

Électromagnétisme dans le Vide

SMI IV

Année universitaire 2019 - 2020

Pr. M. QJANI

Table des matières

I	Courant alternatif	5
0.1	Introduction	7
0.1.1	Historique	7
0.1.2	Avantages du courant alternatif	7
0.2	Définitions	8
0.2.1	Intensité et tension alternatives	8
0.2.2	Grandeurs caractéristiques du courant alternatif	8
0.2.3	Valeurs efficaces	9
0.3	Production de courants alternatifs	9
0.4	Transport du courant alternatif	10
0.5	Système de phases	10
0.6	Notation complexe	11
0.7	Impédance	11
0.7.1	Impédances des composants	12
0.7.2	Association d'impédance	12
0.8	Étude d'un circuit RLC	13
0.8.1	RLC en série	13
0.8.2	RLC en parallèle	14
0.9	Puissance électrique en courant alternatif	16
0.9.1	puissance complexe	16
0.9.2	Puissance active	17
0.9.3	Puissance réactive	17
0.9.4	Puissance apparente	18
0.9.5	Remarques	18
0.9.6	Facteur de puissance	18
0.9.7	Remarque	19
0.10	Méthode de Boucherot	19
0.10.1	Théorème de Boucherot	19
0.10.2	Remarque	19

II	Électromagnétisme	21
1	Le champ magnétique	23
1.1	Introduction	23
1.1.1	Principe de superposition	24
1.1.2	Unité	24
1.1.3	Ordres de grandeurs de champs magnétiques	24
1.2	Expressions du champ magnétique	25
1.2.1	Champ magnétique crée par une charge en mouvement	25
1.2.2	Champ magnétique crée par un courant permanent : Loi de Biot et Savart	26
1.2.3	Sens du champ magnétique	28
1.2.4	Propriétés de symétrie du champ magnétique	29
1.3	Spectres magnétiques	31
1.3.1	Lignes de champ	31
1.3.2	Équation des Lignes de champ	31
1.3.3	Exemples de lignes de champ	31
1.4	Lois fondamentales de la magnétostatique	33
1.4.1	Flux magnétique	33
1.4.2	Théorème d'Ampère	36
1.4.3	Forme intégrale du théorème d'Ampère	36
1.4.4	Forme locale du théorème d'Ampère	37
1.4.5	Remarques	37
1.4.6	Relations de continuité du champ magnétique	39
1.4.7	Potentiel Vecteur	41
1.4.8	Le dipôle magnétique	42
2	Forces et énergie magnétique	46
2.1	Force de Lorentz	46
2.2	La Force de Laplace : actions du champ magnétique sur un circuit fermé	46
2.2.1	Définition légale de l'ampère	48
2.3	Moment de la force magnétique	49
2.3.1	Action d'un champ d'induction magnétique extérieur sur un dipôle magnétique	49
2.4	Travail de la force de Laplace	50
2.5	Théorème de Maxwell	51
2.5.1	Énergie potentielle d'interaction magnétique	52
2.6	Force et couple magnétiques agissant sur un circuit	53
2.6.1	Cas d'une translation pure	53
2.6.2	Cas d'un mouvement de rotation pure du circuit	53

2.6.3	Cas du dipôle	55
3	L'induction électromagnétique	57
3.1	Introduction	57
3.1.1	Mise en évidence des phénomènes d'induction	57
3.1.2	Interprétation	58
3.2	Loi de Faraday- loi de Lenz	58
3.2.1	Loi de Faraday	58
3.2.2	Loi de Lenz	59
3.2.3	Sens du courant induit	59
3.2.4	Champ électromoteur	59
3.3	Induction mutuelle, auto-induction	60
3.3.1	Induction mutuelle	60
3.3.2	Auto induction	61
3.3.3	Remarques :	62
3.4	Régime variable	63
3.4.1	Régime quasi-statique	63
3.4.2	Forces électromotrices f.é.m induites	63
3.4.3	Énergie magnétique	64
3.5	Applications pratiques des phénomènes d'induction	64
3.5.1	Générateurs électromécaniques	64
3.5.2	Moteurs	65
3.5.3	Courants de Foucault	66
4	Équations de Maxwell et Ondes Électromagnétiques dans le vide	68
4.1	Équations de Maxwell	68
4.1.1	Introduction	68
4.1.2	Énoncé des équations de Maxwell	68
4.1.3	Transformation galiléenne du champ électromagnétique	69
4.1.4	Signification physique des équations de Maxwell	70
4.2	Ondes électromagnétique dans le vide	71
4.2.1	Définition	71
4.2.2	Existence des ondes électromagnétiques	72
4.2.3	Équation de propagation	72
4.2.4	Potentiel scalaire V et potentiel vecteur \vec{A}	74
4.2.5	Notion d'OEM plane progressive	75
4.2.6	Polarisation d'une OEM	76
4.2.7	Énergie électromagnétique d'une OEM	77

Première partie

Courant alternatif

0.1 Introduction

0.1.1 Historique

Aux États-Unis, le physicien Nikola Tesla en 1882 conçoit l'alternateur triphasé. Parallèlement, en France, Lucien Gaulard invente le transformateur. Ces deux inventions ont permis de surmonter les limitations imposées par l'utilisation du courant continu pour la distribution de l'électricité préconisée par Thomas Edison.

Les avantages apportés par le transport et la distribution de l'énergie électrique par courants alternatifs sont incontestable, ce dernier a fini par s'imposer aux États-Unis et partout dans le monde.

0.1.2 Avantages du courant alternatif

Contrairement au courant continu, le courant alternatif peut voir ses caractéristiques (tension/courant) modifiées par un transformateur à enroulements.

Grâce au transformateur on peut réduire les pertes par effet de Joule dans les réseaux de distribution, la puissance dissipée dans une résistance étant proportionnelle au carré de l'intensité du courant ($P = RI^2$), En divisant par 10 l'intensité du courant transporté, on divise par 100 les pertes dues à la résistance des câbles électriques.

A puissance constante, on peut réduire fortement l'intensité d'un courant alternatif en augmentant sa tension (haute tension) on abaisse ensuite la tension afin de fournir une alimentation en basse tension près du lieu de distribution, afin de pouvoir l'utiliser à des fins domestiques.

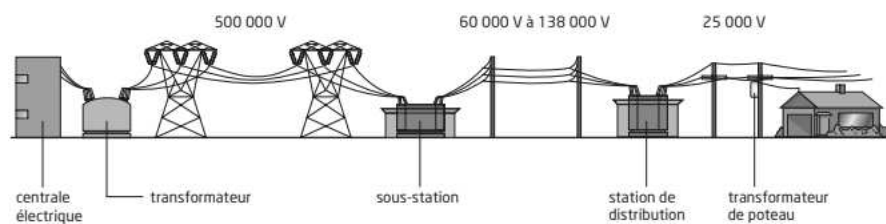


Figure-I.1 : Transport de courant alternatif

0.2 Définitions

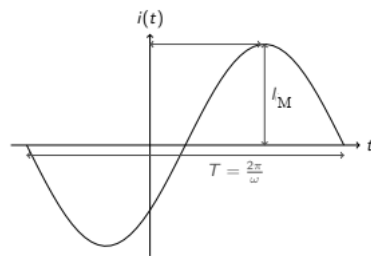
0.2.1 Intensité et tension alternatives

Grandeurs dépendants du temps de forme respective (cas sinusoïdal) :

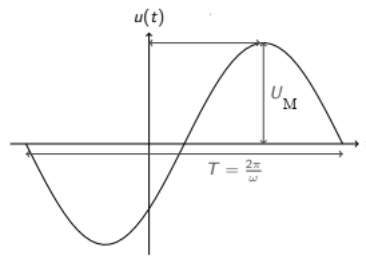
$$i(t) = I_M \sin(\omega t + \phi_i) \quad (1)$$

$$u(t) = U_M \sin(\omega t + \phi_u) \quad (2)$$

- I_M et U_M : valeur maximale ou amplitude ;
- $\omega = 2\pi.f$: pulsation,
- ϕ_i et ϕ_u : phases à l'instant $t=0$ s.



Intensité alternative



Tension alternative

Figure-I.2

0.2.2 Grandeurs caractéristiques du courant alternatif

Période :

C'est le plus court intervalle de temps qui sépare deux états électriques identiques.

Elle est notée T et s'exprime en secondes.

La demi-période $\frac{T}{2}$ est appelée : Alternance.

Fréquence :

Notée f , c'est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T}$. Elle s'exprime en Hz.

Pour une fréquence donnée, la pulsation électrique vaut $\omega = 2\pi.f$, pour le

courant domestique $f=50$ HZ

Le courant alternatif est souvent abrégé en CA ou AC (Alternative Current) par opposition à DC (Direct Current) pour le courant continu.

0.2.3 Valeurs efficaces

L'intensité efficace I_e , resp tension efficace U_e , d'un courant alternatif est égale à l'intensité, resp tension, d'un courant continu qui produirait, durant le même temps, dans une même résistance pure, la même quantité de chaleur.

Intensité efficace

$$I_e = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$i(t) = I_e \sqrt{2} \sin(\omega.t + \phi_i) \quad (4)$$

Tension efficace

$$U_e = \frac{U_M}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$u(t) = U_e \sqrt{2} \sin(\omega.t + \phi_i) \quad (6)$$

Remarque

les valeurs indiquées par les appareils de mesure de type voltmètre ou ampèremètre sont toujours des valeurs efficaces.

0.3 Production de courants alternatifs

L'alternateur exploite un phénomène physique appelé induction selon lequel un aimant en mouvement fait naître une tension aux bornes de la bobine. Les alternateurs utilisés dans les centrales électriques produisent un courant alternatif, qui est en général la superposition de trois courants sinusoïdaux ayant la même amplitude, et déphasés de $\frac{2\pi}{3}$ rad.

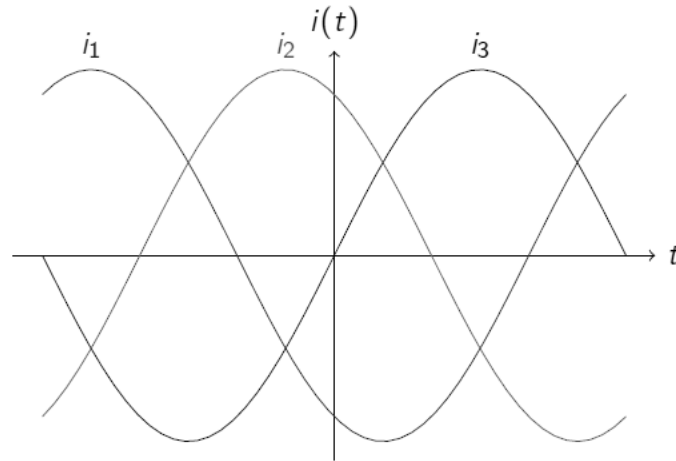


Figure-I.3

0.4 Transport du courant alternatif

La puissance dissipée par effet joule dans un conducteur est proportionnelle au carré de l'intensité : $P = RI^2$. De ce fait, pour transporter de forts courants, il est très intéressant d'utiliser un système dit triphasé, qui transporte séparément les trois composantes sinusoïdales du courant créé par l'alternateur : en divisant par 3 le courant parcourant chaque fil, on divise par 9 les pertes par effet Joule.

Pour l'utilisateur final, en revanche, plusieurs systèmes de phase sont utilisés.

0.5 Système de phases

En courant alternatif, on distingue le fil neutre, qui sert de référence de tension, et le(s) fil(s) de phase, qui transporte(nt) le courant.

Attention : ne pas confondre le fil de phase et le déphasage.

Il existe différents systèmes de courant alternatif :

- 1 **Le Monophasé** : C'est le système le plus utilisé pour les réseaux domestiques. Il utilise deux câbles : la phase et le neutre.
- 2 **Le Biphasé** : Ancien système devenu très rare. Utilise deux fils de phase, et pas de fil neutre.
- 3 **Le Triphasé** : Principalement utilisé pour le transport et l'utilisation de fortes puissances. Il utilise trois fils de phase et un fil neutre.

Remarque : Les fils électriques ont plein de couleurs, Jaune, vert, marron, bleu, qu'il vaut mieux connaître avant de toucher à une prise ou un interrupteur.

La normalisation actuelle se résume ainsi : terre : jaune/ verre ; neutre : bleu ; phase : marron ou rouge.

0.6 Notation complexe

En courant alternatif, il est plus pratique de représenter les grandeurs électriques par des expressions complexes

Ainsi les expressions

$$i(t) = I_M \sin(\omega.t + \phi_i) \quad (7)$$

$$u(t) = U_M \sin(\omega.t + \phi_u) \quad (8)$$

Sont respectivement notées :

$$\underline{i}(t) = I_M e^{j(\omega.t + \phi_i)} \quad (9)$$

$$\underline{u}(t) = U_M e^{j(\omega.t + \phi_u)} \quad (10)$$

Avec $j^2 = -1$

Remarque :

Toutes les lois applicables en régime continu le sont également aux notations complexes en régime sinusoïdal :

- loi d'Ohm
- loi des neunds
- Loi des mailles
- Lois de Kirchhoff,
- Théorème de superpositions,
- Théorèmes de Thévenin et de Norton
- etc.....

0.7 Impédance

L'impédance, notée Z , est une généralisation de la notion de résistance. Elle représente la faculté du composant à s'opposer au passage du courant (résistance), mais également à créer un champ magnétique lors du passage d'un courant (inductance) ou à stocker les charges électriques (capacité).

En régime alternatif, la loi d'Ohm est exprimée par :

$$\underline{u}(t) = Z.\underline{i}(t) \quad (11)$$

Z , $u(t)$ et $i(t)$ sont respectivement l'impédance du circuit, la tension aux bornes du circuit et le courant qui circule dans ce dernier.

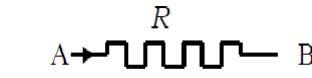
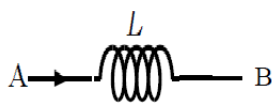
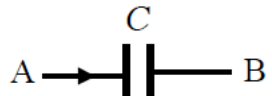
$$Z = \frac{u}{i} = \frac{U_M}{I_M} e^{j(\phi_u - \phi_i)} \quad (12)$$

L'impédance complexe peut se mettre sous la forme :

$$Z = |Z| \cdot \exp(j\phi) \quad (13)$$

ϕ est le déphasage entre la tension et le courant introduit par l'impédance Z .
L'expression complexe $Y = \frac{1}{Z}$ est appelée admittance du circuit.

0.7.1 Impédances des composants

	$Z_R = R$
	$Z_L = jL\omega$
	$Z_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$

- Résistance pure : $Z = R = Re^{j \cdot 0}$ et $\phi = 0$.
- Self pure : $Z = jL\omega = L\omega^{j\frac{\pi}{2}}$, $|Z| = L\omega$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$;
- Condensateur pur : $Z = -j\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{C\omega}j^{-j\frac{\pi}{2}}$, $|Z| = \frac{1}{C\omega}$ et $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

Le courant est

- en phase avec la tension dans R ;
- en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ avec la tension dans L ;
- en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ avec la tension dans C.

0.7.2 Association d'impédance

Impédances montées en série

$$Z_{eq} = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (14)$$

Impédances montées en parallèle

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i} \quad (15)$$

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i \quad (16)$$

0.8 Étude d'un circuit RLC

Un courant d'intensité $i(t) = I_M \sin(\omega t + \phi_i)$ circule dans un circuit RLC en série **figure-I.4** soumis à une tension $u(t) = U_M \sin(\omega t + \phi_u)$.

0.8.1 RLC en série

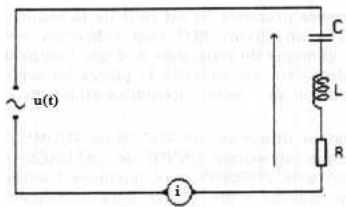


Figure-I.4 : Circuit RLC en série

Impédance

$$Z = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = |Z|e^{j\phi} \quad (17)$$

Avec

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (18)$$

et

$$\phi = \arctg\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) \quad (19)$$

Phénomène de résonance

la tension aux bornes du circuit et le courant qui y circule sont reliés par :

$$\underline{u}(t) = Z\underline{i}(t) \quad (20)$$

soit

$$U_M e^{j(\omega.t + \phi_u)} = |Z| e^{j\phi} I_M e^{j(\omega.t + \phi_i)} \quad (21)$$

d'où :

$$U_M = |Z| I_M \quad (22)$$

Donc

$$I_M = \frac{U_M}{|Z|} = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \quad (23)$$

Lorsque $LC\omega^2 = 1$; soit $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'impédance est minimale ($Z=R$) et l'intensité est maximale et vaut ($\frac{U_M}{R}$) ; c'est le phénomène de résonance. ω_0 ne dépend que des éléments L et C du circuit, c'est la pulsation propre du circuit et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ sa fréquence propre.

Lorsque la fréquence de l'excitation $u(t)$ se rapproche de la fréquence propre de l'oscillateur (circuit) celui-ci entre en résonance.

A la résonance :

- Les tensions U_L et U_C aux bornes de la bobine et du condensateur sont algébriquement opposées, la d.d.p aux bornes du circuit résulte uniquement de la résistance ;
- U_L et U_C peuvent valoir plusieurs fois la tension appliquée : Phénomène de surtension ;
- La tension d'excitation et l'intensité sont en phase $\phi = 0$.

0.8.2 RLC en parallèle

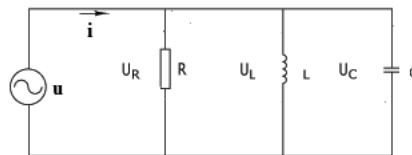


Figure-I.5 : Circuit RLC en parallèle

Admittance

L'admittance du circuit est donnée par

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C \quad (24)$$

$$= \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega} + jC\omega \quad (25)$$

$$= \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \quad (26)$$

Qu'on peut mettre sous la forme

$$Y = |Y|e^{j\phi'} \quad (27)$$

Avec

$$|Y| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} \quad (28)$$

$$\phi' = \text{artg}\left(R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right) \quad (29)$$

Phénomène d'antirésonance

La tension aux bornes du circuit et le courant qui y circule sont reliés par :

$$\underline{i}(t) = Y\underline{u}(t) \quad (30)$$

soit

$$I_M e^{j(\omega.t + \phi_i)} = |Y| e^{j\phi'} U_M e^{j(\omega.t + \phi_u)} \quad (31)$$

D'où

$$I_M = |Y| U_M \quad (32)$$

Si

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0 \quad (33)$$

Soit

$$LC\omega^2 = 1 \quad (34)$$

L'admittance du circuit est minimale et vaut $|Y| = \frac{1}{R}$, donc $I_M = Y U_M = \frac{U_M}{R}$ est minimal, c'est le phénomène d'antirésonance.

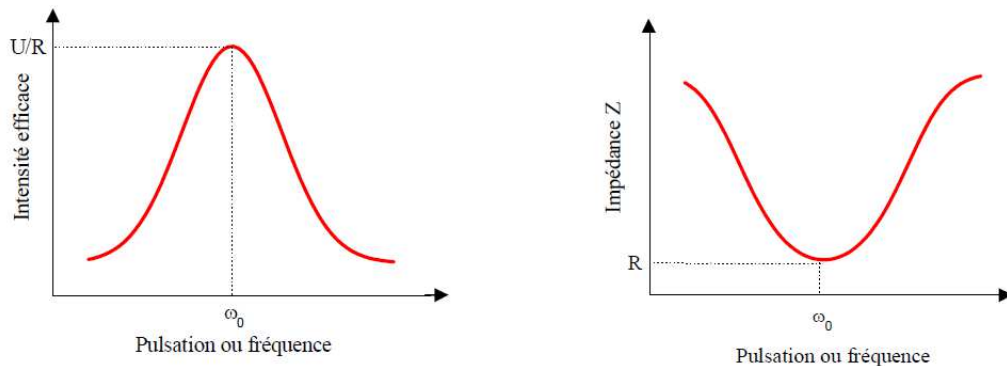


Figure-I.5 : Phénomène de résonance.

0.9 Puissance électrique en courant alternatif

La puissance est la quantité d'énergie par unité de temps, elle est exprimée en Watt (W). $1W = 1 J s^{-1}$.

Dans un dipôle électrique, la puissance s'écrit sous la forme

- Régime continu : $P = U.I$
- Régime variable : $P(t) = u(t).i(t)$

P en Watt (W), u en Volt (V) et i en Ampère (A).

En régime alternatif, les grandeurs électriques (tension, intensité) sont variables. La puissance instantanée, $p(t) = i(t).u(t)$, est aussi variable.

On définit plusieurs grandeurs physiques, homogènes à une puissance :

- La puissance complexe ;
- La puissance active ou réelle ;
- La puissance apparente ;
- La puissance réactive.

0.9.1 puissance complexe

La puissance complexe est définie comme le produit de la tension complexe par l'intensité complexe.

$$\underline{S} = \underline{u}.i = P + jQ \quad (35)$$

P et Q sont respectivement appelées puissance active et puissance réactive.

0.9.2 Puissance active

C'est la puissance moyenne consommée par le système au cours d'un temps donné.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (36)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt \quad (37)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T U_M \sin(\omega t) I_M \sin(\omega t + \phi) dt \quad (38)$$

Soit

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} U_M I_M [\cos \phi - \cos(2\omega t + \phi)] dt \quad (39)$$

$$= \frac{1}{2T} U_M I_M \cos \phi \int_0^T dt - \frac{1}{2T} U_M I_M \int_0^T \cos(2\omega t + \phi) dt \quad (40)$$

$$= \frac{U_M I_M}{2} \cos \phi \quad (41)$$

$$= \frac{U_M}{\sqrt{2}} \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cos \phi \quad (42)$$

$$= U_e I_e \cos \phi \quad (43)$$

P est la puissance consommée par la charge, elle désigne la puissance liée à l'énergie électrique qui peut être convertie par le récepteur sous une autre forme d'énergie (mécanique, calorifique, etc...).

La puissance active absorbée par un récepteur est toujours positive.

0.9.3 Puissance réactive

C'est la partie imaginaire de la puissance apparente complexe.

$$Q = U_e I_e \sin \phi = P \tan \phi \quad (44)$$

ϕ est le déphasage entre u et i.

L'unité de puissance réactive est le VOLTAMPÈRE RÉACTIF (var), son signe dépend de l'angle de déphasage produit par le récepteur considéré :

- 1 Pour un récepteur inductif ($\phi > 0$) la puissance réactive est positive,
- 2 Pour un récepteur capacitif ($\phi < 0$) la puissance réactive est négative.

Une installation courante est à tendance inductive. La puissance réactive positive, est consommée sur le réseau qui alimente cette installation.

Par contre, les condensateurs fournissent de la puissance réactive au réseau puisque celle-ci est négative. Leur utilisation permettra une compensation de la puissance réactive absorbée par une installation.

0.9.4 Puissance apparente

La puissance apparente correspond à la valeur maximale que peut prendre la puissance active, pour des amplitudes de tension et d'intensités données. Elle est égale au module de la puissance complexe $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$. La puissance apparente se note S ; il s'agit également de la puissance nominale indiquée sur les machines. Elle s'exprime en Voltampère ou V.A : $1\text{V.A} = 1\text{ W}$.

La puissance nominale d'une machine est sa puissance apparente.

0.9.5 Remarques

Remarque 1 : Les dipôles ayant une impédance dont la valeur est un nombre imaginaire pur (capacité ou inductance) ont une puissance active nulle et une puissance réactive égale en valeur absolue à leur puissance apparente.

Remarque 2 : La puissance apparente (S) est reliée à la puissance active (P) et à la puissance réactive (Q) par la relation suivante : $S^2 = P^2 + Q^2$

- La puissance active est exprimée en W ;
- La puissance apparente est exprimée en V.A ;
- La puissance réactive est exprimée en VAR.

Ces trois unités sont homogènes entre elles, mais n'ont pas la même signification physique.

0.9.6 Facteur de puissance

Il est égal au quotient de la puissance active par la puissance apparente. C'est une caractéristique du récepteur.

Dans le cas d'un dipôle électrique :

$$\lambda = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{U_e I_e} = \cos\phi \quad (45)$$

Le facteur de puissance est égal au cosinus du déphasage $\lambda = \cos\phi$.

0.9.7 Remarque

La puissance consommée par une charge dépend du facteur de puissance $\cos\phi$ introduit par la charge.

L'énergie électrique, produite dans les centrales électriques est transportée dans une ligne pour être fournie aux clients. Or Le client ne paie au fournisseur que l'énergie qui correspond à la puissance $P = U_e I_e \cos\phi$ qu'il a consommée. Cette puissance est inférieure à celle qui lui a été livrée à la sortie de la centrale électrique. La différence ΔP , pertes dans la ligne, est à la charge du fournisseur.

$$\Delta P = R I_e^2 \quad (46)$$

R est la résistance électrique de la ligne. Soit :

$$\Delta P = R \frac{P^2}{U_e^2 \cos^2 \phi} \quad (47)$$

La puissance perdue dans la ligne par effet Joule est inversement proportionnelle au facteur de puissance. Le fournisseur pénalise le client dès que le facteur de puissance est inférieur à 0,8. Pour éviter ces pénalités, les industriels relèvent le facteur de puissance de leurs installations électriques à l'aide de condensateurs conçus à cet effet.

0.10 Méthode de Boucherot

0.10.1 Théorème de Boucherot

Si un circuit contient N composants, absorbant chacun une puissance active P_i et une puissance réactive Q_i , alors les puissances actives et réactives totales sont respectivement les sommes des puissances actives et réactives du circuit :

$$P_{tot} = \sum_i P_i$$

$$Q_{tot} = \sum_i Q_i$$

0.10.2 Remarque

La puissance apparente totale peut s'exprimer en fonction des puissances active et réactive :

$$S_{tot} = \sqrt{P_{tot}^2 + Q_{tot}^2} \quad (48)$$

mais revanche, elle n'est pas égale à la somme des puissances apparentes :

$$S_{tot} \neq \sum_i S_i \quad (49)$$

Deuxième partie

Électromagnétisme

Chapitre 1

Le champ magnétique

1.1 Introduction

La magnétostatique est l'étude des champs magnétiques créés par des distributions permanentes de courants, c'est à dire par des répartitions de courants volumiques, superficielles ou filiformes, indépendantes du temps.

Les phénomènes magnétiques sont connus depuis l'antiquité, le plus ancien est l'attraction du fer par la magnétite, pierre constituée essentiellement d'oxyde de fer Fe_3O_4 .

Des lois qualitatives furent rapidement établies, répulsion entre pôles de même nom et attraction de pôle de noms différents. Ces effets à distances, montrent l'existence d'une interaction de nouveau genre, différentes des interactions gravitationnelles et électrostatiques.

En 1819 Oersted mit en évidence l'effet d'un courant électrique sur un aimant : une aiguille aimantée placée sur un pivot au dessous d'un fil parcourue par un courant électrique s'oriente perpendiculairement au fil, le sens d'orientation change avec celui du courant électrique.

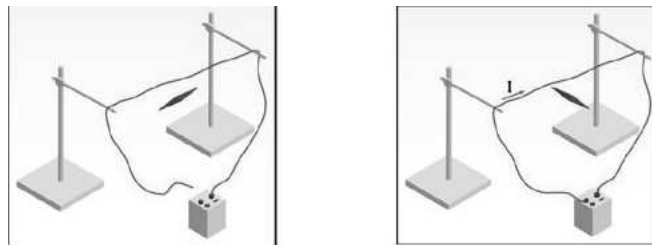


Figure-II-I.1 :Expérience d'Oersted (action d'un courant sur un aimant)

L'effet réciproque du précédent existe, un conducteur mobile, parcouru par un courant électrique, et placé au voisinage d'un aimant est soumis à des actions mécaniques qui le déplacent.

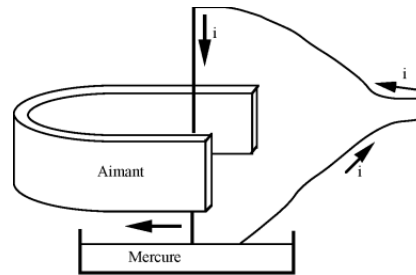


Figure-II-I.2 : Action d'un aimant sur un courant

Un conducteur parcouru par un courant électrique, est d'une part source d'effets magnétiques et d'autre part peut en subir, on peut donc prévoir qu'il y a interaction entre deux courants électrique. C'est à Ampère que l'on doit une présentation cohérente de tous ces effets.

Les effets magnétiques observés en un point de l'espace sont décrit par une grandeur vectoriel appelé champ magnétique \vec{B} .

1.1.1 Principe de superposition

Si $\vec{B}_1(M)$ est le champ magnétique crée par une source donnée en un point M de l'espace et $\vec{B}_2(M)$ le champ magnétique crée par une deuxième source au même point, le champ magnétique crée par les deux sources en ce point est $\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$

1.1.2 Unité

L'unité du champ magnétique dans le système international est le Tesla (T). Une autre unité appartenant au système CGS, le Gauss (G), est également utilisée $1Gauss = 10^{-4}Tesla$:

1.1.3 Ordres de grandeurs de champs magnétiques

- Champ magnétique interstellaire moyen : $B \approx \mu G$
- Champ magnétique terrestre : $B_{\perp} \approx 0.4G$, $B_{horizontal} \approx 0.3G$
- Un aimant courant $B \approx 10mT$

-
- Champ magnétique dans une tache solaire $B \approx kG \approx 0.1 Tesla$
 - Un électroaimant ordinaire $B \approx 1 Tesla$
 - Une bobine supraconductrice $B \approx 20 Tesla$
 - Champ magnétique d'une étoile à neutrons $10^8 \approx Tesla$

Les champs intense ne peuvent être obtenus que dans des volumes réduits.

1.2 Expressions du champ magnétique

1.2.1 Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M de l'espace par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen est :



Figure-II-I.3

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

$$\vec{r} = \vec{PM}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} : \text{perméabilité du vide.}$$

Remarque

- L'expression de \vec{B} n'est valable que dans le cas où les particules se déplacent à des vitesses très inférieures à c, vitesse de la lumière dans le vide ;
- $|\vec{B}|$ diminue en $\frac{1}{r^2}$;
- \vec{B} est perpendiculaire à \vec{v} et \vec{r} ;
- \vec{B} est défini par un produit vectoriel de deux grandeurs polaires, \vec{B} est une grandeur axiale ou pseudo-vecteur ;
- Le trièdre $(q\vec{v}, \vec{r}, \vec{B})$ est direct.

Sens du champ magnétique crée par une charge mobile

Le sens du champ magnétique crée par une charge mobile peut être déterminée à l'aide de la règle du tire bouchon ou des trois doigts de la main droite .

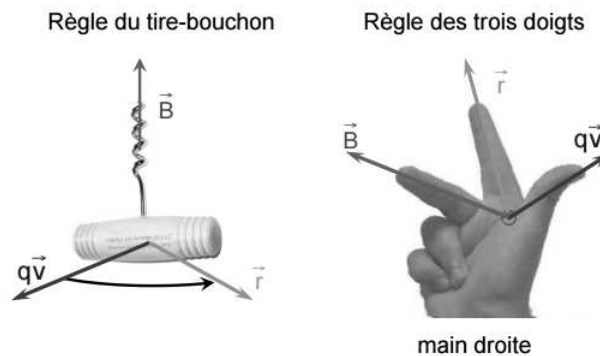


Figure-II-I.4 : Sens du champ magnétique crée par une charge mobile.

1.2.2 Champ magnétique crée par un courant permanent : Loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart permet de déterminer le champ magnétique créer par un fil filiforme parcouru par un courant électrique constant I en tout point de l'espace qui l'entoure.

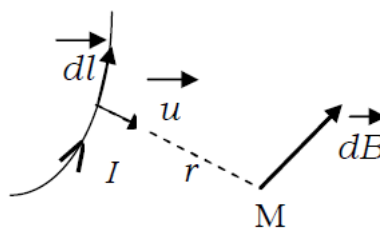


Figure-II-I.5.

Chaque élément de courant $d\vec{l}$ au voisinage d'un point P crée en un point M de l'espace un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ d'expression :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \quad (1.2)$$

Formule de Biot et Savart.

Le champ magnétique crée par le fil sera donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\text{circuit}} \frac{d\vec{l} \wedge P\vec{M}}{PM^3} \quad (1.3)$$

Remarques

- Cette formule a été établie expérimentalement en 1820. Le lien entre champ d'induction magnétique et charges en mouvement n'a été établi que bien plus tard ;
- La formule de Biot et Savart est un outil de calcul qui ne doit être utilisée que pour calculer le champ magnétique créée par des circuits fermés ;
- Pour un fil conducteur considéré comme infiniment mince, le champ magnétique est nul en $r = 0$;
- La loi de Biot et Savart n'est valable rigoureusement que pour un courant continu d'intensité constante (régime stationnaire). Si l'intensité varie assez lentement, par exemple dans le cas d'un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz, la loi de Biot et Savart reste encore valable.

Cas d'une densité surfacique de courant

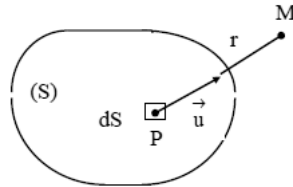


Figure-II-I.6 : Densité de courant surfacique.

Le champ magnétique créé par une distribution surfacique de courant de densité \vec{j}_s en un point M de l'espace s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j}_s \wedge P\vec{M}}{PM^3} dS \quad (1.4)$$

Cas d'une densité volumique de courant

Le champ magnétique créé par une distribution volumique de courant de densité \vec{j}_τ en un point M de l'espace s'écrit donc :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\vec{j}_\tau \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau \quad (1.5)$$

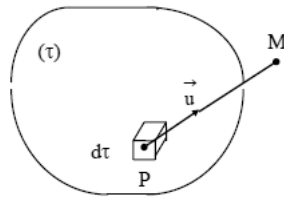


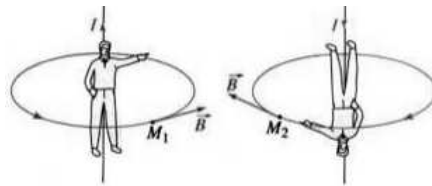
Figure-II-I.7 : Densité de courant volumique.

1.2.3 Sens du champ magnétique

Le sens du champ magnétique dépend du sens du courant et peut être déterminé de différentes manières :

— **Règle du bonhomme d'Ampère**

Observateur disposé le long du conducteur de façon que le courant électrique circule de ses pieds vers sa tête, tendant la main gauche et regardant un point M de l'espace. Le champ magnétique en ce point est dirigé suivant la main gauche de l'observateur.



— **Règle de la main droite**

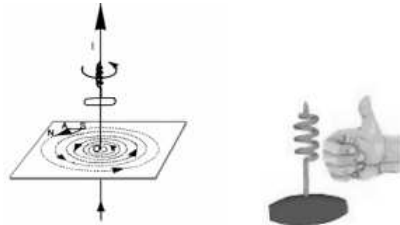
Lorsque la paume de la main droite est tournée vers le point M, les doigts étant le long du fil et dans le sens du courant, le pouce indique le sens du champ magnétique.

Lorsque les doigts enroulent le fil dans le sens du champ magnétique, le pouce indique le sens du courant.



— Règle du tire-bouchon (de Maxwell)

Pour progresser dans le sens du courant, un tirebouchon doit tourner dans le sens du champ.



Remarque

La loi de Biot et Savart est une intégrale vectorielle, \vec{B} est donc défini par trois composantes B_x, B_y et B_z qui doivent être calculées séparément. Généralement, les densités de courant possèdent un plan ou un axe de symétrie, il est donc facile de connaître la direction du champ magnétique dans le plan ou sur l'axe de symétrie, en composant les champs élémentaires créés par deux éléments de courant disposés symétriquement. Connaissant la direction de \vec{B} , on peut alors calculer le module de \vec{B} par une seule intégrale.

1.2.4 Propriétés de symétrie du champ magnétique

Rappel :

Considérons un système physique (S).

1. **Invariance par translation** : si (S) est invariant dans toute translation parallèle à un axe Oz, les effets ne dépendent pas de z.
2. **Symétrie axiale** : si (S) est invariant pour toute rotation ϕ autour d'un axe Oz, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques $(\rho; \phi; z)$ ne dépendent pas de ϕ .
3. **Symétrie cylindrique** : si (S) est invariant par translation le long de l'axe Oz et par rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques $(\rho; \phi; z)$ ne dépendent que de la distance à l'axe ρ .
4. **Symétrie sphérique** : si (S) est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques $(r; \theta; \phi)$ ne dépendent que de la distance r au centre o.

Application au champ magnétique

a. cas d'un plan de symétrie

Une distribution de courants admet un plan de symétrie (π) , si en deux points P_{P_1} et P_2 , symétriques par rapport à (π) , $\vec{j}(P_2) = \text{image}_{/\pi} \vec{j}(P_1)$.

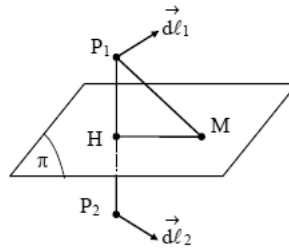


Figure-II-I.8

Le champ magnétique \vec{B} , créé par une distribution de courants présentant un plan de symétrie est orthogonal à ce plan de symétrie.

Exemple : fil infini, solénoïde infini.

b. cas d'un plan d'antisymétrie

Une distribution de courants admet un plan d'antisymétrie (π') , si en deux points P_{P_1} et P_2 , symétriques par rapport à (π') , $\vec{j}(P_2) = -\text{image}_{/\pi'} \vec{j}(P_1)$.

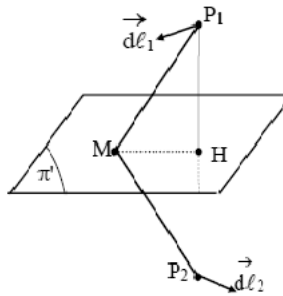


Figure-II-I.9

Le champ magnétique \vec{B} , créé par une distribution de courants présentant un plan de d'antisymétrie est contenu dans ce plan de symétrie.

Exemple : spire.

Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ magnétique.

Conséquences

1. Si \vec{j} est invariant par rotation autour d'un axe, \vec{B} l'est aussi ;
2. Si \vec{j} est poloïdal (porté par \vec{e}_ρ ou \vec{e}_z), alors \vec{B} est toroïdal (porté par \vec{e}_ϕ) ;
3. Si \vec{j} est toroïdal, alors \vec{B} est poloïdal ;
4. Si le système de courants possède un plan de symétrie, alors \vec{j} est contenu dans ce plan et donc \vec{B} lui est perpendiculaire.

1.3 Spectres magnétiques

1.3.1 Lignes de champ

Une ligne de champ est une courbe C dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le champ magnétique lui est tangent.

1.3.2 Équation des Lignes de champ

Soit $d\vec{l}$ un élément de longueur d'une ligne de champ, \vec{B} tangent à la ligne de champ s'écrit

$$\vec{B} \wedge d\vec{l} = \vec{0} \quad (1.6)$$

Les lignes de champ peuvent être déterminées en résolvant l'équation

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (1.7)$$

En coordonnées cartésiennes, et l'équation

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{r \sin\theta d\phi}{B_\phi} \quad (1.8)$$

En coordonnée sphériques.

La conservation du flux magnétique implique que les lignes de champ magnétique se referment sur elles-mêmes.

1.3.3 Exemples de lignes de champ

Les lignes de champ magnétique indiquent en tout point de l'espace, où le champ magnétique est défini, la direction et le sens du vecteur \vec{B} , ce dernier

leur est tangent. Plus les lignes sont denses, plus B est important.
On pratique on peut visualiser les lignes de champ à l'aide de grains de li-maille de fer, dans le champ chaque grain s'aimante et subit un couple de forces qui l'oriente parallèlement au champ, comme une aiguille magnétique.

1 Champ magnétique crée par un aimant droit :

Les lignes sortent du pôle N et entrent par le pôle S.

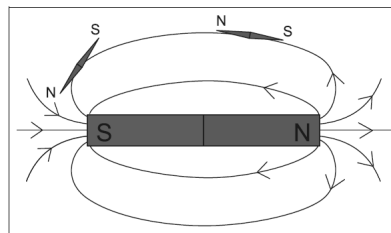


Figure. II-I.10

2. Champ magnétique créée par un aimant en U :

Entre les branches de l'aimant, les lignes de champ sont des droites parallèles, \vec{B} est le même en tout point, le champ magnétique y est uniforme.

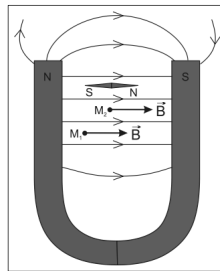


Figure. II-I.11

3. Champ créé par un conducteur rectiligne :

Les lignes de champ sont des cercles concentriques. Il n'y a pas de pôles N ni S. Le sens de B dépend du sens de I .

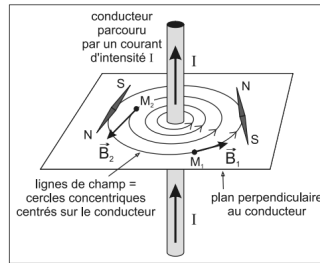


Figure. II-I.12

4. Champ créé par un conducteur circulaire :

Toutes les lignes sortent par une face appelée face nord (N) et entrent par l'autre face appelée face sud (S). Le sens de \vec{B} dépend du sens de I.

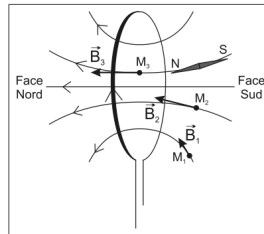


Figure. II-I.13

1.4 Lois fondamentales de la magnétostatique

1.4.1 Flux magnétique

Définition

Le flux du vecteur \vec{B} à travers une surface S, est défini par la grandeur scalaire :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (1.9)$$

Où $d\vec{s} = dS \cdot \vec{n}$ et \vec{n} vecteur unitaire porté par la normale à ds.

1. si \vec{B} et \vec{n} sont dans le même sens : $\Phi > 0$;
2. si \vec{B} et \vec{n} sont opposés : $\Phi < 0$

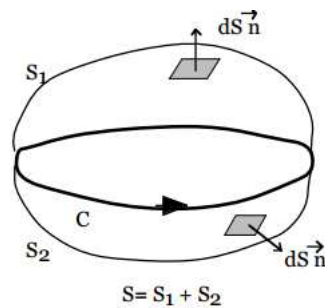


Figure. II-I.14

$[Flux\ magnétique] = \text{Weber (Wb)}$
 $[B] = \text{Wb} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Tesla (T)}$.

Contours et surfaces orientés

Pour orienter une surface qui s'appuie sur un contour orienté on utilise la **règle de la main droite "règle de Stokes"** : si l'on place la main droite de telle manière que le sens positif va vers le bout des doigts, le pouce droit pointe dans le sens positif de la normale à S .

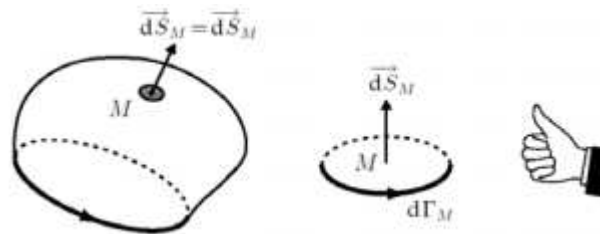


Figure. II-I.14

Exemples :

Soit un contour fermé C sur lequel s'appuie une surface S . On oriente le contour C et la surface S :

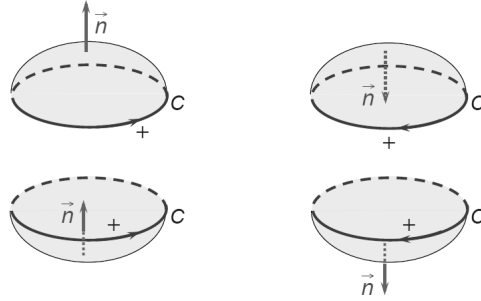


Figure. II-I.15

Équation de Maxwell-Thomson

L'expression du champ magnétique crée en un point de l'espace par un fil filiforme parcourue par un courant I est donnée par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \quad (1.10)$$

D'où

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{div} \left[\oint_C \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right] \quad (1.11)$$

On peut intervertir l'opérateur divergence avec l'intégrale puisque la divergence ne porte pas sur les variables décrivant la distribution de courant.

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \text{div} \left[\frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right] \quad (1.12)$$

Or $\vec{rot}(\vec{grad} f) = \vec{0}$ et $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{rot}(\vec{a}) - \vec{a} \cdot \vec{rot}(\vec{b})$

Par conséquent

$$\text{div} \left(\frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right) = \frac{\vec{PM}}{PM^3} \cdot \vec{rot}(d\vec{l}) - d\vec{l} \cdot \vec{rot} \left(\frac{\vec{PM}}{PM^3} \right) \quad (1.13)$$

$$= \frac{\vec{PM}}{PM^3} \cdot \vec{rot}(d\vec{l}) - d\vec{l} \cdot \vec{rot} \left(\frac{\vec{PM}}{PM^3} \right) \quad (1.14)$$

$$= \frac{\vec{PM}}{PM^3} \cdot \vec{rot}(d\vec{l}) - d\vec{l} \cdot \vec{rot} \left(\vec{grad} \left(\frac{1}{PM} \right) \right) \quad (1.15)$$

$\vec{rot}(d\vec{l}) = \vec{0}$, $d\vec{l}$ est une fonction du point source P , alors que l'opérateur rotationnel ne fait intervenir que les dérivés par rapport aux coordonnées du point M .

D'où

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.16)$$

C'est l'une des quatre équations de Maxwell.

Conservation du flux

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée S quelconque, s'appuyant sur un contour fermé C orientée, est donné par :

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{B} d\tau = 0 \quad (1.17)$$

Conséquences :

1. Le flux de l'induction magnétique à travers toute surface fermée est nul ;
2. Il n'existe pas de monopôle magnétique : si on casse un aimant, on retrouve deux aimants.

1.4.2 Théorème d'Ampère

Énoncé

Dans le vide, la circulation du vecteur champ magnétique \vec{B} le long d'une courbe fermée et orientée Γ appelé contour d'Ampère est égale au produit par μ_0 de la somme algébrique des intensités des courants qui traversent cette courbe.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{enlac} \quad (1.18)$$

Remarques

1. Le contour Γ n'a pas de réalité physique, il est purement fictif et n'a aucune raison de correspondre avec un contour réel de la distribution étudiée ;
2. Le sens d'orientation du contour est déterminé arbitrairement. L'orientation du contour détermine alors le signe de I_{enlac} .

1.4.3 Forme intégrale du théorème d'Ampère

$\forall S$ s'appuyant sur un contour fermé Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S} \quad (1.19)$$

L'orientation de la surface S et du contour Γ doit alors être faite de manière cohérente.

1.4.4 Forme locale du théorème d'Ampère

Le théorème de Stokes permet d'écrire :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \iint_{\Sigma} r\vec{ot}(\vec{B}) d\vec{s} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} d\vec{s} \quad (1.20)$$

Soit

$$r\vec{ot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.21)$$

Il s'agit d'une forme partielle de l'équation de Maxwell-Ampère. Elle n'est valable que dans l'hypothèse de courant constant dans le temps (ou lentement variable dans le temps).

1.4.5 Remarques

Choix du contour :

Le choix du contour d'Ampère ne peut se faire qu'après une étude détaillée des symétries et invariances de la distribution de courants.

En un point M quelconque de l'espace où l'on veut calculer le champ, le contour d'ampère Γ :

1. Doit passer par le point M considéré;
2. En chaque point P de Γ , le champ $\vec{B}(P)$ est
 - i. Soit normal à Γ . D'où $\vec{B}(P).d\vec{l}_P = 0$;
 - ii. Soit tangent à Γ , le champ est donc égale (au signe près) à sa composante tangentielle $\vec{B}(P) = B_{\theta}(P)$; on a alors $\vec{B}(P).d\vec{l} = \pm B_{\theta}(P).dl_P$

Dans la pratique, on cherchera un contour qui coïncide au maximum avec la ligne de champ passant par M; on le complétera avec des portions perpendiculaires au champ.

Orientation du contour

Le choix du sens de la circulation sur le contour d'Ampère est purement arbitraire. De ce choix (arbitraire) dépend le signe de la circulation de $\vec{B}(M)$ et de l'intensité enlacée I_{enlace} .

Exemples :

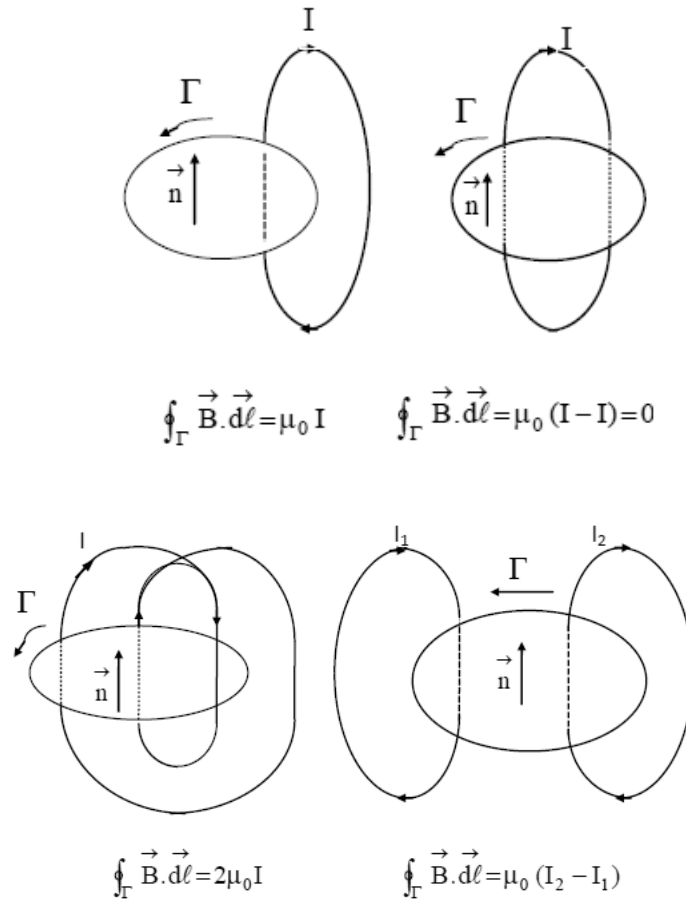


Figure. II-I.16

Excitation magnétique

Comme en électrostatique, on introduit un vecteur excitation magnétique \vec{H} tel que :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.22)$$

μ est la perméabilité magnétique du milieu.

Dans le vide on a :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (1.23)$$

Le théorème d'Ampère équivaut au théorème de Gauss en électrostatique : dans le premier cas le vecteur excitation \vec{H} est relié aux courants sources \vec{J} , et dans le deuxième, \vec{D} est relié aux charges sources.

1.4.6 Relations de continuité du champ magnétique

Le champ magnétique présente une discontinuité en traversant une surface parcourue par un courant de densité \vec{j}_s .

Composante normale

Soit \vec{j}_s la densité de courant surfacique circulant dans la surface séparant l'espace en deux régions 1 et 2.

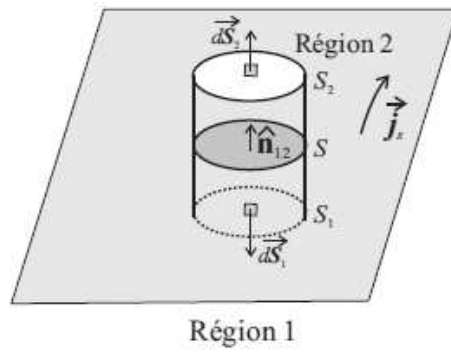


Figure . II-I.19

Considérons une surface cylindrique fictive fermée traversant la nappe de courant **figure .II-I.19**, la conservation du flux s'exprime par

$$\oiint_S \vec{B} d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{B} d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{B} d\vec{s} + \iint_{S_L} \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (1.24)$$

Si $S_1 \rightarrow S_2$, la surface latérale $S_L \rightarrow 0$, soit

$$\iint_{S_1} \vec{B} d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (1.25)$$

D'où

$$\iint_{S_1-S_2} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} ds = 0 \quad (1.26)$$

Ce ci étant valable $\forall S$, donc

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad (1.27)$$

Donc

$$B_{n_2} = B_{n_1} \quad (1.28)$$

Continuité de la composante normale du champ magnétique à la traversée d'une nappe de courant surfacique.

Composante tangentielle

On considère le contour d'Ampère normale à la nappe de courant dont les cotés sont parallèles à \vec{j}_s et coupant la nappe suivant MN **figure . II.-I.19**.

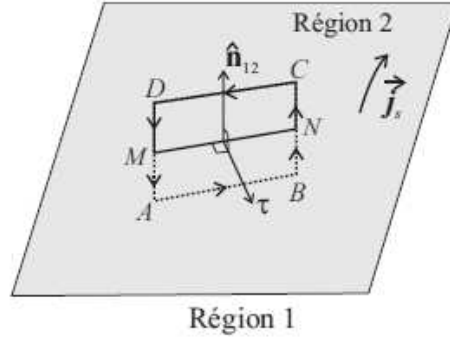


Figure . II-I.19

Le théorème d'Ampère permet d'écrire

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (1.29)$$

I est le courant qui circule sur la nappe, défini par la densité de courant surfacique.

$$I = \iint_{ABCD} \vec{j}_s \cdot d\vec{s} = \int_{MN} \vec{j}_s \cdot \vec{\tau} \cdot dl \quad (1.30)$$

$d\vec{l}$ est suivant \vec{MN} , $d\vec{l} = dl\vec{u}$, $(\vec{u}, \vec{n}_{12}, \vec{\tau})$ trièdre directe d'où $\vec{u} = \vec{n}_{12} \wedge \vec{\tau}$

Dans la limite $DA \rightarrow 0$, le théorème d'Ampère permet d'écrire

$$\int_{MN} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) d\vec{l} = \mu_0 \int_{MN} \vec{j}_s \cdot \vec{\tau} \cdot dl \quad (1.31)$$

MN est quelconque, d'où

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) d\vec{l} = (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) dl \vec{u} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} &= (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) dl (\vec{n}_{12} \wedge \vec{\tau}) \\ &= [(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{12}] \vec{\tau} dl \\ &= \mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{\tau} \cdot dl \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$(\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}))$$

soit

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{12} = \mu_0 \vec{j}_s \quad (1.34)$$

Conclusion

- A la traversée d'une nappe de courant,
- la composante normale du champ magnétique est continue,
 - la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue.

1.4.7 Potentiel Vecteur

$\text{div} \vec{B} = 0$, or $\text{div}(\vec{rot}) = 0$; On peut donc définir un vecteur $\vec{A}(M)$ tel que : $\vec{B}(M) = \vec{rot} \vec{A}(M)$.

$\vec{A}(M)$ est appelé potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}(M)$.

Si f décrit un champ scalaire on peut écrire

$$\vec{rot}(\vec{A} + \text{grad} f) = \vec{rot}(\vec{A}) + \vec{rot}(\text{grad} f) = \vec{rot}(\vec{A}) = \vec{B} \quad (1.35)$$

$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} f$ est aussi un potentiel vecteur. Le potentiel vecteur est défini à un gradient de fonction près.

Or on a $\vec{rot} \vec{B} = \vec{rot}(\vec{rot} \vec{A}) = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

On peut limiter le choix de \vec{A} en imposant une contrainte " jauge ".

Exemple :

$$\text{div} \vec{A} = \text{cte} = 0 \quad (1.36)$$

Jauge de Coulomb.

Dans cette jauge on peut écrire

$$-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.37)$$

Équation locale du potentiel vecteur.

Les expressions du potentiel vecteur sont :

— **Cas d'un circuit filiforme :**

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{Id\vec{l}(P)}{PM} \quad (1.38)$$

— **Cas d'une distribution surfacique de courant :**

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\Sigma \quad (1.39)$$

— **Cas d'une distribution volumique de courant**

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau \quad (1.40)$$

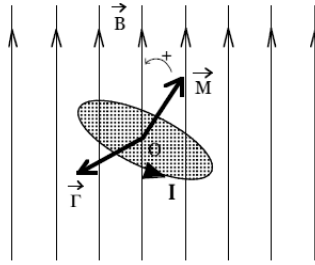


Figure . II-I.20

1.4.8 Le dipôle magnétique

Moment magnétique

Le moment magnétique d'une boucle de courant est défini par :

$$\vec{m} = I \cdot \vec{S} = I \cdot S \cdot \vec{n} \quad (1.41)$$

Il s'exprime en Am^2 .

Définition "dipôle magnétique"

On parle de dipôle magnétique lorsque la boucle de courant satisfait aux conditions de l'approximation dipolaire : pour le dipôle actif (créateur de champ magnétique), il faut que la dimension de la spire soit petite devant la distance à laquelle on calcule le champ créé ($r \gg R$, R est le rayon de la spire).

Pour le dipôle passif, il faut que la dimension du dipôle soit petite devant la distance caractéristique de variation du champ dans lequel est placé le dipôle.

Champ magnétique créé par un dipôle magnétique

En coordonnées sphériques l'expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique est similaire à celle du champ électrique créé par un dipôle électrique soit

$$\begin{cases} B_r &= \frac{\mu_0 m \cos \theta}{2\pi r^3} \\ B_\theta &= \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\phi &= 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

Lignes de champ dipolaires

Les lignes de champ d'un dipôle magnétique ont la même forme que les lignes de champ d'un dipôle électrique. Elles sont invariantes par rotation autour du moment dipolaire et se referment sur elles-mêmes à l'endroit où se trouve le dipôle. Notons que le champ magnétique n'est pas défini en ce point : il y présente une singularité.

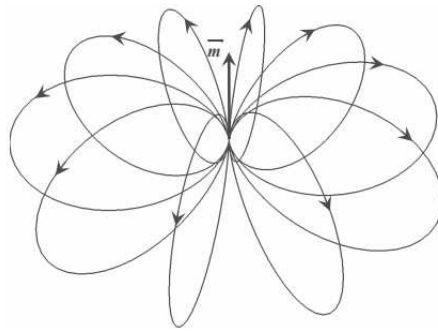


Figure . II-I.21

Exemples de dipôles magnétiques

Barreau aimanté

Un petit barreau de matière aimantée équivaut à grande distance à un dipôle magnétique dont le moment magnétique \vec{m} est dirigé du Sud vers le Nord de l'aimant.

Les lignes de champ d'induction magnétique sortent par le pôle Nord de l'aimant et entrent par son pôle Sud

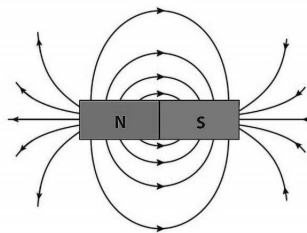


Figure . II-I.22

Globe terrestre

Le champ magnétique terrestre peut être vu comme celui d'un aimant droit, actuellement sa valeur à la surface de la terre est de l'ordre de $0.5G$. L'aiguille de la boussole indique le nord magnétique, lequel diffère du nord géographique.

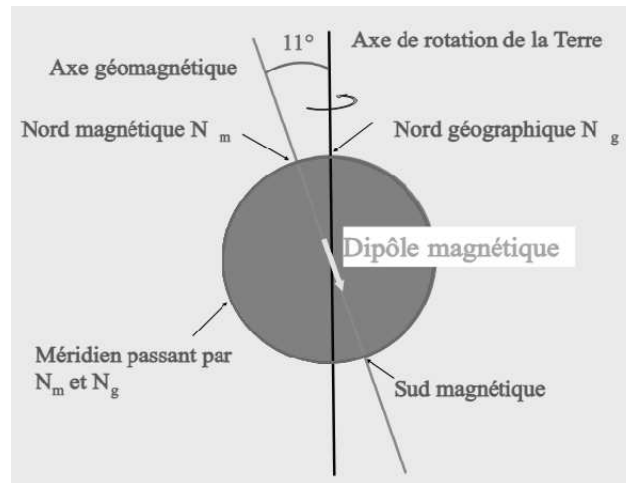


Figure . II-I.23

Le Nord magnétique fluctue à la surface du globe et les géologues ont établi la preuve de l'inversion aléatoire des pôles magnétiques, à raison de plusieurs basculements par million d'année, le Nord devenant Sud et vice-versa.

Chapitre 2

Forces et énergie magnétique

2.1 Force de Lorentz

Une charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} subit une force magnétique d'expression

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (2.1)$$

Force de Lorentz.

Remarque

La force de Lorentz est à tout instant perpendiculaire à la trajectoire de la particule chargée. Son travail est nul, elle ne contribue pas à la variation de l'énergie cinétique de la particule "théorème de l'énergie cinétique". Il n'y a pas d'énergie potentielle associée à cette force.

En pratique, on utilise un champ magnétique pour dévier une particule chargée sans changer la valeur de sa vitesse. Le spectrographe de masse et le cyclotron sont des applications de la force de Lorentz.

2.2 La Force de Laplace : actions du champ magnétique sur un circuit fermé

Lorsqu'un conducteur électrique est parcouru par un courant, un grand nombre de charge est en mouvement.

Considérons un milieu comportant α espèces différentes de particules chargées, chaque espèce ayant une densité volumique ρ_α , et une vitesse v_α . A ces divers porteurs de charges est associé une densité locale de courant

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (2.2)$$

Chaque particule étant soumise à la force de Lorentz, la force totale qui s'exerce sur un élément de volume $d\tau$ comportant $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} d\tau$ particules est

$$d\vec{F}_L = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \wedge \vec{B} \quad (2.3)$$

$$= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} d\tau \vec{v}_{\alpha} \wedge \vec{B} \quad (2.4)$$

$$= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \wedge \vec{B} d\tau \quad (2.5)$$

$$= \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un conducteur filiforme $d\tau = d\vec{s} \cdot d\vec{l}$, $d\vec{l}$ est un élément de longueur infinitésimal orienté dans la direction de \vec{j} et $d\vec{s}$ une surface infinitésimale.

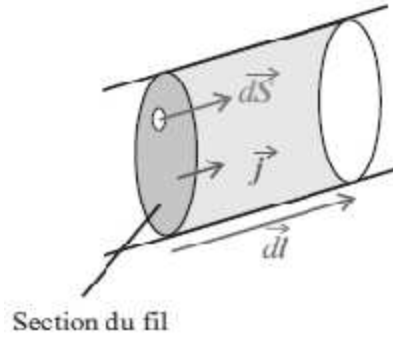


Figure . II-II.1

Pour un circuit filiforme (très mince donc où l'on peut considérer que le champ est constant), la force qui s'exerce sur l'élément de longueur $d\vec{l}$ s'écrit

$$\begin{aligned} d\vec{F}_L &= \iint_S (\vec{j} \wedge \vec{B}) ds dl \quad (2.7) \\ &= \iint_S (\vec{j} ds) dl \wedge \vec{B} \\ &= \iint_S (\vec{j} d\vec{s}) d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= I d\vec{l} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

La force totale qui s'exerce sur l'ensemble du conducteur fermé, est donné par

$$\vec{F}_L = I \oint d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (2.8)$$

Force de Laplace.

Remarques :

1. Cette force s'applique sur un circuit un solide. On ne considèrera que des circuits pour lesquels on pourra appliquer le principe fondamental de la mécanique, en assimilant ceux-ci à des points matériels (leur centre d'inertie). La force s'applique au milieu de chaque portion $d\vec{l}$.
2. Ayant été établie à partir d'équations valables uniquement en régime permanent, cette expression n'est vraie que pour un courant permanent. Il faut en particulier faire attention à intégrer la force sur le circuit fermé.
3. Pour des circuits fermés de forme complexe, il devient difficile de calculer la force magnétique à partir de l'expression de la force de Laplace. Dans ce cas, il vaut mieux utiliser une méthode énergétique.
4. A partir de la force de Lorentz, qui est une force microscopique agissant sur des particules individuelles dont le travail est nul, nous avons obtenu une force macroscopique agissant sur un solide. Cette force est capable de déplacer le solide et donc d'exercer un travail non nul.
5. Bien que la force de Lorentz ne satisfasse pas le principe d'action et de Réaction, la force de Laplace entre deux circuits, elle, le satisfait.

2.2.1 Définition légale de l'ampère

Considérons deux fils infinis parcourus par des courants I_1 et I_2 , situés à une distance d l'un de l'autre.

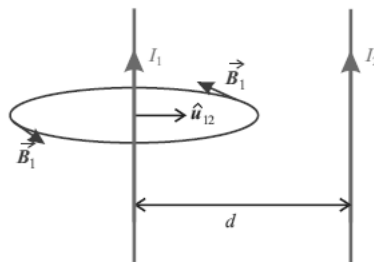


Figure .II-II.2

Les forces par unité de longueur d'interaction entre les deux conducteurs

s'expriment

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1}{dl_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \vec{u}_{12} \quad (2.9)$$

$$= -\frac{I_1 d\vec{l}_1 \wedge \vec{B}_2}{dl_1} = -d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (2.10)$$

\vec{B}_1 et \vec{B}_2 sont les champs magnétiques créés par les fils 1 et 2 respectivement. Cette force est attractive si les deux courants sont dans le même sens, répulsive sinon.

L'Ampère est l'intensité de courant passant dans deux fils parallèles, situés à 1 mètre l'un de l'autre, et produisant une attraction réciproque de $2 \cdot 10^{-7}$ Newtons par unité de longueur de fil.

2.3 Moment de la force magnétique

Le circuit électrique est un solide, on utilise le formalisme de la mécanique du solide.

Soit P un point quelconque d'un circuit électrique de centre d'inertie O, parcouru par un courant permanent I et plongé dans un champ magnétique \vec{B} . Chaque élément $d\vec{l}$ du circuit autour de P, subit une force de Laplace $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$. Le moment par rapport à O de la force de Laplace agissant sur l'ensemble du circuit est donné

$$\vec{\Gamma} = \oint_{\text{circuit}} \vec{OP} \wedge d\vec{F} \quad (2.11)$$

2.3.1 Action d'un champ d'induction magnétique extérieur sur un dipôle magnétique

Force exercée par un champ uniforme sur une boucle de courant filiforme :

Considérons un circuit fermé indéformable C parcouru par un courant constant I et plongé dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} .

Chaque élément de courant $I d\vec{l}$ est soumis à une force $d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$

La résultante de ces forces a donc pour expression

$$\vec{F} = \oint_C d\vec{F} = \oint_C (I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}) \quad (2.12)$$

$$= -I \vec{B} \wedge \oint_C d\vec{l} = \vec{0} \quad (2.13)$$

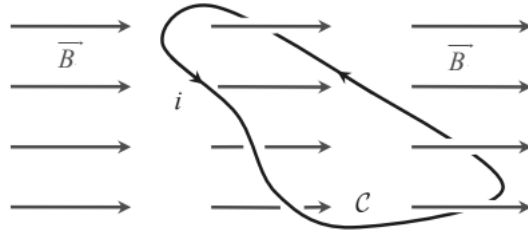


Figure . II-II.3

L'intégrale $\oint_C d\vec{l}$ est nulle quel que soit le circuit fermé C.

La résultante des forces de Laplace agissant sur un circuit fermé indéformable est nulle, l'action résultante est donc un couple, entièrement caractérisé par son moment.

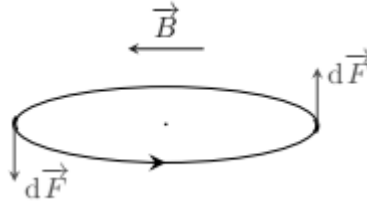


Figure . II-II.4

Moment subi par un dipôle plongé dans un champ :

Les actions mécaniques d'un champ magnétique uniforme \vec{B} sur un dipôle magnétique se réduisent à un couple dont le moment est indépendant du point de l'espace où il est exprimé et a pour expression

$$\vec{\Gamma}(\vec{F}) = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (2.14)$$

\vec{m} est le moment magnétique du dipôle.

Ce moment tend à orienter le dipolaire magnétique dans la direction et le sens du champ magnétique extérieur appliqué.

2.4 Travail de la force de Laplace

Soit un circuit filiforme (C) parcouru par un courant d'intensité I placé dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} . Un élément de longueur $d\vec{l}$ du circuit est soumis à une force $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$.

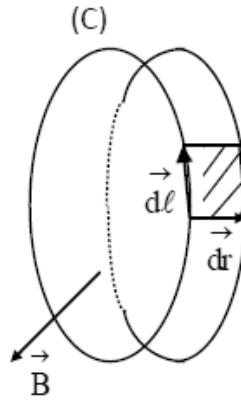


Figure . II-II.5

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ du circuit, la force de Laplace à laquelle le circuit est soumis effectue un travail :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.15)$$

$$= I \oint_{(c)} (d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (2.16)$$

$$= I \oint_{(c)} (d\vec{r} \wedge d\vec{l}) \cdot \vec{B} \quad (2.17)$$

$$= I \cdot \vec{B} \cdot \oint_{(c)} (d\vec{r} \wedge d\vec{l}) = Id\Phi_c = Id\Phi \quad (2.18)$$

$d\Phi_c$ flux élémentaire coupé par l'élément du circuit lors de son déplacement.
 $d\Phi$ désigne la variation du flux l'or du déplacement $d\vec{r}$ du circuit.

2.5 Théorème de Maxwell

Pour un déplacement fini du circuit dont les positions initiale et finale sont traversées par les flux Φ_1 et Φ_2 , le travail de la force magnétique est donné par :

$$W = I(\Phi_2 - \Phi_1) \quad (2.19)$$

Notons que le circuit étant indéformable, le travail des forces de Laplace d'origine interne est nul. On peut énoncer :

Le travail des forces de Laplace appliquées à un circuit filiforme, rigide, parcouru par un courant permanent et se déplaçant dans un champ magnétique constant, est égal au produit de l'intensité du

courant par la variation du flux magnétique à travers le circuit. Ce résultat porte le nom de théorème de Maxwell. Il permet de définir une énergie d'interaction pour un système donné.

Règle du flux maximal

Sous l'action des seules forces magnétiques, un circuit parcouru par un courant va se déplacer de telle manière que le travail $W = I(\Phi_2 - \Phi_1)$ des forces magnétiques soit positif, donc $\Phi_2 > \Phi_1$.

Le circuit se déplace donc de façon que le flux Φ de \vec{B} le traversant soit maximum : **règle du flux maximum.**

2.5.1 Énergie potentielle d'interaction magnétique

Un circuit électrique parcouru par un courant permanent I et placé dans un champ magnétique statique est soumis à la force de Laplace, il est donc susceptible de se déplacer. Le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de Maxwell permettent d'écrire

$$\Delta E_c = W = I \Delta \Phi \quad (2.20)$$

L' énergie mécanique du circuit étant

$$E = E_C + W_p \quad (2.21)$$

ce qui donne

$$dW_p = -dW = -dE_c \quad (2.22)$$

Principe de conservation de l'énergie.

L'énergie potentielle magnétique W_p d'un circuit parcouru par un courant permanent I et placé dans une champ magnétique extérieur \vec{B} est donc

$$W_p = -I\Phi + Constante \quad (2.23)$$

La valeur de la constante, comme pour toute énergie potentielle d'interaction, est souvent choisie arbitrairement nulle à l'infini.

Énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique avec un champ d'induction magnétique :

Par analogie avec le comportement d'un dipôle électrique dans un champ électrique, l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle magnétique de moment magnétique \vec{m} avec un champ magnétique dans le vide est donnée :

$$W_P = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (2.24)$$

En présence d'un champ magnétique, le dipôle sera dans une position stable lorsque son énergie d'interaction avec le champ sera minimale, c'est-à-dire lorsque le moment dipolaire et le champ sont colinéaires et orientés dans le même sens.

2.6 Force et couple magnétiques agissant sur un circuit

Pour une translation ou une rotation élémentaire du circuit, donc une évolution sans déformation; le travail des forces de Laplace intérieures est nul et le travail des forces de Laplace extérieures est égal à la diminution d'énergie potentielle. Soit à I et \vec{B} constant :

$$dW_p = -dW = -Id\Phi \quad (2.25)$$

2.6.1 Cas d'une translation pure

Pour un déplacement $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW_p = -g \vec{r} \cdot d\vec{r} E_P \quad (2.26)$$

$\forall d\vec{r}$, d'où

$$\vec{F} = -g \vec{r} \cdot d\vec{r} E_P = -g \vec{r} \cdot d(-I\phi) = I g \vec{r} \cdot d\Phi \quad (2.27)$$

Remarques :

1. La force totale a tendance à déplacer le circuit vers les régions où le flux sera maximal;
2. L'expression de la force est valable uniquement pour des courants permanents. Il est à noter qu'elle s'applique néanmoins pour des circuits déformés et donc pour lesquels il y a une modification du flux sans réel déplacement du circuit.

2.6.2 Cas d'un mouvement de rotation pure du circuit

On considère le cas général où le circuit effectue des rotations d'angles infinitésimaux $d\alpha_i$ autour de trois axes δ_i , passant par le centre d'inertie O du circuit et engendrés respectivement par les vecteurs unitaires \vec{u}_i .

Soit P un point du circuit, $\vec{r} = \vec{OP} = r\vec{u}$

$$\vec{v}(P) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (2.28)$$

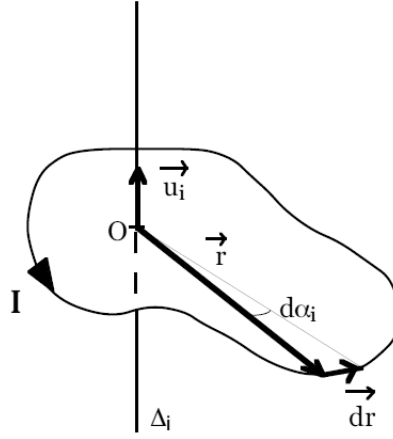


Figure . II-II.6

le premier terme correspond à une translation pure et le second à une rotation pure décrite par le vecteur instantané de rotation

$$\vec{\Omega}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i=1}^3 \frac{d\alpha_i}{dt} \vec{u}_i \quad (2.29)$$

L'expression générale du moment de la force magnétique par rapport à O est $\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \vec{u}_i$.

Le travail de la force de Laplace lors d'une rotation pure ($r=\text{cte}$) s'écrit :

$$dW = \oint_{\text{circuit}} d\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.30)$$

$$= \oint_C d\vec{F} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{r} \right) \quad (2.31)$$

$$= \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \left(\oint_r \vec{r} \wedge d\vec{F} \right) \quad (2.32)$$

$$= \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \cdot \vec{\Gamma} \quad (2.33)$$

$$= \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \Gamma_i \quad (2.34)$$

$$= I d\Phi \quad (2.35)$$

$$= \sum_{i=1}^3 I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} d\alpha_i \quad (2.36)$$

Soit

$$\Gamma_i = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} \quad (2.37)$$

α_i : angle de rotation autour de Δ suivant i.

le moment de la force magnétique par rapport à un axe Δ passant par le centre d'inertie O du circuit, dépend de la variation de flux lors de la rotation du circuit autour de cet axe.

2.6.3 Cas du dipôle

On considère un dipôle de moment magnétique dipolaire $\vec{m} = IS.\vec{n}$. Dans l'hypothèse où le champ magnétique extérieur \vec{B} est constant à l'échelle du dipôle le flux est donné par $\Phi = \vec{B}.S\vec{n}$. La force magnétique totale s'écrit

$$\vec{F} = I.\vec{grad}\Phi = \vec{grad}(IS\vec{n}.\vec{B}) \quad (2.38)$$

d'où

$$\vec{F} = \vec{grad}(\vec{m}.\vec{B}) \quad (2.39)$$

Le moment de la force magnétique (couple magnétique) s'écrit

$$\Gamma_i = I \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = I \frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\vec{B}.\vec{n}.S) = \vec{B}.\left(\frac{\partial(I.S.\vec{n})}{\partial \alpha_i}\right) = \vec{B}.\frac{\partial \vec{m}}{\partial \alpha_i} \quad (2.40)$$

Or, lors d'une rotation, le moment magnétique dipolaire varie de la manière suivante

$$d\vec{m} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{m}}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = \sum_{i=1}^3 d\alpha_i \vec{u}_i \wedge \vec{m} \quad (2.41)$$

Ce qui donne

$$\Gamma_i = \vec{B}.\left(\vec{u}_i \wedge \vec{m}\right) = (\vec{m} \wedge \vec{B}).\vec{u}_i \quad (2.42)$$

Soit

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (2.43)$$

Chapitre 3

L'induction électromagnétique

L'induction électromagnétique (ou induction magnétique) est le phénomène physique qui à l'origine de l'apparition d'un courant dans un circuit mobile dans un champ magnétique statique (ou immobile dans un champ magnétique variable) : ***courant induit***.

Ce phénomène découvert en 1831 simultanément par Faraday et Henry est à l'origine de l'invention des générateurs à courants continus et à courants alternatifs, et par conséquent, de la production de l'énergie électrique.

3.1 Introduction

3.1.1 Mise en évidence des phénomènes d'induction

Le phénomène d'induction magnétique peut être mis en évidence à partir de simples expériences physiques :

1. Expérience 1

Soit une bobine, formée par un fil conducteur déformable, placée dans un champ magnétique constant et reliée à un galvanomètre à zéro central.

Si on déforme la bobine, un courant dont la valeur dépend de la vitesse de déformation circule dans le circuit. Ce courant s'annule dès que cesse la déformation.

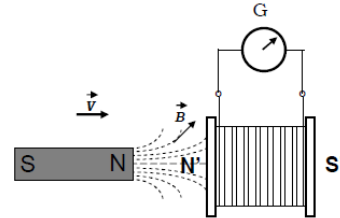
Si on redonne au fil sa forme initiale (déformation en sens inverse), durant l'opération un courant circule dans le circuit en sens inverse.



2. Expérience 2

Une bobine indéformable est reliée à un galvanomètre. Si on approche un aimant du circuit, l'aiguille du galvanomètre dévie et met en évidence la circulation d'un courant dans le circuit.

Dès que le mouvement cesse, le courant induit s'annule, mais si on éloigne l'aimant du circuit un courant circule dans le sens inverse.



3.1.2 Interprétation

Le point commun aux expériences précédentes est la variation au cours du temps du flux magnétique traversant le deuxième circuit.

Cette variation se fait :

1. Par variation de la surface du circuit comme dans l'expérience 1,
2. Par variation du champ magnétique \vec{B} traversant le circuit, expérience 2.

Le module du champ magnétique diminue lorsque l'aimant s'éloigne du circuit et augmente lorsque l'aimant se rapproche du circuit.

Le courant traversant le deuxième circuit est appelé *courant induit*.

L'apparition d'un courant induit, indiquant l'existence d'une force électromotrice (f.é.m) appelée f.é.m induite, est le phénomène d'**induction électromagnétique**.

3.2 Loi de Faraday- loi de Lenz

3.2.1 Loi de Faraday

Quand le flux d'un champ magnétique à travers un circuit conducteur fermé varie dans le temps, il apparaît à chaque instant, dans ce circuit, une f.é.m d'induction :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.1)$$

1. $\frac{d\Phi}{dt}$ mesure la vitesse de variation du flux inducteur ;
2. Plus le flux inducteur varie vite, plus la f.é.m. induite sera importante ;
3. Si on change la résistance R du circuit, le courant i induit varie de telle sorte que $e=Ri$ reste constant.

3.2.2 Loi de Lenz

Énoncé :

L'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

remarque : La loi de Lenz très utile pour prévoir le sens des courants induits.

Exemple :

Si on approche un circuit fermé d'un aimant, le flux augmente et donc la fém induite est négative. Le courant induit sera alors négatif et produira lui-même un champ magnétique induit opposé à celui de l'aimant.

Deux conséquences :

1. L'augmentation du flux à travers le circuit est amoindrie ;
2. Il apparaît une force de Laplace $\vec{F} = I \vec{r} \wedge d\vec{\Phi}$ négative, s'opposant aux rapprochement de l'aimant.

3.2.3 Sens du courant induit

Le courant induit circule dans un sens tel qu'il tente de s'opposer à la cause qui lui donne naissance, s'oppose à la variation du flux inducteur qui lui donne naissance.

La détermination du sens du courant induit peut se faire de la façon suivante :

1. On choisit arbitrairement un sens de circulation le long du circuit ;
2. Ce sens définit la normale au circuit ;
3. Le signe du flux est ainsi déterminé ;
4. La loi de Faraday, donne la valeur et le signe de la fém ;
5. Le courant est obtenu à l'aide de la loi d'Ohm

3.2.4 Champ électromoteur

Considérons un circuit filiforme, en mouvement avec une vitesse \vec{V} , soumis à un champ magnétique variable. Le mouvement du circuit et la variation du champ magnétique dans le temps conduisent à l'apparition d'un courant induit et par conséquent d'un champ électrique induit, *champ électromoteur induit* d'expression

$$\vec{E}_{mi} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (3.2)$$

Les deux termes de \vec{E}_{mi} rendent compte du phénomène d'induction :

-
1. $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ décrit le cas d'un conducteur fixe dans un champ variable : **cas de Neumann** ;
 2. $\vec{V} \wedge \vec{B}$ celui d'un conducteur mobile à la vitesse \vec{V} dans un champ permanent : **cas de Lorentz**.

Ces deux cas se complètent et sont en fait deux aspects du même phénomène et coexistent dans le cas général du déplacement d'un conducteur dans un champ variable.

La force électromotrice induite est liée au champ électromoteur par

$$e = \oint_C \vec{E}_{mi} d\vec{l} = \oint_C \left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right] d\vec{l} \quad (3.3)$$

Le premier terme décrit la circulation non nulle d'un champ électromoteur, associé à la variation temporelle du champ magnétique, tandis que le deuxième terme décrit la présence d'un flux coupé dû au déplacement du circuit et/ou à sa déformation.

Remarque :

1. Si le circuit est mobile dans un champ permanent :

$$\vec{E}_{mi} = \vec{V} \wedge \vec{B}, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0} \quad (3.4)$$

2. Si le circuit est fixe, dans un champ variable :

$$\vec{E}_{mi} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{V} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad (3.5)$$

3.3 Induction mutuelle, auto-induction

3.3.1 Induction mutuelle

Soient deux circuits fermés, orientés, traversés par des courants I_1 et I_2 .

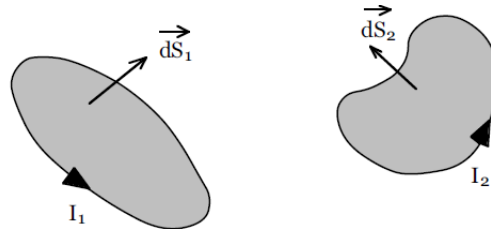


Figure . II-III.1

Le premier circuit crée un champ magnétique \vec{B}_1 de flux Φ_{12} à travers le deuxième circuit

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 \quad (3.6)$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l} \wedge P\vec{M}}{||P\vec{M}||^3} d\vec{S}_2 \right] I_1 \quad (3.7)$$

P est un point quelconque du circuit C_1 , et M un point quelconque de la surface délimitée par C_2 , à travers laquelle le flux est calculé.

De même, le deuxième circuit crée un champ magnétique \vec{B}_2 de flux Φ_{21} à travers le premier circuit.

$$\Phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 d\vec{S}_1 \quad (3.8)$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l} \wedge P\vec{M}}{||P\vec{M}||^3} d\vec{S}_1 \right] I_2 \quad (3.9)$$

P est un point du circuit C_2 et M un point de la surface délimitée par C_1 , à travers laquelle le flux est calculé.

Les termes entre crochets dépendent de la distance entre les deux circuits et de facteurs uniquement géométriques liés à la forme de chaque circuit. On pose

$$\begin{cases} \Phi_{12} = M_{12} I_1 \\ \Phi_{21} = M_{21} I_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

M_{12} et M_{21} sont appelés coefficients d'induction mutuelle ou inductance mutuelle.

3.3.2 Auto induction

Pour un circuit isolé, parcouru par un courant I, le courant I engendre un champ magnétique dans tout l'espace et il existe donc un flux de ce champ à travers le circuit lui-même

$$\Phi = \iint_S \vec{B} d\vec{S} \quad (3.11)$$

$$= \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \oint_C \frac{d\vec{l} \wedge P\vec{M}}{||P\vec{M}||^3} d\vec{S} \right] I \quad (3.12)$$

On peut donc écrire

$$\Phi = LI \quad (3.13)$$

L est le coefficient d'auto-induction ou auto-inductance (ou self), exprimé en Henry. Il ne dépend que des propriétés géométriques du circuit.

3.3.3 Remarques :

- 1 Le coefficient d'auto-induction est strictement positif ($L > 0$) ;
- 2 Les inductances mutuelles peuvent être positives ou négatives (ou éventuellement négligeables si les circuits sont éloignés), leur signe dépend de l'orientation des circuits ;
- 3 $M_{12} = M_{21} = M$

Considérons deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) parcourus respectivement par des courants I_1 et I_2

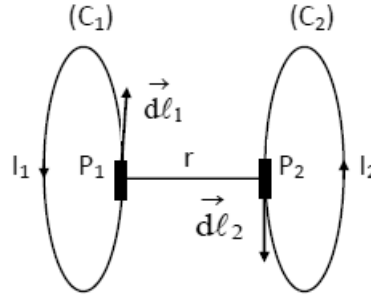


Figure . II-III.2

Le flux du champ magnétique \vec{B}_2 créé par (C_2) à travers la surface S_1 s'appuyant sur (C_1) est égal à :

$$\Phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 d\vec{S}_1 \quad (3.14)$$

Le flux Φ_{12} de \vec{B}_1 à travers (C_2) est égal à :

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 \quad (3.15)$$

On introduisant le potentiel vecteur \vec{A}_2 dont dérive \vec{B}_2 on a :

$$\Phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 d\vec{S}_1 = \iint_{S_1} r \vec{\otimes} \vec{A}_2 d\vec{S}_1 = \oint_{C_1} \vec{A}_2 d\vec{l}_1 \quad (3.16)$$

avec

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2}{r} \quad (3.17)$$

soit

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} = M_{12} I_2 \quad (3.18)$$

On en déduit :

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} = M_{12} I_1 \quad (3.19)$$

De la symétrie de l'expression trouvée, il résulte que : $M_{12} = M_{21} = M$

Soit :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} = M_{12} I_1 \quad (3.20)$$

L'expression ci-dessus est dite formule de Neumann

3.4 Régime variable

3.4.1 Régime quasi-statique

Les lois magnétostatiques sont établies pour un courant permanent, c.a.d le même dans tout le circuit, cependant un temps de l'ordre de $\frac{l}{c}$, l taille du circuit et c la vitesse de la lumière dans le vide, est nécessaire pour que le régime permanent s'établisse.

Les relations de la magnétostatique peuvent donc être utilisés dans le cas d'un régime variable de période T si $T \gg \frac{l}{c}$, régime quasi-statique .

3.4.2 Forces électromotrices f.é.m induites

Dans le cas d'un circuit rigide placée dans champ magnétique variable, la force électromotrice est donnée par

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (3.21)$$

Pour deux circuits couplés, l'expression des flux à travers les circuits s'écrit

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = L_2 I_2 + M I_1 \end{cases} \quad (3.22)$$

En régime variable la fém induite dans chaque circuit

$$\begin{cases} e_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{cases} \quad (3.23)$$

3.4.3 Énergie magnétique

Un circuit électrique parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} acquiert une énergie magnétique W .

Le courant I étant fourni par un générateur, $P = eI$ est donc la puissance fournie pendant un certain temps. Le circuit (décrit par une self L) a reçu une puissance

$$P_m = -eI = LI \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{LI^2}{2} \right] \quad (3.24)$$

L'énergie emmagasinée pendant un temps t est donnée par

$$W = \int_0^t p_m dt = \frac{1}{2} LI^2 \quad (3.25)$$

Dans le cas de deux circuits en interaction, l'énergie magnétique totale emmagasinée est :

$$W = - \int_0^t e_1 I_1 dt - \int_0^t e_2 I_2 dt \quad (3.26)$$

$$= \int_0^t \left[L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + M I_1 \frac{dI_2}{dt} \right] dt + \int_0^t \left[L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + M I_2 \frac{dI_1}{dt} \right] dt \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{2} [L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2] + M I_1 I_2 \quad (3.28)$$

$W_m \neq W_1 + W_2$ le troisième terme, correspondant à l'interaction entre les deux circuits.

3.5 Applications pratiques des phénomènes d'induction

3.5.1 Générateurs électromécaniques

L'application la plus importante de la loi de l'induction pour des systèmes de conducteurs en mouvement est la conversion directe de l'énergie mécanique

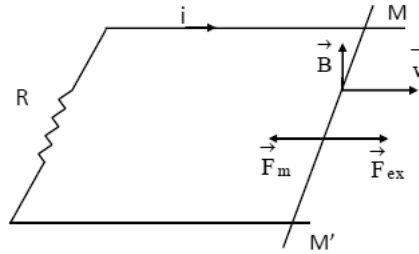


Figure . II-III.3

en énergie électrique.

Considérons le dispositif simple suivant :

Si on déplace le segment MM' de longueur l de gauche à droite à la vitesse uniforme \vec{v} , une force électromotrice est induite dans le circuit fermé MM'RM

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv \quad (3.29)$$

Un courant induit circulant dans le sens MM', s'oppose au déplacement imposé, est généré

$$i = -\frac{e}{R} = \frac{Blv}{R} \quad (3.30)$$

Le dispositif ci-dessus permet la conversion énergie mécanique en énergie électrique. C'est le principe des générateurs électromagnétiques.

3.5.2 Moteurs

Considérons le dispositif ci dessous :

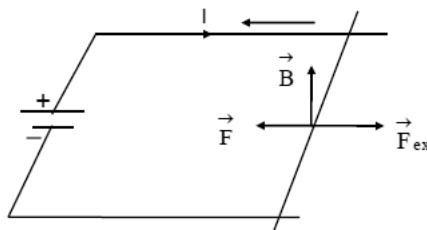


Figure . II-III.4

Une pile fait circuler un courant dans le circuit et la force de Laplace qui s'exerce sur la partie mobile du rail provoque son mouvement.

La pile fournit de l'énergie électrique qui se transforme en énergie mécanique : c'est le principe des moteurs électromagnétiques.

3.5.3 Courants de Foucault

Une masse métallique placée dans un champ magnétique variable est le siège d'un courant induit de densité $\vec{j} = \gamma \vec{E}_m$, $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est le champ électromoteur et γ est la conductivité du matériau.

Ces courants induits sont appelés courants de Foucault, leurs effets sont de deux natures :

- **Effets mécaniques :**

- 1 Si une pièce métallique se déplace dans un champ magnétique de manière à couper les lignes de champ, les courants induits tendent à freiner cette pièce métallique.
- 2 En revanche, si un aimant tourne devant un disque conducteur, celui-ci est mis en mouvement dans le sens de rotation de l'aimant (principe des moteurs asynchrones).

- **Effets calorifiques :** Les courants induits circulant dans la masse métallique vont provoquer un effet Joule, la masse métallique va s'échauffer et il y aura ainsi perte d'énergie sous forme calorifique. On réduit ces pertes en modifiant la topographie des lignes de courant.

Les applications pratiques des courants de Foucault sont nombreuses citons :

- Les ralentisseurs de camions et de Wagons.
- Les fours à induction permettant d'échauffer une masse métallique, à l'aide d'un champ magnétique variable qui induit des courants de Foucault ; la masse est chauffée mais le support isolant ne l'est pas.

Chapitre 4

Équations de Maxwell et Ondes Électromagnétiques dans le vide

4.1 Équations de Maxwell

4.1.1 Introduction

L'électromagnétisme repose sur cinq équations, les quatre équations de Maxwell et l'équation de la force de Laplace.

Les équations de Maxwell fascinent par leur symbolisme abstrait, par la multiplicité des phénomènes qu'elles expliquent et par leur stabilité à travers l'histoire souvent mouvementée de la physique post-maxwellienne. Ces équations sont généralement citées comme un acquis définitif des sciences.

4.1.2 Énoncé des équations de Maxwell

Sous leur forme locale les équations de Maxwell s'expriment ainsi

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equation de Maxwell - Gauss :} & \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{Equation de Maxwell - Ampere :} & \vec{r} \operatorname{ot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \text{Equation du flux magnetique :} & \operatorname{div} \vec{B} = 0; \\ \text{Equation de Maxwell - Faraday :} & \vec{r} \operatorname{ot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

μ_0 et ϵ_0 , sont respectivement la perméabilité et la permittivité du vide.

Dans le SI $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$ et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{Fm}^{-1}$;

Remarque

- 1 Les équations de Maxwell sont linéaires en $\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{j}$;
2. Les deux premières équations expriment le lien entre le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) et sa source (ρ, \vec{j}) .
Les deux dernières équations expriment des propriétés intrinsèques du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) ;
3. Les équations de Maxwell forment un système d'équation couplées vis à vis des champs \vec{E} et \vec{B} , grandeurs indissociables, champ électromagnétiques. Ce couplage disparaît en régime stationnaire ;
4. Conservation de charge.

$$\begin{aligned}\vec{r} \otimes \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \implies \text{div} \vec{r} \otimes \vec{B} &= \mu_0 \text{div} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \implies 0 &= \mu_0 \text{div} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} \\ \implies 0 &= \text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial (\frac{\rho}{\epsilon_0})}{\partial t} \\ \text{Soit } \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Les équations de Maxwell sont valables dans tous les milieux, dans les milieux matériels des charges et des courants dont il faut tenir compte apparaissent, les expressions ci dessus des équations de Maxwell doivent être reformuler.

4.1.3 Transformation galiléenne du champ électromagnétique

Soit (R) un référentiel galiléen et (R') un référentiel galiléen en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v}_e par rapport à (R).

Une charge q en mouvement à la vitesse \vec{v} par rapport à (R) dans une région où règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est soumise à la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Soit (\vec{E}', \vec{B}') le champ électromagnétique dans (R'). On mécanique classique les forces sont invariantes par changement de référentiel galiléen, donc

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (4.2)$$

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_e$, est la vitesse de q dans (R').

D'où

$$q(\vec{E}' + (\vec{v} - \vec{v}_e) \wedge \vec{B}') = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (4.3)$$

Soit

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' - \vec{v}_e \wedge \vec{B}' + \vec{v} \wedge \vec{B}' \quad (4.4)$$

L'équation ci-dessus doit être vérifiée quelque soit \vec{v} d'où les formules de transformation galiléenne du champ électromagnétique :

$$\begin{cases} \vec{B}' &= \vec{B} \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

4.1.4 Signification physique des équations de Maxwell

Chacune des équations de Maxwell décrit un phénomène physique spécifique.

Équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.5)$$

Sous Forme intégrale, on peut écrire

$$\iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{s} = \iiint_{\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau \quad (4.6)$$

Soit

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4.7)$$

Théorème de Gauss, elle l'exprime le fait que les charges sont à l'origine du champ électrostatique.

Équation du flux magnétique

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (4.8)$$

l'intégration de cette équation permet d'écrire

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{s} = 0 \quad (4.9)$$

Cette équation exprime l'absence de charge magnétique.

Équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.10)$$

par intégration on a

$$\iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (4.11)$$

soit

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (4.12)$$

Lorsque le champ électrique est stationnaire, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$, on retrouve le théorème d'Ampère de la magnétostatique. Dans le cas générale $\mu_0 \epsilon_0 \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$ est appelé courant déplacement.

Cette équation exprime la manière dont un courant électrique est à l'origine d'un champ magnétique. Elle montre aussi qu'un champ électrique dépendant du temps crée aussi un champ magnétique.

Équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.13)$$

par intégration

$$\iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (4.14)$$

Soit

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.15)$$

Cette équation décrit le phénomène d'induction : un champ magnétique variable est à l'origine d'un champ électrique, nommé champ électromoteur.

4.2 Ondes électromagnétique dans le vide

4.2.1 Définition

Une onde électromagnétique [OEM] est le résultat de la vibration couplée d'un champ électrique et d'un champ magnétique variables dans le temps.

Une onde électromagnétique est susceptible de se propager dans l'air comme dans le vide et de transporter des informations.

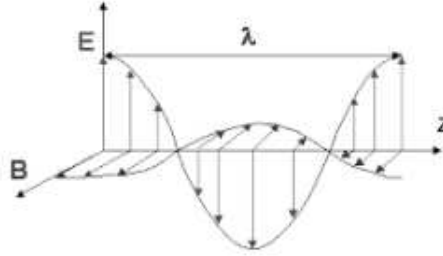


Figure . II-IV.1

4.2.2 Existence des ondes électromagnétiques

L'équation de Maxwell-Faraday ($\vec{r}\text{ot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$) montre qu'en absence de charge $\rho = 0$, l'existence d'un champ magnétique dépendant du temps, entraîne celle d'un champ électrique.

L'équation Maxwell-Ampère ($\vec{r}\text{ot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$) montre qu'en absence de courant $\vec{j} = \vec{0}$, l'existence d'un \vec{E} dépendant du temps entraîne celle d'un champ magnétique.

Le champ électromagnétique acquiert une autonomie par rapport aux charges et courant. Cependant il est nécessaire d'avoir initialement des charges et courant pour créer une onde électromagnétique, mais dès que celle ci est émise son existence ne dépend plus des charges et des courants.

4.2.3 Équation de propagation

On considère un milieu matériel où règnent une densité de charge $\rho(\vec{r}, t)$ et une densité de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

Champ électrique

$$\vec{r}\text{ot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \implies \vec{r}\text{ot}(\vec{r}\text{ot}\vec{E}) = \vec{r}\text{ot}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \quad (4.16)$$

Soit

$$\vec{r}\text{ot}(\vec{r}\text{ot}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial(\vec{r}\text{ot}\vec{B})}{\partial t} \quad (4.17)$$

D'où

$$\vec{grad} \frac{\rho}{\epsilon_0} - \vec{\Delta} \vec{E} = - \frac{\partial \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}{\partial t} \quad (4.18)$$

Donc

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (4.19)$$

On définit l'opérateur d'Alembertien

$$\vec{\square} = \vec{\Delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.20)$$

Le champ électrique obéit donc à l'équation

$$\vec{\square} \vec{E} = \vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (4.21)$$

Champ magnétique

$$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.22)$$

D'où

$$\vec{rot} \left(\vec{rot} \vec{B} \right) = \vec{rot} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4.23)$$

Soit

$$\vec{grad} \vec{div} \vec{B} - \vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \vec{rot} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \left(\vec{rot} \vec{E} \right)}{\partial t} \quad (4.24)$$

Donc

$$-\vec{\Delta} \vec{B} = \mu_0 \vec{rot} \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (4.25)$$

Le champ magnétique obéit donc à l'équation

$$\vec{\square} \vec{B} = \vec{\Delta} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{rot} \vec{j} \quad (4.26)$$

Conclusion

Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , est régit par l'équation d'Alembert

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases} \quad (4.27)$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.10^8 m s^{-1}$ vitesse de propagation de l'OEM dans le vide.

Conditions aux limites

A la traversé d'une surface portant une densité de charge σ et une densité de courant \vec{j}_s , séparant deux milieux (1) et (2), le champ électromagnétique présente une discontinuité finie.

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \end{cases}$$

\vec{n}_{12} est la normale à la surface de séparation.

4.2.4 Potentiel scalaire V et potentiel vecteur \vec{A}

Lien entre les potentiels et les champs

$$\begin{aligned} \vec{B} &= r \vec{\otimes} \vec{A} \\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= -g r \vec{a} dV \end{aligned}$$

Équations aux potentiels

Avec le choix de jauge de Lorentz ($div \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$) les potentiels scalaire V et vecteur \vec{A} sont liés aux charges et aux courants par

$$\begin{cases} \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

4.2.5 Notion d'OEM plane progressive

Une OEM est dite plane si les fronts d'onde "surfaces d'onde" sont des plans infinis, tous perpendiculaires à la direction de propagation désignée par le vecteur \vec{K} **vecteur d'onde**.

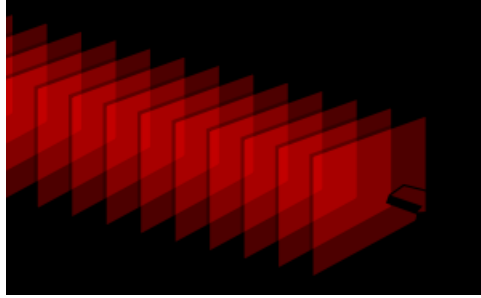


Figure . II-IV.2

Relation de dispersion d'une OEM plane En notation complexe, L'onde plane progressive sinusoïdale est représentée par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (4.28)$$

L'équation de propagation permet d'écrire :

$$\vec{\Delta}^2 \vec{E} = -K^2 \vec{E} \quad (4.29)$$

soit

$$\left(-K^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E} = \vec{0} \quad (4.30)$$

L'onde plane progressive sinusoïdale constitue une solution particulière de l'équation d'onde si la relation suivante, dite relation de dispersion, est satisfaite

$$K = \frac{\omega}{c} \quad (4.31)$$

Structure d'une OEM plane L'OEM plane progressive sinusoïdale doit satisfaire le théorème de Gauss.

En absence de charges électriques $\rho = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.32)$$

Pour une OEM plane progressive sinusoïdale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{K} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.33)$$

$$\vec{K} \cdot \vec{E} = 0, \implies \vec{K} \perp \vec{E}$$

Le champ électrique est dit transversal

L'OEM plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.34)$$

Soit

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{E}) = -i\vec{K} \wedge \vec{E} \quad (4.35)$$

D'où

$$-i\vec{K} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \quad (4.36)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u}_s \wedge \vec{E} \quad (4.37)$$

Le champ magnétique est perpendiculaire au plan (\vec{k}, \vec{E}) . Le champ magnétique d'une OEM plane progressive est donc transversal.

La direction du champ magnétique est telle que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct.

4.2.6 Polarisation d'une OEM

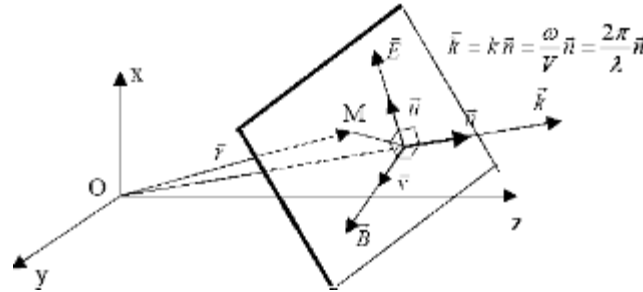


Figure . II-IV.3

L'étude de la polarisation d'une OEM consiste à suivre l'évolution du champ électrique dans un plan normal à sa direction de propagation.

La polarisation est alors défini comme le lieu géométrique qu'occupe l'extrémité du vecteur champ électrique au cours du temps.

Les composantes du champ électrique d'une OEM plane progressive monochromatique dans le vide se propageant dans la direction z peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \end{cases}$$

Pour étudier la polarisation du champ, on suit l'évolution de \vec{E} dans un plan d'onde. L'extrémité du vecteur E suit différentes courbes fermées selon la valeur du déphasage $\phi = \phi_x - \phi_y$.

Polarisation elliptique

Configuration générale, l'extrémité de \vec{E} dans un plan $z = \text{cte}$ décrit une ellipse. On parle de polarisation elliptique droite (gauche) si l'ellipse est décrite au cours du temps dans le sens des aiguilles d'une montre (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Polarisation circulaire

Polarisation elliptique correspondant au cas : $\phi = \phi_x - \phi_y = \pm \frac{\pi}{2}$ et $E_{x0} = E_{y0}$.

Polarisation rectiligne

Le champ électrique garde une direction constante.

4.2.7 Énergie électromagnétique d'une OEM

L'énergie électromagnétique d'une OEM est l'énergie du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) contenue dans un volume donné de l'espace, à un instant donné.

Postulat

Un volume $d\tau$ où règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) possède une énergie $dU_{em} = u_{em}d\tau$ avec $u_{em} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

$\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$: énergie électrostatique volumique associée au champ électrique.

$\frac{B^2}{2\mu_0}$: énergie volumique associée au champ magnétique.

L'énergie électromagnétique contenue dans un volume donné de l'espace s'obtient par intégration de la densité volumique u_{em} sur ce volume de l'espace, Pour un volume fini τ

$$U_{em} = \iiint u_{em} d\tau \quad (4.38)$$

Les composantes électriques et magnétiques de l'énergie électromagnétique sont indissociables, même si elles peuvent être traitées formellement de façon séparée.

Rayonnement

C'est la densité d'énergie u_{em} qui se propage avec \vec{E} et \vec{B} .

Vecteur de Poynting

L'énergie électromagnétique ne se conserve pas en général, la variation d'énergie électromagnétique dans une région donnée ne sera pas égale au flux d'énergie qui traverse la surface frontière de cette région. Une partie de l'énergie pourra être transférée aux charges et courants présents dans cette région de l'espace : ceci est exprimé quantitativement par le théorème de Poynting.

Le vecteur de Poynting exprime comment une onde électromagnétique peut transférer l'énergie électromagnétique en l'absence de courants, il est donné par l'expression

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{R} &= \text{div} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \vec{\text{rot}} \vec{B} \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \vec{\text{rot}} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \vec{\text{rot}} \vec{B} &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) \\ &= -\frac{\partial u_{em}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Soit

$$\text{div} \vec{R} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0 \quad (4.42)$$

La variation de la quantité d'énergie localisée dans un volume donné est égale à l'opposé du flux du vecteur de Poynting.