' \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

55. 1.0000, tres cifras decimales

$$57. 1.5433, \text{ una cifra decimal} \quad 59. \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ mi/hr}$$

### 3.7 Respuestas

$$1. (b) \frac{y-2x}{2y-x} \quad (c) -1$$

$$3. (b) -\frac{4x+y}{x+4y} \quad (c) -\frac{2}{3}$$

$$5. (b) \frac{1}{3y^2+1} \quad (c) \frac{1}{4}$$

$$7. (b) -\frac{2y-3x(x^2+y^2)^{1/2}}{2x-3y(x^2+y^2)^{1/2}} \quad (c) \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$9. (b) \frac{\sin x \cos x}{\sin y \cos y} \quad (c) 1$$

$$11. 6 \quad 13. -\frac{3}{32} \quad 15. 3x - 4y = 2$$

$$17. (4 - \pi)x + (4 + \pi)y = 2\pi$$

$$19. 4x + 5y = -1$$

$$21. (\pi - 2\sqrt{3}) \left( x - \frac{\pi}{6} \right) - (3\pi - 2\sqrt{3}) \left( y - \frac{\pi}{3} \right) = 0$$

$$23. \frac{8\omega A^2}{A^3 + 4} \quad 27. 2x \quad 29. (1 + x^2)^{-1}$$

### Respuestas a los problemas de repaso

$$1. 1 + \frac{1}{2}x^{-1/2} \quad 3. -(x+1)^{-2} \quad 5. \frac{1}{2}t^{-1/2} - t^{-2}$$

$$7. (a) 6x - \frac{3}{2}x^{3/2}; \quad (b) y = 4x$$

$$9. (a) 3x^2 - 2x + 1; \quad (b) y = 41x - 113$$

$$11. (a) \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}; \quad (b) y = -\frac{15}{289}x + \frac{128}{289}$$

$$13. (a) \frac{x^{1/2}(3-x^2)}{2(1+x^2)^2}; \quad (b) y = -\frac{13}{289}x + \frac{188}{289}$$

$$15. f'(x) = 4x^3 + 4x; \quad x = 0$$

$$17. f'(x) = \frac{7x^2 - 32x + 28}{(x^2 - 4)^2}; \quad x \approx 1.179, x \approx 3.392$$

$$19. (a) \frac{1}{4}x^4 + 3x - \frac{21}{4}; \quad (b) 48$$

$$21. (a) \frac{2}{3}x^{5/3} + x^{-1} - \frac{18}{5}; \quad (b) \frac{2}{3}(4^{-1/3}) + \frac{1}{32} \approx 0.4512$$

$$23. (a) 2x^3 - 5x^2 - 4x + 2; \quad (b) x^2 + 44x + 58$$

$$25. \frac{(x^2 - 1)(7x^2 + 24x^{3/2} + 1)}{2x^{1/2}(x^{1/2} + 3)}$$

$$27. 3(x^{-1/2} - 1)\sin[3(\sqrt{x} - 1)^2 - 1]$$

$$29. -\frac{9x}{4} \cos(x^{3/2} + 1) - \frac{3}{4\sqrt{x}} \sin(x^{3/2} + 1)$$

$$31. \frac{2t(t^4 + 2t^2 + 2)}{(t^2 + 1)^2}$$

$$33. \frac{-2ax(x^2 - 1)\sin(ax^2 + b) - 2x \cos(ax^2 + b)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$35. -6 \sin s \cos s(4 + \sin^2 s)^2 \sin[(4 + \sin^2 s)^3 - 1]$$

$$37. 2(x - \pi) \cos(3x^{3/2}) \sec[(x - \pi)^2] \tan[(x - \pi)^2] - \frac{2}{3}\sqrt{x} \sin(3x^{3/2}) \sec[(x - \pi)^2]$$

$$39. -\frac{2}{3} \cos 3x + c$$

$$41. \frac{1}{2} \sin^2 2x + c$$

$$43. -\cos(x^3 + 1) + c$$

$$45. [\sin x]^{-1} + c$$

$$47. (a) T(x; x_0) = x_0^3 + x_0^{1/2}$$

$$+ (3x_0^2 + \frac{1}{2}x_0^{-1/2})(x - x_0)$$

$$r(x; x_0) = \frac{(x^3 + x^{1/2}) - (x_0^3 + x_0^{1/2})}{x - x_0}$$

$$= \left( 3x_0^2 + \frac{1}{2}x_0^{-1/2} \right)$$

$$(b) x_0 = 1; \quad T\left(\frac{1}{2}; 1\right) = \frac{37}{8}$$

$$(c) 0.01097; \quad 0.5485\% \text{ error}$$

$$49. (a) T(x; x_0) = \frac{x_0 + 1}{\sqrt{x_0}}$$

$$+ \frac{1}{2}(x_0^{-1/2} - x_0^{-3/2})(x - x_0)$$

$$r(x; x_0) = \frac{[(x+1)/\sqrt{x}] - [(x_0+1)/\sqrt{x_0}]}{x - x_0}$$

$$= \frac{1}{2}(x_0^{-1/2} - x_0^{-3/2})$$

$$(b) x_0 = 9; \quad T\left(\frac{80}{9}; 9\right) = \frac{806}{45}$$

$$(c) -3.83 \times 10^{-5}; \quad 1.15 \times 10^{-3}\% \text{ error}$$

$$51. (a) (1, \sqrt{2}), \quad (b) y' = -\sqrt{2}, y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$53. (a) (1, 1), \quad (b) y' = -1, y'' = \frac{4}{3}$$

## CAPÍTULO 4

### 4.1 Respuestas

$$1. \text{ Sí, } c = \frac{1}{2}$$

$$3. \text{ No; } c = 0$$

$$5. \text{ No; ninguna } c$$

$$7. (a) \text{ Proceder como en el ejemplo 1. } (b) |b| \leq 2$$

### 4.2 Respuestas

$$1. (a) x = -2$$

$$(b) \text{ Decreciente en } (-\infty, -2]; \text{ creciente en } [-2, \infty)$$

$$(c) \text{ Cóncava hacia arriba en } (-\infty, \infty)$$

$$(d) x = -2 \text{ es un punto mínimo local}$$

$$3. (a) x = -1, x = 3$$

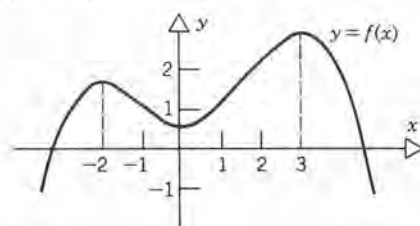
$$(b) \text{ Creciente en } (-\infty, -1] \text{ y } [3, \infty); \text{ decreciente en } [-1, 3]$$

**A-12** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

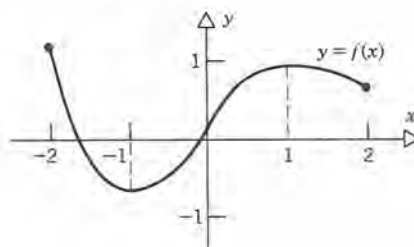
- (c) Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 1]$ ; cóncava hacia arriba en  $[1, \infty)$   
 (d)  $x = -1$  es un punto máximo local;  
 $x = 3$  es un punto mínimo local
5. (a)  $x = -1$   
 (b) Decreciente en  $(-\infty, -1)$  y  $(-1, \infty)$   
 (c) Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -1)$ ; cóncava hacia arriba en  $(-1, \infty)$   
 (d)  $x = -1$  no es ninguno de ellos
7. (a)  $x = 0$   
 (b) Creciente en  $(-\infty, 0]$ ; decreciente en  $[0, \infty)$   
 (c) Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 0]$  y en  $[0, \infty)$   
 (d)  $x = 0$  es un punto máximo local
9. (a)  $x = -\pi, x = -\frac{5\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = \pi$   
 (b) Creciente en  $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right]$  y en  $\left[-\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ ; decreciente en  $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right]$   
 (c) Cóncava hacia abajo en  $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$  y en  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ; cóncava hacia arriba en  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$   
 (d)  $x = -\pi$  y  $x = -\frac{\pi}{6}$  son puntos mínimos locales;  
 $x = -\frac{5\pi}{6}$  y  $x = \pi$  son puntos máximos locales.
11. (a)  $x = 0, x = \pm 2, x = \pm 2\sqrt{3}, x = \pm 4$   
 (b) Decreciente en  $[-4, -2\sqrt{3}]$ ,  $[-2, 0]$ , y en  $[2, 2\sqrt{3}]$ ; creciente en  $[-2\sqrt{3}, -2]$ ,  $[0, 2]$ , y en  $[2\sqrt{3}, 4]$   
 (c) Cóncava hacia arriba en  $[-4, -2\sqrt{3}]$  y en  $[2\sqrt{3}, 4]$ ; cóncava hacia abajo en  $[-2\sqrt{3}, 0]$  y en  $[0, 2\sqrt{3}]$   
 (d)  $x = \pm 2$  y  $x = \pm 4$  son puntos máximos locales;  
 $x = 0$  y  $x = \pm 2\sqrt{3}$  son puntos mínimos locales.
13. (a)  $x = 0, x = \pm 2$   
 (b) Creciente en  $[-2, 0]$ ; decreciente en  $[0, 2]$   
 (c) Cóncava hacia abajo para  $[-2, 2]$   
 (d)  $x = 0$  es punto máximo local;  $x = \pm 2$  son puntos mínimos locales
15. (a) Máximo en  $x = -4$ ; mínimo en  $x = -2$   
 (b) Mínimo en  $x = -2$ ; no tiene máximo
17. (a) Máximos en  $x = -1$  y en  $x = 5$ ; mínimo en  $x = 3$   
 (b) No hay máximo ni mínimo

19. (a) Mínimo en  $x = -1$ ; no hay máximo  
 (b) Máximo en  $x = 0$ ; mínimo en  $x = 2$
21. (a) Máximo en  $x = 0$ ; no hay mínimo  
 (b) Máximo en  $x = 0$ ; mínimo en  $x = \pm 1$
23. (a) Máximo en  $x = \pi$ ; mínimo en  $x = -\frac{\pi}{6}$   
 (b) Máximo en  $x = \frac{\pi}{2}$ ; mínimo en  $x = -\frac{\pi}{6}$
25. (a) Máximo en  $x = \pm 2$  y  $x = \pm 4$ ; mínimos en  $x = 0$  y en  $x = \pm 2\sqrt{3}$   
 (b) Máximos en  $x = \pm 2$ ; mínimo en  $x = 0$
27. (a) Máximo en  $x = 0$ ; mínimo en  $x = \pm 2$   
 (b) No hay máximo ni mínimo

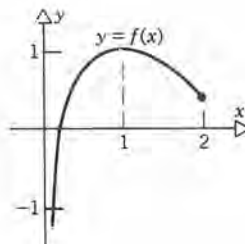
29.



31.



33.



35.  $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = 1$

## 4.3 Respuestas

1.  $x = y = \sqrt{k}$
7.  $r = \frac{V^{1/3}}{2}$ ,  $h = \frac{4V^{1/3}}{\pi}$ ,  $\frac{h}{d} \approx 1.27$
9. (a)  $x = h = V^{1/3}$  (b)  $x = 2h = (2V)^{1/3}$
11.  $l = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$  ft
13.  $\frac{2a^3}{27}$
15. (a)  $\frac{9l}{9 + 4\sqrt{3}}$  en el triángulo  
(b) Ninguno en el triángulo
17. 1:40 A.M.;  $5\sqrt{2} \approx 7.071$  millas de distancia
19.  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

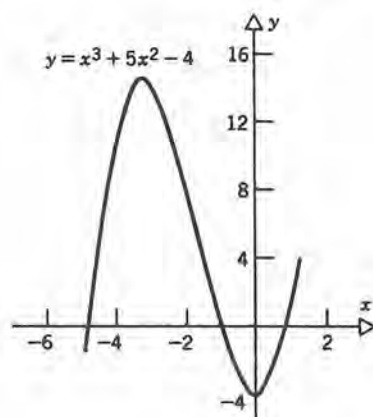
23. (a) 22 6 23 (b) 43.667 (c) 30
25. 11

## 4.4 Respuestas

1.  $\frac{1}{18\pi} \approx 0.0177$  ft/min
3.  $7\sqrt{3} \approx 12.124$  in.<sup>2</sup>/min
5.  $\frac{3}{2}$
7.  $\frac{7}{80} \approx 0.0875$  lb/in.<sup>2</sup> seg
9.  $4\sqrt{3} \approx 6.928$  in.<sup>2</sup>/min
11.  $\frac{1}{2}$  ft/seg
13.  $\frac{18\pi}{5} \approx 11.310$  cm<sup>3</sup>/min
15. 120 cm<sup>2</sup>/min
17.  $\frac{8}{25\pi} \approx 0.102$  ft/min
19. -4.81 ft/min
21.  $\frac{1}{4}$  ft/min

## 4.5 Respuestas

1. 1.2360680
3. 1.1892071
5. 0.8284271
7. 0.8603336
9. 2.2889297
11. 1.4375649
15. 7.2801099
17. 1.7099759
19. 2.1867241
21.  $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$
23. (a)  $x_0 = 0.5 \Rightarrow x_n \approx 0.8284271$  para  $n \geq 4$   
(b)  $x_0 = 0.1 \Rightarrow x_n \approx 0.8284271$  para  $n \geq 7$   
(c)  $x_0 = -0.1 \Rightarrow x_n \approx -4.8284271$  para  $n \geq 6$   
(d)  $x_0 = -0.5 \Rightarrow x_n \approx -1.0000000$  para  $n \geq 4$



## Respuestas a los problemas de repaso

1.  $b^2 < 3a$
3. Cierto
5. Falso
7. No
9. No
11. Sí,  $c = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$
13. Sí,  $c$  debe cumplir con  $\tan c = \pm\sqrt{(4/\pi)-1}$ .
15. No.
19.  $c$  debe cumplir con  $\sin c = -1/\pi$
21.  $c = (1 \pm \sqrt{13})/6$
23. Puntos críticos:  $(-\pi/2, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(\pi/2, 1)$ ; decreciente en  $-\pi/2 \leq x \leq 0$ ; creciente en  $0 \leq x \leq \pi/2$ ; cóncava hacia abajo en  $-\pi/2 \leq x \leq 0$  y  $0 \leq x \leq \pi/2$ ; máximos globales en  $(-\pi/2, 1)$  y  $(\pi/2, 1)$ ; mínimo global en  $(0, 0)$ .
25. Puntos críticos:  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ; creciente en  $-1 \leq x \leq 1$ ; cóncava hacia abajo en  $-1 \leq x \leq 0$  y en  $0 \leq x \leq 1$ ; mínimo global en  $(-1, -1)$ , máximo global en  $(1, 1)$ .
27. Punto crítico:  $(0, 1)$ ; decreciente en  $-\infty < x < -1$  y en  $-1 < x \leq 0$ , creciente en  $0 \leq x < 1$  y en  $1 < x < \infty$ ; cóncava hacia abajo en  $-\infty < x < -1$  y en  $1 < x < \infty$ , cóncava hacia arriba en  $-1 < x < 1$ ; mínimo local en  $(0, 1)$ .
29. (a)  $(1, 1)$   
(b)  $(1/2^{1/3}, (1/2) + (1/4^{1/3}))$   
(c)  $(\pi/2, 1)$   
(d)  $(\pm b/2, b/2)$  si  $b \geq 0$ ;  $(0, 0)$  si  $b < 0$
31. Triángulo equilátero cuyo lado es  $2\sqrt{A}/(3)^{1/4}$
33.  $t = 4$  seg,  $x = 40$  m



**A-14** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

35. (a)  $\frac{dP}{dr} = \frac{3\pi\sqrt{r}}{R\sqrt{g}}$   
 (b)  $\frac{dP}{dv} = -\frac{6\pi R^2 g}{v^4}$   
 (c)  $\frac{da_r}{dv} = \frac{4v^3}{R^2 g}$

37.  $b = \frac{p[1 + (\pi/32)]}{4 + (\pi/16)}$

41. (a)  $\frac{r}{2}$ ; (b)  $\frac{x}{4}$       43. 4 ft      45.  $\frac{250}{7}$  acres

47. (a)  $\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}$ ; (b) los puntos críticos cumplen  
 con  $ay^2 - bx^2 = 0$ .

## CAPÍTULO 5

### 5.1 Respuestas

1. Origen      3. Ninguna de las simetrías      5. Eje y

7. Eje x      9. Eje x, eje y, origen

11.  $x = -2$ ,  $y = 1$

13. No hay asíntota vertical,  $y = 1$

15.  $x = -1$ ,  $y = -1$ ,  $y = 1$

17.  $x = 0$ ,  $y = \frac{x}{2}$

19.  $x = 0$       21.  $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ,  $y = -\frac{x}{\sqrt{2}}$

23. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -1]$ ; cóncava hacia arriba en  $[-1, \infty)$ ;  $x = -1$  es un punto de inflexión

25. Cóncava hacia arriba para toda  $x$ ; no tiene puntos de inflexión

27. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -2)$ ; cóncava hacia arriba en  $(-2, \infty)$ ; no tiene puntos de inflexión

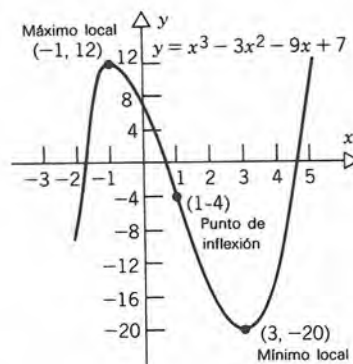
29. Cóncava hacia abajo en  $[0, \frac{2}{3}]$ ; cóncava hacia arriba en  $[\frac{2}{3}, \infty)$ ;  $x = \frac{2}{3}$  es un punto de inflexión

31. Cóncava hacia arriba en  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ , y en

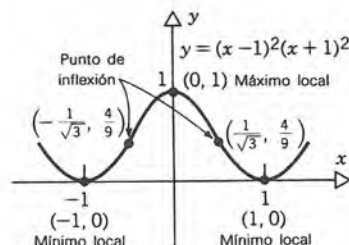
$\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ ; cóncava hacia abajo en  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  y en

$\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ ;  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$  son puntos de inflexión.

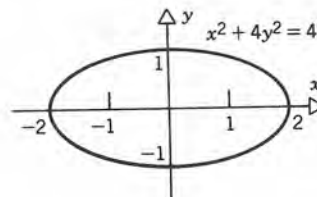
33.



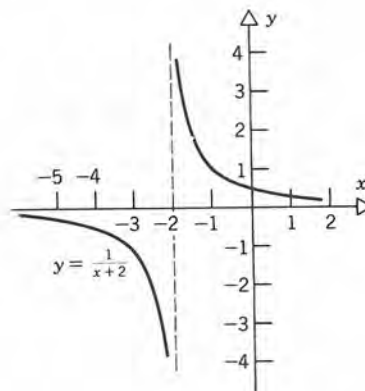
35.



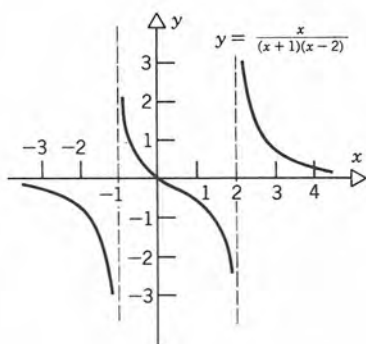
37.



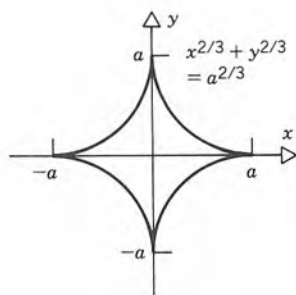
39.



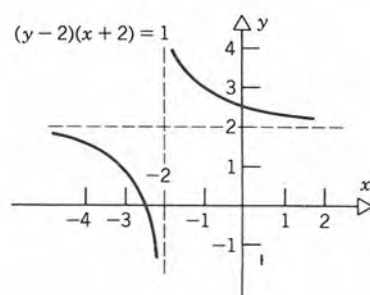
41.



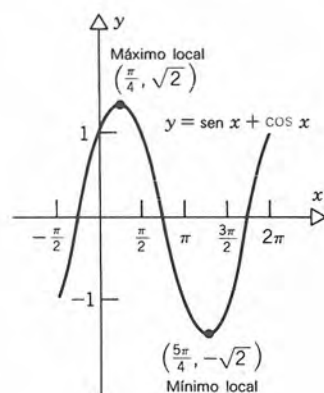
43.



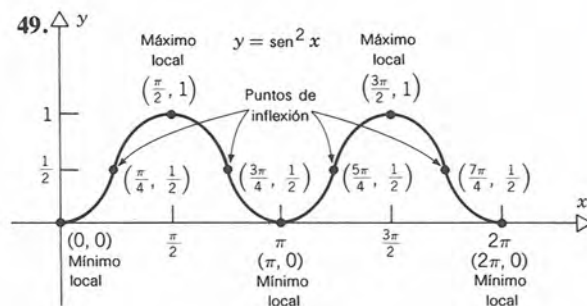
45.



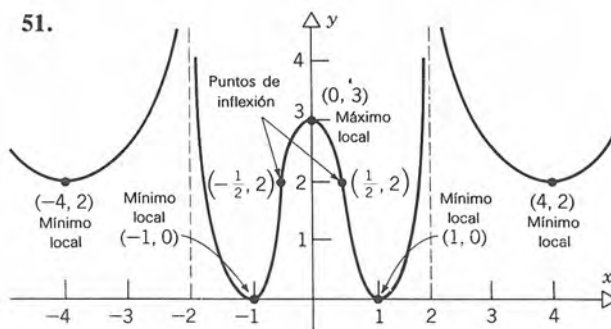
47.



49.

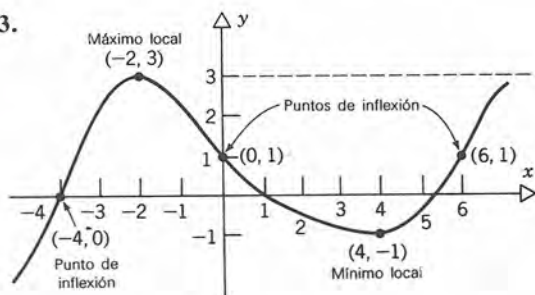


51.



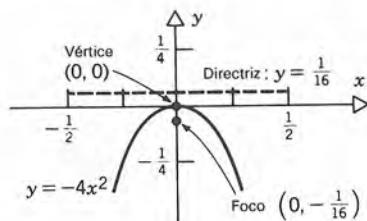
# A-16 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

53.

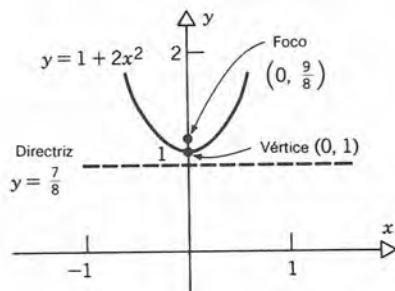


## 5.2 Respuestas

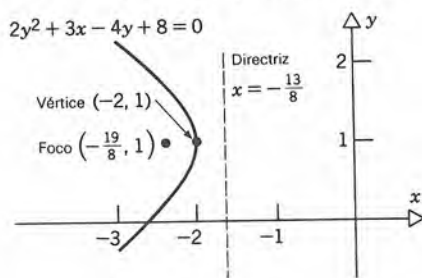
1. Vértice  $(0, 0)$ ; foco  $(0, -\frac{1}{16})$ ; directriz  $y = \frac{1}{16}$



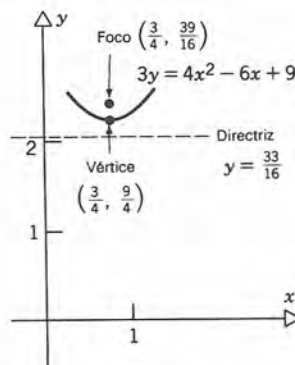
3. Vértice  $(0, 1)$ ; foco  $(0, \frac{9}{8})$ ; directriz  $y = \frac{7}{8}$



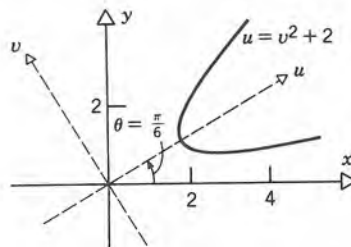
5. Vértice  $(-2, 1)$ ; foco  $(-\frac{19}{8}, 1)$ ; directriz  $x = -\frac{13}{8}$



7. Vértice  $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ ; foco  $(\frac{3}{4}, \frac{39}{16})$ ; directriz  $y = \frac{33}{16}$



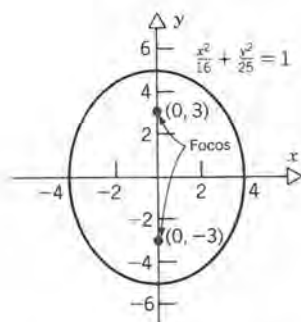
9.  $9(y - 1) = -2(x - 2)^2$   
11.  $12(y - 1) = (x - 1)^2$   
13.  $4(y + 1) = 3(x - 2)^2$   
15.  $8(x + 2) = (y - 3)^2$   
17.  $y^2 = 10x + 5$   
19.  $8(x - 1) = (y - 2)^2$   
23.  $h = -\frac{D}{2A}$ ,  $k = -\frac{E}{2C}$ ,  $\alpha = A$ ,  
 $\gamma = C$ ,  $\kappa = F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$   
27. (a)  $(\cos^2 \theta - 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \sin^2 \theta)u^2$   
 $+ (4 \sin \theta \cos \theta - 2\sqrt{3} [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta])uv$   
 $+ (\sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta)v^2$   
 $- 2(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)u$   
 $+ 2(\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta)v + 8 = 0$   
(b)  $\theta = \frac{\pi}{6} \pm n\pi$  o  $\theta = \frac{2\pi}{3} \pm n\pi$   
(c)  $v^2 = u - 2$  para  $\theta = \frac{\pi}{6}$



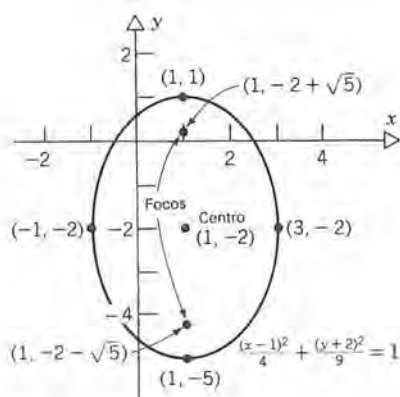
## 5.3 Respuestas

1. Centro  $(0, 0)$ ; focos  $(0, \pm 3)$ ; semieje mayor  $b = 5$ ; semieje menor  $a = 4$ .

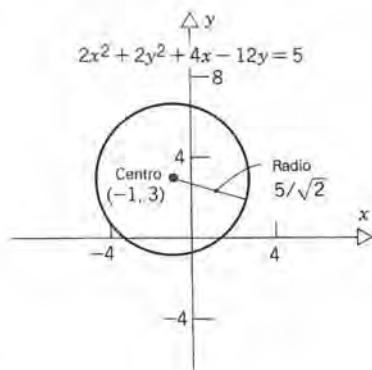




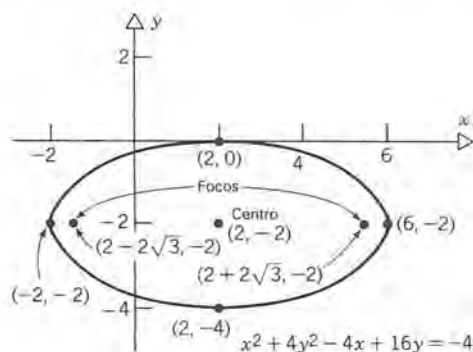
3. Centro  $(1, -2)$ ; focos  $(1, -2 \pm \sqrt{5})$ ; semieje mayor  $b = 3$ ; semieje menor  $a = 2$



5. Centro  $(-1, 3)$ ; La gráfica es un círculo de radio  $\frac{5}{\sqrt{2}}$



7. Centro  $(2, -2)$ ; focos  $(2 \pm 2\sqrt{3}, -2)$ ; semieje mayor  $a = 4$ ; semieje menor  $b = 2$



9.  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

11.  $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

13.  $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$  15.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

17.  $192x^2 + 96xy + 220y^2 - 432x - 316y = 2201$

19. (b) Los focos tienden al centro.

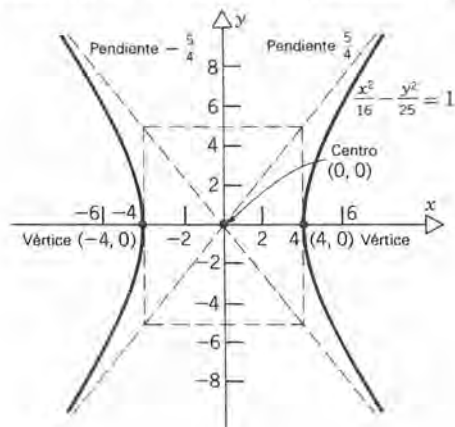
(c) Cuando  $e \rightarrow 1$  estando fija  $c$ , la elipse coincide más y más con el segmento de recta que une a los dos focos.

21.  $\frac{3}{5}$  23.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  25.  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

27.  $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{12} = 1$

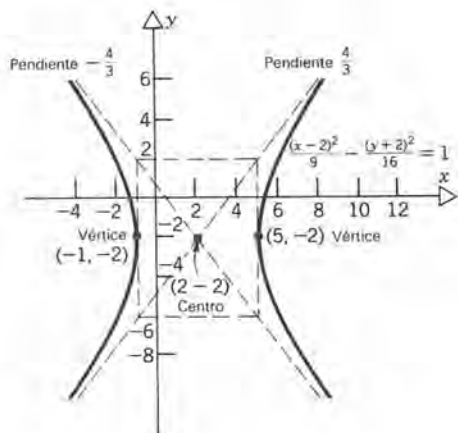
## 5.4 Respuestas

1. Centro  $(0, 0)$ ; vértices  $(\pm 4, 0)$ ; pendientes  $\pm \frac{5}{4}$

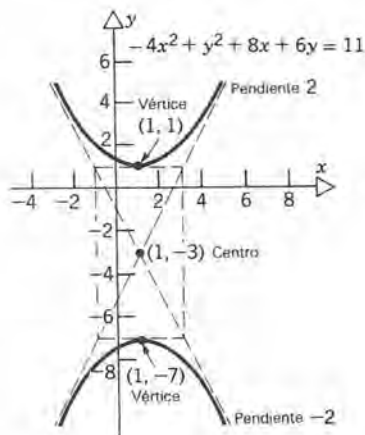


**A-18** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

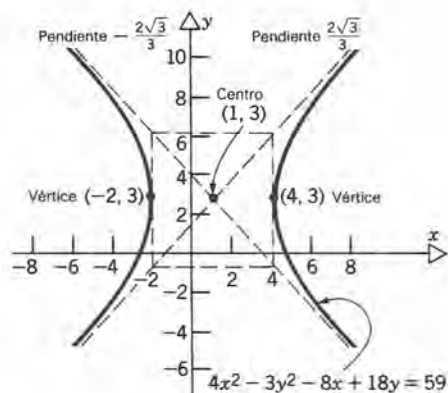
3. Centro  $(2, -2)$ ; vértices  $(5, -2)$  y  $(-1, -2)$ ;  
pendientes  $\pm \frac{4}{3}$



5. Centro  $(1, -3)$ ; vértices  $(1, -7)$  y  $(1, 1)$ ;  
pendientes  $\pm 2$



7. Centro  $(1, 3)$ ; vértices  $(-2, 3)$  y  $(4, 3)$ ;  
pendientes  $\pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$



9.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$     11.  $-\frac{(x+1)^2}{64/5} + \frac{(y+1)^2}{16/5} = 1$

13.  $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

15.  $-\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$

17.  $7x^2 - 24xy - 2x + 24y - 41 = 0$

19. (b) Cuando  $e \rightarrow 1$  la hipérbola tiende al eje transversal del que se omite el segmento que une a los focos. Cuando  $e \rightarrow \infty$ , la hipérbola tiende al eje conjugado.

21.  $\frac{\sqrt{41}}{4}$

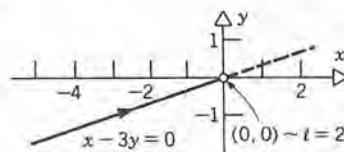
23.  $\sqrt{\frac{7}{3}}$

25.  $\frac{(x-1)^2}{16/9} - \frac{(y-2)^2}{20/9} = 1$

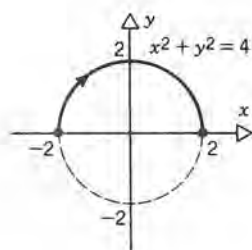
27.  $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

**5.5 Respuestas**

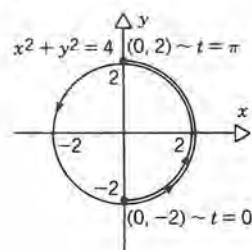
1.  $x - 3y = 0$



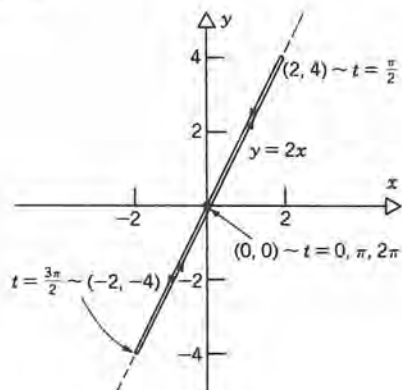
3.  $x^2 + y^2 = 4$



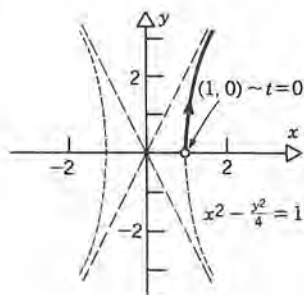
5.  $x^2 + y^2 = 4$



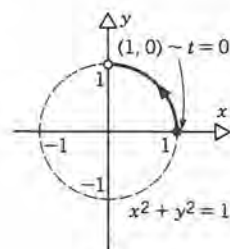
7.  $y = 2x$



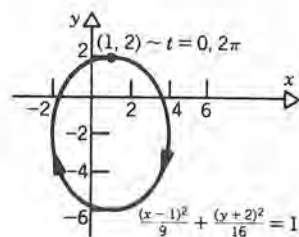
9.  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$



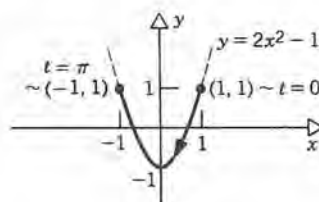
11.  $x^2 + y^2 = 1$



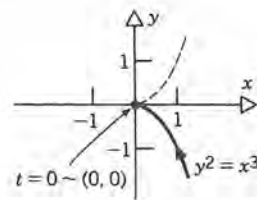
13.  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$



15.  $y = 2x^2 - 1$



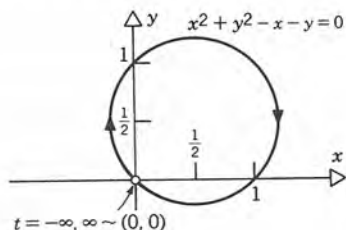
17.  $y^2 = x^3$



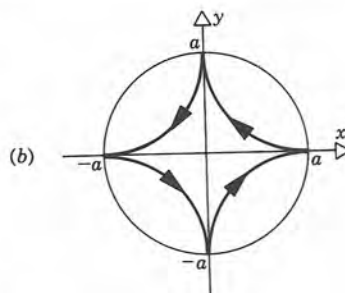


**A-20** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

19.  $x^2 + y^2 = x + y$



37. (a)  $x = a \cos^3 \theta$ ,  $y = a \sin^3 \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$



21.  $3x - 2y - 6\sqrt{2} = 0$

23.  $\sqrt{3}x - 2y + 1 = 0$

25.  $2x - y - 5 + \sqrt{2} = 0$

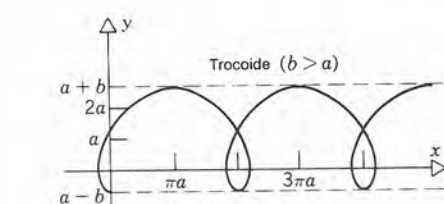
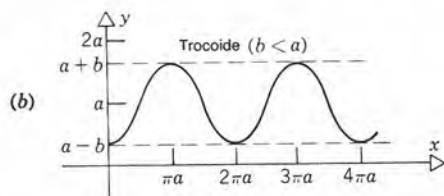
27.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3} \tan 2t$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{9} \sec^3 2t$

29.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3} \cot t$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{9} \csc^3 t$

31.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2(t-1)}{3t^2}$ ;  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(2-t)}{9t^3}$

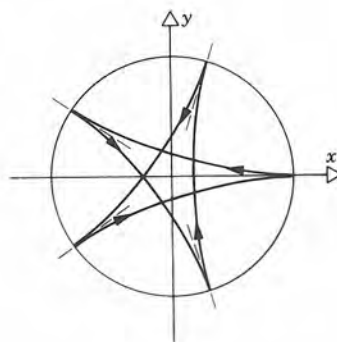
33.  $x^2 + 4xy + 4y^2 - 12x - 23y + 33 = 0$ ;  
parábola

35. (a)  $x = a\theta - b \sin \theta$ ,  $y = a - b \cos \theta$ ,  
 $0 \leq \theta \leq \infty$



(c)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

39.



**Respuestas a los problemas de repaso**

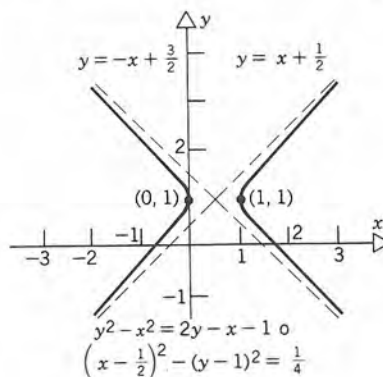
1. Origen

3. Eje x, eje y, origen

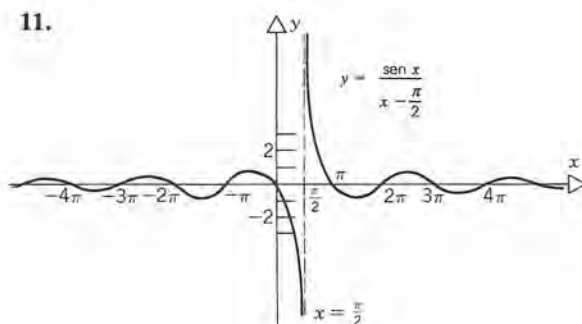
5.  $y = \pm 1$

7.  $y = \pm \frac{4x}{3}$

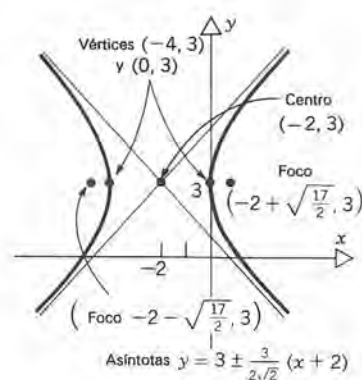
9.



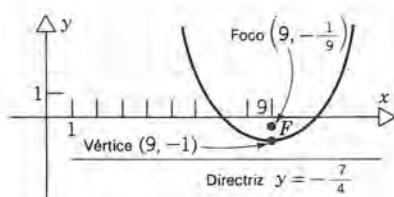
11.



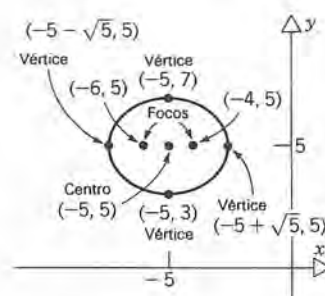
19.



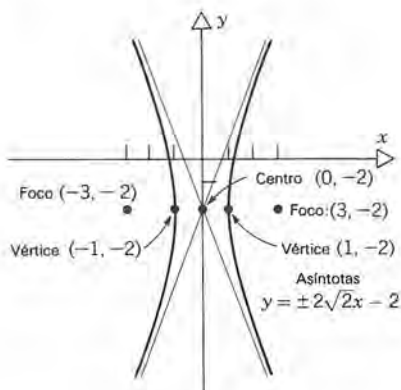
13.



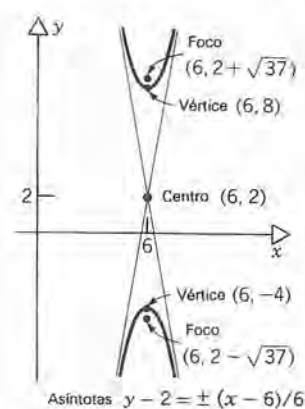
21.



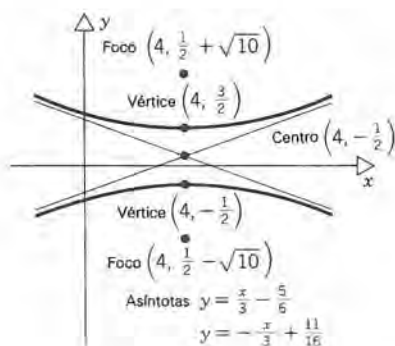
15.



23.



17.



25.  $12(y + 1) = -(x - 1)^2$

27.  $\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y - 1)^2}{25} = 1$

29.  $(x + 1)^2 - \frac{y^2}{35} = 1$

31.  $\frac{(y - 3)^2}{16} - \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$

33.  $3(y + 3) = \pm(x - 1)^2$

**A-22** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

35.  $(x - 3)^2 + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$  o bien

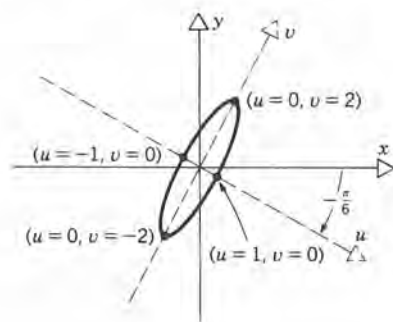
$(x - 3)^2 + \frac{(y + 5)^2}{9} = 1$

37.  $(y - 2)^2 = 6\left(x + \frac{5}{2}\right)$

39.  $\frac{(x - 4)^2}{1/4} - \frac{(y - 1)^2}{15/4} = 1$

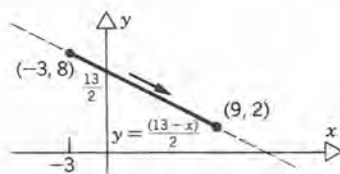
41.  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ; si  $x = \frac{\sqrt{3}u + v}{2}$ ,

$y = \frac{-u + \sqrt{3}v}{2}$ , entonces  $u^2 + \frac{v^2}{4} = 1$

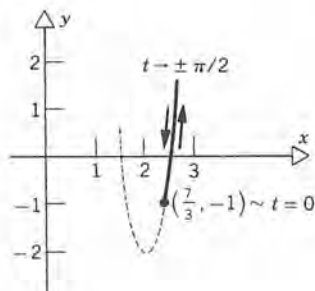


43.  $x_0 < -3$  o  $x_0 > 3$

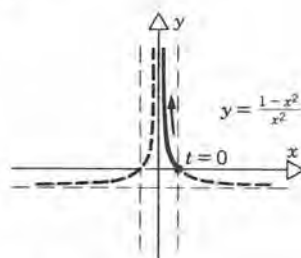
45.  $x + 2y = 13$



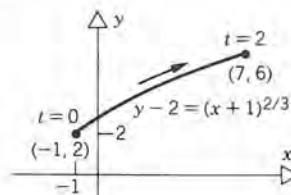
47.  $y = 9(x - 2)^2$



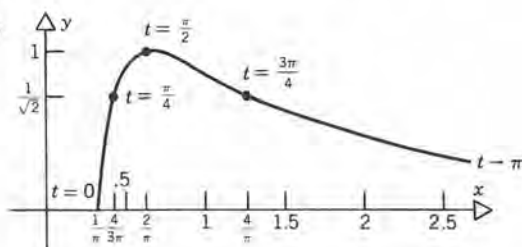
49.  $y = \frac{1 - x^2}{x^2}$



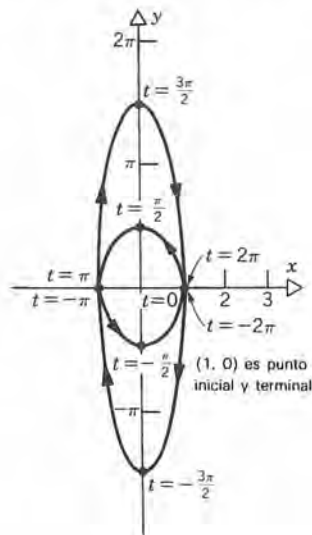
51.  $y - 2 = (x + 1)^{2/3}$



53.



55.





$$57. \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2 \cos \pi t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4 \cos^3 \pi t}$$

la tangente es  $x = 1$

$$59. \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9t^4}$$

la tangente es  $y - \frac{5}{4} = \frac{4}{3}(x - \frac{1}{3})$

## CAPÍTULO 6

### 6.1 Respuestas

$$1. \frac{25}{12} \quad 3. 31 \quad 5. -\frac{n}{n+1}$$

$$7. 1000 \quad 9. \frac{50}{51} \quad 11. \sqrt{262} - 1$$

$$15. x - x^2 + x^3 - x^4 + \cdots + (-1)^{n+1} x^n$$

$$17. \frac{b-a}{n} \left\{ f(a) + f\left[a + \frac{b-a}{n}\right] + f\left[a + \frac{2(b-a)}{n}\right] + \cdots + f\left[a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right] \right\}$$

$$19. \sum_{n=2}^{26} \frac{(-1)^n}{n} \quad 21. \sum_{k=1}^{14} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$29. n^2 \quad 31. n(2-n)$$

$$33. \frac{n(n+1)(3n^2+11n+10)}{6}$$

$$35. (a) s_n = \frac{b^2}{n^2} [1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)]$$

$$\sigma_n = \frac{b^2}{n^2} (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$(b) |E_n| \leq \frac{b^2}{2n}$$

$$(c) \frac{b^2}{2}$$

$$37. S_n = \frac{b^2}{2n^2} [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)]$$

$$= \frac{b^2}{2n^2} (n^2) = \frac{b^2}{2}. \quad \text{Véase el resultado del problema 29.}$$

### 6.2 Respuestas

$$1. \frac{1}{2} \quad 3. \frac{b-a}{n}$$

$$5. 2115/3553 \approx 0.5953 \quad 7. \frac{5}{8}$$

$$9. \sigma = \frac{538}{840} \approx 0.7595, \quad s = \frac{533}{840} \approx 0.6345$$

$$11. \sigma = \frac{339}{280} \approx 1.3038, \quad s = \frac{47}{32} \approx 0.9038$$

$$13. \sigma = \frac{11}{8}, \quad s = \frac{5}{8}$$

15. $n$	$s_n$	$\sigma_n$	$(s_n + \sigma_n)/2$	$S_n$
10	0.610509	0.710509	0.660509	0.668384
20	0.639447	0.689447	0.664447	0.667295
40	0.653371	0.678371	0.665871	0.666894
80	0.660133	0.672633	0.666383	0.666749
17. $n$	$s_n$	$\sigma_n$	$(s_n + \sigma_n)/2$	$S_n$
10	5.335414	5.984097	5.659756	5.649082
20	5.492248	5.816590	5.654419	5.651751
40	5.572000	5.734170	5.653085	5.652417
80	5.612209	5.693293	5.652751	5.652585
19. $n$	$s_n$	$\sigma_n$	$(s_n + \sigma_n)/2$	$S_n$
10	-1.480000	0.120000	-0.680000	-0.660000
20	-1.070000	-0.270000	-0.670000	-0.665000
40	-0.867500	-0.467500	-0.667500	-0.666250
80	-0.766875	-0.566875	-0.666875	-0.666563
21. $n$	$S_n$			
10	-1.991704			
20	-1.997940			
40	-1.999486			
80	-1.999872			

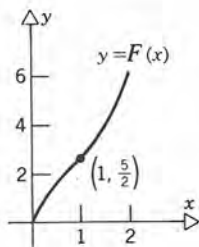
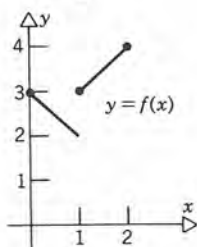
## A-24 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

## 6.3 Respuestas

1. 8      3.  $\frac{1}{2}$       5.  $3 + \frac{\pi}{4}$       7.  $-2 + \frac{\pi}{2}$
9.  $\frac{7}{2}$       11.  $-\frac{45}{2}$       13.  $\frac{1}{3}$       15.  $-\frac{88}{3}$
- | 23. $n$ | $s_n$    | $\sigma_n$ | $(s_n + \sigma_n)/2$ | $S_n$    |
|---------|----------|------------|----------------------|----------|
| 10      | 0.726130 | 0.826130   | 0.776130             | 0.788103 |
| 20      | 0.757116 | 0.807116   | 0.782116             | 0.786358 |
| 40      | 0.771737 | 0.796737   | 0.784237             | 0.785738 |
| 80      | 0.778737 | 0.791237   | 0.784987             | 0.785518 |
25. 41 pie/seg

## 6.4 Respuestas

1.  $\frac{98}{5}$       3.  $\pi - 1$       5. 0
7.  $2 - \sqrt{2} + \frac{3\pi}{4} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$       9.  $\frac{8}{3}$
11.  $x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}$       13.  $3x - \sin x$       15.  $x^2 + x^4$
17.  $-6x + 11x^2 - 2x^4$
19. 3      21. 0      23.  $\frac{5}{2}$       25. 4
29. (a) 0      (b)  $\frac{A}{2}$
31. (a)



$$(b) F(x) = \begin{cases} 3x - \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ 2x + \frac{x^2}{2}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(c)  $f$  es discontinua en  $x = 1$ ;  $F$  es continua, pero no es derivable, en  $x = 1$ .

$$33. F'(x) = \frac{\sin 2x}{1+x^2}$$

$$35. F(0) = 0, \quad F'(0) = 2, \quad F''(0) = 2$$

$$37. F'(x) = \frac{2x \sin 2(1+x^2)}{1+(1+x^2)^2} + \frac{2x \sin 2(1-x^2)}{1+(1-x^2)^2}$$

$$39. F'(x) = 2x(1+x^2)f(1+x^2)$$

41. (a)  $F'(x) = x \int_1^x f(s) ds$       (b)  $F'(1) = 0$   
 (c)  $F''(x) = xf(x) + \int_1^x f(s) ds$   
 (d)  $F''(1) = f(1)$

$$43. \frac{\sqrt{2(\pi+2)}}{2}$$

## 6.5 Respuestas

1.  $\frac{1}{3}(3+2x)^{3/2} + c$       3.  $\frac{1}{8}(9+x^2)^4 + c$
5.  $-\frac{1}{16}(1+4t^2)^{-2} + c$       7.  $-\frac{1}{16}(4-x^4)^4 + c$
9.  $\frac{1}{3} \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + c$       11.  $\frac{1}{\pi} \sec \pi \theta + c$
13.  $-\frac{1}{8} \cos^4 2x + c$       15.  $-\frac{2}{1+\sqrt{x}} + c$
17.  $\frac{1}{4}(2+x^2)^{7/2} - \frac{4}{3}(2+x^2)^{5/2} + \frac{4}{3}(2+x^2)^{3/2} + c$
19.  $\frac{(a^2+x^2)^{r+1}}{2(r+1)} + c$        $\frac{11^2}{9}$        $\frac{64}{3}$        $\frac{1}{2}$
27.  $\frac{11}{900}$       29.  $(\sqrt{2}-1)|a|$       33.  $\frac{1}{\sqrt{3}a^2}$

## 6.6 Respuestas

1. $n$	$T_n$	$S_n$
10	0.660509	0.664100
20	0.664447	0.665759
40	0.665871	0.666346
80	0.666383	0.666553
3. $n$	$T_n$	$S_n$
10	1.106616	1.107147
20	1.107016	1.107149
40	1.107115	1.107149
80	1.107140	1.107149
5. $n$	$T_n$	$S_n$
10	0.481739	0.488480
20	0.486952	0.488690
40	0.488267	0.488705
80	0.488596	0.488706
7. $n$	$T_n$	$S_n$
10	0.855353	0.861337
20	0.859639	0.861067
40	0.860678	0.861025
80	0.860933	0.861018

9. $n$	$T_n$	$S_n$
10	0.225098	0.223240
20	0.223708	0.223244
40	0.223360	0.223244
80	0.223273	0.223244

11. $n$	$T_n$	$S_n$
10	2.370394	2.386178
20	2.387129	2.392707
40	2.393045	2.395018
80	2.395137	2.395834

13. $n$	$T_n$	$S_n$
10	3.391611	3.393424
20	3.392987	3.393445
40	3.393331	3.393446
80	3.393417	3.393446

15. $n$	$T_n$	$S_n$
10	0.761109	0.761109
20	0.761109	0.761109
40	0.761109	0.761108
80	0.761109	0.761109

17. (a)  $n \geq 213$  (b)  $n \geq 24$

19. (a)  $n \geq 82$  (b)  $n \geq 14$

21. 0.2252BLP<sub>a</sub>

25. (a) $n$	Estimación del error
10	0.0020562
20	0.0005410
40	0.0001285
80	0.0000321
(b) 10	

## Respuestas a los problemas de repaso

1.  $\frac{128\pi^3}{15}$  3.  $\frac{10}{3\pi}$  5.  $1 - \sqrt{107}$  7. 20,144

9.  $\sum_{n=1}^9 \sin[(n+2)x + (2n-1)]$

11.  $\sum_{n=1}^8 \frac{(-2)^{n-1}}{nx^2}$

13.  $\sigma = 103.828$ ,  $s = 71.234$ ,  $S = 86.234$

15.  $\sigma = 27$ ,  $s = -27$ ,  $S = 0$

17.  $\sigma = 48.3923$ ,  $s = -20.3923$ ,  $S = 11.375$

19.  $\frac{62}{3} - \pi$

21.  $\frac{25\pi}{4} + 2195$  25.  $\frac{2}{\pi}$  27.  $\pi$

29.  $\frac{25\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{325}{6}$  31.  $\frac{\pi + 2}{24}$

33.  $\frac{x-a}{2} + \frac{\cos 2a - \cos 2x}{4}$

35.  $-\frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{144}$  37. -2

39.  $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$  41.  $\frac{17}{8}$  43.  $\frac{127}{160}$  45.  $\frac{1712}{105}$

47.  $\frac{8}{9} \left[ \left( \frac{b^3}{2} + 1 \right)^{3/2} - \left( \frac{a^3}{2} + 1 \right)^{3/2} \right]$

49.  $\frac{\sin(9\pi^2/4) - \sin(\pi^2)}{2}$

51. Regla trapezoidal,  $n \geq 330$ ;  
Regla de Simpson,  $n \geq 44$

53. $n$	Trapezoidal	Simpson
10	8.747225	8.856339
20	8.763592	8.769048
40	8.764566	8.764892
80	8.764626	8.764644

55. $n$	Trapezoidal	Simpson
10	68.29303	71.67857
20	70.06278	70.65269
40	70.47419	70.61134
80	70.57512	70.60876

## CAPÍTULO 7

### 7.1 Respuestas

1.  $\frac{19}{8}$  3. 2 5.  $\frac{32}{3}$

7.  $\frac{7 + 8\sqrt{2}}{6}$  9.  $\frac{7}{8}$  11.  $2\sqrt{2}$  13.  $\frac{19}{8}$

15.  $\frac{7}{3}$  17.  $4\sqrt{2}$  19.  $\frac{4}{3}$  21.  $\frac{8}{3}$

23.  $\frac{5}{4}$  25.  $A = \int_0^1 (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3x}) dx$

27.  $A = \int_0^a [\sqrt{a^2 - x^2} - (a - \sqrt{2ax - x^2})] dx$

29.  $a = 2^{4/3} + 1 \approx 3.52$

### 7.2 Respuestas

1.  $\frac{64\pi}{3}$  3.  $\frac{8\pi}{3}$  5.  $\frac{\pi^2}{4}$  7.  $\frac{128\pi}{5}$

9.  $\frac{2\pi}{15}$  11.  $\frac{\pi}{6}$  13.  $2\pi\sqrt{3}$  15.  $\frac{192\pi}{5}$

17.  $8\pi$  19.  $\frac{8\pi}{3}$  21.  $\frac{625\pi}{6}$  23.  $\frac{128\pi}{3}$

25.  $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$  27.  $\pi h^2 \left( a - \frac{h}{3} \right)$  29.  $\frac{4}{3}a^3 \tan \theta$

### 7.3 Respuestas

1.  $3\sqrt{10}$  3.  $\frac{2}{27}[(37)^{3/2} - (10)^{3/2}]$

5.  $\frac{3}{4}[(1 + 3^{2/3})^{3/2} - 1]$  7.  $2a\pi^2$



# A-26 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

9.  $\frac{227}{24}$  11.  $6a$  13.  $\frac{6\sqrt{3} - 4}{3}$
15. (b)  $\frac{L}{4a} \approx 1.56687, 1.54625, 1.47262, 1.31947$
17.  $4.64678$  19.  $\frac{32\pi}{\sqrt{5}}$  21.  $2\pi r(b - a)$
23.  $\frac{7615\pi}{64}$  25.  $\frac{\pi}{6} [(17)^{3/2} - (5)^{3/2}]$  27.  $63.56045$
31.  $S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy,$   
 $\frac{8\pi}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$
33.  $\pi(\pi - 2)$

## 7.4 Respuestas

1. (a) y (b)  $2\pi$  ft  
 3. (a)  $\frac{8}{3}$  ft (b)  $3$  ft  
 5. (a) y (b)  $\frac{10\sqrt{10} - 1}{3}$  ft  
 7. (a)  $0.5$  ft (b)  $\frac{1}{2} - 6(2)^{-1/3}$  ft  
 9.  $6$  ft-lb  
 11.  $47,812.5w \approx 2.988 \times 10^6$  ft-lb 13.  $\frac{3k}{10}$   
 15.  $\frac{mgR}{2}$  19.  $55\pi \times 10^4$  ft-lb 21.  $\frac{10w}{3} \approx 208$  lb  
 23.  $16w \int_{-3}^3 (3 - y) \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} dy$   
 25. (a)  $2,560,000w$  lb (b)  $1,395,000w$  lb

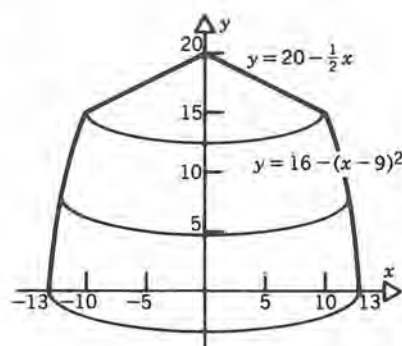
## 7.5 Respuestas

1. (a)  $1.06 \times 10^{-4}$  cm/seg  
 (c)  $1330$  dinas-seg/cm<sup>5</sup>,  $0.352$  cm  
 (d)  $7.3 \times 10^5$   
 3.  $\cos \theta_{\min} = \left(\frac{b}{a}\right)^4$   
 5. (a)  $\$380.40$  (b)  $\$800.70$  (c)  $\$10.52$  por hora  
 7. (a)  $\frac{1}{2}$  (b)  $F(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \leq t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$  (c)  $1$   
 9. (a)  $1$   
 (b)  $F(t) = \begin{cases} t^2/2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t - (t^2/2) - 1, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$  (c)  $1$   
 13.  $10^4(1 + T^2)^{-2} - 15(1 + T^2)^{-1} + 15$   
 15. (a)  $112.5$  (b)  $12.5$

## Respuestas a los problemas de repaso

1.  $\frac{49}{8}$  3.  $8\pi + \frac{32}{3}$  5.  $\frac{37}{12}$  7.  $\frac{45}{8}$   
 9.  $\frac{8}{3}$  11.  $2$  13.  $\frac{8}{3}$  15.  $8\pi$   
 17.  $\frac{256\pi}{15}$  19.  $\frac{56\pi}{3}$  21.  $\frac{28\pi}{3}$   
 23. (b)  $\pi \int_0^4 (1 + \sqrt{4 - y})^2 dy + \frac{\pi}{16} \int_4^6 (y - 8)^2 dy$   
 (c)  $\frac{3\pi}{2} + 2\pi \int_{1/2}^1 x(8 - 4x) dx$   
 $+ 2\pi \int_1^3 x[4 - (x - 1)^2] dx$

25. (a)



- (b)  $\pi \int_0^{15} (9 + \sqrt{16 - y})^2 dy$   
 $+ 4\pi \int_{15}^{20} (20 - y)^2 dy$   
 (c)  $2\pi \int_0^{10} x \left(20 - \frac{x}{2}\right) dx$   
 $+ 2\pi \int_{10}^{13} x[16 - (x - 9)^2] dx$

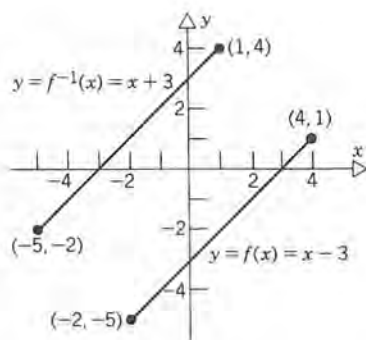
27.  $2\pi$  29.  $\frac{39}{8}[(\frac{18}{5})^{3/2} - 1]$   
 31.  $\frac{\pi}{36} [(260)^{3/2} - (5)^{3/2}]$  33.  $320\sqrt{10} \pi$   
 35. (a)  $\frac{\pi}{2}$  (b)  $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$   
 37. (a)  $8$  (b)  $8$  39.  $216$  in-lb  
 41.  $\frac{8500\pi}{3}$  ft-lb 43.  $\frac{14,500}{3}$  lb



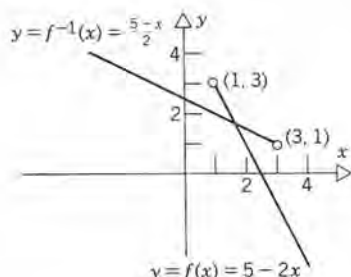
# CAPÍTULO 8

## 8.1 Respuestas

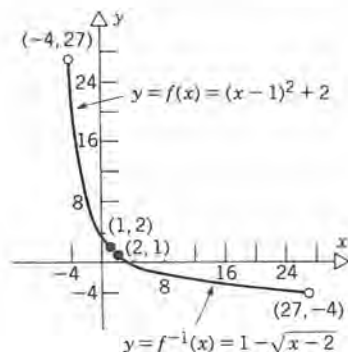
1.  $f^{-1}(y) = y + 3$ ; dominio  $[-5, 1]$ , imagen  $[-2, 4]$



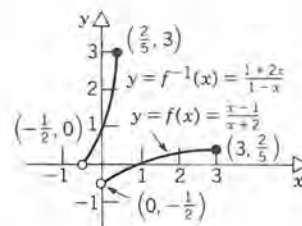
3.  $f^{-1}(y) = \frac{5-y}{2}$ ; dominio  $(-\infty, 3)$ , imagen  $(1, \infty)$



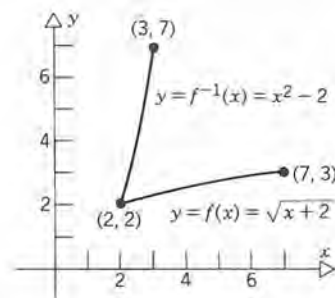
5.  $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$ ; dominio  $[2, 27]$ , imagen  $(-4, 1]$



7.  $f^{-1}(y) = \frac{1+2y}{1-y}$ ; dominio  $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ , imagen  $(0, 3]$



9.  $f^{-1}(y) = y^2 - 2$ ; dominio  $[2, 3]$ , imagen  $[2, 7]$



11.  $\frac{dx}{dy} = 1$     13.  $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}$     15.  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2x-2}$

17.  $\frac{dx}{dy} = \frac{(x+2)^2}{3}$     19.  $\frac{dx}{dy} = 2\sqrt{x+2}$

21.  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3(x^2-4)}$     23.  $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$

25. No hay función inversa

27. (a) Sí,  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$     (b) No;

(c) Sí;  $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

29. 0    31.  $\frac{2}{3}(x+2)^3$     33. 2

35.  $-\frac{4}{x^3}$     37. (a) Sí    (b) No    (c) Sí

39.  $b = -1$ ,  $a \neq b$

41. (a)  $g$  integrable y  $g(t)$  siempre de un signo  
(b)  $g$  continua y  $g(t) \neq 0$

(c)  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(x)}$

43.  $4b^2 - 12ac < 0$

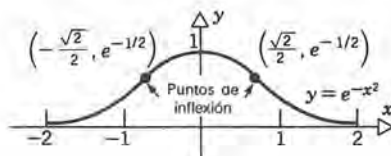
**A-28 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR**

**8.2 Respuestas**

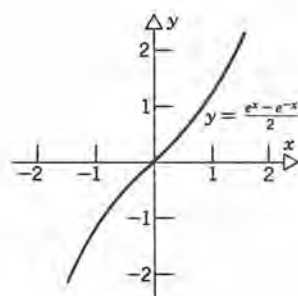
1.  $\frac{1}{x+4}$
3.  $\frac{4x^3}{x^4+1}$
5.  $\ln(x^2+9) + \frac{2x^2}{x^2+9} - \frac{3}{x^2}$
7.  $\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$
9.  $\frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$
11.  $\ln|x|$
13.  $\frac{1}{x|\ln x|}$
15.  $x^{-1} \cos(\ln|x|)$
17.  $\ln|x-3| + c$
19.  $\ln(x^2-3x+7) + c$
21.  $2 \ln(1+\sqrt{x}) + c$
23.  $\frac{1}{2} \ln|\sin 2x| + c$
25.  $\ln 5$
27.  $2 \ln 4$
29.  $-\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$
31.  $\frac{\ln 3}{2}$
33.  $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
35.  $-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$
37. El mínimo es 1 en  $x=1$ ; no hay máximo
39. El máximo es 0 en  $x=\pi/2$ ; no hay mínimo
41.  $\pi \ln 9$
43.  $I = -\int_{-1}^2 \frac{dx}{x+2}$
49.  $x(x^2+x+1)\sin 2x$   
 $\times \left[ \frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} + 2 \cot 2x \right]$

**8.3 Respuestas**

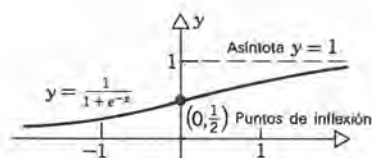
1.  $3e^{3x}$
3.  $(1-x)e^{-x} - 2 \sin 2x$
5.  $-x(1-x^2)^{-1/2} \exp \sqrt{1-x^2}$
7.  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$
9.  $\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$
11.  $-x^{-2}e^{1/x}$
13.  $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)e^{2/x}$
15.  $-e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x$
17.  $\frac{1}{2}e^{2x} + c$
19.  $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$
21.  $\frac{(1+e^x)^4}{4} + c$
23.  $-\sin(e^{-x}) + c$
25.  $\ln(e^x + e^{-x}) + c$
27.  $\frac{e^9-1}{3}$
29.  $\frac{1-e^{-2}}{4}$
31. 1248
33.  $e-1$
- 35.



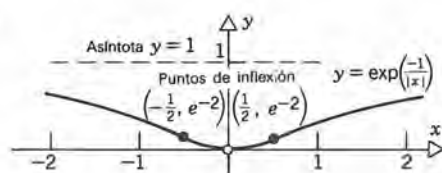
37.



39.



41.



43.  $\frac{9}{10}$  de unidades cuadradas

45.  $f(t) = f(0)e^{-kt} + \frac{R}{k}(1 - e^{-kt})$ ;  $L = \frac{R}{k}$

49. (c) Porque  $\exp$  es una función continua

51.  $e^r$

53. 1

55.  $e^{r^2}$

**8.4 Respuestas**

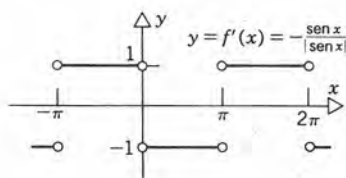
1.  $Q(t) = 4e^{2t}$
3.  $u(t) = -e^{-3(t-2)}$
5.  $Q(t) = -\frac{7}{2} + \frac{13}{2}e^{2t}$
7.  $u(t) = t^2e^{t/2} - 2e^{t/2}$
9.  $Q(t) = Q_0e^{r(t-t_0)}$
11.  $\frac{-11.7 \ln 2}{\ln(2/3)} \approx 20.0$  días
13. (a)  $Q(t) = 35.36 + 64.64 \exp(-0.02828t)$  mg  
 (b)  $Q_t = 35.36$  mg (c) 171.9 días
15. (a)  $P(t) = 10^4 \exp\left[(\ln 2) \frac{t}{2}\right] \approx 10^4 \exp(0.3466t)$   
 (b)  $81.92 \times 10^6$  (c)  $P(t) \rightarrow \infty$
17. (b)  $c = (u_0 - T)\exp(-kt_0)$  (c)  $T$
19. (a)  $T = \frac{\ln 2}{r}$  (b) 8.67%
21. (a)  $\frac{1}{r} \ln \frac{1}{1-10r}$  (b) 17.20 años; 25.58 años

## 8.5 Respuestas

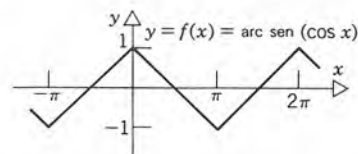
1.  $5^x \ln 5$
5.  $-2x^{-3} - 2^{-x} \ln 2$
9.  $\frac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln 10}$
13.  $\frac{4x}{(x^2+1)\ln 10}$
17.  $x^{\sec x}[(\cos x)(\ln x) + x^{-1} \sin x]$
19.  $x^{1+x^2}(2x \ln x + x^{-1} + x)$
21.  $\frac{3^x}{\ln 3} + c$
25.  $-\frac{10^{\cos 2x}}{4 \ln 10} + c$
29.  $\frac{9999}{100 \ln 100}$
31.  $\frac{20}{\ln 5}$
37.  $\frac{4}{5 \ln 5}$
3.  $x^{-1} 10^{\ln x} \ln 10$
7.  $2x$
11.  $4x$
15.  $\frac{x^{\sqrt{x}}(\ln x + 2)}{2\sqrt{x}}$
23.  $\frac{4^{2x}}{\ln 16} + c$
27.  $\frac{14}{\ln 2}$

## 8.6 Respuestas

1.  $\frac{\pi}{4}$
5.  $-\frac{\pi}{2}$
9.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
11.  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
13.  $\frac{4 \arctan(x/2)}{4+x^2}$
15.  $\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$
17.  $\frac{2 \sec^2 x}{1+4 \tan^2 x}$
19.  $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
21.  $\frac{2}{(1+4x^2)\arctan 2x}$
23.  $\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$
25.  $1 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
27.  $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
29.  $\frac{2}{(1+4x^2)\arctan 2x}$
31.  $\arcsin \frac{x}{3} + c$
33.  $\frac{1}{6} \arcsin \frac{3x}{2} + c$
35.  $\arcsin(x+1) + c$
37.  $\frac{1}{2} \arcsin 2x + c$
39.  $\frac{1}{6} \arcsin \frac{3x}{2} + c$
41.  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} + c$
43.  $\arcsin(x+1) + c$
45.  $\frac{1}{3} (\arcsin x)^3 + c$
51. (b)

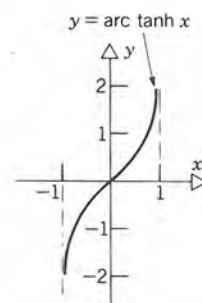


(c) Sí

53. (a)  $\arcsin \alpha$  (b)  $\frac{\pi}{2}$ 55.  $\sqrt{ab}$  pies

## 8.7 Respuestas

7.  $3 \cosh 3x$
9.  $\cosh x + x \sinh x$
11.  $(\cosh x + \sinh^2 x) \exp(\cosh x)$
13.  $\frac{2 \sinh x - \sinh^3 x}{(4 + \sinh^2 x)^2}$
15.  $(4 + x^2)^{-1/2}$
17.  $\frac{1}{2} \cosh 2x + c$
19.  $\frac{1}{3} \sinh^3 x + c$
21.  $\frac{1}{2} \ln |\sinh 2x| + c$
23.  $\frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2x + c, x \geq \frac{1}{2}$
25.  $\operatorname{arc sinh} \frac{x}{4} + c$
27.  $\sinh(\ln 3) - \sinh(\ln 2) = \frac{7}{12}$
29.  $3 \ln \frac{5}{2}$
31.  $\frac{\operatorname{arcosh} 6 - \operatorname{arcosh} 3}{3}$
37. (a)  $y = \operatorname{arctanh} x$  quiere decir que  $x = \tanh y$  sin restricciones en  $y$ . El dominio es  $(-1, 1)$ ; la imagen es  $(-\infty, \infty)$

(b)  $\frac{1}{1-x^2}$ 

39. (f) No

## Respuestas a los problemas de repaso

1.  $(f^{-1})'(x) = 2x, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad f^{-1}(x) = x^2$

# A-30 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

$$3. (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f(x) = \tan x,$$

$$f^{-1}(x) = \arctan x$$

$$5. x \geq 0; \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$7. x \geq -\frac{b}{2a};$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2a} [-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - x)}]$$

9. No tiene inversa

$$11. f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad x < -1 \text{ o } x > 1$$

$$13. 2^{x \ln 2} (\ln 2)(\ln x + 1)$$

$$15. -\frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

$$19. \frac{\coth x}{\sqrt{(\ln \sinh x)^2 + 1}}$$

$$23. \frac{1}{2a} e^{(ax+b)^2} + c$$

$$27. \frac{\pi^{\sin x}}{\ln \pi} + c$$

$$31. \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{x-4}{2} \right) + c$$

$$35. 1$$

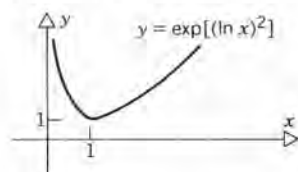
$$41. (b) x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$$

$$43. x = 1, \quad e^2$$

$$45. r = \operatorname{arc} \sinh 1 \approx 0.8814; \text{ no; } r \text{ es una raíz doble}$$

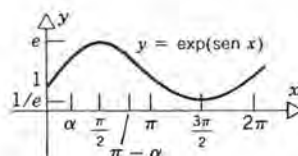
$$47. \log_{10} e = \frac{1}{\ln 10}$$

49. Punto crítico en  $x = 1$ ; decreciente en  $0 < x \leq 1$ , creciente en  $1 \leq x < \infty$ ; cóncava hacia arriba en  $x > 0$ ; mínimo global en  $x = 1$ .

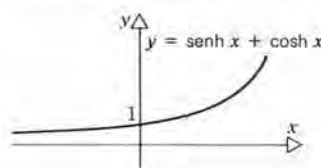


51. Puntos críticos en  $x = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$ ; creciente en  $0 \leq x \leq \pi/2$  y  $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$ , decreciente en  $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$ ; mínimo local en  $x = 0$ , máximo local en  $x = 2\pi$ ; máximo global en  $x = \pi/2$ , mínimo global en  $x = 3\pi/2$ . Hay puntos de inflexión en  $x = \alpha$  y

en  $x = \pi - \alpha$ , donde  $\alpha = \arcsin [(\sqrt{5} - 1)/2] \approx 0.66624$ . La función es cóncava hacia arriba en  $0 \leq x \leq \alpha$  y  $\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi$ ; es cóncava hacia abajo en  $\alpha \leq x \leq \pi - \alpha$ .



53. Creciente en  $-\infty < x < \infty$ ; cóncava hacia arriba en  $-\infty < x < \infty$ . No hay puntos críticos.



## CAPÍTULO 9

### 9.1 Respuestas

$$1. \frac{3}{8} \ln(1 + 4x^2) + c$$

$$5. \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

$$9. 2 \arctan(\sin x) + c$$

$$13. 2 - \ln 2 \approx 1.3069$$

$$17. \sin(\ln x) + c$$

$$21. -\ln(\ln 2) \approx 0.3665$$

$$25. \frac{64(\sqrt{2} + 1)}{15} \approx 10.30$$

$$29. 2 \ln(x^2 + 4x + 29) + 2 \arctan \left( \frac{x+2}{5} \right) + c$$

$$31. \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sinh(2x + 4) + c$$

$$33. \frac{1}{2} \left( \arctan 2 - \frac{\pi}{4} \right) \approx 0.1609$$

$$3. 2\sqrt{1 + e^x} + c$$

$$7. \ln|\sin x| + c$$

$$11. \frac{1}{2} \arcsin e^{2x} + c$$

$$15. \frac{2}{5} \sinh^5 \left( \frac{x}{2} \right) + c$$

$$19. \frac{1}{8} (7 + 2x^3)^{4/3} + c$$

$$23. \frac{1}{2} \ln(\cosh 2x) + c$$

$$27. \arcsin \left( \frac{x-2}{2} \right) + c$$

### 9.2 Respuestas

$$1. x \sin x + \cos x + c$$

$$3. -\frac{1}{\pi} x^2 \cos \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \sin \pi x + \frac{2}{\pi^3} \cos \pi x + c$$

$$5. \frac{1}{\pi^2} \approx 0.1013$$

$$7. \frac{3}{2}(e^{\pi/2} + 1) \approx 2.3242$$



$$9. 2 - \frac{10}{e^2} \approx 0.6466$$

$$11. x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

$$13. \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + c$$

$$15. -2x^2(1-x)^{1/2} - \frac{8}{3}x(1-x)^{3/2} - \frac{16}{15}(1-x)^{5/2} + c$$

$$17. \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{(\ln 2)^2} + c$$

$$19. 2\sqrt{3} \ln 3 - 4\sqrt{3} + 4 \approx 0.8775$$

$$21. \frac{10 \ln 10 - 9 \ln 9 - 1}{2}$$

$$23. \frac{2}{9}x^3(x^3 - 1)^{3/2} - \frac{8}{45}(x^3 - 1)^{5/2} + c$$

$$41. (x+1)\ln(x+1) - x + c$$

### 9.3 Respuestas

$$1. \frac{\pi + 2}{8} \quad 3. -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + c$$

$$5. -\frac{3}{4} \cos^{4/3} x + \frac{3}{10} \cos^{10/3} x + c$$

$$7. \frac{1}{16}x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + c \quad 9. \frac{2}{21}$$

$$11. 2 - \sqrt{2} \quad 13. \frac{3\pi}{8} \quad 15. -\sin x - \csc x + c$$

$$17. \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + c$$

$$19. x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{8} \sin 6x + \frac{1}{16} \sin 8x + c$$

$$21. \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{16} \cos 5x + c$$

$$23. -\frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 8x + \frac{1}{48} \cos 12x + c$$

$$25. -\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(1-x^2)^{n+2}}{2(n+2)} + c$$

$$27. \frac{\pi}{2} \quad 29. 5\pi^2 a^3 \quad 31. \frac{64\pi a^2}{3}$$

### 9.4 Respuestas

$$1. \frac{1}{a} \ln |\sec ax + \tan ax| + c \quad 3. \frac{1}{3} \tan^3 x + c$$

$$5. \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + c$$

$$7. \frac{1}{10} \sec^5 2x - \frac{1}{6} \sec^3 2x + c \quad 9. \frac{1}{5} \sec^5 x + c$$

$$11. -\frac{1}{7} \csc^7 x + \frac{2}{7} \csc^5 x - \frac{1}{5} \csc^3 x + c$$

$$13. -\frac{1}{2} \csc x \cot x - \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| + c$$

$$15. \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + \frac{2}{7} \tan^{7/2} x + c$$

$$17. \frac{2}{3} \sec^{5/2} x - 2 \sec^{1/2} x + c$$

$$23. -\frac{1}{2} \cot^2 x - \ln |\sin x| + c$$

$$25. -\frac{1}{4} \cot^4 x + \frac{1}{2} \cot^2 x + \ln |\sin x| + c$$

$$27. -\frac{1}{2} \csc x \cot x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| + c$$

$$29. -\frac{1}{4} \csc^3 x \cot x - \frac{3}{8} \csc x \cot x + \frac{3}{8} \ln |\csc x - \cot x| + c$$

$$31. -\cot \frac{\theta}{2} + c$$

### 9.5 Respuestas

$$1. \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c$$

$$3. \frac{x}{5\sqrt{2x^2+5}} + c \quad 5. -\frac{x}{4\sqrt{x^2-4}} + c$$

$$7. 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4-x^2}}{x} \right| + \sqrt{4-x^2} + c$$

$$9. 3\sqrt{x^2-9} - \ln(x + \sqrt{x^2-9}) + c$$

$$11. \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3}}{x} \right| + c$$

$$13. 2\sqrt{15} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4 + \sqrt{15}}{2 + \sqrt{3}} \right) \approx 6.387$$

$$15. \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{5\sqrt{6}}{12} \approx 0.04004$$

$$17. \sqrt{x^2-3} - \sqrt{3} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$19. \ln 3 \approx 1.099$$

$$33. \pi ab$$

### 9.6 Respuestas

$$1. \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c \quad 3. \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + c$$

$$5. \ln \left| \frac{(x+1)(x+3)}{x+2} \right| + c$$

$$7. -\frac{1}{2(x^2-1)} + c$$

$$9. x + 3 \ln|x| - 2 \arctan x + c$$

$$11. 2 \ln|x| - 4 \arctan(x+1) + c$$

$$13. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + c$$

$$15. \frac{2}{27} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| - \frac{1}{9}(x-1)^{-1} - \frac{1}{9}(x+2)^{-1} + c$$

### 9.7 Respuestas

$$1. \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54} \arctan \frac{x}{3} + c$$

$$3. \frac{x}{16(x^2+4)^2} + \frac{3x}{128(x^2+4)} + \frac{3}{256} \arctan \frac{x}{2} + c$$

$$5. \frac{x-2}{8(x^2-4x+8)} + \frac{1}{16} \arctan \frac{x-2}{2} + c$$

**A-32** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

$$7. \frac{x-1}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2} \arctan(x-1) + c$$

$$9. \frac{x}{96(x^2+3)^2} + \frac{x}{192(x^2+3)} + \frac{1}{192\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + c$$

$$11. \frac{1}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{32} \ln(x^2+4) + c$$

$$13. -\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

**Respuestas a los problemas de repaso**

$$1. \arctan(\ln x) + c \quad 3. \frac{1}{2}(\ln x + 1)^2 + c \quad 5. 0$$

$$7. \frac{1}{16} \arcsen x + \frac{1}{8} x \sqrt{1-x^2} (x^2 - \frac{3}{4}) (x^2 + \frac{1}{2}) + c$$

$$9. \ln|\sen x^2 + \cos x^2| + c$$

$$11. \frac{x^2}{3} (1+x^2)^{3/2} - \frac{2}{15} (1+x^2)^{5/2} + c$$

$$13. \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{2} \ln[x^2(x+3)] + c$$

$$15. \frac{4}{\pi^2-4} \left( 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{\pi x}{4} + \pi \sen \frac{x}{2} \sen \frac{\pi x}{4} \right) + c$$

$$17. \frac{1}{3} \arctan(\sec^3 x) + c$$

$$19. \frac{3}{8} \cos x + \frac{1}{24} \cos 3x - \frac{5}{48} \cos 5x + \frac{1}{72} \cos 9x + c$$

$$21. \frac{2x^2-1}{x} + \ln \left( \frac{|x-2|}{(x^2-4)^2} \right) + c$$

$$23. \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 4} - 2 \operatorname{arcsen} \frac{\pi}{4} \approx 0.5549$$

$$25. \frac{1}{12} \ln \left| 8x^{-3/2} - x^{-3/2} \sqrt{64-x^3} \right| + c$$

$$27. \arctan(2x+1) + c$$

$$31. \ln|(x+1)(\sec x + \tan x)| + c$$

$$33. \cos x + \sec x + c$$

$$37. \frac{1}{2} (x^2 \cosh x^2 - \sinh x^2) + c$$

$$39. x \tan x + \ln|\cos x| + c$$

$$41. \ln \left| \frac{x(x+2)}{x+1} \right| + c$$

$$43. \left( \frac{x-2}{2} + 4 \right) \sqrt{x^2-4x+1}$$

$$+ \frac{11}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-4x+1} - 2| + c$$

$$45. \frac{1}{a} \ln |\sec(a \arctan x)| + c$$

$$47. 2 \ln|x+1| + \frac{8}{3} \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{3} \ln(x^2+2) - \frac{4\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

$$49. \ln[e^{-x}(1-\sqrt{1-e^{2x}})] + \sqrt{1-e^{2x}} + \frac{1}{3}(1-e^{2x})^{3/2} + c$$

$$51. \frac{9}{8} \sqrt{2} - \frac{3}{16} \ln(3+2\sqrt{2})$$

$$53. \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{1}{2} \csc \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \csc \frac{\theta}{2} - \cot \frac{\theta}{2} \right| \right] + c$$

$$55. 0$$

$$57. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan(x/2) + 1}{\tan(x/2) - 1} \right| - \frac{\tan(x/2)}{[\tan(x/2) + 1]^2} + c$$

$$59. \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan \left( \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \tan \frac{x}{2} \right) + c, \quad a > 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ln \left| \left( \alpha - \tan \frac{x}{2} \right) / \left( \alpha + \tan \frac{x}{2} \right) \right| + c, \quad 0 < a < 1;$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

**CAPÍTULO 10****10.1 Respuestas**

$$1. y = ce^{2t} + \frac{1}{3} t^3 e^{2t}$$

$$3. y = ce^{-3t} + \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} e^{-t}$$

$$5. y = ct^{-1} + \frac{3}{4} t^{-1} \cos 2t + \frac{3}{2} \sen 2t$$

$$7. y = \frac{c + te^t - e^t}{t^2} \quad 9. y = \frac{c - \cos t}{t^3}$$

$$11. y = cte^{-t} + te^{-t} \ln t \quad 13. y = t^2 e^t + e^t$$

$$15. y = \frac{\sen t}{t^2} \quad 17. y = \frac{18 + 3t^2 + 2t^3}{6(t+1)^2}$$

$$21. \text{Una hora} \quad 23. Q(t) = 30 - 10e^{-t/60}$$

$$25. (a) Q(t) = 50\gamma - 50\gamma e^{-t/10}$$

$$(b) \gamma = \frac{1}{10(1 - e^{-6})} \approx 0.10025$$

$$29. y = \left( \frac{\sigma}{\epsilon} + ce^{-2\epsilon t} \right)^{-1/2}$$

**10.2 Respuestas**

1.  $3y^2 - 2t^3 = c$   
 3.  $y^2 + \ln |y| - \sin 2t = c$ ; también  $y = 0$   
 5.  $3y^2 - 2 \ln |1 + t^3| = c$   
 7.  $\arcsen y - \ln |t| = c$   
 9.  $y = \sqrt{2 \ln(1 + t^2) + 4}$   
 11.  $y = (3 - 2\sqrt{1 + t^2})^{-1/2}$   
 13.  $y = -1 - \sqrt{t^2 - t - 2}$   
 15.  $y = -\ln \left( \frac{-6te^{3t} + 2e^{3t} + 7}{9} \right)$   
 17.  $y = -(2t + 1)^{3/2}$   
 19. (a)  $\tau = \frac{1}{r} \ln 4 \approx \frac{1.3863}{r}$ ; 55.452 años  
 (b)  $T = \frac{1}{r} \ln \left[ \frac{\beta(1 - \alpha)}{(1 - \beta)\alpha} \right]$ ; 175.78 años  
 21.  $y = \frac{a}{c} t + \left( \frac{bc - ad}{c^2} \right) \ln |ct + d| + k$   
 23. (a)  $\dot{x} = x_0 e^{-\beta t}$   
 (b)  $y = y_0 \exp \left[ -\frac{\alpha x_0 (1 - e^{-\beta t})}{\beta} \right]$   
 (c)  $y_0 \exp \left( -\frac{\alpha x_0}{\beta} \right)$   
 25.  $x = \frac{pq[e^{\alpha(p-q)t} - 1]}{pe^{\alpha(p-q)t} - q}$   
 27. (a) 50.4 m (b) 5.25 seg  
 29. (a)  $x_m = \frac{v_0^2}{2g}$  (b)  $t_m = \frac{v_0}{g}$  (c)  $t = \frac{2v_0}{g}$

**10.3 Respuestas**

1. (a) 1.1, 1.22, 1.364, 1.5368  
 (b) 1.105, 1.23205, 1.38578, 1.57179  
 (c) 1.11, 1.2442, 1.40792, 1.60767  
 (d) 1.24587, 1.61263  
 (e)  $y = \frac{1 + e^{2t}}{2}$ ; 1.11070, 1.24591, 1.41106, 1.61277  
 3. (a) 1.1, 1.222, 1.37533, 1.57348  
 (b) 1.111, 1.25153, 1.43606, 1.68801  
 (c) 1.25299, 1.69592  
 5. (a) 3.2, 3.40736, 3.62201, 3.84387  
 (b) 3.20368, 3.41478, 3.63320, 3.85888  
 (c) 3.41488, 3.85908  
 7. (a) 2.2, 2.42993, 2.69426, 2.99840  
 (b) 2.21497, 2.46469, 2.75525, 3.09420  
 (c) 2.46665, 3.09994

9. (a) 7.53999 (b) 7.70957  
 (c) 7.86623 (d) 7.88313  
 (e) 7.88889 (f) 7.88905  
 11. (a) 5.35218 (b) 5.35712  
 (c) 5.36194 (d) 5.36203  
 (e) 5.36206 (f) 5.36206  
 13. (a) 7.88906 (b) 7.88906  
 15. (a) 5.36206 (b) 5.36206

**Respuestas a los problemas de repaso**

1.  $y = (e^x + 1)/(e^x + e^{-x})$   
 3.  $y = \frac{1}{2}[\tan x + \cos x + \cos x \ln|\sec x + \tan x|]$   
 5.  $y = e^t/(e - t)$  7.  $y = 0$   
 9.  $y = -\sqrt{5e^{2x} - 4}$   
 11. (a) 0.705844  
 (b) 2.360865, 2.362464  
 (c) 2.362773, 2.362775  
 13. (a) 3.636682  
 (b) 6.200323, 6.200680  
 (c) 6.200744, 6.200744  
 15. 1.548281, 2.319693, 3.324278, 4.508531, 5.751209, 6.905679  
 17.  $P(t) = P_0 e^{-kt}$ ,  $k = \frac{\ln 2}{13.2} \approx 0.0525$  29.6 mg  
 19.  $y = 1 - e^{-x}$  21.  $y = \frac{4}{3}(x + 1)^{3/2} - \frac{1}{3}$

**CAPÍTULO 11****11.1 Respuestas**

1. 2  
 3. 1  
 5. 0 (no indeterminado)  
 7. -1  
 9.  $-\infty$  (no indeterminado)  
 11. 0 13.  $\infty$   
 15. 0 17.  $\infty$   
 19.  $\infty$  21. 0  
 23. 0 25.  $\frac{b}{a}$   
 27. 12 29. 2  
 31.  $-\frac{1}{3}$  33. 1  
 35. 0 37. 0  
 39.  $a = \pm 2$ ,  $b = 1$   
 41. (a)  $\frac{3}{4}$  (b) 3



**A-34 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR****11.2 Respuestas**

1. 0                      3. 0  
 5. 1                      7. 0  
 9. 5                      11. 1  
 13. 0                     15. 0  
 17. 1                     19. 0  
 21. 1                     23.  $\frac{1}{\sqrt{e}}$   
 25.  $\infty$  si  $0 < q < 1$ ;  $e$  si  $q = 1$ ;  $1$  si  $q > 1$   
 27.  $1$  si  $q < p$ ;  $e$  si  $q = p$ ;  $\infty$  si  $q > p$   
 29. 1                      31.  $\frac{1}{e}$                       33.  $\infty$                       35.  $\frac{1}{e}$

**11.3 Respuestas**

1. Diverge                      3. Converge;  $\frac{3}{2}$   
 5. Converge; 6                      7. Converge;  $-\frac{1}{2}$   
 9. Converge;  $\frac{\pi}{2}$                       11. Diverge  
 13. Diverge                      15. Converge; 1  
 17. Diverge                      19. Diverge  
 21. Diverge                      23. Diverge  
 27.  $n!$                       29.  $\frac{b}{a^2 + b^2}$   
 31.  $\alpha = 2$ ;  $\frac{1}{2} \ln \frac{25}{8}$   
 33. (a)  $p > 1$                       (b)  $p > \frac{1}{2}$                       (c)  $p > 2$   
       (d)  $1 < p \leq 2$                       (e)  $\frac{1}{2} < p \leq 1$   
 35. (a) 0                      (b) Diverge                      (d)  $\infty$ ; diverge                      (e)  $\pi$ ; converge

**11.4 Respuestas**

1. Converge                      3. Diverge  
 5. Converge                      7. Diverge  
 9. Converge                      11. Converge  
 13. Converge                      15. Converge  
 17. Converge                      19. Converge  
 21. Existe la integral (no es impropia)  
 23. Converge sólo para  $1 < p < 2$   
 25. Converge sólo para  $-1 < p < \frac{3}{2}$   
 27. Existe la integral (no es impropia)  
 29. Converge  
 31. Diverge  
 33. Converge sólo para  $3q - p > 1$                       35.  $p > 1$

**Respuestas a los problemas de repaso**

1. 0  
 3. No existe el límite; el límite por la derecha es 2, el límite por la izquierda es  $-2$

5. 0                      7. 2  
 9. 0                      11. 0  
 13. 0                      15. 1  
 17. 0                      19. 0  
 21. 1                      23. 1                      25.  $e^{-3/4}$   
 27. 0 si  $p \leq 0$ ;  $\infty$  si  $p > 0$   
 29.  $e^{-1/2}$   
 31. Converge;  $-\frac{3}{4}(16)^{1/3}$   
 33. Diverge  
 35. Converge; 0  
 37. Converge; 1  
 39. Converge para  $p < 1$ , diverge para  $p \geq 1$   
 41. Converge                      43. Converge  
 45. Diverge                      47. Diverge  
 49. Diverge

**CAPÍTULO 12****12.1 Respuestas**

1. (a)  $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}$                       (b) Acotada                      (c) Monótona decreciente  
       (d)  $L = 2$   
 3. (a)  $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$                       (b) Acotada                      (c) Monótona creciente  
       (d)  $L = 1$   
 5. (a)  $1, -(2)^{1/3}, (3)^{1/3}, -(4)^{1/3}, (5)^{1/3}$                       (b) No acotada  
       (c) No monótona                      (d) Diverge  
 7. (a)  $-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{26}$                       (b) Acotada                      (c) Monótona decreciente para  $n \geq 8$                       (d)  $L = 0$   
 9. (a)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{8}{25}$                       (b) No acotada                      (c) Monótona creciente para  $n \geq 3$                       (d) Diverge a  $\infty$   
 11.  $\frac{1}{2}$                       13. Diverge a  $\infty$   
 15. 0                      17. Diverge a  $\infty$   
 19. Diverge a  $\infty$                       21. 0  
 23. 0                      25.  $\frac{1}{2}$   
 27. 0                      29. 1  
 31. Diverge a  $\infty$   
 33.  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ , por ejemplo  
 35.  $a_n = \sqrt{n}$ , por ejemplo  
 37.  $a_n = \frac{1}{n}$ , por ejemplo  
 39.  $L = 2$ ;  $N \geq \frac{1}{\epsilon}$   
 41.  $L = 1$ ;  $N \geq \frac{2}{\epsilon} - 1$   
 43.  $L = 0$ ;  $N \geq \frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln 2}$





**A-36**      RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

47. Falso. Por ejemplo, hacer  $a_k = (-1)^k/\sqrt{k}$ . La afirmación es cierta si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge en forma absoluta.

**CAPÍTULO 13**
**13.1 Respuestas**

1.  $P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \left( x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\left( \frac{1}{2!} \right) \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2 - \left( \frac{1}{3!} \right) \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^3 \right]$
3.  $P_4(x) = -1 + 2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)^4$
5.  $P_4(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4$
7.  $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3$
9.  $P_4(x) = 1 + \frac{1}{2} (x-1) - \frac{1}{8} (x-1)^2 + \frac{1}{16} (x-1)^3 - \frac{5}{128} (x-1)^4$
11.  $P_3(x) = x + \frac{1}{6} x^3$
13.  $P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
15.  $P_n(x) = -\frac{1}{a} \left[ 1 + \left( \frac{x}{a} \right) + \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{x}{a} \right)^n \right]$
17.  $P_n(x) = - \left[ x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} \right]$
19.  $P_n(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) x^n}{2^n n!}$
21.  $P_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (x-1) + \frac{1}{8} (x-1)^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n$
23.  $P_{2n}(x) = 1 - \frac{2^2}{2!} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{2^4}{4!} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^4 - \cdots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)^{2n}$

$$25. P_{2n+1}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$27. P_4(x) = 1 - x^2 + x^4$$

**13.2 Respuestas**

1.  $R_4(x) = \frac{(\sin c)(x - \pi/4)^4}{4!}$
3.  $R_5(x) = -2^5 (\sin 2c) \frac{(x - \pi/2)^5}{5!}$
5.  $R_5(x) = (-32c^5 + 160c^3 - 120c) e^{-c^2} \frac{x^5}{5!}$
7.  $R_4(x) = -\frac{15x^4}{(16)4!(1+c)^{7/2}}$
9.  $R_4(x) = \frac{9x^4}{(16)4!(4-c)^{5/2}}$
11.  $R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (\sin c) x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
13.  $R_{n+1}(x) = \frac{a^{n+1} x^{n+1}}{(1-ac)^{n+2}}$
15.  $R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} (x+1)^{n+1}}{e^{2c} (n+1)!}$
17.  $R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (\cos 2c) (x - \pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!}$
19.  $R_{2n+2}(x) = \frac{(\sinh c) x^{2n+2}}{(2n+2)!}$
21. (a)  $P_1(x) = 0, \quad R_2(x) = \frac{14c^{1/3} x^2}{9};$   
 $P_2(x) = 0, \quad R_3(x) = \frac{14x^3}{81c^{2/3}}$   
 (b) No  
 (c)  $P_3(x) = 1 + \frac{7}{3} (x-1) + \frac{14}{9} (x-1)^2 + \frac{14}{81} (x-1)^3$
23.  $n = 3; \quad 0.7742$
25.  $n = 4; \quad 0.1823$
27.  $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < \infty$
29.  $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
31.  $\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < \infty$
33.  $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x - \pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
35.  $e^{3x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k!}, \quad -\infty < x < \infty$

**13.3 Respuestas**

1.  $\rho = 1$ ; converge en forma absoluta para  $-1 \leq x \leq 1$ ; diverge en cualquier otro caso
3.  $\rho = 2$ ; converge en forma absoluta para  $-5 < x < -1$ ; diverge en cualquier otro caso
5.  $\rho = 4$ ; converge en forma absoluta para  $-2 < x < 6$ ; converge en forma condicional para  $x = 6$ ; diverge en cualquier otro caso
7.  $\rho = \infty$ ; converge en forma absoluta para toda  $x$
9.  $\rho = 1$ ; converge en forma absoluta para  $-1 \leq x \leq 1$ ; diverge en cualquier otro caso
11.  $\rho = \infty$ ; converge en forma absoluta para toda  $x$
13.  $\rho = \frac{1}{2}$ ; converge en forma absoluta para  $0 < x < 1$ ; converge en forma condicional para  $x = 0$ ; diverge en cualquier otro caso
15.  $\rho = \infty$ ; converge en forma absoluta para toda  $x$
17.  $\rho = \infty$ ; converge en forma absoluta para toda  $x$
19.  $\rho = \frac{2}{3}$ ; converge en forma absoluta para  $-\frac{4}{3} < x < 0$ ; diverge en cualquier otro caso
21. (a)  $\rho = e$  (b) Diverge en ambos extremos

**13.4 Respuestas**

1.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x - \pi)^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < \infty$
3.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (x - \pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
5.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^k, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
7.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^k 2^k + 2^{-k}] x^k, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
9.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-k} - 3) x^k, \quad -1 < x < 1$
11.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (2k)!}, \quad -\infty < x < \infty$
13.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < \infty$
15.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}, \quad -\infty < x < \infty$
17.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k} x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < \infty$
19.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (x - 3)^k, \quad 2 < x < 4$
21.  $f(x) = x^2 - \frac{2}{3!} x^4 + \left[ \frac{2}{5!} + \frac{1}{(3!)^2} \right] x^6 - \left[ \frac{2}{7!} + \frac{2}{3!5!} \right] x^8 + \dots$

23.  $f(x) = 3x - 6x^2 + \frac{3}{2}x^3 + 5x^4 + \dots$
25.  $[f(x)]^2 = a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \dots$
27. (a)  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2}$   
(b)  $h(x) = 1 + x$  converge para toda  $x$

**13.5 Respuestas**

1.  $f(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad -1 \leq x < 1$
3.  $f(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad -1 < x < 1$
5.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
7.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+2)(k+1)2^{k-1} x^k, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
9.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1}(2k+1)!}, \quad -2 \leq x \leq 2$
11.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{(k+1)(2k+3)!}, \quad -1 \leq x \leq 1$
13.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}, \quad -\infty < x < \infty$
15.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}, \quad -2 \leq x \leq 2$
17. (a) 3.017  
(b) 200 términos si se usa una suma parcial; 100 términos si se usa el promedio de sumas parciales sucesivas
19.  $I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!(2k+1)!},$  cinco términos  
 $I \approx 0.48638538$
21.  $I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)!},$  ocho términos  
 $I \approx 0.74682$
23.  $I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2 2^{k+1}},$  siete términos  
 $I \approx 0.4485$
25. (c)  $a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = -\frac{3}{64}$

**13.6 Respuestas**

1.  $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k k!} x^k, \quad \rho = 1$



## A-38 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

$$3. f(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^{3k} k!} x^k \right],$$

 $\rho = 4$ 

$$5. f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k! (2k+1)} x^{2k+1}, \rho = 1$$

$$7. f(x) = \frac{x}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k! (2k+1)} \frac{x^{2k+1}}{a^{2k+1}},$$

 $\rho = a$ 

$$9. f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4k-1)}{2^{2k+1} (2k+1)!} x^{2k},$$

 $\rho = 1$ 

$$11. f(x) = 2 + \frac{x-1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^{3k-1} k!} (x-1)^k,$$

 $\rho = 4$ 

$$13. f(x) = 1 + \frac{2x}{3} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-5)}{3^k k!} x^k, \rho = 1$$

$$17. (c) \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} \right)$$

$$(d) \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

## Respuestas a los problemas de repaso

1.  $-1 < x < 1$ ; converge en forma absoluta en  $x = \pm 1$ .3.  $-1 - \sqrt{2} < t < -1 + \sqrt{2}$ ; diverge en  $t = -1 \pm \sqrt{2}$ 5.  $-1 < x < 1$ ; diverge en  $x = -1$ , converge en forma condicional en  $x = 1$ .7.  $\rho = 0$       9.  $\rho = 1/2$       11.  $\rho = 1/2$ 

$$13. f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{2^k}, \quad -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2}$$

$$15. f(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k}, \quad -1 < x < 1$$

$$17. f(x) = \ln(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left( \frac{b}{a} \right)^k x^k,$$

$$-\frac{a}{b} < x < \frac{a}{b}$$

$$19. f(x) = 1 + \frac{x}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3k-4)}{3^k k!} x^k,$$

$$-1 < x < 1$$

$$21. \sin(1) - \cos(1)x + \frac{2 \cos(1) - \sin(1)}{2} x^2$$

$$23. 1 + x + \frac{1}{2} x^2 \quad 25. -\frac{19}{243} (c-1)^{-11/3} (x-2)^4$$

$$27. \frac{x^4}{4(c+1)^4}$$

$$29. \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

$$31. f(x) = 1 + x + 2x^2 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$35. y(x) = y_0(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots) = y_0 e^{x^2}$$

$$37. y(x) = 1 + 2x + (3/2)x^2 + (2/3)x^3 + \cdots = (1+x)e^x$$

$$39. x = 2 - (1/6)\epsilon + \cdots$$

$$41. x = -2 + (2/9)\epsilon - (16/243)\epsilon^2 + \cdots$$

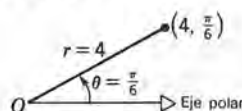
$$43. 0.100111$$

$$45. -0.002502$$

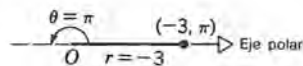
## CAPÍTULO 14

## 14.1 Respuestas

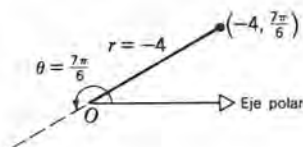
1.



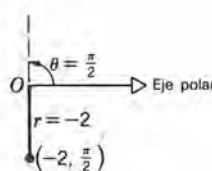
3.



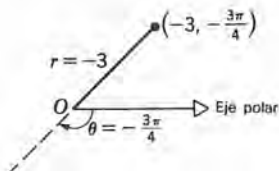
5.



7.



9.





11.  $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$  y  $\left(2, -\frac{5\pi}{3}\right)$

13.  $\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$  y  $\left(-2, -\frac{7\pi}{4}\right)$

15.  $\left(-4, \frac{3\pi}{4}\right)$  y  $\left(4, \frac{7\pi}{4}\right)$

17.  $\left(1, -\frac{5\pi}{4}\right)$  y  $\left(-1, \frac{7\pi}{4}\right)$

19.  $(2\sqrt{3}, 2)$

21.  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

23.  $(-5, 0)$

25.  $(-2, -2\sqrt{3})$

27.  $(2, 2\sqrt{3})$

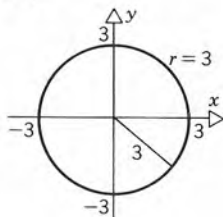
29.  $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

31.  $\left(4, -\frac{2\pi}{3}\right)$

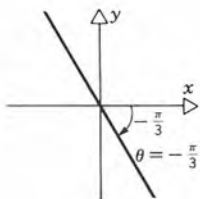
33.  $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$

35.  $(\sqrt{5}, \arctan 2)$

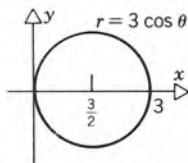
37.



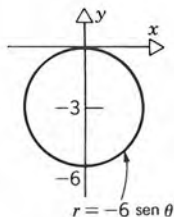
39.



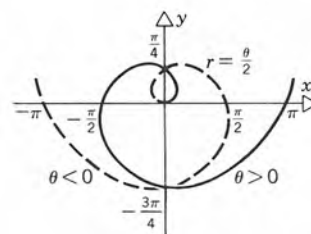
41.



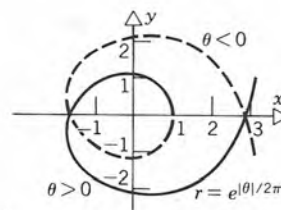
43.



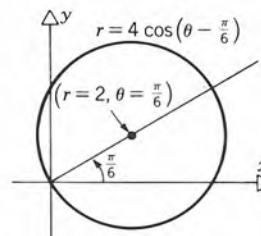
45.



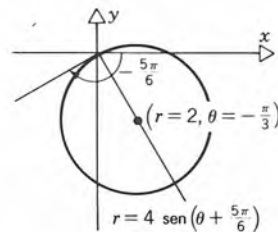
47.



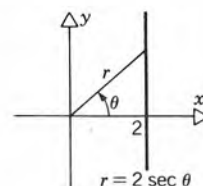
49.



51.

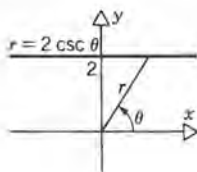


53.

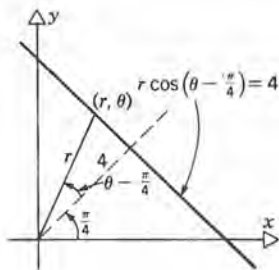


**A-40** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

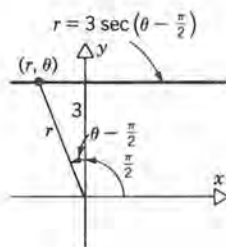
55.



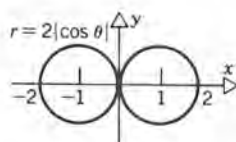
57.



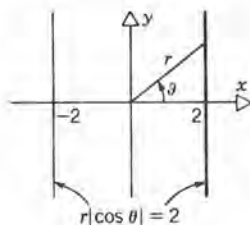
59.



61.



63.



65.  $r = 4 \sin \theta$

67.  $r = 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

69.  $r(2 \cos \theta - \sin \theta) = 5$     71.  $r^2(2 - \sin 2\theta) = 6$

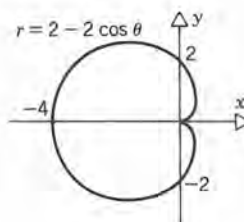
73.  $(x^2 + y^2 + 2y)^2 = 4(x^2 + y^2)$

75.  $(x^2 + y^2)^3 = 36x^2y^2$

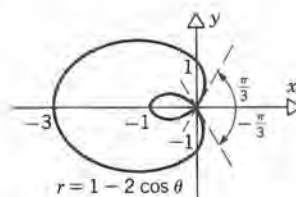
77.  $d = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)]^{1/2}$

**14.2 Respuestas**

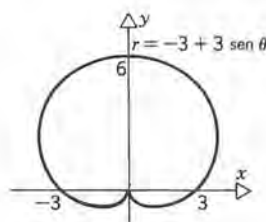
**1. Cardioide**



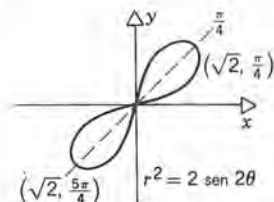
**3. Caracol**



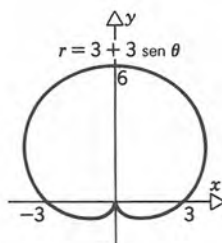
**5. Cardioide**



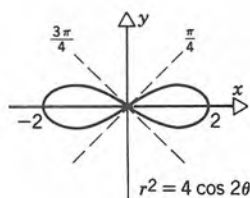
**7. Lemniscata**



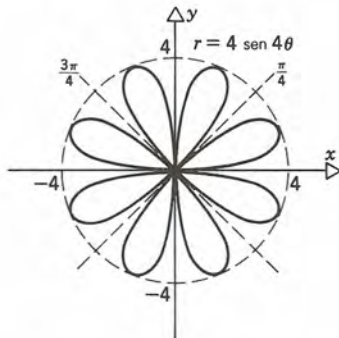
9. Cardioide



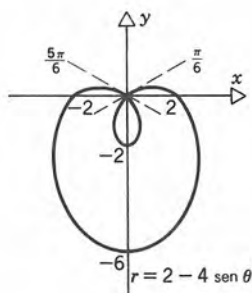
11. Lemniscata



13. Curva con pétalos



15. Caracol



17.  $\left(6, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(6, -\frac{\pi}{3}\right)$

19.  $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{polo}$

21.  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$

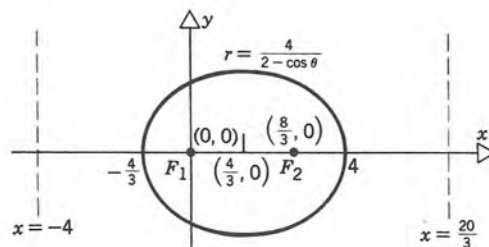
23.  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{7}{2}, -\frac{\pi}{3}\right), \quad \text{polo}$

25.  $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right), \quad \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

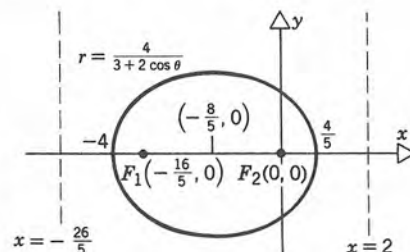
27.  $\left(1, \frac{\pi}{6}\right), \quad \left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$

29.  $\left(2, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(2, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \text{polo}$

33.  $e = \frac{1}{2}$ ; los focos están en  $(0, 0)$  y  $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ ; las directrices son  $x = -4$  y  $x = \frac{20}{3}$



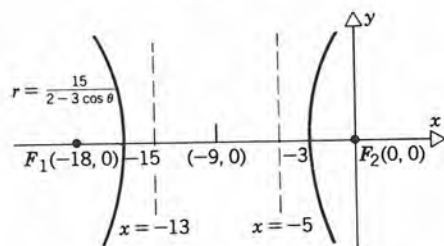
35.  $e = \frac{2}{3}$ ; los focos están en  $(0, 0)$  y  $\left(-\frac{16}{5}, 0\right)$ ; las directrices son  $x = 2$  y  $x = -\frac{26}{5}$



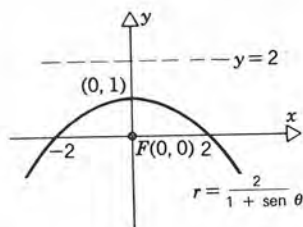


**A-42** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

37.  $e = \frac{3}{2}$ ; los focos están en  $(0, 0)$  y  $(-18, 0)$ ; las directrices son  $x = -5$  y  $x = -13$



39.  $e = 1$ ; el foco está en  $(0, 0)$ ; la directriz es  $y = 2$



41.  $r = \frac{6}{2 + 3 \cos \theta}$ ; el foco está en  $(\frac{26}{5}, 0)$ ; la directriz es  $x = \frac{26}{5}$

**14.3 Respuestas**

- |  |                                 |                       |
|--|---------------------------------|-----------------------|
| 1. 4   | 3. $\frac{9\pi}{8}$             | 5. $\frac{3\pi^3}{2}$ |
| 7. (a) $2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$                          | (b) $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$ |                       |
| (c) $\pi + 3\sqrt{3}$  |                                 |                       |
| 9. $a^2 \left( -\frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8} \right)$ | 11. $3\sqrt{3} - \pi$           |                       |
| 13. $\frac{5\pi}{2} - 3\sqrt{3}$                             | 15. $2\sqrt{2}$                 |                       |
| 17. $\pi a$  | 19. $a$                         |                       |
| 21. $\frac{\sqrt{1 + k^2}(e^{k\pi} - 1)}{k}$                 | 23. $4a$                        |                       |
| 25. $2\sqrt{2}a \int_0^{\pi/4} (\sec 2\theta)^{1/2} d\theta$ | 29. $\frac{32\pi a^2}{5}$       |                       |
| 27. $\pi a^2$  | 33. $1 - \sqrt{2}$              |                       |
| 31. $4\sqrt{2}\pi a^2$                                       |                                 |                       |

35.  $-7/3\sqrt{3} \cong -1.347$

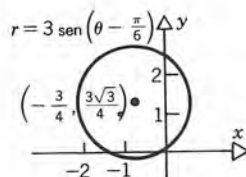
37.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

39.  $\frac{\pi}{2}$

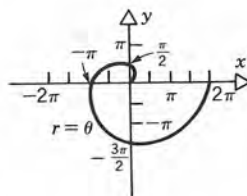
**Respuestas a los problemas de repaso**

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\left( 2, \frac{3\pi}{2} \right), \left( -2, -\frac{3\pi}{2} \right)$ |  |
| 3. $\left( -3, \frac{\pi}{3} \right), \left( 3, \frac{4\pi}{3} \right)$   |  |
| 5. $\left( \frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$                     | 7. $\left( -\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ |
| 9. $\left( 4, \frac{\pi}{6} \right)$                                      | 11. $\left( 4, \frac{2\pi}{3} \right)$                 |

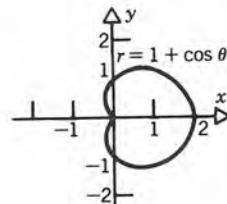
13. círculo



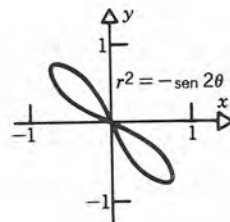
15. espiral



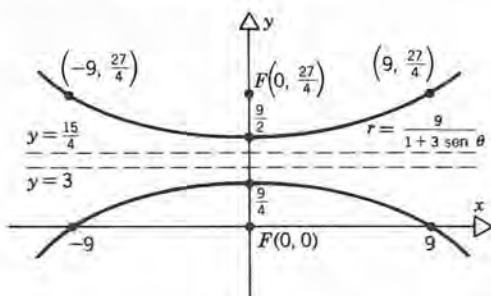
17. cardioide



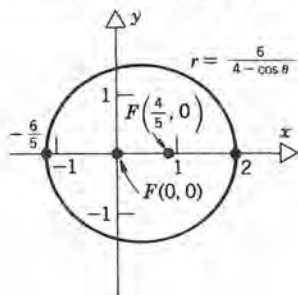
19. lemniscata



21. Hipérbola; los focos están en  $(0, 0)$  y  $(0, \frac{27}{4})$ ; las directrices son  $y = 3$  y  $y = \frac{15}{4}$ ;  $e = 3$



23. Elipse; los focos están en  $(0, 0)$  y  $(4/5, 0)$ ; las directrices son  $x = -6$  y  $x = 34/5$ ;  $e = \frac{1}{4}$



25.  $r = 3 \sec \theta + 3$       27.  $r = \sec \theta - \cos \theta$   
 29.  $x + \sqrt{3}y = 0$       31.  $y^4 + x^2y^2 - 4x^2 = 0$   
 33.  $(4, 0)$       35.  $(1, \frac{3\pi}{4})$ ,  $(-1, \frac{3\pi}{4})$ , polo  
 37.  $\frac{9\pi}{2}$       39. 2  
 41.  $L = 3 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc^2 \theta \, d\theta$   
 43.  $L = 2 \int_0^{\pi/6} \sqrt{\sec 2\theta} \, d\theta$   
 45.  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$       47.  $3\sqrt{3}$

## CAPÍTULO 15

### 15.1 Respuestas

1.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, -1)$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-5, 3)$ ,  
 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = (-13, 8)$   
 3.  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2, 0)$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (0, 2)$ ,  
 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = (-1, 5)$

5.  $\overrightarrow{PQ} = (2, -3)$

7.  $\overrightarrow{PQ} = (-3, -4)$

9.  $\overrightarrow{PQ} = (1, -3)$ ,  $\overrightarrow{QP} = (-1, 3)$

11.  $x = \frac{5}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{2}$       13.  $\sqrt{5}$

15. 5      17.  $\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$

19.  $\mathbf{b} = \pm\sqrt{5}(-2, 1)$       21.  $\lambda = \pm 2\sqrt{3}$

25.  $T = \frac{W}{2 \sin \theta}$

### 15.2 Respuestas

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$ ;  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{26}} \approx -0.1961$

3.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ;  $\cos \theta = 0$

5.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$ ;  $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{34}} \approx 0.5145$

7.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 8$ ;  $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0.8944$

9.  $\mathbf{u} = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

11.  $\mathbf{u} = (\frac{3x}{5|x|}, -\frac{4x}{5|x|})$

13.  $\mathbf{u} = -\frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}$

15.  $\mathbf{u} = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$

17.  $\mathbf{u} = \pm[\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}]$

19.  $\frac{3}{\sqrt{2}}$       21.  $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

23.  $-\frac{x}{\sqrt{5}}$       25.  $(2, -1)$

27.  $\frac{5}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$

31.  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{17} \approx 4.123$ ;  
 $\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| = \sqrt{5} + \sqrt{10} \approx 5.398$

33.  $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{34} \approx 5.831$ ;  
 $\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| = \sqrt{5} + 5 \approx 7.236$

37. (b) En la recta que pasa por  $P$  y  $Q$ , pero no en el segmento de  $P$  a  $Q$ .

### 15.3 Respuestas

1.  $(1, -3, 5)$       3.  $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

5.  $(12, -7, 7)$       7.  $8\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$

9.  $\sqrt{14}$       11.  $\sqrt{21}$       13.  $\sqrt{35}$

15.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4$ ;  $\cos \theta = \frac{4}{7\sqrt{6}} \approx 0.2333$

17.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ;  $\cos \theta = 0$

**A-44** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

19.  $-\frac{3}{\sqrt{14}} \approx -0.8018$

21.  $\frac{5}{\sqrt{29}} \approx 0.9285$     23.  $\frac{2}{3}$

25.  $\frac{3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{14}}$     27.  $\frac{3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}}{\sqrt{19}}$

31.  $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.9553$  radianes

33.  $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.6155$  radianes

**15.4 Respuestas**

1.  $-2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$     3.  $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$   
 5.  $(a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$     7.  $\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$   
 9.  $-14$     11.  $-14\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 21\mathbf{k}$   
 13.  $\frac{\pm(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{3}}$     15.  $\sqrt{153} \approx 12.369$   
 17. 16; no    19.  $-2$

**15.5 Respuestas**

1.  $-x + 4y + 5z = 9$   
 3.  $8x - y - 13z = -29$   
 5.  $2x - y + 5z = -5$   
 7.  $y - 2z = -1$   
 9.  $x - 10y + 7z = -39$   
 11.  $x = 2 + 3t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 4 - t$   
 13.  $x = 2 + t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 3 - t$   
 15.  $\frac{x-4}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{3}$   
 17.  $x = -2$ ,  $\frac{y-6}{1} = \frac{z-1}{2}$   
 19.  $x = 4 + 6t$ ,  $y = -3 - t$ ,  $z = 3t$   
 21.  $3\sqrt{3} \approx 5.196$     23. Sí  
 25.  $(-2, 5, 0)$     27. 6  
 29.  $\frac{10}{\sqrt{285}} \approx 0.5923$     31.  $\frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.581$

33. (a) El plano que pasa por el origen y que es perpendicular a  $\mathbf{a}$ .  
 (b) El plano perpendicular a  $\mathbf{a}$ , a una distancia  $c$  del origen.  
 (c) La esfera con centro en  $\mathbf{a}/2$  y con radio  $\|\mathbf{a}\|/2$ .

**15.6 Respuestas**

1.  $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$     3. No existe el límite  
 5.  $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$     11.  $-1$

13.  $2t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k}$

15.  $(2 \sin 2t + 4t \cos 2t)\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + 12(2t - 1)\mathbf{k}$

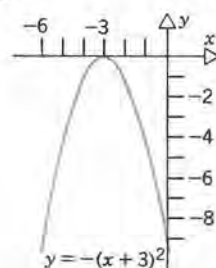
17.  $(-e^{-t} + 2e^{2t})\mathbf{i} + (-2 \sin t - \cos t)\mathbf{j} + (2t + 3t^2)\mathbf{k}$

19.  $(-3e^{-t} - 4e^{2t})\mathbf{i} + (-6 \sin t + 2 \cos t)\mathbf{j} + (6t - 6t^2)\mathbf{k}$

21.  $-12t^2 + 25t^4$

23.  $-12t^2 + 25t^4$

25. (a)



(b)  $\frac{\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{\sqrt{17}}$

(c)  $x = -5 + \tau$ ,  $y = -4 + 4\tau$ ,  $z = 0$

(d)  $x + 4y = -21$

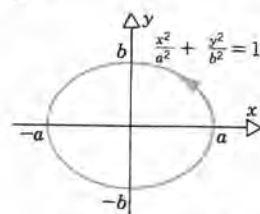
27. (a)  $\frac{3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{5}$

(b)  $x = 2$ ,  $y = 3\tau$ ,  $z = 4\tau$

(c)  $3y + 4z = 0$

29.  $\arccos \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0.9799$  radianes

31. (a)



(b)  $-a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + b\omega \cos \omega t \mathbf{j}$

(c)  $\frac{\omega(a^2 - b^2) \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t}}$

**15.7 Respuestas**

1.  $3\sqrt{10} \approx 9.487$     3.  $\frac{38}{3}$

5.  $2 \sinh 2 \approx 7.254$     7.  $\frac{2}{3}$

9.  $\mathbf{v} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ;  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$   
 $\mathbf{a} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$

11.  $\mathbf{v} = t\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}$ ;  
 $\|\mathbf{v}\| = (16 + t^2 + 81t^4)^{1/2}$ ;  
 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 18t\mathbf{k}$

$$13. \frac{-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{10}}$$

$$15. \frac{t\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k}}{(16 + t^2 + 81t^4)^{1/2}}$$

$$17. \frac{1}{10}$$

$$19. \frac{(16 + 5184t^2 + 81t^4)^{1/2}}{(16 + t^2 + 81t^4)^{3/2}}$$

$$21. \frac{|ab|}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

$$23. \frac{1}{2\sqrt{2}a(1 - \cos t)^{1/2}}$$

$$25. \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-2x})^{3/2}}$$

$$27. \frac{2x^3}{(x^4 + 1)^{3/2}}$$

### 15.8 Respuestas

$$3. \mathbf{v} = -a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + b\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - b\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j}$$

$$a_t = (a^2 - b^2) \frac{\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2}}$$

$$a_n = \frac{ab\omega^2}{(a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t)^{1/2}}$$

$$5. \mathbf{v} = -(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t) \mathbf{i} + (\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = -(\cos t + \cos 2t) \mathbf{i} - (\sin t + \sin 2t) \mathbf{j}$$

$$a_t = -\frac{\sin t}{2(\frac{5}{4} + \cos t)^{1/2}}$$

$$a_n = \frac{\frac{3}{2}|1 + \cos t|}{(\frac{5}{4} + \cos t)^{1/2}}$$

$$7. (a) \mathbf{v} = a\omega(1 - \cos \omega t) \mathbf{i} + a\omega \sin \omega t \mathbf{j};$$

$$\|\mathbf{v}\| = 2a\omega \sin \frac{\omega t}{2} \text{ es máximo cuando } \omega t = \pi, \text{ esto}$$

es, en la parte superior del arco

$$(b) \mathbf{a} = a\omega^2(\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j}); \|\mathbf{a}\| = a\omega^2; \mathbf{a} \text{ apunta}$$

hacia el centro del círculo que rueda

$$(d) a_t = a\omega^2 \cos \frac{\omega t}{2}; \quad a_n = a\omega^2 \sin \frac{\omega t}{2}$$

$$9. (a) 24,900 \text{ millas}$$

$$(b) 29,100 \text{ millas}$$

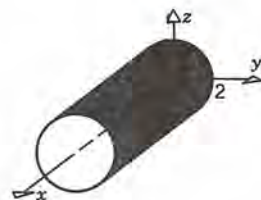
### 15.9 Respuestas

$$1. a_t = -2b\omega^2 \sin \theta, \quad a_n = 2b\omega^2 \cos \theta, \\ \mathbf{h} = m\omega b^2 \sin^2 \theta \mathbf{k}$$

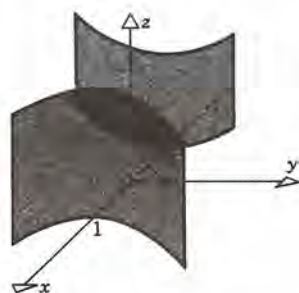
$$3. a_t = \omega^2[f''(\theta) - f'(\theta)], \quad a_n = 2\omega^2 f'(\theta), \\ \mathbf{h} = m\omega[f'(\theta)]^2 \mathbf{k}$$

### 15.10 Respuestas

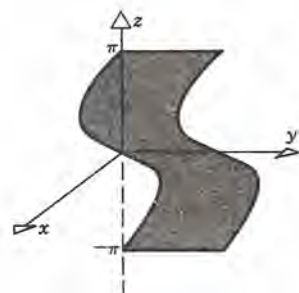
1. Cilindro paralelo al eje  $x$ ; sección transversal circular, radio 2



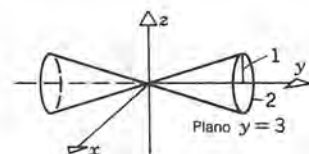
3. Cilindro paralelo al eje  $z$ ; sección transversal hiperbólica



5. Cilindro paralelo al eje  $y$



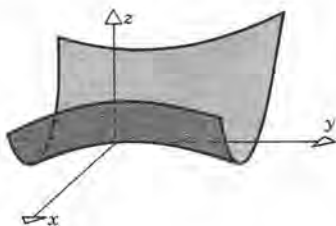
7. Cono



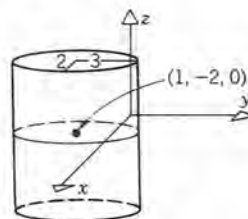


**A-46** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

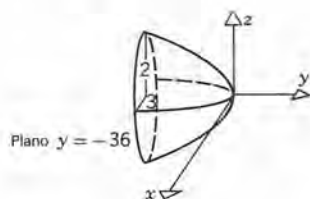
9. Paraboloide hiperbólico



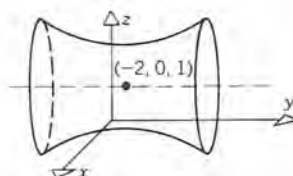
17. Cilindro paralelo al eje  $z$ ; sección transversal elíptica



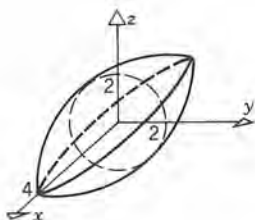
11. Paraboloide elíptico



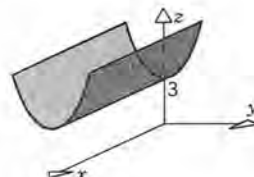
19. Hiperboloide de un manto



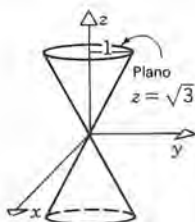
13. Elipsoide de revolución alrededor del eje  $x$  (esferoide alargada por los polos)



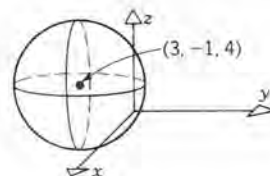
21. Cilindro paralelo al eje  $x$ ; sección transversal parabólica



15. Cono; superficie de revolución alrededor del eje  $z$



23. Esfera, centro en  $(3, -1, 4)$ ; radio 4



25.  $y = 1 - x^2 - z^2$

27.  $y^4 = x^2 + z^2$

29.  $x^2 + y^2 = \left( \frac{z^2}{1 + z^2} \right)^2$

31.  $z^3 = x^2 + y^2$

33. (a)  $u + 3 = \sqrt{x}$   
 (b)  $u^2 + z^2 = (\sqrt{x} - 3)^2$   
 (c)  $(y - 3)^2 + z^2 = (\sqrt{x} - 3)^2$

35.  $(y - 1)^2 + z^2 = (1 + x^2)^2$

37.  $x^2 + (z - \pi)^2 = (\arctan y - \pi)^2$

39.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ ; hiperboloide de un manto

41. (a) Cono con eje a lo largo de  $a$  y ángulo en el vértice igual a  $\arctan \lambda$   
 (b)  $(-\lambda^2 a^2 + b^2 + c^2)x^2 + (a^2 - \lambda^2 b^2 + c^2)y^2 + (a^2 + b^2 - \lambda^2 c^2)z^2 - 2(1 + \lambda^2)(abxy + acxz + bcyz) = 0$ ;  
 $\lambda = \tan \alpha$

43.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ , donde  $b^2 = c^2 - a^2$ ;  
 hiperboloide de revolución alrededor del eje  $x$ , de dos mantos

# **Respuestas a los problemas de repaso**

1.  $(3, -8, 3)$       3.  $(15, -1, 6)$

5.  $12(10, 23, 4)$       7.  $\lambda = \pm\sqrt{37/3}$

9.  $\lambda = \pm 5$       11.  $(6, 7, 3 \ln 2 + 4e)$

13. 0      15.  $(-\sin t, 12t^3, 6te^{3t^2} + 1/t)$

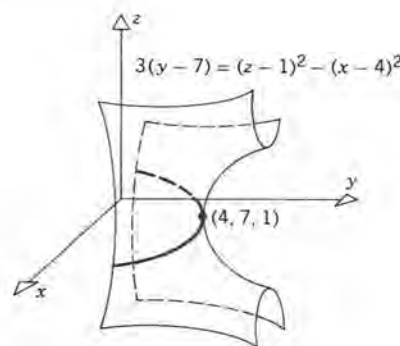
17.  $(-\sin t \cos t + 6t e^{6t^2})(\cos^2 t + e^{6t^2})^{-1/2}$

19. (a)  $\frac{(1, -\sin t)}{(1 + \sin^2 t)^{1/2}}$   
 (b)  $2 \int_0^{\pi/2} \cos t \sqrt{1 + \sin^2 t} dt$

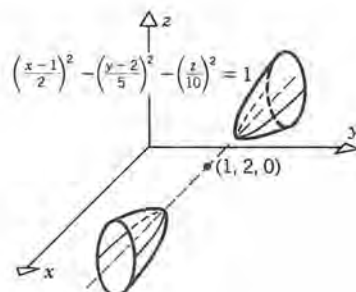
21. (a)  $(\cos t, \sin t)$

(b)  $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc t dt$

23. paraboloide hiperbólica



25. hiperboloide de dos mantos



27.  $2y^2 + 5x^2 + 5z^2 = 10$

29.  $(z - 1)^2 + y^2 = (x^3 - 1)^2$

31. punto de intersección:  $(1, 0, 0)$

33.  $y - z = -1$

35.  $2x - 5y + z = -1$

**A-48** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

37.  $8x + 2y - 7z = 14$     39.  $\sqrt{393}/2$   
 41. (a)  $a_r = -2a\omega^2 \cos \theta$     43. N  $84.4^\circ$ W  
 $a_\theta = -2a\omega^2 \sin \theta$      $t = 8$  horas 21 minutos  
 (b)  $\mathbf{h} = m\omega r^2 \mathbf{u}_z$   
 (c)  $\kappa = 2/a$

**CAPÍTULO 16**

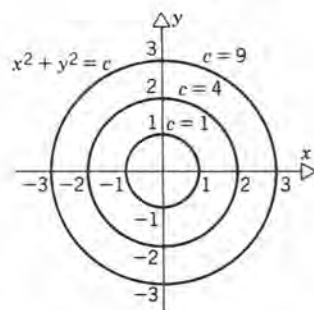
**16.1 Respuestas**

1. (a) 0    (b) 0    (c) 4  
 3. (a)  $\frac{1}{2} - 4\sqrt{2}$  (b)  $2a^{2a} + a^4$   
 (c)  $4 + \frac{16\sqrt{2}}{3}$   
 5. (a) -2    (b)  $x \sin x$     (c)  $y \sin x$   
 (d)  $r \sin s$   
 7. (a)  $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$     (b)  $\frac{1}{a^2\sqrt{3}}$   
 9.  $x^2 + y^2 \leq \frac{8}{3}$

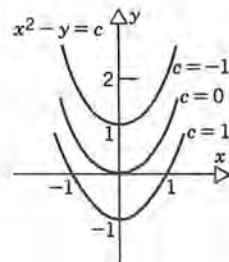
11.  $-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$

13.  $z \geq 0$     15.  $xy > 0$

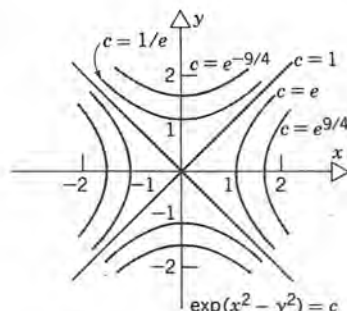
17.



19.



21.



23. En ninguna parte    25.  $y = \pm x$   
 27. En ninguna parte    29. No  
 31.  $f(0, 0) = 0$     33.  $\alpha > 2, \quad f(0, 0) = 0$

**16.2 Respuestas**

1.  $z_x = 4x - 3y, \quad z_y = -3x + 2y$   
 3.  $f_x(x, y) = \frac{2y(-x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$   
 5.  $D_x f(x, y) = 3x^2 + 8xy - 6y^2;$   
 $D_y f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 3y^2$   
 7.  $D_s u = s \cos(r - s) - rs \sin(r - s),$   
 $D_r u = r \cos(r - s) + rs \sin(r - s)$   
 9.  $f_x(x, y) = 2xy^2 \sin(x^2 y^2) + 2x^3 y^4 \cos(x^2 y^2)$   
 11.  $f_x(x, y, z) = \frac{-2(x - 2y + z)(2x^2 + 2z^2 + xy + yz)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$   
 13.  $f_x(x, y, z) = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$   
 15.  $z_x = \frac{x[2 - \ln(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$   
 $z_y = \frac{y[2 - \ln(x^2 + y^2)]}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$   
 17.  $z_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$   
 19.  $z_{xy} = z_{yx} = -3$   
 21.  $z_{xy} = z_{yx} = 4xy(1 - x^4 y^4) \sin(x^2 y^2) + 12x^3 y^3 \cos(x^2 y^2)$   
 29. (a) 9, 6    (b)  $3^n, \frac{(n+1)(n+2)}{2}$   
 35.  $z = \frac{x}{y} + F(y)$   
 37.  $z = \frac{e^{xy}}{x} + y \ln x + \frac{x^2 y^2}{2} + F(x)$

$$39. z = \frac{x^3 y^2}{3} + \frac{x^{y+1}}{y+1} + F(y)$$

### 16.3 Respuestas

$$1. f(x+h, y+k) = x^2 + 3xy + (2x+3y)h$$

$$+ 3xk + r\sqrt{h^2 + k^2},$$

$$r = (h^2 + 3hk)/\sqrt{h^2 + k^2}$$

$$3. f(x+h, y+k) = xy^2 + y^2h + 2xyk$$

$$+ r\sqrt{h^2 + k^2},$$

$$r = \frac{2xyhk + xk^2 + hk^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$5. f(x+h, y+k) = x \operatorname{sen} y + (\operatorname{sen} y)h$$

$$+ (x \cos y)k + r\sqrt{h^2 + k^2},$$

$$[(x+h)(\operatorname{sen} y)(\cos k - 1)$$

$$+ x(\cos y)(\operatorname{sen} k - k) + (\cos y)h \operatorname{sen} k]$$

$$r = \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$7. dz = \frac{6x dx - dy}{3x^2 - y + 2}$$

$$9. dz = yx^{y-1} dx + (\ln x)x^y dy$$

$$11. dz = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

$$13. dw = (\cos 2y) dx + (-2 \operatorname{sen} 2y + 3\sqrt{z}) dy$$

$$+ \left(\frac{3y}{2\sqrt{z}}\right) dz$$

$$15. dV = \left(\frac{2\pi rh}{3}\right) dr + \left(\frac{\pi r^2}{3}\right) dh$$

$$19. 3 + 13t^{11/2}$$

$$21. (2t \operatorname{sen} t + t^2 \cos t) \exp(1 + t^2 \operatorname{sen} t)$$

$$23. -4t^{-3} + \frac{9\sqrt{t}}{2} + t^{-7/6}$$

$$25. \frac{\partial z}{\partial r} = 48rs^2(2r^2 - s^2), \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 48r^2s(r^2 - 2s^2)$$

$$27. \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{2e^{2s}}{1 + e^{4s}}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

$$37. \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y}$$

### 16.4 Respuestas

$$1. (x+2y)\mathbf{i} + 2(x+y)\mathbf{j}$$

$$3. (y^2 - 6xz)\mathbf{i} + 2(xy + z^2)\mathbf{j} + (4yz - 3x^2)\mathbf{k}$$

$$5. (\cosh x \tan y)\mathbf{i} + (\sinh x \sec^2 y)\mathbf{j}$$

$$7. \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$9. -(a^2 + b^2)^{-1/2}$$

$$11. -\frac{11e^2}{\sqrt{3}} \approx -46.927$$

$$13. \lambda = \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5}, 5$$

$$15. \lambda = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{13}, 507$$

$$19. \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$21. \pm \frac{bi + aj}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$23. \pm \frac{(i + a^2\mathbf{j})}{\sqrt{1 + a^4}}$$

$$25. 0$$

$$27. \frac{e^2}{2}$$

$$29. \frac{20e}{\sqrt{2}}$$

$$31. \pm(i + 3\mathbf{j})$$

$$33. \frac{7}{2}$$

$$35. -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$39. y = \frac{3x^3}{16}$$

$$43. (\mathbf{c}) \mathbf{c} = \mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

### 16.5 Respuestas

$$1. 8x + 4y - z = 6;$$

$$x - 1 = 8t, y - 1 = 4t, z - 6 = -t$$

$$3. y + z = 3; \quad x = 0, y - 1 = z - 2 = t$$

$$5. 6x + 2y - 3z = 36;$$

$$x - 1 = 6t, y - 9 = 2t, z + 4 = -3t$$

$$7. y - 2z = -5;$$

$$x = 1, y - 3 = t, z - 4 = -2t$$

$$9. ex + (4 + e)y - z = 4 + e;$$

$$x - 1 = et, y - 1 = (4 + e)t, z - e = -t$$

$$15. (a) \frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}} = a^{2/3}$$

$$17. (a) \frac{x}{\sqrt{x_0}} + \frac{y}{\sqrt{y_0}} + \frac{z}{\sqrt{z_0}} = \sqrt{a}$$

$$19. x - 1 = 7t, y + \frac{8}{3} = -2t, z + \frac{1}{2} = -5t$$

$$21. x - 2 = -9t, y + 1 = -4t, z + 8 = 4t$$

23. Las normales son paralelas; las superficies sólo se intersectan en un punto y no en una curva.

$$25. (a) (0, 0, \pm c) \quad (b) (\pm a, 0, 0)$$

$$(c) \left( \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

$$29. (-1, \sqrt{3}, 4), 0.1306 \text{ radianes}$$

### 16.6 Respuestas

$$1. \left(\frac{1}{2}, -1\right), \text{mínimo relativo}$$

$$3. (0, 0), \text{silla}$$

$$5. (0, -1), \text{mínimo relativo}$$

$$7. (1, -\frac{1}{2}), \text{máximo relativo}$$

$$9. (0, 0), \text{silla}$$

$$11. (e^2, -6e^4), \text{silla}$$

$$13. (0, 0), \text{silla}; \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right), \text{mínimo relativo}$$



**A-50 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR**

15.  $\left(0, \pm(2n-1)\frac{\pi}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots$ , sillars

17.  $(0, 0)$ , máximo relativo

19.  $(-1, 1)$ , silla;  $(1, -1)$ , silla

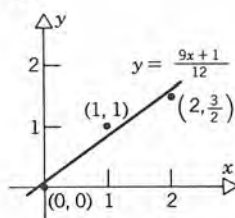
21.  $(0, 0)$ , máximo relativo;  $(-\frac{2}{3}, 0)$ , silla

23. Cada uno es  $\frac{a}{3}$

25.  $\left(\frac{ad}{r^2}, \frac{bd}{r^2}, \frac{cd}{r^2}\right)$ , donde  $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$

27. El fondo mide 2 ft por 2 ft; la altura es de 1.5 ft

29. (b)  $y = \frac{9x+1}{12}$



31. (a)  $a_0 = \frac{I_0}{2}, a_1 = \frac{3I_1}{2}$ , donde  $I_n = \int_{-1}^1 x^n f(x) dx$

(b)  $a_0 = \frac{9I_0 - 15I_2}{8}, a_1 = \frac{3I_1}{2}, a_2 = \frac{45I_2 - 15I_0}{8}$

33. (a)  $q_1 = 20, q_2 = 15, p_1 = 287.5, p_2 = 250.00$ ,  
 $p_1 + p_2 = 537.50$

(b)  $q_1 = \frac{40}{3}, q_2 = 12, p_1 = 283.56, p_2 = 343.11$ ,  
 $p_1 + p_2 = 626.67$

**16.7 Respuestas**

1. El máximo es  $\frac{ab}{2}$ ; el mínimo es  $-\frac{ab}{2}$ . 3.  $\frac{2}{ab}$

5. El máximo es 12 en  $(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{4}{3})$ ; el mínimo es -12 en  $(-\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$ .

7. El máximo es 3 en  $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$ ; el mínimo es -3 en  $(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ .

9.  $-\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$  11.  $\frac{1}{9}$  13.  $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

15.  $x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}}$  21. (a) Cada uno es  $\frac{C}{2}$ .

25. El máximo es  $\frac{r^2}{b^2}$ ; el mínimo es 0.

27. El máximo es  $(8 + 3\sqrt{3})/2$  en  $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ ; el mínimo es  $-4/15$  en  $(-1/15, -8/15)$ .

29. El máximo es  $72\sqrt{2} - 66$  en  $(\pm 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ ; el mínimo es  $-72\sqrt{2} - 66$  en  $(\pm 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ .

**16.8 Respuestas**

1.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x \sin y - 2y \sin x}{e^x \cos y + 2 \cos x}$

3.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy(x^2 + y^2) - y^3}{xy^2 - x^2(x^2 + y^2)}$

5.  $z_x = -\frac{(3y + e^{x+z})}{e^{x+z} - 1}, z_y = -\frac{(3x - 4y)}{e^{x+z} - 1}$

7.  $z_y = \frac{\cos(x+y) - \sin(y+z)}{\cos(x+z) - \sin(y+z)}$

9.  $z_y = -\frac{2y(x^2 + 4y^2 + z^2)}{z(2x^2 + 2y^2 + 3z^2)}$

11.  $u_y = \frac{u(y^2 - v^2)}{y(u^2 + v^2)}, v_y = -\frac{v(u^2 + y^2)}{y(u^2 + v^2)}$

13. (a) -1 (b) -10

15.  $f_x(1, -1) = \frac{1}{6}, f_{xx}(1, -1) = \frac{50}{243},$   
 $f_y(1, -1) = -\frac{13}{9}, f_{xy}(1, -1) = \frac{70}{243}$

17.  $\frac{dz}{dx} = \frac{f_x g_y - g_x f_y}{g_y}$

23.  $u_x = \frac{g_v}{\Delta}, v_x = -\frac{g_u}{\Delta}, u_y = -\frac{f_v}{\Delta}, v_y = \frac{f_u}{\Delta},$   
donde  $\Delta = f_u g_v - f_v g_u$

**Respuestas a los problemas de repaso**

1. (a) 0

(b)  $\ln 27$

Dominio:  $|x| > |y|$

3. (a)  $-\frac{\pi}{4}$

(b)  $\arctan\left(\frac{ac}{b} \frac{3b - 2a}{c - 2a^2}\right)$

Dominio:  $x, y, z \in \mathbb{R}^1, z \neq \frac{x^2}{2}$

5. Discontinua en la recta  $y = 2x$

7. Discontinua en la recta  $y = x$ ; definir  $f(x, x) = 0$ .  
Discontinua en las rectas  $y = x \pm 1$ .

9.  $f_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, f_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$

11.  $g_r = s^2 t^2 \cos(rs - t)$   
 $g_s = rst^2 \cos(rs - t) + t^2 \sin(rs - t)$   
 $g_t = -st^2 \cos(rs - t) + 2st \sin(rs - t)$

13.  $z_{xy} = 4xy \cos(x^2 - y^2) = z_{yx}$

15.  $z_{xy} = e^{xy}[2xy \cos xy + \sin xy + \cos xy] = z_{yx}$

17. Sí

19. No

21.  $z = x^3 y^2 - \sin 2y + g(x)$   
 23.  $z = \arctan(y/x) + g(x)$   
 25.  $f(x + h, y + k) = x^3 - 3y^2 + 3x^2 h - 6yk$   

$$+ r\sqrt{h^2 + k^2},$$
  

$$r = (3xh^2 + h^3 - 3k^2)/\sqrt{h^2 + k^2}$$
  
 27.  $f(x + h, y + k) = e^{xy} - x^2 y + (ye^{xy} - 2xy)h$   

$$+ (xe^{xy} - x^2)k + r\sqrt{h^2 + k^2},$$
  

$$r = \{e^{xy}[e^{hy + hk + kx} - (1 + xk + yh)]$$
  

$$- (y + k)h^2 - 2xhk\}/\sqrt{h^2 + k^2}$$
  
 29.  $dz = -2 \cos x (\sin x) y e^{\cos^2 x} dx + e^{\cos^2 x} dy$   
 31.  $dw = z^2[1 - (x - y)^2]^{-1/2} dx$   

$$- z^2[1 - (x - y)^2]^{-1/2} dy + 2z \arcsin(x - y) dz$$
  
 33.  $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{3}{2}t^{1/2} - 1\right) \cosh(t^{3/2} - t)$   
 35.  $\frac{dz}{dt} = 7t^6 - 8t^7 + 12t^{11}$   
 37.  $z_r = e^{3r+s} \sin^3 s (3 \cos r - \sin r)$   
 $z_s = e^{3r+s} \sin^2 s \cos r (3 \cos s + \sin s)$   
 39.  $w_r = \frac{2rs^2}{a^2} - \frac{4r^3 + 4rs}{b^2} - \frac{1}{c}$   
 $w_s = \frac{2r^2 s}{a^2} - \frac{2r^2 + 2s}{b^2} + \frac{1}{c}$   
 41.  $-4/\sqrt{13}$       43.  $2/\sqrt{21}$   
 45.  $\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{160}}\right) (4, -12);$  Rapidez:  $4\sqrt{10}$   
 47.  $\lambda = (0, -1, 0);$  Rapidez: 4  
 49.  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-10}$   
 51.  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{-2}$   
 53.  $(0, 0), (0, 4/3), y(-4, 0)$  son puntos sillas;  
 $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{9}\right)$  es un mínimo local.  
 55.  $(0, 0)$  es un punto silla.  
 57.  $y' = \frac{3y^2 - 2x}{6y^2 - 6xy}$   
 59.  $z_x = \frac{(x^2 - z^2) z \sinh x e^{z \cosh x} - 2x}{(x^2 - z^2) - (x^2 - z^2) \cosh x e^{z \cosh x} - 2z}$   

$$z_z = \frac{2z + (x^2 - z^2) \cosh x e^{z \cosh x} - (x^2 - z^2)}{2x - (x^2 - z^2) z \sinh x e^{z \cosh x}}$$
  
 61. Plano tangente:  $3x - z = 8;$  recta normal:  
 $2(x - 3)/3 = -2(z - 1)/1, y = 0$   
 63.  $13/5$   
 65.  $w = 5\sqrt{2}, l = 12\sqrt{2}; A = 120$   
 67.  $c' =$  rapidez de separación  $\approx 103$  km/hr

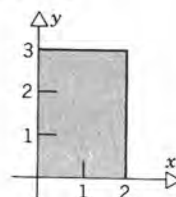
## CAPÍTULO 17

### 17.1 Respuestas

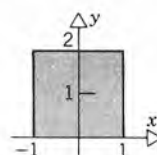
1. (a) 8      (b) 6      (c) 18  
 3. (a)  $\frac{5}{4}$       (b)  $\frac{2}{16}$       (c)  $\frac{83}{8}$   
 5.  $\frac{\pi}{4}$       7.  $\frac{\pi}{2}$       9.  $\frac{9\pi}{2}$       11.  $8\pi$

### 17.2 Respuestas

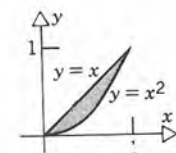
1. 0



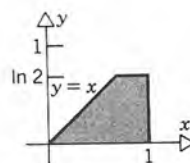
3.  $\frac{5\pi}{8}$



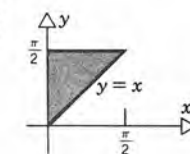
5.  $-\frac{1}{8}$



7.  $\frac{(\ln 2)^2 + 2 \ln 2 - 1}{2}$



9.  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - \frac{3}{4}$



**A-52** RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

11. (a)  $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} 2xy \, dy \, dx$

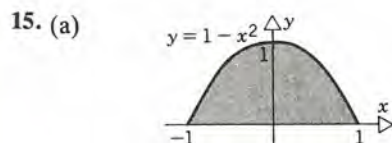
(b)  $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{1/3}} 2xy \, dx \, dy$

(c)  $5/24$

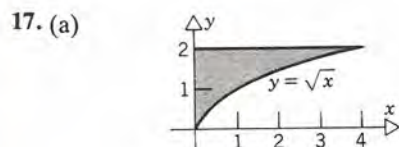
13. (a)  $\int_0^1 \int_{x/2}^{3x} (2x - y) \, dy \, dx + \int_1^4 \int_{x/2}^{(10-x)/3} (2x - y) \, dy \, dx$

(b)  $\int_0^2 \int_{y/3}^{2y} (2x - y) \, dx \, dy + \int_2^3 \int_{y/3}^{10-3y} (2x - y) \, dx \, dy$

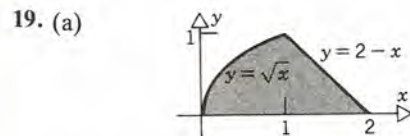
(c)  $25/3$



(b)  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx \, dy$ ; (c)  $\frac{4}{3}$



(b)  $\int_0^2 \int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3} \, dx \, dy$ ; (c)  $\frac{52}{9}$



(b)  $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} (x - 2y) \, dx \, dy$ ; (c)  $\frac{7}{30}$

21.  $\frac{6k}{35}$

23.  $\frac{192\sqrt{2}k}{5}$

25.  $70$

27.  $\frac{236}{205}$

29.  $\frac{51}{20}$

31.  $\frac{a^4}{3}$

**17.3 Respuestas**

1.  $\hat{x} = 0, \hat{y} = \frac{4b}{3\pi}$

3.  $\hat{x} = \frac{\pi}{2}, \hat{y} = \frac{\pi}{8}$

5.  $\hat{x} = \hat{y} = \frac{a}{3}$

7.  $\bar{x} = \frac{a}{2}, \bar{y} = \frac{4b}{9}$

9. (a)  $\frac{k b h^3}{3}$  (b)  $\frac{k b^3 h}{3}$  (c)  $\frac{k b h^3}{12}$

(d)  $\frac{k b h (b^2 + h^2)}{3}$  (e)  $\frac{k b h (b^2 + h^2)}{12}$

11. (a) Sobre la recta del centro, a una distancia  $h/3$  de la base.

(b)  $\frac{k b h^3}{12}$  (c)  $\frac{k b^3 h}{48}$  (d)  $\frac{k b h^3}{36}$

13. (a)  $I_x = \frac{\pi k a b^3}{4}, R_x = \frac{b}{2}$

(b)  $I_y = \frac{\pi k a^3 b}{4}, R_y = \frac{a}{2}$

(c)  $I_0 = \frac{\pi k a b (a^2 + b^2)}{4}$

15.  $\int_0^\pi \int_0^{\sin x} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 (1 - y) \, dy \, dx$

17.  $k \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} (x^2 + y^2) x^2 \, dy \, dx$

19.  $\bar{x} = \bar{y} = \frac{b^2 + hb - h^2}{2(2b - h)}$

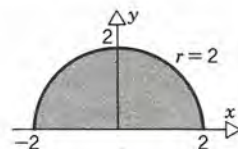
21.  $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{a^2 + ah + (h^2/3)}{2a + h}$

25.  $\frac{ka^4}{8}$

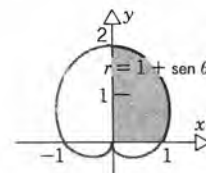
29. En el eje de simetría, a una distancia  $4a/3\pi$  del lado recto.

**17.4 Respuestas**

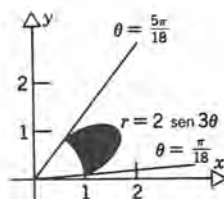
1.  $\frac{16}{3}$



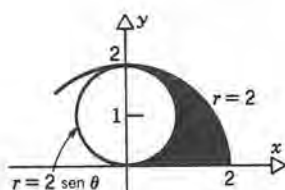
3.  $\frac{7}{6}$



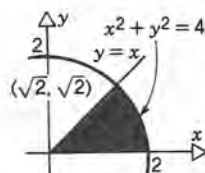
5.  $\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}$



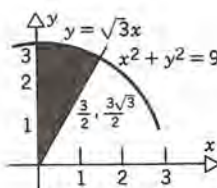
7.  $\frac{3}{2}$



9.  $\int_0^{\pi/4} \int_0^2 r \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2}$



11.  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^3 e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \frac{(1 - e^{-9})\pi}{12}$



13.  $a^2 \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

15.  $8\pi$

17.  $6\pi$

19.  $\frac{5\pi a^3}{12}$

21.  $\hat{x} = \hat{y} = \frac{128a}{105\pi}$

23. (a)  $\frac{\pi ka^4}{8}$  (b)  $\frac{\pi ka^4}{8}$  (c)  $\frac{\pi ka^4}{4}$

25. (a)  $k(b-a)\pi$  (b)  $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{b+a}{\pi}$

(c)  $\frac{k\pi(b^3 - a^3)}{6}$  (d)  $\frac{k\pi(b^3 - a^3)}{6}$

27. 6

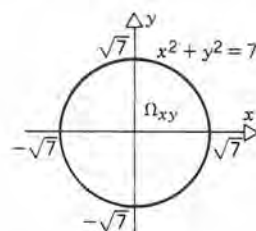
## 17.5 Respuestas

1.  $\frac{81}{8}$

3. 60

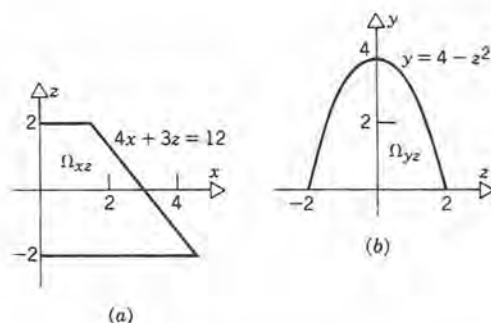
5.  $\frac{\pi}{4}$

7.  $-\sqrt{7-x^2} \leq y \leq \sqrt{7-x^2}; -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$



9. (a)  $0 \leq x \leq 3 - \frac{3z}{4}; -2 \leq z \leq 2$

(b)  $0 \leq y \leq 4 - z^2; -2 \leq z \leq 2$



11.  $\int_0^1 \int_0^{2-2z} \int_0^{4-(4/3)y-2z} (6-x-y) \, dx \, dy \, dz,$   
u otras integrales equivalentes

13.  $4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_0^{h-(h/r)\sqrt{x^2+y^2}} (x^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx,$   
u otras integrales equivalentes

15.  $2k \int_0^a \int_{-b\sqrt{1-(x^2/a^2)}}^{b\sqrt{1-(x^2/a^2)}} \int_0^{2b-y} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$



# A-54 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

17. 18

$$19. \int_0^1 \int_0^{8y-5y^2} \int_0^{2-2y} dx \, dz \, dy + \int_0^1 \int_{8y-5y^2}^{4-y^2} \int_0^{\sqrt{4-y^2-z}} dx \, dz \, dy$$

21. En la recta central, a una altura  $b/4$  de la base

23.  $\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{4}{3}$

25. (a)  $64k\pi$  (b)  $\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{10}{3}$

27. En la recta central, a la altura

$$\bar{z} = \frac{m_1 l + 2m_2 l + m_2 a}{2(m_1 + m_2)}$$

## 17.6 Respuestas

1.  $\frac{4\pi a^2 c}{3}$  3.  $\pi a^2 h \left(1 + \frac{h^2}{3c^2}\right)$

5. (a)  $\bar{x} = \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{3}{8}$  (b)  $\frac{208\pi k}{15}$

7.  $\frac{2ka^3}{3}$

9. (a) En el eje del cilindro, a tres cuartas partes de la distancia del vértice a la base

(b)  $\frac{\pi k a^4 h}{10}$  (c)  $\frac{\pi k a^2 h (a^2 + 4h^2)}{20}$

11. (a) En el eje de simetría, a  $3a/8$  de la cara plana.

(b)  $\frac{4\pi k a^5}{15}$

13.  $\left(\frac{6}{5}, 0, \frac{27\pi}{128}\right)$

15. (a)  $k \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} (12-z)r \, dz \, dr \, d\theta$

(b)  $k \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} (12-z)r^3 \, dz \, dr \, d\theta$

17. (a)  $V = \pi a^2 h - \frac{\pi h^3}{3}$

(b)  $h$  satisface  $(h/a)^3 - 3(h/a) + 1 = 0$ ;  $h/a \approx 0.3473$ .

19.  $2\pi G m \mu (1 - b(b^2 + h^2)^{-1/2})$

21. (a)  $\hat{z}_A = \frac{(p+1)a^p}{2p+1}, \quad \hat{z}_V = \frac{(p+2)a^p}{2(p+1)}$

(b)  $\frac{\hat{z}_V}{\hat{z}_A} = 1 + \frac{p}{2(p+1)^2}; \quad \frac{\hat{z}_V}{\hat{z}_A}$  es máximo cuando  $p = 1$

## 17.7 Respuestas

1.  $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$  3.  $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$

5.  $(-1, 1, -\sqrt{2})$

7.  $\left(2, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

9.  $\left(2, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

11.  $\left(3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

13.  $\rho = 2c \cos \phi$

15.  $\phi = \arctan \frac{3}{4}$

17.  $\theta = \arctan \frac{1}{2}$

19.  $\phi = \arctan 3$

21. Plano paralelo al plano  $xy$ , y a  $b$  unidades de él;  $z = b$

23. Cilindro rodeando al eje  $z$  con sección transversal circular de radio  $b$ ;  $r = b$ .

25. Plano paralelo al eje  $z$ ;  $x + y = a$ .

27. (a)  $\frac{4\pi k a^5}{15}$  (b)  $\frac{4\pi k a^5}{15}$

29. (a)  $2\pi k(b^2 - a^2)$  (b)  $\frac{2\pi k(b^4 - a^4)}{3}$

31.  $4k\pi a^4(1 - \cos^6 \alpha)/3$ , donde  $k$  es la constante de proporcionalidad

33. (a)  $\frac{3\pi k a^2}{4}$  (b)  $\bar{x} = \bar{y} = 0, \quad \bar{z} = \frac{7a}{18}$

(c)  $\frac{5\pi k a^4}{16}$

35.  $\frac{8\pi k a^4}{5}$

37.  $\pi G m k a$

## Respuestas a los problemas de repaso

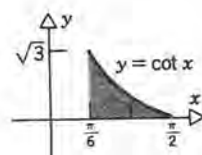
1. 64

3.  $16(e^3 + e^5 + e^7) \approx 20,242$

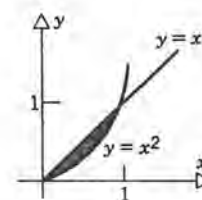
5.  $e^2 - 3$

7. 135

9.  $-(\ln 2)^2/2$



11. 11/120



13. (a)  $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x - 2y) dy dx$

(b)  $\int_1^e \int_{\ln y}^1 (x - 2y) dx dy$

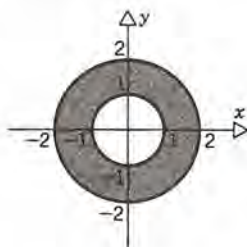
(c)  $2 - (e^2/2)$

15. (a)  $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \left( \frac{x+y}{xy} \right) dy dx$

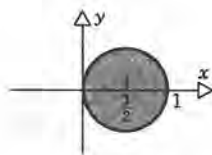
(b)  $\int_0^1 \int_{y^{1/2}}^1 \left( \frac{x+y}{xy} \right) dx dy$

(c)  $\frac{7}{6}$

17.  $\pi(\sin 4 - \sin 1)$

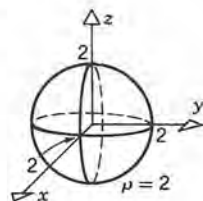


19.  $-\frac{2}{3}$

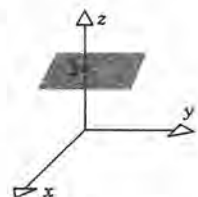


21.  $(\sqrt{3}, 1, 1)$

25.  $\rho = 2$ ; esfera



27.  $z = 3$ ; plano



29.  $8 \frac{(\sqrt{3} - 1)}{3}$

31.  $8 \frac{(2 - \sqrt{2})\pi}{3}$

33.  $\frac{k}{2}$

35.  $k\pi(128 - 66\sqrt{3})/15$

37.  $\frac{1}{2(e-2)}$

39.  $\frac{3\pi}{4}$

41.  $R_y^2 = \frac{e - (7/3)}{e - 2}$

43.  $R_y^2 = \frac{36}{5}$

## CAPÍTULO 18

### 18.1 Respuestas

1. 2

3.  $-2\frac{3}{4} - 3 \ln 3 \approx -87.96$

5. 0

7.  $\frac{7}{3} - 3 \cos 4 \approx 26.29$

9. -2

11.  $\frac{2ab(a-b)}{3}$

13. 64

15.  $\frac{a^2}{3}$

17. (a)  $\frac{a^3b^3}{6}$

(b)  $\frac{a^2b^4}{6}$

19. (a)  $\frac{5}{2}$

(b)  $\frac{8}{3}$

(c) 3

(d) 2

(e)  $\frac{7}{3}$

21. (a) 0

(b) 0

23. (a)  $3e - 3$

(b)  $3e - 3$

(c)  $3e - 3$

25.  $\frac{ka^2\pi^2}{2}$

27.  $16\sqrt{13}\pi(1 + 12\pi^2)k \approx 21645.8k$

29.  $[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1] \frac{k}{3} \approx 85.51k$

31.  $I_x = \frac{\pi ka^3}{2}$

$I_y = \frac{\pi ka^3}{2}$

33.  $\left(0, \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$

35.  $I_x = \frac{kb^3}{3}$

$I_y = \frac{ka^3}{3}$

### 18.2 Respuestas

1.  $x^2y + 6x - 3y + k$

3.  $y \sin x + x^2e^y + 2y + k$

5. No conservativo

7.  $\frac{xy}{z} - xe^z + 3y + k$

9.  $4(1 + \pi) + e^2 - e \approx 21.24$

11.  $\frac{15\pi}{4} + \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 14.574$

13.  $\frac{1}{2} \exp(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}$

15.  $\alpha = 3, -\frac{1}{2}$

17. 0

19.  $10 + e - 2e^2 \approx -2.060$

23. 0

27. (a)  $\frac{kx^2}{2}$

(b)  $\frac{k(x_a^2 - x_b^2)}{2}$

## A-56 RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS DE NÚMERO IMPAR

## 18.3 Respuestas

1.  $-\pi a^2$       3.  $\frac{1}{3}$       5. 0      7.  $\frac{2a^3}{3}$   
 9. 0      11.  $\pi a^2$       13.  $3\pi a^2$   
 19. (d)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

## 18.4 Respuestas

1.  $4\pi a^2$       3.  $\frac{(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)^{1/2}}{2}$   
 5.  $\frac{2\pi}{3} [(1 + a^2)^{3/2} - 1]$       7.  $\frac{3\pi a}{2} + 2a^2$   
 9.  $\frac{145^{3/2} - 1}{54} \approx 32.315$       11.  $2\pi R(R^2 + H^2)^{1/2}$   
 13.  $\frac{\pi^2 k a^3}{2}$       15.  $\frac{a^3}{2}$       17.  $2\pi \int_0^2 \frac{\sqrt{16 - 3r^2}}{\sqrt{4 - r^2}} r dr$   
 19.  $\int_0^1 \int_0^{1-y^2} x^2 \sqrt{4x^2 + 1} dx dy$

## 18.5 Respuestas

1.  $3x - y - 5z$ ; plano que pasa por el origen (superficie entera)  
 3.  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ ; cono (parte para la cual  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ )  
 5.  $z = x^2 + (y^2/4)$ ; paraboloide elíptica (parte para la cual  $x \geq 0$ )  
 7.  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z+1}{5}$ ;  $3x - y - 5z = 0$   
 9.  $x - 1 = -(y - 1)$ ,  $z = 0$ ;  $x - y = 0$   
 11.  $\frac{x-3/4}{3} = \frac{z-9/16}{-2}$ ,  $y = 0$ ;  $3x - 2z = \frac{8}{3}$   
 13. (a) 97,801 mi<sup>2</sup>      (b) 84,965 mi<sup>2</sup>  
 15. (b)  $d\sigma = \rho \sin \phi_0 d\rho d\theta$       (c)  $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$   
 17.  $\pi [b\sqrt{b^2 + c^2} - a\sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln(b + \sqrt{b^2 + c^2}) - c^2 \ln(a + \sqrt{a^2 + c^2})]$   
 19.  $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin u (b^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + a^2 c^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \cos^2 u)^{1/2} dv du$

## 18.6 Respuestas

1.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2y \sin z$ ;  $\nabla \times \mathbf{v} = -(\cos z + x^2)\mathbf{i} + xy \cos z \mathbf{j} + x(2z - \sin z)\mathbf{k}$   
 3.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{2}{r}$ ,  $r \neq 0$ ;  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $r \neq 0$   
 5.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ;  $\nabla \times \mathbf{v} = 3r\mathbf{k}$   
 7.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2yz - 2y + 2xyz$ ;

$$\nabla \times \mathbf{v} = xz^2\mathbf{i} + (2xy - yz^2)\mathbf{j} - (2x + 2xz)\mathbf{k}$$

9.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \cos x \sin y - \sin y \sin z - \sin z \cos x$ ;  
 $\nabla \times \mathbf{v} = -\cos y \cos z \mathbf{i} + \cos z \sin x \mathbf{j} - \sin x \cos y \mathbf{k}$

21.  $\mathbf{v}(x, y, z) = yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j}$   
 23. No existe  $\mathbf{v}$ , ya que  $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$

$$25. \mathbf{v}(x, y, z) = \left( \frac{x^2 z^2 - y^2}{2} \right) \mathbf{i} + xy(\cos z - 1)\mathbf{j}$$

## 18.7 Respuestas

1. 3      3. 0      5.  $\frac{8\pi a^3}{3}$       7. 0  
 9.  $36\pi$       11.  $-2\pi K$       13.  $\frac{\pi U a^4}{2}$   
 15.  $2\pi$       17.  $\alpha \pi a^3$       19.  $8\pi$

## 18.8 Respuestas

1. 13      3. -16      5.  $-16\pi$       7. 0  
 9. 0      11. 0      13.  $\pi a^2$       15.  $\frac{3\pi a^4}{16}$

## Respuestas a los problemas de repaso

1.  $e^2 - e^{1/2} + \ln 4 - 1$   
 3.  $-\frac{1}{8}$       5. 440/21      7.  $\ln \sqrt{10}$   
 9. conservativo;  $\phi(x, y) = e^{xy} + x + (1/xy) + c$   
 11. conservativo;  $\phi(x, y, z) = 2x - \cos y \sin z + c$   
 13. 0      15. 1      17. 0      19. 0  
 21. (a) 6  $\pi$   
 (b) (0, 0)  
 (c)  $I_0 = 39\pi/2$   
 23. (a)  $e - 1$   
 (b)  $\left( \frac{1}{e - 1}, \frac{e + 1}{4} \right)$   
 (c)  $(e^3 + 9e - 19)/9$   
 25.  $2\sqrt{14}/3$       27.  $\sqrt{5}/2$   
 29. (a)  $2xy + 2yz + 2zx$   
 (b)  $-(y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k})$   
 31. (a)  $-\left[ \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{yz^2}{(y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{zx^2}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right]$   
 (b)  $-\left[ \frac{(z^3 + 2zy^2)}{(y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{(x^3 + 2xz^2)}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{(y^3 + 2yx^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{k} \right]$   
 33.  $\pi$       35. 108      37. -16      39. 0  
 41.  $320/21 \approx 15.24$

## FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

(En las fórmulas siguientes,  $D = d/dx$ )

1.  $D(x^r) = rx^{r-1}$
2.  $D(e^x) = e^x$
3.  $D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$
4.  $D(\sin x) = \cos x$
5.  $D(\cos x) = -\sin x$
6.  $D(\tan x) = \sec^2 x$
7.  $D(\sec x) = \sec x \tan x$
8.  $D(\cot x) = -\csc^2 x$
9.  $D(\csc x) = -\csc x \cot x$
10.  $D(a^x) = a^x \ln a, \quad a > 0$
11.  $D(\sinh x) = \cosh x$
12.  $D(\cosh x) = \sinh x$
13.  $D(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
14.  $D(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
15.  $D(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$
16.  $D(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$
17.  $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
18.  $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19.  $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
20.  $D(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
21.  $D(\operatorname{arsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
22.  $D(\operatorname{arcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
23.  $D(\operatorname{artanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$
24.  $D(\operatorname{arcsech} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

## IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2.  $\cos(-x) = \cos x$
3.  $\sin(-x) = -\sin x$
4.  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
5.  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
6.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
7.  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
8.  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
9.  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
10.  $\sin x \sin y = \frac{[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{2}$
11.  $\cos x \cos y = \frac{[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}{2}$
12.  $\sin x \cos y = \frac{[\sin(x-y) + \sin(x+y)]}{2}$
13.  $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
14.  $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
15.  $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

En todo triángulo plano cuyos lados son  $a, b, c$  y con ángulos opuestos  $A, B, C$ :

16.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
17. Área del triángulo =  $\frac{bc(\sin A)}{2}$   
 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$   
donde  $2s = a + b + c$



## SERIES INFINITAS

$$1. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$2. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$3. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$4. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$5. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

$$6. \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$7. (1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{r(r-1) \dots (r-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad -1 < x < 1$$

$$8. \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$9. \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$10. \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad -1 < x < 1$$

## FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$1. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$2. \cosh(-x) = \cosh x$$

$$3. \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$4. \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$5. \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

## FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

### Integrandos algebraicos

1.  $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad r \neq -1$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
3.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c$
5.  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$
6.  $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \right] + c$
7.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) \right] + c$
8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$
9.  $\int \frac{dx}{|x| \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c$
10.  $\int \frac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right| + c$
11.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + c$
12.  $\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 \pm x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x} \right| + c$
13.  $\int \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$
14.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \arcsen\left(\frac{x-a}{a}\right) + c$

15.  $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma^2} \frac{x}{(a^2 + x^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^m}$
16.  $\int (a^2 - x^2)^m dx = \frac{x(a^2 - x^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1} \int (a^2 - x^2)^{m-1} dx$

### Integrandos que contienen funciones exponenciales y logarítmicas

17.  $\int e^x dx = e^x + c$
18.  $\int \ln x dx = x \ln x - x + c$
19.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0$
20.  $\int x e^x dx = x e^x - e^x + c$
21.  $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + c$
22.  $\int x^m e^x dx = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx$
23.  $\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx$
24.  $\int e^{ax} \sen bx dx = \frac{e^{ax} (a \sen bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + c$
25.  $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sen bx)}{a^2 + b^2} + c$

### Integrandos que contienen funciones trigonométricas

26.  $\int \sen x dx = -\cos x + c$
27.  $\int \cos x dx = \sen x + c$
28.  $\int \sen^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sen 2x + c$
29.  $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sen 2x + c$

$$30. \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

$$31. \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$32. \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$33. \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$34. \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$35. \int \cot x \csc x \, dx = -\csc x + c$$

$$36. \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$37. \int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + c$$

$$38. \int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + c$$

$$39. \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$40. \int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$$

$$41. \int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + c$$

$$42. \int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + c$$

$$43. \int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c$$

$$44. \int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + c$$

$$45. \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c$$

$$46. \int x^m \cos x \, dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x \, dx$$

$$47. \int x^m \sin x \, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x \, dx$$

$$48. \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

$$49. \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$50. \int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$$

### Integrandos que contienen funciones hiperbólicas

$$51. \int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$52. \int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$53. \int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) + c$$

$$54. \int \coth x \, dx = \ln|\sinh x| + c$$

$$55. \int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c$$

$$56. \int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c$$

$$57. \int \operatorname{sech} x \, dx = 2 \arctan(e^x) + c$$

$$58. \int \operatorname{csch} x \, dx = \ln \left| \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right| + c$$

$$59. \int \sinh^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x) + c$$

$$60. \int \cosh^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x + x) + c$$

$$61. \int \cosh x \sinh x \, dx = \frac{1}{2} \sinh^2 x + c$$

$$62. \int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c$$

$$63. \int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c$$

# CÁLCULO

## Índice

Abscisa, 15

Abierto(a):

- bola, 884
- conjunto, 884
- disco, 884
- esfera, 884
- intervalo, 4, 884

Aceleración, 142, 840

- centrípeta, 848
- en coordenadas polares, 854
- normal, 847
- tangencial, 847

Achatada por los polos, esferoide, 870

Acotado(a):

- conjunto, 4
- función, 29, 95
- intervalo, 5
- región, 370

Algoritmo para la raíz cuadrada, babilonio antiguo, 237

Ángulo:

- entre dos vectores, 791
- entre una curva y una superficie, 932

Ángulo de fase, 54

Antiderivada, 144, 196, 197

- como integral, 340
- de funciones hiperbólicas, 494
- de funciones trigonométricas, 177
- de potencias, 145
- de una función exponencial, 454

Apolonio de Perga, 62, 282

Aproximación lineal, 149

Arco, en forma paramétrica, 285

- suave, 290

Área, 304-313, 317, 370-379

- como integral de línea, 1090
- como integral doble, 970
- definición de, 308, 317, 371, 372, 373, 378
- de una superficie, 1097, 1115
  - de revolución, 399-402, 773
  - en coordenadas paramétricas, 1115
- en coordenadas polares, 767-771
- propiedad de comparación, 304
- propiedad de la suma, 304
- propiedad del rectángulo, 304

Arquimedes, 304

- espiral de, 749

Asintota, 245

- de una hipérbola, 243
- horizontal, 245
- vertical, 246

Atracción:

- electrostática, 1039
- gravitatoria, 1038

Atracción gravitatoria, 1038



- por un cascarón esférico, 1054
  - por un casquillo cilíndrico, 1040
  - por un cilindro sólido, 1041
  - por un cono, 1050
  - por una esfera sólida, 1053
- Banda de Möbius, 1129
- Bernoulli, Jacob, 120, 564, 743
- Bernoulli, Johann, 120, 425, 590, 697
- Bola:
- abierta, 884
  - cerrada, 884
- Bolzano, Bernhard, 100, 136
- Brahe, Tycho, 856
- Briggs, Henry, 436
- Cálculo de  $\pi$ , 334, 659, 734
- Campo de fuerzas no conservativo, 1083
- Campo vectorial, 1058
- condiciones necesarias y suficientes para, 1079
  - divergencia del, 1121
  - gradiente del, 1074
  - irrotacional, 1126
  - rotacional del, 1123
- Campo vectorial conservativo, 1074
- condición necesaria y suficiente para, 1079
- Caracol, 757, 758
- Cardioide, 754-756
- Cauchy, Augustin Louis, 74, 100
- Centripeta:
- aceleración, 848
  - fuerza, 848
- Centro:
- de la elipse, 269
  - de la hipérbola, 279
  - del círculo, 21
- Centro de gravedad, 995
- Centro de masa, 992, 996, 1024, 1026, 1069
- de un cuerpo compuesto, 1003
- Centroide, 995
- integrales de línea para, 1093
  - teorema de Pappus para, 1004
- Cerrado(a):
- bola, 884
  - conjunto, 884
  - curva, 824
  - disco, 884
  - esfera, 884
  - intervalo, 4, 884
- Cicloide, 291-294
- longitud de arco, 397
  - propiedades de la, 480
- Cilindro, 863-866
- circular recto, 864
  - directriz, 863
  - generatriz, 863
- Circulación, 1149
- Círculo:
- centro, 21
  - ecuación, 21
  - en coordenadas polares, 748
  - radio, 21
- Cociente de diferencias, 60
- Codominio de una función, 29, 880
- Coefficientes binomiales, 737
- Complemento de un conjunto, 4
- Componente de un vector, 780, 792
- Concavidad, 208
- hacia abajo, 208, 250
  - hacia arriba, 208, 250
- Condición inicial, 460, 554
- Conjunto (s):
- abierto, 884
  - acotado, 4, 7
  - cerrado, 884
  - complemento, 4
  - conexo, 1070
  - iguales, 3
  - intersección de, 4
  - no acotado, 4
  - subconjunto, 3
  - unión de, 3
  - vacio, 3
- Cono, 871
- Conservación de la energía, 1083
- Continuidad, *véase también* Función continua
- relación con la derivabilidad, 135-136, 902
  - de funciones vectoriales de una variable, 829
- Continuidad por la derecha, 108
- Continuidad por la izquierda, 108
- Convergencia:
- de la serie, 643
    - absoluta, 685
    - condicional, 685
  - de una integral impropia, 609, 613
  - intervalo de, 715
  - radio de, 715
- Convergencia absoluta, de series infinitas, 685
- Convergencia condicional, de series infinitas, 685
- Coordenadas cilíndricas, 1031
- elemento de volumen en, 1043
  - integración en, 1031-1042
  - relación con las coordenadas esféricas, 1044
  - relación con las coordenadas rectangulares, 1031
- Coordenadas esféricas, 1043
- elemento de volumen en, 1047
  - integración en, 1043-1052
  - relación con las coordenadas cilíndricas, 1043

- relación con las coordenadas rectangulares, 1044
- Coordenadas polares, 743
  - área de una superficie de revolución en, 774
  - área en, 767-771
  - círculo en, 748
  - dibujo de curvas en, 753, 764
  - gráficas en, 746
  - integrales iteradas en, 1008
  - intersección de curvas en, 761
  - longitud de arco en, 771-773
  - pendiente de la curva en, 753
  - rectas en, 751
  - relación con las coordenadas rectangulares, 745, 749
  - secciones cónicas en, 765
  - simetría en, 753
- Copérnico, Nicolás, 856
- Cotes, Roger, 361
- Criterio de comparación:
  - para integrales impropias, 620, 623
  - para series infinitas, 654
- Criterio de comparación límite:
  - para integrales impropias, 620-623
  - para series infinitas, 656
- Criterio de la integral, 668
- Criterio de la razón, 663
  - para convergencia absoluta, 687
  - para series de potencias, 715
- Criterios de convergencia para series infinitas, 654
  - de comparación, 654
  - de comparación límite, 656
  - de la integral, 668
  - de la razón, 663, 687
  - de la serie alternante, 681
  - del *k*-ésimo término, 650
  - resumen, 691
- Cuadrante, 16
- Curva:
  - cerrada, 824
  - curvatura, 840-844
  - de nivel, 882
  - dibujo, 241-257
    - en coordenadas polares, 753-766
  - en forma cartesiana, 284
  - en forma paramétrica, 285, 824
  - en forma vectorial, 824
  - integral, 558
  - longitud de arco, 394, 397, 836
  - no rectificable, 393, 677
  - punto inicial, 824
  - punto terminal, 824
  - rectificable, 393, 837
  - simple cerrada, 1071
  - suave, 290, 832
  - suave por pedazos, 832
  - vector principal normal a, 847
  - vector tangente a, 829
- Curvas con pétalos, 759, 760
- Curvatura:
  - de una curva, 840-844
  - radio de, 842
- Densidad, falla, 416
  - probabilidad, 416
- Derivación, *véase también* Derivada
  - de la integral, 338, 345
  - de un cociente, 131
  - de un producto, 131
  - de una combinación lineal, 131
  - de una función inversa, 430
  - de una función vectorial, 829
  - de una resta, 131
  - de una suma, 131
  - implícita, 180, 952-960
  - logarítmica, 446, 471
  - mediante la regla para potencias, 126, 455
  - regla generalizada para potencias, 164
  - regla de la cadena para, 162, 904
  - y continuidad, 135-139, 902
  - y linealidad local, 153
- Derivada, *véase también* Álgebra de la derivación,
  - 131, 136-138; de una función compuesta, 162, 904
  - de orden superior, 141, 155
    - regla de Leibniz, 149
  - direccional, 912
  - en un intervalo, 121
  - en un punto, 121
  - notación, 143, 156
    - de Leibniz, 154
    - operador, 143
    - prima, 121
  - parcial, 890
  - segunda, 141, 155
- Derivada direccional, 912
  - relación con el gradiente, 807
- Derivada parcial, 890
  - de orden superior, 895
  - intercambio del orden, 895
  - notación para, 891, 894, 895
- Descartes, René, 15, 62
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz, 15
- Desigualdades, 8
  - Cauchy-Schwarz, 15
  - triángulo, 13-15, 793, 798
- Desplazamiento, como integral, 404
- Diferencial, 156, 902
- Directriz:
  - de la elipse, 765

- de la hipérbola, 765
- de la parábola, 262
- de un cilindro, 863
- Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 27, 689
- Disco
  - abierto, 884
  - cerrado, 884
- Discontinuidad:
  - infinita, 102
  - oscilatoria, 103
  - removible, 104
  - salto, 101
- Distancia:
  - como integral, 321, 405
  - de un punto a una recta, 822
  - de un punto a un plano, 820
  - de una recta al plano, 822
  - entre dos puntos del espacio, 883-884
  - entre dos puntos del plano, 16
  - entre dos puntos de una recta, 5
  - entre dos rectas, 822
- Distribución:
  - falla, 416
  - probabilidad, 416
- Divergencia:
  - de un campo vectorial, 1121
  - interpretación física, 1140
  - de una integral impropia, 609
  - de una serie, 645
  - de una sucesión, 633
- Dominio, 1071
  - de una función, 29, 30, 880
  - múltiplemente conexo, 1072
  - simplemente conexo, 1071
- $e^x$ 
  - cálculo de, 451, 458
  - definición, 450
- Ecuación de Bernoulli, 564
- Ecuación de Gompertz, 572
- Ecuación de onda, 897, 908
- Ecuación diferencial, 459
  - de Bernoulli, 564
  - lineal, 554
    - solución general, 558
  - métodos numéricos, 575-583
  - variables separables, 566
- Ecuación logística, 568
- Ecuaciones algebraicas lineales, 19
  - aproximación, 153
  - ecuaciones diferenciales, 554
  - función, 36
  - operador, 143
- Ecuaciones cuadráticas con dos variables, 257
- Ecuaciones de variables separables, 566
- Ecuaciones paramétricas:
  - comparación con las ecuaciones cartesianas, 284
  - de una curva en tres dimensiones, 824
  - de una recta en tres dimensiones, 816
  - de una superficie, 111
  - en el plano, 284-294
  - gráfica de las, 284, 824
  - pendiente, 289
- Eje:
  - conjugado, de la hipérbola, 279
  - de la parábola, 262
  - de revolución, 379
  - mayor de la elipse, 269
  - menor de la elipse, 269
  - transversal, de la hipérbola, 279
- Eje polar, 743
- Ejes coordenados, 16
  - rotación de, 266, 284
  - traslación de, 260
- Ejes paralelos, teorema de los, para el momento de inercia, 1003
- Elipse, 268-275
  - centro, 269
  - construcción geométrica de la, 271
  - directriz, 765
  - eje mayor, 269
  - eje menor, 269
  - excentricidad, 274, 765
  - foco, 272, 765
  - longitud focal, 272
  - propiedad de reflexión, 275
  - vértices, 269
- Elipsoide, 869
  - esferoidal achatado por los polos, 870
  - esferoidal alargado por los polos, 870
- Emparedado, principio del, 85, 636
- Energía:
  - cinética, 1071, 1082
  - conservación de la, 1083
  - mecánica, 1082, 1083
  - potencial, 1082
- Enteros:
  - negativos, 2
  - positivos, 2
- Epicycloide, 295
- Error, 159
  - en el método de Euler, 578
  - en la regla de Simpson, 362
  - en la regla Trapezoidal, 357
  - relativo, 159
- Error local de discretización, 578
- Escalar, 779
- Escalar, multiplicación, 788, 797
  - interpretación geométrica de la, 790



- propiedades, 788, 797
- Escalar, triple producto, 809
- interpretación geométrica del, 810
- Esfera:
  - abierta, 884
  - cerrada, 884
- Esferoide:
  - achatada por los polos, 870
  - alargada por los polos, 870
- Esfuerzo, 1130
- Eudoxio, 304
- Euler, Leonhard, 27, 100, 193, 425, 575, 627, 659, 676
- Excedente:
  - del consumidor, 419
  - del productor, 420
- Excentricidad:
  - de la elipse, 274
  - de la hipérbola, 283, 765
  - de la parábola, 765
- Factor de integración, 558
- Factores cuadráticos irreducibles, 539
- Falla:
  - densidad, 416
  - distribución, 416
- Fermat, Pierre de, 15, 62, 74
- Flujo, 413, 1129
  - de Poiseuille, 413
  - en un capilar, 413-415
- Foco:
  - de la elipse, 272
  - de la hipérbola, 281
  - de la parábola, 262
- Forma indeterminada, 588
  - regla de L'Hospital para el límite de una, 590, 599
- Fórmula de reducción, 513
- Fraciones parciales, descomposición en, 539
- Frecuencia, 54
- Frontera, 884
- Fuerza:
  - central, 859, 1085
  - centrípeta, 848
  - conservativa, 1074, 1083
  - gravitatoria, 850, 853, 1074
  - no conservativa, 1083
- Función, 27
  - acotada, 29, 95
  - álgebra de la, 32
  - algebraica, 53, 80
  - analítica, 728
  - armónica, 1141
  - biunívoca, 427
  - cóncava hacia abajo, 208
  - cóncava hacia arriba, 208
  - constante, 35, 74, 122
  - continua, 100, 829, 885
  - continua no derivable, 136
  - continua por la derecha, 108
  - continua por la izquierda, 108
  - creciente, 205, 248
  - cuadrática, 35
  - decreciente, 205, 248
  - definición de, 29
  - de valores reales, 28
  - de varias variables, 880
  - diferenciable, 120, 901
  - escalón, 41
  - extensión de, 970
  - factorial, 42
  - impar, 43-44
  - implícita, 180, 958
  - integrable, 967
  - inversa, 187
  - límite de, 68, 826, 883
  - localmente lineal, 153, 901
  - monótona, 394
  - no acotada, 29, 95
  - no creciente, 205
  - no decreciente, 205
  - par, 43, 55
  - periódica, 47
  - trascendente, 53
  - valor medio (promedio) de, 333
  - vectorial, 823
- Función compuesta, 159
  - continuidad, 161
  - derivación, 162
- Función continua, 100, 829, 885
  - en un intervalo, 101, 108
  - en un punto, 101
  - no derivable en ninguna parte, 136
  - por la derecha, 108
  - por la izquierda, 108
  - propiedad de acotamiento, 110
  - propiedad de máximo-mínimo, 110, 938
  - propiedad del valor intermedio, 110
  - propiedades algebraicas, 101
- Función cosecante, 47
  - antiderivada, 527
  - derivada, 174
  - hiperbólica, 492
  - inversa, 488
- Función cosecante hiperbólica, 492
  - derivada, 495
- Función coseno, 46
  - antiderivada, 177
  - continuidad, 106
  - derivada, 172



- hiperbólica, 492
- hiperbólica inversa, 497
- inversa, 482
- límite, 87
- ortogonalidad de, 524
- Función coseno hiperbólico, 491
  - antiderivada, 493
  - derivada, 493
  - inversa, 497
- Función coseno hiperbólico inverso, 497
  - derivada, 497
- Función cotangente, 46
  - derivada, 174
  - hiperbólica, 492
  - inversa, 486
- Función cotangente hiperbólica, 492
  - derivada, 495
- Función cotangente inversa, 486
  - derivada, 486
- Función exponencial, 447-459
  - antiderivada, 459
  - aplicaciones, 459-468
    - crecimiento de una población, 463-466
    - decaimiento radiactivo, 461-463
    - interés compuesto, 467, 468-473
  - a una base arbitraria, 468-473
  - derivada, 453
  - ecuación funcional para, 467
  - problema con valor inicial para, 467
  - propiedades, 449
- Función gamma, 627
- Función identidad, 36, 75, 122
- Función inversa, 187
  - continuidad, 429
  - derivada, 430
  - gráfica, 432
  - integral, 517
  - monótona, 374
- Función inversa de la función cosecante, 488-489
  - derivada, 483
- Función inversa de la función coseno, 482-484
  - derivada, 484
- Función inversa de la función seno, 477-482
  - derivada, 480
- Función inversa de la función tangente, 484-486
  - derivada, 485
- Función logaritmo:
  - derivada de la, 474
  - de una base arbitraria, 472-476
- Función logaritmo natural, 435-447
  - derivada, 437
  - propiedad característica, 435
  - propiedades, 437
  - relación con las funciones hiperbólicas inversas, 497
- Función mayor entero, 40, 70-71, 75, 91, 101
- Función número primo, 35
- Función potencial, 1074, 1086
  - condición necesaria para, 1079
  - existencia, 1079
  - vectorial, 1126
- Función racional, 37
  - continuidad, 100, 885
  - fracciones parciales, descomposición de, 539
  - límite, 83
  - propia, 537
- Función raíz cuadrada, 38, 91
- Función renovación, 422
- Función secante hiperbólica, 492
- Función secante inversa, 486-488
  - derivada, 488
- Función seno, 46
  - antiderivada, 177
  - continuidad, 106
  - derivada, 171
  - hiperbólica, 492
  - hiperbólica inversa, 495
  - inversa, 477
  - límite, 87
  - ortogonalidad, 524
- Función seno hiperbólico, 450
  - antiderivada, 493
  - derivada, 493
  - inversa, 495
- Función seno hiperbólico inverso, 495-499
  - derivada, 496
  - relación con los logaritmos naturales, 499
- Función signo, 40, 84, 102
- Función supervivencia, 422
- Función tangente, 46
  - antiderivada, 443
  - derivada, 174
  - hiperbólica, 492
  - hiperbólica inversa, 500
- Función tangente hiperbólica, 492
  - derivada, 495
  - inversa, 500
- Función tangente hiperbólica inversa, 500
- Funciones hiperbólicas, 491-495
  - derivadas, 493-495
  - inversas, 495-499
  - relación con las hipérbolas, 500
- Funciones trigonométricas inversas, 477-491
- Funciones vectoriales de una variable, 823
  - continuidad, 829
  - diferenciación, 829
  - interpretación geométrica, 824
  - límite, 826
- Galileo Galilei, 58

- Gauss, Carl Friedrich, 304, 676, 1134  
Generatriz de un cilindro, 863  
Gibbs Josiah Willard, 779  
Gradiente, 911  
    propiedades del, 916-921  
Grado de un polinomio, 35  
Gráfica:  
    de una función, 30  
    de una relación, 17  
    dibujo de, 241-257  
    en coordenadas polares, 746  
Gravedad, centro de, 995  
Green, George, 1086, 1134  
Gregory, James, 697  
  
Halley, Edmund, 119  
Hamilton, William Rowan, 779  
Heaviside, Oliver, 779  
Hélice, 826  
Hipérbola, 275-284  
    asintota, 277  
    centro, 279  
    construcción geométrica, 280  
    diámetro transversal, 279  
    directriz, 765  
    eje conjugado, 279  
    eje transversal, 279  
    excentricidad, 283, 765  
    foco, 281, 765  
    longitud focal, 281  
    relación con las funciones hiperbólicas, 500  
    vértices, 279  
Hiperboloide:  
    de dos mantos, 870  
    de un manto, 870  
Hipocicloide, 295  
Huygens, Christian, 120  
  
Identidades de Green, 1095, 1142  
Igualdad:  
    de conjuntos, 3  
    de funciones, 32  
    de vectores, 781, 797  
Imagen:  
    de un punto, 28, 880  
    de una función, 28, 880  
    de una suma, 276  
Indefinida, integral, 340  
Independencia de la trayectoria, 1072  
    condición necesaria y suficiente para, 1074  
Índice, de una suma, 300  
Inducción matemática, 312  
Infinito(a):  
    discontinuidad, 102  
    límite, 93, 96  
    símbolo, 5, 93  
Integración:  
    de funciones trigonométricas, 524-531  
    de senos y cosenos, 517-524  
    en coordenadas cilíndricas, 1031, 1042  
    en coordenadas esféricas, 1043-1052  
    en coordenadas polares, 1007  
    por fracciones parciales, 537-552  
    por partes, 509-517  
    por sustituciones, 346-354, 505-509  
    por sustituciones trigonométricas, 531-537  
Integración numérica, 354-368  
    regla de Simpson, 360-364  
    regla trapezoidal, 355-360  
Integral:  
    aproximación numérica, 354-368  
    cálculo de, 314  
    de línea, 1060  
        independiente de la trayectoria, 1072  
    de superficie, 1105, 1106, 1107  
    definición, 315  
    definida, 341  
    derivación, 338, 345  
    doble, 967, 970  
    existencia de, 316  
    impropia, 608  
    indefinida, 340  
    iterada, 975  
    linealidad, 325  
    propiedades, 322-335  
    propiedades de comparación, 329  
    propiedades de la suma, 326  
    propiedades del valor medio, 332  
    triple, 1018  
Integral de Riemann, 314  
Integral doble:  
    existencia, 967, 970  
    interpretación geométrica, 970  
    propiedades, 971  
    relación con las integrales iteradas, 980  
    sobre un rectángulo, 967  
    sobre una región acotada, 969  
Integral elíptica, 402, 740  
Integral impropia, 608  
    convergencia, 609, 612  
    criterio de comparación, 619, 623  
    criterio de comparación límite, 620, 623  
    divergencia, 609, 612  
Integrales iteradas, 975  
    en coordenadas cilíndricas, 1032  
    en coordenadas esféricas, 1047  
    en coordenadas polares, 1007  
    en coordenadas rectangulares, 978-980  
    relación con las integrales dobles, 980  
    relación con las integrales triples, 1018

- Integrando, 315
- Interés compuesto, 476
- Intersección:
  - de conjuntos, 4
  - de curvas en coordenadas polares, 761
- Intersecciones, 242
- Intervalo:
  - abierto, 4, 884
  - acotado, 5
  - cerrado, 4, 884
  - de convergencia, 715
  - no acotado, 5
  - perforado, 73
- Intervalos excluidos, 242
- Isoterma, 922
  
- Kelvin, Lord, 1087
- Kepler, Johannes, 856
- Kutta, M. Wilhelm, 581
  
- Lado recto de la parábola, 267
- Lagrange, Joseph Louis, 27, 143, 193, 704, 1134
- Laplace, Pierre Simon de, 426
- Lateral:
  - continuidad, 108
  - límite, 90
- Legendre, Adrien M., 574
- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 27, 74, 120, 155, 299, 315, 553, 697
- Lemniscatas, 760
- Ley de Coulomb, 239, 1039
- Ley de Newton:
  - del enfriamiento, 562
  - del movimiento, 147, 170, 573
- Leyes de Kepler, 856
- L'Hospital, Guillaume F. A. de, 590
- Límite:
  - al infinito, 93
  - de una función, 66-79, 883-885
  - de una función vectorial, 826
  - de una sucesión, 633-634
  - existencia del, 74-76
  - infinito, 96
  - lateral, 90
  - no existencia del, 70-71, 75-76
  - operaciones algebraicas con, 79-84, 636
  - por la derecha, 90
  - por la izquierda, 90
  - principio del emparedado, 85, 636
  - unicidad del, 76, 636
- Límite inferior:
  - de integración, 315
  - de una suma, 301
- Límite superior:
  - de integración, 315
  - de una suma, 301
- Longitud de arco, 392-395
  - con ecuaciones paramétricas, 395-399, 836
  - en coordenadas polares, 771-773
  - en tres dimensiones, 836
  - función, 398, 839
- Longitud de un vector, 780, 789, 796
- Longitud focal:
  - de la elipse, 272
  - de la hipérbola, 281
  
- Magnitud de un vector, 780, 789, 796
- Masa:
  - como una integral, 322
  - como una integral de línea, 1069
  - como una integral doble, 971
- Máxima cota inferior, 7
- Máximo:
  - absoluto, 200, 938
  - global, 200, 938
    - existencia, 200, 938
  - local, 190, 932
    - condición necesaria para, 200, 938
  - punto, 190
  - relativo, 190, 938
- Maxwell, James Clerk, 779
- Método de bisección, 113
  - comparación con el método de Newton, 233
- Método de Euler, 575
- Método de Euler mejorado, 578
  - y la regla trapezoidal, 584
- Método de Newton para resolver ecuaciones, 231, 236
  - comparación con el método de bisección, 233
  - dificultades, 235-236
- Método de Runge-Kutta, 581
  - y la regla de Simpson, 584
- Mínima cota superior, 7
- Mínimo:
  - absoluto, 200, 938
  - global, 200, 938
    - existencia, 200, 938
  - local, 190, 938
    - condición necesaria para, 191, 934
  - punto, 190
  - relativo, 190, 933
- Mínimos cuadrados, método de los, 941
- Modelación matemática, 213, 227
- Momento angular, 858
- Momento, primer (lineal), 990, 1024
  - de inercia, 998, 1024, 1069
  - polar, 998
  - significado físico del, 1001
  - teorema del eje paralelo, 1003
- Monótona, función, 428



- Movimiento de una partícula de acuerdo con la ley de Newton, 573
- Multiplicación:
  - de series de potencias, 614
  - de vectores, por escalares, 783, 797
  - producto escalar, 788, 797
  - producto vectorial, 802
  - triple producto escalar, 809
  - triple producto vectorial, 812
- Multiplicadores de Lagrange, método de los, 944
- Napier, John, 436
- Newton, Isaac, 74, 119, 120, 232, 299, 304, 361, 696, 697, 743, 857
- Nivel, curva de, 882
- No acotado(a):
  - conjunto, 4
  - función, 29, 95
  - intervalo, 5
  - región, 370
- Norma, de una partición, 314, 965
- Notación de Lagrange para las derivadas, 156
- Notación de Leibniz para las derivadas, 154, 156, 290
  - regla para la derivación, 149
  - serie para  $\pi/4$ , 730
- Número racional, 2, 654
- Números:
  - irracionales, 2
  - racionales, 2
  - reales, 2
- Números irracionales, 2
  - como exponentes, 450
- Números reales, 2
  - compleción, 7, 641
- Operador:
  - derivación, 143
  - lineal, 143
- Ordenada, 15
- Origen, 15
- Ortogonal (propiedad de los senos y los cosenos), 524
- Ortogonales:
  - rectas, 26
  - vectores, 791, 805
- Ósmosis, 415-416
- Ostrogradsky, Mikhail, 1134
- Pappus, teorema de, para el centroide, 1004
- Parábola, 36, 258-264
  - construcción geométrica, 261
  - directriz, 262, 765
  - eje de la, 262
  - excentricidad, 765
  - foco, 262, 765
  - lado recto, 267
  - propiedad de reflexión, 265
  - vértice, 259, 262
- Paraboloide:
  - elíptico, 872
  - hiperbólico, 872
- Paralelepípedo, volumen del, 810
- Paralelogramo, regla del, para una suma vectorial, 782, 797
- Paralelos(as):
  - rectas, 26
  - vectores, 807
- Partes, integración por, 509-517, 617, 1084
- Partición, 313, 965
  - norma de, 314, 965
- Pendiente:
  - de la tangente a una curva, 61-63
  - de una curva:
    - en coordenadas polares, 775
    - en forma paramétrica, 289
  - de una recta, 18
- Perforado(a):
  - intervalo, 73
  - vecindad, 73
- Periodo fundamental, 47
- Plano, 813
  - tangente, 924
  - vector normal al, 813-814
- Plano tangente a una superficie, 924
- Población, crecimiento de la, 463-466
- Poiseuille, flujo de, 413
- Polinomios, 35
  - continuidad, 100, 885
  - de Taylor, 697
  - factorización, 538
  - grado, 35
  - límite, 82
- Potencial, energía, 1082
- Presa de Glen Canyon, 410
- Presión hidrostática, 408-411
- Principio de Pascal, 409
- Prismatoide, 391
- Probabilidad:
  - densidad, 416
  - distribución, 416
- Problema con valor inicial, 460, 554
- Problemas de enfriamiento, 562
- Problemas de extremos con restricciones, 943
- Problemas de mezclado, 563
- Problemas de optimización, 213-224
- Problemas de razones relacionadas, 224-230
- Producto escalar, 788, 797
  - interpretación geométrica, 790
  - propiedades, 784, 797



- Producto vectorial, 802
  - interpretación geométrica, 806
  - propiedades, 804-809
- Producto triple:
  - escalar, 809
  - vectorial, 812
- Propiedad de acotamiento de las funciones continuas, 110
- Propiedad de comparación:
  - de integrales, 329, 971, 1020
  - del área, 304
- Propiedad de compleción de los números reales, 7, 641
- Propiedad de la suma:
  - de integrales, 325, 972, 1020
  - del área, 304
- Propiedad de reflexión:
  - de una elipse, 275
  - de una parábola, 265
- Propiedad del rectángulo del área, 304
- Propiedad del valor intermedio para funciones continuas, 110
- Proyección:
  - de una región, 912
  - de un vector, 791
- Punto:
  - coordenadas rectangulares del, 16, 795
  - crítico, 301, 934
  - de inflexión, 250
  - de una recta, 2
  - del plano, 16
  - estacionario, 934
  - extremo, 190, 932
  - frontera, 884
  - interior, 884
  - máximo, 190, 932
  - mínimo, 190, 932
  - silla, 934
- Punto extremo local, *véase también* Máximo absoluto; Mínimo absoluto, 190, 932
- Puntos coplanares, 810
- Puntos críticos, 201, 934
  - clasificación de:
    - criterio de la primera derivada, 206
    - criterio de la segunda derivada, 209, 937
- Radioactivo, decaimiento, 461-463
- Radianes, 44
- Radio:
  - de convergencia, 715
  - de curvatura, 842
  - de giro, 998
  - del círculo, 21
- Rapidez de convergencia, de series infinitas, 653
- Razón de cambio, 121, 890, 912
- Reacciones químicas, 573
- Rearreglo de términos, en series infinitas, 688
- Recta normal a una superficie, 925
- Recta secante, 61
- Recta tangente, 62
  - aproximación, 150
  - método, 575-581
- Rectas:
  - en coordenadas polares, 751
  - en el plano, 18
  - en tres dimensiones, 816
    - ecuaciones paramétricas, 816
    - ecuaciones simétricas, 816
  - normal, 925
  - paralela, 26
  - perpendicular, 26
- Región:
  - acotada, 370
  - estándar, 980
  - no acotada, 370
  - proyección, 1020
- Regla de la cadena para la derivación, 162, 904
  - demostración, 167
  - relación con la integración, 348
- Regla de L'Hospital, 590, 599
- Regla de Simpson, 360-364
  - error en la, 362
  - fórmula de la, 361
  - y el método de Runge-Kutta, 584
- Regla del producto para la derivación, 131
  - demostración de la, 137
  - generalizada, 141
- Regla del cociente para la derivación, 131
  - demostración de la, 138-139
- Relación de recurrencia, 735
- Relatividad, teoría especial de la, de Einstein, 169
- Residuo:
  - en series infinitas, 649
  - en una aproximación de Taylor, 704
  - en una aproximación lineal, 150
  - estimación del, 672, 681
- Resta de vectores, 785, 797
- Revolución:
  - eje de, 379
  - sólido de, 379
  - superficie de, 399
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 314, 676, 689
- Rolle, Michel, 193
- Rotación de ejes, 266, 284
- Rotacional de un campo vectorial, 1123
  - interpretación física del, 1150
- Runge, Carl David, 581
- Satélite geosincrónico, 852
- Secante, función, 46

- antiderivada, 525
- derivada, 174
- hiperbólica, 492
- inversa, 487
- Secciones cónicas, 258, 282
  - centrales, 269
  - elipses, 268-275
  - en coordenadas polares, 765-766
  - hipérbolas, 275-284
  - parábolas, 258-260
- Semivida, 461
- Serie armónica, 651
- Serie armónica alternante, 678
  - criterio de convergencia, 681
- Serie binomial, 737
- Serie de Maclaurin, 707
- Serie de potencias, 712
  - criterio de la razón para, 715
  - derivación, 727
  - integración, 727
  - intervalo de convergencia, 715
  - propiedades algebraicas, 719-727
    - combinaciones lineales, 723-724
    - multiplicación, 725
    - sustituciones, 719-723
  - radio de convergencia, 715
  - relación con la serie de Taylor, 732
- Serie geométrica, 646, 651
- Serie infinita, 643
  - alternante, 678
  - armónica, 651
  - armónica alternante, 678
  - convergencia, 645
  - convergencia absoluta, 685
  - convergencia condicional, 685
  - criterio de comparación, 654
  - criterio de comparación límite, 656
  - criterio de la integral, 668
  - criterio de la razón, 663
  - criterio de la serie alternante, 681
  - de Maclaurin, 707
  - de potencias, 712
  - de Taylor, 707
  - divergencia, 645
  - geométrica, 646, 654
  - késimo término, 650
  - operaciones algebraicas, 652
  - rearrreglo de términos, 689
  - residuo, 649
    - estimación del, 672, 681
  - telescópica, 648
  - término general, 643
  - términos, 643
- Simetría:
  - con respecto al eje  $x$ , 43, 244, 753
  - con respecto al eje  $y$ , 43, 244, 754
  - con respecto al origen, 43, 245, 753
  - en coordenadas polares, 753
- Simpson, Thomas, 361
- Sistema cartesiano de coordenadas, 15, 795
- Sistema de coordenadas rectangulares, 15, 798
  - relación con las coordenadas cilíndricas, 1031
  - relación con las coordenadas esféricas, 1044
  - relación con las coordenadas polares, 745, 749
- Sistemas coordenados:
  - cartesianos, 15, 795
  - cilíndricos, 1031
  - esféricos, 1043
  - orientados hacia la derecha, 795
  - orientados hacia la izquierda, 795
  - paramétricos, 1113
  - polares, 743
- Sólido de revolución, 379
  - volumen, 379-392
- Solución de una ecuación diferencial:
  - general, 460, 558
  - particular, 460
- Stirling, James, 361
- Stokes, George Gabriel, 1143
- Suave:
  - arco (curva), 290, 832
  - superficie, 1096
- Suave por pedazos:
  - curva, 832
  - superficie, 1096
- Subconjunto, 3
- Sucesión, 631
  - acotada, 639
  - convergente, 633
  - de las sumas parciales, 645
  - divergente, 633
  - límite, 633-634
  - monótona, 639
  - no acotada, 639
  - términos de la, 631
- Suma:
  - alcance, 300
  - de Riemann, 314, 320
  - índice, 300
  - inferior, 318
  - límite inferior, 301
  - límite superior, 301
  - notación, 300
  - superior, 318
  - telescópica, 301
- Suma de vectores, 782, 797
- Sumando, 300
- Sumas parciales, sucesión, 645
- Superficie, 1095
  - cuádrica, 869-877

- de revolución, 399, 866-869
  - área de, 399-402
- ecuaciones paramétricas, 1111
- no orientable, 1129
- orientable, 1129
- plano tangente a, 924
- recta normal a, 925
- suave, 1096
- suave por pedazos, 1095
- traza de una, 869
- vector normal a, 924, 928, 1096, 1114
- Superficies cuadráticas, 869-875
- Sustituciones:
  - en integrales definidas, 362, 505
  - en integrales indefinidas, 348, 505
  - en series de potencias, 719-723
  - trigonómicas, 531-537
- Taylor:
  - aproximación, 704
  - residuo de la, 704
  - coeficientes de, 697
  - polinomio, 697
  - relación con las series de potencias, 732
  - serie de, 707
- Taylor, Brook, 697
- Telescópica, suma, 301, 648
- Teorema de Cauchy, del valor medio, 588
- Teorema de Green, 1086
  - para regiones de conexidad múltiple, 1091
- Teorema de la divergencia, 1134
- Teorema de la función implícita, 958
- Teorema de Rolle, 192
  - interpretación geométrica, 193
- Teorema de Stokes, 1144
- Teorema del valor medio:
  - para derivadas, 194
  - extensiones, 200, 517, 588
  - interpretación geométrica, 193
  - para funciones de varias variables, 923
  - para integrales, 332
  - generalización, 334
  - interpretación geométrica, 332
- Teorema del valor medio generalizado, 588
- Teorema fundamental del cálculo, 337, 339
- Teoría de la confiabilidad, 416-419
- Teoría especial de la relatividad, de Einstein, 169
- Término:
  - de una serie, 643
  - de una sucesión, 631
- Thomson, William (Lord Kelvin), 1087, 1143
- Toro, 1118
  - área de la superficie, 1118
- Trabajo, 322, 406-408, 1059, 1082
- Transformación, 29
- Transversal, diámetro de la hipérbola, 279
- Transversal, eje de la hipérbola, 279
- Trapezoidal, regla, 355-360
  - error en la, 357
  - fórmula, 356
  - y método de Euler mejorado, 584
- Traslación de ejes, 260
- Traza de la superficie, 869
- Trocoide, 295
- Trigonómicas, funciones, 46-53
  - antiderivadas, 172-179
  - continuidad, 106
  - derivadas, 174
  - gráficas, 49-50
  - identidades, 50-53
  - inversas, 477-491
  - periodicidad, 47-48
  - simetría, 48-49
- Triple integral, 1018
  - propiedades, 1020
  - relación con las integrales iteradas, 1018
- Unión de conjuntos, 3
- Unicidad del límite, 76, 636
- Valor absoluto, función, 39, 69, 135
- Valor medio de una función, 333
- Variable, 17
  - dependiente, 29, 880
  - independiente, 29, 880
- Vector, 779
  - cero, 797
  - componente, 780, 792
  - de posición, 780
  - dirección, 780
  - igualdad, 781, 797
  - longitud, 789, 796
  - magnitud, 781, 789
  - multiplicación por un escalar, 783, 794
  - ortogonal, 791
  - paralelo, 807
  - principal normal a la curva, 803, 847
  - producto escalar, 788, 797
  - producto vectorial, 802
  - proyección, 791
  - punto inicial, 780
  - punto terminal, 780
  - resta, 785, 797
  - suma, 782, 797
  - triple producto escalar, 809
  - triple producto vectorial, 812
- Vector normal:
  - a una superficie, 924, 927, 1095, 1113
  - al plano, 813-816
  - principal (a una curva), 847

Vector tangente a una curva, 829  
    unitario, 839  
Vector unitario, 789, 798  
    coordenada, 792, 796  
    en coordenadas polares, 854  
Vectorial, producto, 802  
    interpretación geométrica, 806  
    propiedades, 804-809  
Vectorial, triple producto, 812  
Velocidad, 58-61, 121, 142  
    de la partícula, 830  
    en coordenadas polares, 855  
    instantánea, 60-61  
    promedio, 58-61  
Velocidad de escape, 574, 618

Vértice:  
    de la elipse, 269  
    de la hipérbola, 279  
    de la parábola, 259  
Volumen, 321, 379-392  
    como una integral doble, 970  
    de un sólido de revolución, 379-382  
    método de las rebanadas, 382-388  
    método de los casquillos cilíndricos, 388-390  
Vorticidad, vector de, 1126  
  
Weierstrass, Karl, 136  
Wren, Christopher, 398  
  
Zeta, función, 675





Esta obra se terminó de imprimir en febrero del 2005  
en los talleres de Programas Educativos, S. A. de C. V.  
Calz. Chabacano No. 65, Col. Asturias  
C.P. 06850, México, D.F.

Empresa Certificada por el Instituto Mexicano de Normalización y  
Certificación A. C. bajo la Norma ISO-9002: 1994/NMX-CC-004:1995  
con el Núm. de Registro RCS-048 y bajo la Norma ISO-14001:  
1996/SAA-1998 con el Núm. de Registro RSAA-003







## OTROS TITULOS DE INTERES

Luzadder	INTRODUCCION AL DIBUJO DE INGENIERIA
Leon	ALGEBRA LINEAL CON APLICACIONES
O'Neil	MATEMATICAS AVANZADAS PARA INGENIERIA, 3a. ed. (vol. 1 y 2)
Resnick	FISICA 4a. ed. (Vol. 1 y 2)
Benson	FISICA UNIVERSITARIA (Vol. 1 y 2)
Hibbeler	MECANICA PARA INGENIEROS: Estática y Dinámica, 6a. ed.
Hopcroft	INTRODUCCION A LA TEORIA DE AUTOMATAS, LENGUAJES Y COMPUTACION
Bentley	SISTEMAS DE MEDICION. Principios y Aplicaciones, 2a. ed.
Marcus	ECUACIONES DIFERENCIALES.
Maron	ANALISIS NUMERICO. Un Enfoque Práctico



COMPañA EDITORIAL CONTINENTAL S.A DE C.V.