

# Table des matières

<b>1 Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>3</b>
1.1 Continuité d'une fonction réelle de plusieurs variables . . . . .	3
1.2 Dérivées partielles . . . . .	5
1.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur . . . . .	5
1.4 Théorème de Schwartz . . . . .	5
1.5 Dérivées partielles d'une fonction composée . . . . .	6
1.6 Dérivées directionnelles . . . . .	6
1.7 Vecteur gradient . . . . .	7
<b>2 Différentiabilité</b>	<b>9</b>
2.1 La différentielle d'une fonction composée . . . . .	11
2.2 Matrice Jacobienne . . . . .	13
2.3 Théorème des accroissements finis . . . . .	15
2.4 Inégalité des accroissements finis . . . . .	16
2.5 Plan tangent . . . . .	16
2.6 Applications du théorème des accroissements finis . . . . .	16
2.7 Une deuxième expression du théorème des accroissements finis . . . . .	17
<b>3 Différentielle d'ordre supérieur</b>	<b>19</b>
3.1 La différentielle seconde . . . . .	19
3.2 Différentielle d'ordre supérieur . . . . .	19
3.3 Théorème de Schwartz . . . . .	20
3.3.1 Généralisation du théorème de Schwartz . . . . .	20
3.4 Formules de Taylor . . . . .	22
3.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	22
3.4.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange . . . . .	23
3.4.3 Développement limité ou formule de Taylor-Young . . . . .	23
<b>4 Extrema et points critiques</b>	<b>25</b>
4.1 Point critique . . . . .	25
4.2 Extrema libres . . . . .	25
4.2.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles . . . . .	26
4.2.2 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles . . . . .	26
4.2.3 Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles . . . . .	27
4.3 Extrema liés . . . . .	28
4.3.1 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles . . . . .	28
4.3.2 Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles . . . . .	28
4.4 Convexité et minima . . . . .	28
<b>5 Intégrales généralisées</b>	<b>31</b>
5.1 Intégrales impropres de 1 <sup>re</sup> espèce . . . . .	31



# Chapitre 1

## Fonctions de plusieurs variables

**Définition 1.0.1.** Une fonction réelle de plusieurs variables est une fonction définie de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

### 1.1 Continuité d'une fonction réelle de plusieurs variables

**Définition 1.1.1.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $f$  est continue en  $a \in \mathbb{R}^n$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D_f; \quad \|x - a\| < \eta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon,$$

avec  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $f$ .

**Remarque 1.1.1.** 1. Pour  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,

$$x \longrightarrow a \quad \text{signifie que} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \longrightarrow a_1 \\ x_2 \longrightarrow a_2 \\ \vdots \\ x_n \longrightarrow a_n \end{array} \right.$$

2. Pour une fonction d'une seule variable, il ya un seul chemin à parcourir pour joindre  $x$  à  $a$ .

Mais pour une fonction de plusieurs variables, il ya une infinité de chemins à parcourir pour faire tendre  $x$  vers  $a$ .

3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \neq \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$ .

**Exemple 1.1.1.**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Proposition 1.1.1.** La fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_n \in D_f$  qui tend vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_n$  tend vers  $f(a)$ .

**Exemple 1.1.2.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pour  $U_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Proposition 1.1.2.** Si la fonction  $f$  a pour limite  $l$  en  $a$ , la restriction de  $f$  à toute courbe continue passant par  $a$ , admet la même limite  $l$ .

**Remarque 1.1.2.** Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en  $a$ , il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par  $a$  qui n'admet pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.

**Exemple 1.1.3.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(\gamma_1) : y = -x$ ,  $(\gamma_2) : y = x$   
vérifiant que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in (\gamma_1)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in (\gamma_2)}} f(x, y).$$

**Théorème 1.1.1.**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l \implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x, b) = l \\ \lim_{y \rightarrow b} f(a, y) = l \end{cases}$$

**Proposition 1.1.3.** Si deux suites de vecteurs  $(U_n)_n$  et  $(V_n)_n$  tendent vers  $a$  telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(V_n),$$

alors la limite absolue de  $f$  au point  $a$  n'existe pas.

**Exercice 1.1.1.** On désigne par  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Vérifier que la fonction  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, & \text{si } x \neq y \\ f'(x), & \text{si } x = y \end{cases}$$

n'a pas de limite au point  $(0, 0)$ .

**Solution :** pour la deuxième question on considère  $U_n = \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right)$  et  $V_n = \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$ , et vérifiant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(U_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} F(V_n)$ .

**Théorème 1.1.2.** Soit  $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ .

- a. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a \in U$ , alors  $f + g$  et  $fg$  sont continues en  $a$ .
- b. Si  $f$  est continue en  $a$  et  $f(a) \neq 0$ , alors  $\frac{1}{f}$  est continue en  $a$ .

## 1.2 Dérivées partielles

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overset{\circ}{U}$ .

La dérivée partielle première de  $f$  par rapport à sa  $i^{me}$  variable en  $a$  notée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h}.$$

**Exemple 1.2.1.** .Pour  $f(x, y) = x^2y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$ .

.Pour

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

**Remarque 1.2.1.** Pour une fonction de plusieurs variables l'existence des dérivées partielles en un point n'implique pas la continuité en ce point.

**Définition 1.2.1.** Une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite de classe  $\mathcal{C}^1(U)$  si toutes les fonctions dérivées partielles premières existent et sont continues sur  $U$ .

**Corollaire 1.2.1.** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1(U)$ , alors elle est continue sur  $U$ .

## 1.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Les dérivées partielles d'ordre 2 si elles existent sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

**Exemple 1.3.1.**  $f(x, y) = x^2y - y$ .

**Définition 1.3.1.** Si toutes les fonctions dérivées partielles premières  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^2$ .

**Généralisation :** la fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k(U)$  où  $k \in \mathbb{N}$  si et seulement si les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  existent et sont continues.

## 1.4 Théorème de Schwartz

Si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2(U)$ , alors

$$\forall i, j = 1, \dots, n; \quad i \neq j \quad \text{on a} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

## 1.5 Dérivées partielles d'une fonction composée

Si  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(U)$  et

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathbb{R} &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \vartheta(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)); \end{aligned}$$

est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors la fonction composée  $f \circ \vartheta : \mathbb{R} \xrightarrow{\vartheta} U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$  et sa dérivée est donnée par

$$(f \circ \vartheta)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) x'_i(t).$$

**Exemple 1.5.1.** - Soit  $h(t) = f(\sin t, \ln t)$  où  $f(x, y) = x^2 + 3xy$  et  $t > 0$ .  
alors

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

- Soit  $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ , alors

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

## 1.6 Dérivées directionnelles

Soit  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage d'un point  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et  $\vec{v} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

La dérivée directionnelle de  $f$  suivant la direction de  $\vec{v}$  au point  $a$ , on la note  $f'_{\vec{v}}(a)$  est définie par

$$f'_{\vec{v}}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h\nu_1, \dots, a_n + h\nu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h},$$

elle est dite pente de  $f$  au point  $a$  suivant le vecteur  $\vec{v}$ .

**Exemple 1.6.1.** Pour  $f(x, y) = xy$  et  $a = (x, y)$ ,  $\vec{v} = (1, 1)$ .

**Remarque 1.6.1.** Soient  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

$$f'_{e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

**Exemple 1.6.2.** Pour  $f(x, y) = xy$ .

$$f'_{(1,0)}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y, \quad f'_{(0,1)}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

**Remarque 1.6.2.** Les dérivées partielles premières représentent les pentes de la fonction en un point suivant les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

### Propriétés algébriques :

Si les dérivées partielles premières des fonctions  $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  existent, alors on a

$$(i) \quad \frac{\partial (f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

$$(ii) \quad \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

$$(iii) \quad \text{Si } g \neq 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} g - f \frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}.$$

### 1.7 Vecteur gradient

Soit la fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , où les dérivées partielles premières  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  ( $a \in U$ ) existent.

Le vecteur gradient de  $f$  au point  $a$  est défini par :

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

### Propriétés :

Si les dérivées partielles de  $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  existent, alors on a

$$(i) \quad \nabla (f+g)(a) = \nabla f(a) + \nabla g(a).$$

$$(ii) \quad \nabla (fg)(a) = \nabla f(a) g(a) + f(a) \nabla g(a).$$

$$(iii) \quad \nabla \left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g^2(a)} (\nabla f(a) g(a) - f(a) \nabla g(a)).$$





## Chapitre 2

# Différentiabilité

La notion de fonction différentiable est la généralisation aux fonctions de plusieurs variables de la notion de fonction dérivable d'une variable réelle. Bien sûr, on ne peut pas transposer directement la définition utilisant le taux d'accroissement (impossible de diviser par un vecteur!). C'est la caractérisation de la dérivabilité en terme d'existence de développement limité d'ordre 1 qui se généralise directement en dimension quelconque.

**Définition 2.0.1.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert non vide et  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $f$  est différentiable en  $a \in U$  si et seulement s'il existe une application linéaire et continue  $L \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a) - L(x - a)|}{\|x - a\|} = 0.$$

On peut aussi écrire, en posant  $x - a = h$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0_{\mathbb{R}^n}}} \frac{|f(a + h) - f(a) - L(h)|}{\|h\|} = 0. \quad (2.1)$$

L'application  $L$  est appelée différentielle de  $f$  en  $a$  et elle est notée  $Df(a) = D_f(a) = L$  ou  $df(a) = d_f(a) = L$ . 2.1 devient

$$f(a + h) - f(a) = Df(a)h + o(h), \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0.$$

**Exemple 2.0.1.** Pour  $f(x, y) = x^2y$ . La différentielle de  $f$  au point  $(x, y)$  est  $Df(x, y) = 2xy + x^2$ , en effet, soit  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f((x, y) + (h_1, h_2)) - f(x, y) = 2xyh_1 + x^2h_2 + yh_1^2 + 2xh_1h_2 + h_1^2h_2,$$

avec

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{yh_1^2 + 2xh_1h_2 + h_1^2h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

**Proposition 2.0.1.** Si la différentielle  $L$  d'une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  existe, elle est unique.

### Preuve :

Supposons qu'il existe  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$  telles que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a + h) - f(a) - L_1(h)|}{\|h\|} = 0,$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L_2(h)|}{\|h\|} = 0,$$

alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|L_1(h) - L_2(h)|}{\|h\|} = 0,$$

prenons  $h = tv$  avec  $t > 0$  et  $\|v\| = 1$ , faisons tendre  $t$  vers 0, on a

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|L_1(tv) - L_2(tv)|}{t} = L_1(v) - L_2(v).$$

Donc  $L_1$  et  $L_2$  sont égales sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ , par linéarité, il suit que  $L_1 = L_2$ .

**Proposition 2.0.2.** *Si  $f$  est une fonction différentiable en  $x \in U$ , alors  $f$  est continue en  $x$ .*

**Preuve :**

On a

$$f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + o(h),$$

il suit par linéarité de  $DF(x)$  que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x),$$

i.e.  $f$  est continue en  $x$ .

**Définition 2.0.2.** *On dit que  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable sur  $U$  si elle est différentiable en tout point  $x \in U$ . Dans ce cas, on appelle différentielle de  $f$  la fonction*

$$\begin{aligned} Df : \quad U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{L}(U \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto Df(x) = df_x. \end{aligned}$$

Si de plus,  $Df$  est continue on dit que  $f$  est **continument différentiable**, ou  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exemple 2.0.2.** *Soit la fonction*

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Soit  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + h) - f(x, y)}{\|h\|} &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x+h_1)^2 + (y+h_2)^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{2xh_1 + 2yh_2 + h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \underbrace{\frac{2xh_1 + 2yh_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}_{\text{forme linéaire}} + \underbrace{\frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}_{\text{négligeable}} \end{aligned}$$

alors  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  et sa différentielle

$$df(x, y)(h) = 2xh_1 + 2yh_2 = \langle \nabla f, h \rangle.$$

**Théorème 2.0.1.** *Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.*

*Dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  l'application différentielle  $df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  a pour expression explicite si les dérivées partielles existent,*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n; \quad df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i = \langle \nabla f, h \rangle.$$

## Propriétés :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions différentiable en un point  $a$ .

- (i)  $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$ .
- (ii)  $d(fg)(a) = df(a)g(a) + f(a)dg(a)$ .
- (iii) si  $g(a) \neq 0$ ,  $d(\frac{f}{g})(a) = \frac{df(a)g(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}$ .

**Corollaire 2.0.1.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction de classe  $C^1(U)$ . On suppose que  $U$  est convexe. Si toutes les dérivées partielles de  $f$  sont nulles sur  $U$ , alors  $f$  est constante sur  $U$ .

**Remarque 2.0.1.** Si la fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en tout point  $x$  de  $U$ , alors

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i.$$

**Exemple 2.0.3.**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = x^3 - y^2 - x. \end{aligned}$$

$f$  est une fonction polynômiale en  $x$  et en  $y$ , donc  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$df(x, y) = (3x^2 - 1)dx - 2ydy.$$

**Théorème 2.0.2.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si les dérivées partielles de  $f$  au point  $a \in U$  existent, alors  $f$  est différentiable en  $a$  si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(a) h_i}{\|h\|} = 0,$$

où  $h = (h_1, \dots, h_n)$ .

## 2.1 La différentielle d'une fonction composée

**Théorème 2.1.1.** Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels normés de dimension finie et  $U, V$  deux ouverts de  $E$  et  $F$  respectivement

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G.$$

Supposons que  $f$  est différentiable en  $a \in U$  et  $g$  différentiable en  $f(a) \in V$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$ , de plus

$$d(g \circ f)(a) = D_a(g \circ f) = D_{f(a)}g \circ D_a f = dg(f(a)) \circ df(a).$$

## Preuve :

Posons  $k = f(a+h) - f(a)$ , si  $h \rightarrow a$  alors  $k \rightarrow 0$ . On a

$$f(a+h) - f(a) = df(a)(h) + o(h),$$

$$g(b+k) - g(b) = dg(b)(k) + o(k), \quad b = f(a),$$

alors

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = dg(f(a))(f(a+h) - f(a)) + o(k),$$

i.e.

$$g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = dg(f(a)) \circ df(a)(h) + dg(f(a))(o(h)) + o(k).$$

Il suffit de montrer que

$$dg(f(a))(o(h)) + o(k) = o(h).$$

i.e.  $dg(f(a))(o(h)) = o(h)$  et  $o(k) = o(h)$ . On a

$$0 \leq \frac{\|dg(f(a))(o(h))\|}{\|h\|} \leq C \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0,$$

donc

$$dg(f(a))(o(h)) = o(h),$$

et

$$0 \leq \frac{o(k)}{\|h\|} = \frac{o(k)}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|},$$

en sait que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{o(k)}{\|k\|} = 0,$$

et on a

$$\begin{aligned} \frac{\|k\|}{\|h\|} = \frac{\|df(a)(h) + o(h)\|}{\|h\|} &\leq \frac{\|df(a)(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} \\ &\leq C \frac{\|h\|}{\|h\|} + \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = C + \frac{\|o(h)\|}{\|h\|}, \end{aligned}$$

comme  $\frac{\|o(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , donc  $\frac{\|k\|}{\|h\|}$  est bornée.

D'où  $\frac{\|k\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , i.e.  $o(k) = o(h)$ .

**Remarque 2.1.1.** L'existence de  $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$  n'implique pas l'existence de  $df(a)$ .

**Exemple 2.1.1.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , mais  $df(0, 0)$  n'existe pas.

**Théorème 2.1.2.** Si la fonction  $f$  est linéaire, alors  $df(a) = f$ .

**Proposition 2.1.1.** Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)), \end{aligned}$$

où  $f_i$  est une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  pour chaque  $i = 1, \dots, p$ .

$f$  est différentiable en  $a$  si et seulement si  $f_i$  est différentiable en  $a$  pour tout  $i = 1, \dots, p$ , de plus on a

$$df(a) = (df_1(a), \dots, df_p(a)).$$

**Preuve :**

Soit l'application

$$\begin{aligned}\delta_j : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \delta_j(x) = x_j.\end{aligned}$$

On a  $I \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\delta_j} \mathbb{R}$ .  
 $(\Rightarrow) f_j(x) = \delta_j(f(x))$ .

$$df_j(a) = d\delta_j(f(a)) \circ df(a) = \delta_j \circ df(a) = \delta_j(df(a)).$$

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors nous pouvons que  $\delta_j$  est différentiable en tout point et en particulier en  $f(a)$ , donc  $f_j$  est différentiable en  $a$ .

( $\Leftarrow$ ) Soit  $\sigma_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$  l'injection canonique.

On a  $\sigma_j \circ f_j(x) = (0, \dots, 0, f_j(x), 0, \dots, 0)$ , donc

$$f(x) = \sum_{j=1}^p \sigma_j \circ f_j(x),$$

si  $f_j$  est différentiable en  $a$ , alors  $\sigma_j \circ f_j$  est différentiable en  $a$ , donc

$$\sum_{j=1}^p \sigma_j \circ f_j$$

est différentiable en  $a$ .

D'où  $f$  est différentiable en  $a$ .

**2.2 Matrice Jacobienne**

Soit la fonction

$$\begin{aligned}f : U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).\end{aligned}$$

Les dérivées partielles de  $f$  en un point  $a \in U$  si elle existent, sont les vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  dont les composantes sont les dérivées partielles des composantes de  $f$ .

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

La matrice Jacobienne de  $f$  en  $a$  est donnée par

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

**Remarque 2.2.1.** Si  $f$  est différentiable en  $a$ , on a

$$\forall h \in \mathbb{R}^n; \quad df(a)(h) = Jf(a) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2.2.1.** Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (3x + y, \sin y, e^{x^2} + y^2). \end{aligned}$$

Son matrice Jacobienne est la matrice de 3 lignes et 2 colonnes.

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \cos y \\ 2xe^{x^2} & 2y \end{pmatrix}.$$

**Proposition 2.2.1.** Si la fonction

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)). \end{aligned}$$

est différentiable en un point  $a \in U$ , alors

$$\begin{aligned} df(a)(h) = Jf(a) \cdot h &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) h_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a) h_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Définition 2.2.1.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ .

Lorsque  $n = p$ , on appelle **Jacobien** de  $f$  en  $a$  le déterminant de la matrice Jacobienne de  $f$  en  $a$ , on notera

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{(x_1, \dots, x_n)}(a)$$

ce jacobien.

**Corollaire 2.2.1.** Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $g(\Omega) \subset U$ . Si  $f$  et  $g$  sont différentiables sur  $U$  et  $\Omega$  respectivement et  $a \in \Omega$  et  $b = g(a)$ , alors pour  $\varphi = f \circ g$

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{(u_1, \dots, u_n)}(a) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{(x_1, \dots, x_n)}(b) \cdot \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{(u_1, \dots, u_n)}(a).$$

## Propriétés :

Soient  $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en un point  $a \in U$ , alors

1.  $J_a(\lambda f + g) = \lambda J_a(f) + J_a(g)$ .
2.  $J_a(fg) = f(a)J_a(g) + g(a)J_a(f)$ .
3. Le produit scalaire  $x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$  est différentiable en  $a$  et sa différentielle en  $a$  est donnée par la formule

$$d(\langle f, g \rangle)(a)(h) = \langle f(a), dg(a)(h) \rangle + \langle df(a)(h), g(a) \rangle.$$

4. Si  $p = 3$  le produit vectoriel  $x \mapsto f(x) \wedge g(x)$  est différentiable en  $a$  et la différentielle est donnée par

$$d(f \wedge g)(a)(h) = f(a) \wedge dg(a)(h) + df(a)(h) \wedge g(a).$$

5. Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ . Si  $f$  est différentiable en  $a \in U$  et  $g$  est différentiable en  $f(a) \in V$ , alors

$$J_a(g \circ f) = J_{f(a)}(g) \cdot J_a(f).$$

**Proposition 2.2.2.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  une bijection. Si  $f$  est différentiable en tout point de  $U$  et  $f^{-1}$  est continue dans  $\Omega$ , alors  $f^{-1}$  est différentiable en  $y_0 = f(x_0) \in \Omega$  si et seulement si  $df(x_0)$  est inversible et on a

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

## 2.3 Théorème des accroissements finis

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a, b$  deux points de  $U$  tels que  $[a, b] \subset U$ . Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et différentiable en tout point de  $]a, b[$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = d_c f(b - a) = \langle \nabla f(a + \theta(b - a)), \vec{ab} \rangle, \quad \theta \in ]0, 1[.$$

### Preuve :

Soit l'application

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto g(t) = (1 - t)a + tb. \end{aligned}$$

Quand  $t$  parcourt le segment  $[0, 1]$  de  $\mathbb{R}$ ,  $g(t)$  parcourt le segment  $[a, b]$  de  $U \subset \mathbb{R}^n$ . La fonction  $g$  est différentiable, et sa différentielle au point  $t \in [0, 1]$  est

$$\begin{aligned} d_t g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ h &\longmapsto h(b - a). \end{aligned}$$

$f$  étant différentiable en tout point de  $]a, b[$ , alors  $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est différentiable sur  $]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  et on a

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) &= \frac{1}{h} d_t(f \circ g)(h) = \frac{1}{h} (d_{g(t)} f \circ d_t g)(h) \\ &= \frac{1}{h} d_{g(t)} f(h(b - a)) \\ &= d_{g(t)} f h(b - a) \cdots (1) \end{aligned}$$

par application du théorème des accroissements finis à la fonction scalaire d'une variable réelle  $f \circ g$  continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$ , il existe une constante  $t_0 \in ]0, 1[$  telle que

$$(f \circ g)'(t_0) = (f \circ g)(1) - (f \circ g)(0) = f(b) - f(a) \cdots (2)$$

En combinant (1) et (2), il vient

$$f(b) - f(a) = d_{g(t_0)} f(b - a),$$

d'où le résultat avec  $c = g(t_0) \in ]a, b[$ .

## 2.4 Inégalité des accroissements finis

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a, b$  deux points de  $U$  tels que  $[a, b] \subset U$ . Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et différentiable en tout point de  $]a, b[$  et s'il existe  $M > 0$  telle que pour tout  $c \in ]a, b[$  :  $\|d_c f\| \leq M$ , alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|.$$

## 2.5 Plan tangent

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a = (x_a, y_a) \in U$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , le plan d'équation

$$z = f(a) + (x - x_a) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_a) \frac{\partial f}{\partial y}(a),$$

est tangent au graphe de  $f$  en  $a$ .

## 2.6 Applications du théorème des accroissements finis

**Théorème 2.6.1. (Un théorème de point fixe)** Soit  $E$  un espace de Banach et  $f : E \longrightarrow E$  une application. On suppose qu'il existe  $k \in ]0, 1[$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|d_x f\|_{\mathcal{L}(E)} \leq k$ , alors  $f$  admet un unique point fixe dans  $E$ .

i.e.  $\exists ! x \in E$ ;  $f(x) = x$ .

### Preuve :

Pour montrer l'existence, considérons la suite  $(U_n)_n \subset E$  définie par

$$U_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad U_{n+1} = f(U_n),$$

cette suite converge si et seulement si la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \vartheta_n, \quad \text{où } \vartheta_n = U_n - U_{n-1},$$

est convergente. Or d'après les théorèmes des accroissements finis, on a

$$\|U_n - U_{n-1}\| = \|f(U_{n-1}) - f(U_{n-2})\| \leq k \|U_{n-1} - U_{n-2}\| \leq \dots \leq k^{n-1} \|U_1 - U_0\|.$$

Comme  $k \in [0, 1[$ , la série est absolument convergente et donc convergente.

Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe deux points fixes distincts  $x$  et  $y$  de  $f$ , i.e.

$$f(x) = x, \quad f(y) = y, \quad x \neq y.$$

L'inégalité des accroissements finis nous donne

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\| < \|y - x\| = \|f(y) - f(x)\|,$$

c'est absurde.



## 2.7 Une deuxième expression du théorème des accroissements finis

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $x \in U$  et  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que le segment  $[x, x+h] = \{y \in \mathbb{R}^n; y = x + th; 0 \leq t \leq 1\}$  soit contenu dans  $U$ . Si  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ , alors il existe  $\theta \in ]0, 1[$  (dépendant naturellement de  $x$  et  $h$ ) tel que

$$f(x+h) - f(x) = df(x+\theta h)(h). \quad (2.2)$$

Si  $(e_i)_{i=1}^n$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , alors l'expression (2.2) s'écrit

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)h_i, \quad \text{où} \quad h = \sum_{i=1}^n h_i e_i.$$



## Chapitre 3

# Différentielle d'ordre supérieur

Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert non vide  $U \subset \mathbb{R}^n$  à valeur réelle, ou plus généralement  $f$  une fonction définie d'un ouvert non vide  $U$  d'un e.v.n  $E$  à valeur dans un e.v.n  $F$ .

Si  $f$  est différentiable dans  $U$ , sa différentielle

$$\begin{aligned} Df = df : \quad U \subset E &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x &\longmapsto df(x). \end{aligned}$$

### 3.1 La différentielle seconde

**Définition 3.1.1.** On dit que  $f$  est deux fois différentiable en  $a$  si l'application  $df$  est différentiable en  $a$ .

$$\forall k \in E; \quad df(a+h)(k) - df(a)(k) = d^2f(a)(k) + o(h)(k),$$

avec  $d^2f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ .

**Remarque 3.1.1.** On a

★  $\mathcal{L}_2(E, F)$  l'espace des fonctions  $f : E^2 \longrightarrow F$  bilinéaire et continue.

★  $\mathcal{L}_n(E, F)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  l'espace des fonctions  $f : E^n \longrightarrow F$   $n$ -linéaire et continue.

L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) &\longrightarrow \mathcal{L}_2(E, F) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = g. \end{aligned}$$

est un isomorphisme, de plus  $g$  est définie comme suit

$$g(x, y) = f(x)(y).$$

Comme  $\varphi$  est un isomorphisme et  $\|f\| = \|g\|$ , alors  $f \equiv g$  cela nous permet d'identifier  $d^2f(a)$  à un élément de  $\mathcal{L}_2(E, F)$ . i.e.  $d^2f(a) \in \mathcal{L}_2(E, F)$ . Alors  $d^2f(a)$  est une application bilinéaire continue.

### 3.2 Différentielle d'ordre supérieur

**Définition 3.2.1.**  $f$  est trois fois différentiable en  $a$  si  $d^2f$  est différentiable en  $a$ , de plus

$$d^3f(a) = d(d^2f)(a), \quad d^3f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) = \mathcal{L}_3(E, F).$$

En générale

$$d^n f(a) = d(d^{n-1}f)(a) \in \mathcal{L}_n(E, F),$$

est une application  $n$ -linéaire continue.

**Exemple 3.2.1.** Soit  $E_1, E_2, F$  trois espaces de Banach et  $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$  une application bilinéaire continue. Alors  $f \in \mathcal{C}^\infty(E_1 \times E_2)$  et

$$df(x, y)(h, k) = f(x, k) + f(h, y).$$

Pour calculer  $d^2f(x, y)$  il faut estimer la différence

$$df(x + h_1, y + h_2) - df(x, y).$$

$$\begin{aligned} df(x + h_1, y + h_2)(k_1, k_2) - df(x, y)(k_1, k_2) &= f(x + h_1, k_2) + f(k_1, y + h_2) - f(x, k_2) - f(k_1, y) \\ &= f(x, k_2) + f(h_1, k_2) + f(k_1, y) + f(k_1, h_2) - f(x, k_2) - f(k_1, y) \\ &= f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2) \\ &= d^2f(x, y)((h_1, h_2), (k_1, k_2)). \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \psi : E \times E &\longrightarrow F \\ (h, k) &\longmapsto \psi(h, k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2). \end{aligned}$$

où  $E = E_1 \times E_2$  et  $h = (h_1, h_2)$ ,  $k = (k_1, k_2)$ . L'application  $\psi$  est bilinéaire continue.

$\psi$  est continue car

$$\begin{aligned} \|\psi(h, k)\| &\leq \|f(h_1, k_2)\| + \|f(k_1, h_2)\| \\ &\leq C[\|h_1\| \|k_2\| + \|k_1\| \|h_2\|] \\ &\leq C\|h\| \|k\|. \end{aligned}$$

Donc  $d^2f(x, y)$  existe et

$$d^2f(x, y)(h, k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2).$$

$d^n f \equiv 0$  pour  $n \geq 3$  à vérifier.

**Exemple 3.2.2.** Soit  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  une application bilinéaire continue.

On définit la forme quadratique  $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$  par  $q(x) = \varphi(x, x)$ . Alors  $q \in \mathcal{C}^\infty(E)$  et

$$dq(x)(h) = \varphi(x, h) + \varphi(h, x),$$

$$d^2q(x)(h, k) = \varphi(k, h) + \varphi(h, k),$$

et

$$d^n q \equiv 0 \quad \text{pour } n \geq 3.$$

### 3.3 Théorème de Schwartz

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $U$  un ouvert non vide de  $E$ .

Si  $f : U \longrightarrow F$  une application deux fois différentiable en un point  $a \in U$ , alors  $d^2f(a) \in \mathcal{L}_2(E, F)$  et  $d^2f(a)$  est symétrique i.e.

$$\forall h, k \in E; \quad d^2f(a)(h, k) = d^2f(a)(k, h).$$

#### 3.3.1 Généralisation du théorème de Schwartz

**Théorème 3.3.1.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $U$  un ouvert non vide de  $E$ .

Si  $f : U \longrightarrow F$  une application  $k$  fois différentiable en un point  $x \in U$ , alors  $d^k f(x) \in \mathcal{L}_k(E, F)$  et  $d^k f(x)$  est une application  $k$ -linéaire symétrique i.e. pour toute permutation  $s$  de  $\{1, 2, \dots, k\}$

$$d^k f(x)(h_1, \dots, h_k) = d^k f(x)(h_{s(1)}, \dots, h_{s(k)}), \quad \forall (h_1, \dots, h_k) \in E^k.$$

**Proposition 3.3.1.** Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable en un point  $a \in U$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $h \in \mathbb{R}^n$ . On a

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i,$$

alors

$$df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

par définition on a

$$df(a+h)(k) - df(a)(k) = d^2 f(a)(h, k) + o(h)(k). \quad (3.1)$$

Dans (3.1) prenons  $h = te_i$ ,  $k = e_j$  on obtient

$$\frac{1}{t} (df(a + te_i)(e_j) - df(a)(e_j)) = \frac{1}{t} d^2 f(a)(te_i, e_j) + \frac{1}{t} o(te_i)(e_j),$$

implique

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + te_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right) = d^2 f(a)(e_i, e_j),$$

donc

$$d^2 f(a)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

**Remarque 3.3.1.**

$$d^2 f(a)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = d^2 f(a)(e_j, e_i).$$

Mais si  $d^2 f(a)$  n'existe pas, alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$  peut exister sans que les soit égaux.

**Exercice 3.3.1.**  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  avec

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0),$$

car les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  ne sont pas continues en  $(0, 0)$ .

**Remarque 3.3.2. Dérivées partielles d'ordre supérieur :** Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j.$$

$$\begin{aligned} d^2 f(a)(x, y) &= d^2 f(a) \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d^2 f(a)(e_i, e_j) x_i y_j. \end{aligned}$$

Donc

$$d^2 f(a)(x, y) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(a).$$

**Proposition 3.3.2.** Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction  $p$  fois différentiable en un point  $a$ .

$$d^p f(a)(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}}(a).$$

Soit  $h_i = \sum_{j=1}^n h_i^{j_i} e_{j_i}$

$$d^p f(a)(h_1, h_2, \dots, h_p) = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n h_1^{j_1} h_2^{j_2} \dots h_p^{j_p} \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_p}}(a).$$

### 3.4 Formules de Taylor

**Exercice 3.4.1.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On considère la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} f(t) dt.$$

1. Vérifier que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer  $F'(x)$  en fonction de  $f$ .

**Théorème 3.4.1. (Théorème fondamental du calcul différentiel).**

Soit  $F$  un espace de Banach,  $\varphi : [a, b] \rightarrow F$  une application de classe  $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ . Alors

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \int_a^b \varphi'(t) dt.$$

#### 3.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

**Théorème 3.4.2.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $f : \Omega \rightarrow F$  une application de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $\Omega$ .

Soit  $x \in \Omega$  et  $h \in E$  tels que le segment  $[x, x+h]$  soit contenu dans  $\Omega$ . Alors

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2!} d^2 f(x)(h, h) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x)(\underbrace{h, h, \dots, h}_{n \text{ fois}}) \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n d^{n+1} f(x+th)(\underbrace{h, h, \dots, h}_{n \text{ fois}}) dt. \end{aligned}$$

**Preuve :**

On pose

$$\psi(t) = f(x+th) + (1-t)df(x+th)(h) + \frac{(1-t)^2}{2!} d^2 f(x+th)(h, h) + \dots + \frac{(1-t)^n}{n!} d^n f(x+th)(h, h, \dots, h).$$

Alors  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et

$$\psi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f(x+th)(h, h, \dots, h),$$

la formule de Taylor avec reste intégral se réduit alors à

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt.$$

### 3.4.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

**Théorème 3.4.3.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application  $n + 1$  fois différentiable sur  $\Omega$ . On suppose qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\|d^{n+1}f(y)\|_{\mathcal{L}(E^{n+1}, F)} \leq C \quad \text{pour tout } y \in \Omega.$$

Soit  $x \in \Omega$  et  $h \in E$  tels que le segment  $[x, x + h]$  soit contenu dans  $\Omega$ . Alors

$$\left\| f(x+h) - f(x) - df(x)(h) - \frac{1}{2!}d^2f(x)(h, h) - \cdots - \frac{1}{n!}d^n f(x)(\underbrace{h, h, \dots, h}_{n \text{ fois}}) \right\| \leq \frac{C \|h\|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**Preuve :**

On pose

$$\psi(t) = f(x+th) + (1-t)df(x+th)(h) + \frac{(1-t)^2}{2!}d^2f(x+th)(h, h) + \cdots + \frac{(1-t)^n}{n!}d^n f(x+th)(h, h, \dots, h),$$

$$g(t) = -\frac{C(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On a pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\|\psi'(t)\| \leq g'(t),$$

et pour un théorème des accroissements finis, il suit

$$\|\psi(1) - \psi(0)\| \leq g(1) - g(0),$$

ce qui donne le résultat.

Le théorème suivant donne un développement limité de la fonction à l'ordre  $n$  avec un minimum de contrôle sur le reste.

### 3.4.3 Développement limité ou formule de Taylor-Young

**Théorème 3.4.4.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $\Omega$  un ouvert de  $E$  et  $f : \Omega \longrightarrow F$  une application  $n$  fois différentiable sur  $\Omega$ , admettant en  $x$  une différentielle  $(n+1)$ -ième. Alors

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + \frac{1}{2!}d^2f(x)(h, h) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x)(\underbrace{h, h, \dots, h}_{(n+1) \text{ fois}}) + \|h\|^{n+1} \varepsilon(h),$$

où  $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$  lorsque  $h \longrightarrow 0$ .

**Preuve :** La démonstration par récurrence.

**Exemple 3.4.1.** Soient  $E_1, E_2, F$  trois espaces de Banach,  $f : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$  une application bilinéaire.

Calculons le développement limité (Taylor-Young) d'ordre 2 de  $f$ .

Soit  $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ ,  $h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ ,  $k = (k_1, k_2) \in E_1 \times E_2$ .

On a

$$df(a)(h) = f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2),$$

$$d^2f(a)(h, k) = f(h_1, k_2) + f(k_1, h_2) = \varphi(h, k).$$

★  $\varphi$  est bilinéaire.

★  $\varphi$  est symétrique, i.e.  $\varphi(h, k) = \varphi(k, h)$ .

★  $\varphi$  est continue. En effet

$$\begin{aligned}\|\varphi(h, k)\| &\leq \|f(h_1, k_2)\| + \|f(k_1, h_2)\| \\ &\leq C (\|h_1\| + \|h_2\|) \cdot (\|k_1\| + \|k_2\|) \\ &\leq C \|h\| \cdot \|k\|.\end{aligned}$$

Conclusion

$$f(a + h) = f(a) + f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) + f(h_1, h_2) + o(\|h\|^2).$$

**Remarque 3.4.1.**

$$\begin{aligned}f(a + h) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \\ &= f(a_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) + f(h_1, h_2) \\ &= f(a) + f(a_1, h_2) + f(h_1, a_2) + f(h).\end{aligned}$$

C'est le développement limité de Taylor-Young avec  $o(\|h\|^2) = 0$ .

**Remarque 3.4.2.** Si  $\varphi$  est symétrique, pour prouver que  $\varphi$  est bilinéaire il suffit de prouver qu'il est linéaire par rapport à l'une des composante.

**Exemple 3.4.2.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $n$  fois différentiable.

$$\begin{aligned}df(a)(h) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i; \\ d^2 f(a)(h, k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j; \\ d^3 f(a)(h, k, l) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(a) h_i k_j l_s.\end{aligned}$$

Pour  $n = 2$ , i.e.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}d^2 f(a)(h, k) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(a) h_i k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(a) h_i k_2 \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) h_1 k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h_1 k_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) h_2 k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) h_2 k_2.\end{aligned}$$

Comme  $f$  est différentiable, d'après le théorème de Schwartz, pour  $(x_1, x_2) = (x, y)$  on a

$$d^2 f(a)(h, h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) h_2^2.$$

Le développement limité (Taylor-Young) jusqu'à l'ordre  $n = 2$  est

$$f(a + h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) h_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) h_2^2 \right) + o(\|h\|^2).$$



## Chapitre 4

# Extrema et points critiques

Le but de cette section est de trouver des conditions pour qu'un point  $(x_0, y_0)$  soit un point extrémal d'une fonction de deux variables. Dans le cas d'une fonction dérivable d'une seule variable, on sait que la dérivée première s'annule en un extremum. La nature de l'extremum, minimum ou maximum dépend de la dérivée seconde si elle existe. Dans le cas d'une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles à l'ordre 2, si  $(x_0, y_0)$  est un extremum, alors les dérivées partielles sont nulles. La nature de l'extremum est alors donnée par les dérivées partielles secondes. La situation est plus complexe que dans le cas d'une seule variable.

Soit  $f$  une fonction définie d'un ouvert non vide  $U$  d'un e.v.n  $E$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

### 4.1 Point critique

**Définition 4.1.1.** Soit  $E$  un e.v.n,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

On dit que  $f$  admet en  $a$  un point critique (ou point **stationnaire**) si  $f$  est différentiable en  $a$  et  $df(a) = 0$ .

**Exemple 4.1.1.** Soit  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ .

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x.$$

Si  $(x, y)$  est un point critique de  $f$ , il vérifié donc le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$  est donc le point critique de  $f$ .

### 4.2 Extrema libres

**Définition 4.2.1.** Soit  $E$  un e.v.n,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

1. On dit que  $f$  admet en  $a \in U$  un minimum global si

$$\forall x \in U; \quad f(x) \geq f(a).$$

2. On dit que  $f$  admet en  $a \in U$  un minimum strict si

$$\forall x \in U; \quad f(x) > f(a) \quad \text{et} \quad x \neq a.$$

3. On dit que  $f$  admet en  $a \in U$  un minimum local s'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in V; \quad f(x) \geq f(a).$$

4. On dit que  $f$  admet en  $a \in U$  un maximum global si

$$\forall x \in U; \quad f(x) \leq f(a).$$

5. On dit que  $f$  admet en  $a \in U$  un maximum strict si

$$\forall x \in U; \quad f(x) < f(a) \quad \text{et} \quad x \neq a.$$

6. On dit que  $f$  admet en  $a \in U$  un minimum local s'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  tel que

$$\forall x \in V; \quad f(x) \leq f(a).$$

Un **extremum** (local, strict) est un point qui est soit un minimum, soit un maximum (local, strict).

**Exemple 4.2.1.** Soit  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ .

On a

$$f(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 \geq 1 = f(0, 0).$$

Ainsi,  $(0, 0)$  est un point extremum local, et même global de  $f$ .

#### 4.2.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

**Proposition 4.2.1.** Soit  $g$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , dérivable en  $a \in I$ . Si  $a$  est un minimum local de  $g$  alors  $g'(a) = 0$ . Si de plus  $g$  est deux fois dérivable en  $a$ , alors  $g''(a) \geq 0$ .

Inversement, si  $b \in I$  est tel que  $g'(b) = 0$  et  $g'' > 0$  alors  $b$  est un minimum local de  $g$ .

**Remarque 4.2.1.** Attention ! Les conditions  $g'(b) = 0$  et  $g'' \geq 0$  ne sont pas suffisantes !

#### 4.2.2 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles

**Théorème 4.2.1.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a \in U$  point critique de  $f$ . Alors

1. Si  $\text{Hess}f_a$  est définie positive (resp. définie négative) alors  $f$  admet un minimum (resp. maximum) local strict en  $a$ .
2. Si  $f$  admet un minimum (resp. maximum) local en  $a$  alors  $\text{Hess}f_a$  est positive (resp. négative).

**Corollaire 4.2.1.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $a \in U$  point critique de  $f$ . On note  $\Delta(a)$  le déterminant de  $\text{Hess}f_a$ . On l'appelle le Hessien de  $f$  en  $a$ . Alors

1. Si  $\Delta(a) > 0$  et  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a) > 0\right)$  alors  $a$  est un minimum local strict.
2. Si  $\Delta(a) > 0$  et  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a) < 0\right)$  alors  $a$  est un maximum local strict.
3. Si  $\Delta(a) < 0$  alors  $a$  est un point selle.

### 4.2.3 Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles

**Théorème 4.2.2.** Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $E$  et à valeurs réelles, différentiable en  $a \in U$ .

Si  $a$  est un minimum local de  $f$  alors  $df_a = 0$ .

Si de plus  $f$  est deux fois différentiable en  $a$ , alors  $d^2 f_a(h, h) \geq 0$  pour tout  $h \in E$ .

Inversement si  $b \in U$  est tel que  $df_b = 0$  et il existe  $C > 0$  avec  $d^2 f_b(h, h) \geq C \|h\|^2$  pour tout  $h \in E$ , alors  $b$  est un minimum local de  $f$ .

**Remarque 4.2.2.** En dimension finie, l'existence de  $C > 0$  tel que  $d^2 f_b(h, h) \geq C \|h\|^2$  pour tout vecteur  $h \in E$  équivaut à  $d^2 f_b(h, h) > 0$  quel que soit  $h \neq 0_E$ .

**Proposition 4.2.2.** Soit  $E$  un e.v.n,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si  $f$  admet en  $a \in U$  un extremum local et si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $a$  est un point critique de  $f$ .

**Proposition 4.2.3.** Soit  $E$  un e.v.n,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Si  $f$  admet en  $a \in U$  un extremum local et si  $f$  est deux fois différentiable en  $a$ , alors  $a$  est un point critique de  $f$  et la forme quadratique  $d^2 f(a)(h, h)$  est positive, i.e.  $\forall h \in E; \quad d^2 f(a)(h, h) \geq 0$ .

**Théorème 4.2.3.** Soit  $E$  un e.v.n,  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois différentiable en  $a$ . Si

1.  $a$  est un point critique de  $f$ ,
2. la forme quadratique  $d^2 f(a)(h, h)$  est définie positive (resp. définie négative),

alors,  $f$  admet en  $a$  un minimum ( maximum) local strict.

**Exemple 4.2.2.** Soit la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$ .

1. Déterminer les points critiques de  $g$ .
2. En étudiant les valeurs de  $g$  sur les droites vectorielles  $y = 0$  et  $y = x$ , étudier les extremas locaux de  $g$ .

1. Les dérivées partielles de  $g$  sont

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y + 4x.$$

Si  $(x, y)$  est un point critique de  $g$ , il vérifié donc le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x + 4y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y + 4x = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$  est donc le seul point critique de  $g$ .

2. On a  $g(0, 0) = -2$ , pour  $x \neq 0$ ,

$$g(x, 0) = 5x^2 - 2 > g(0, 0) \quad \text{et} \quad g(x, -x) = -2x^2 - 2 < g(0, 0).$$

Ainsi, près de  $(0, 0)$  qu'on veut,  $g$  prend des valeurs supérieurs et inférieurs à  $g(0, 0)$ . Donc  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local de  $g$ . Comme  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $g$ ,  $g$  n'admet pas d'extremum local.

### 4.3 Extrema liés

#### 4.3.1 Fonctions d'un espace de dimension finie à valeurs réelles

**Définition 4.3.1.** Soit  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\Gamma = g^{-1}(0)$ . On dit que  $\Gamma$  est **régulier** (ou encore qu'il satisfait à la condition de qualification non dégénérée) si pour tout  $a \in \Gamma$ ,  $dg(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est surjective.

**Remarque 4.3.1.** Si  $p = 1$ , la condition signifie seulement que pour tout  $a \in \Gamma$ ,  $dg(a) \neq 0$ .

**Théorème 4.3.1.** Soient  $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , soit  $\Gamma = g^{-1}(0)$  régulière. Si  $a \in \Gamma$  est un extremum local de  $f|_{\Gamma}$ , alors il existe un unique  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$df(a) + \lambda dg(a) = 0.$$

*N.B. : Le réel  $\lambda$  est appelé **multiplicateur de Lagrange**.*

**Théorème 4.3.2.** Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , et  $\Gamma = g^{-1}(0)$  régulière. Si  $a \in \Gamma$  est un extremum local de  $f|_{\Gamma}$ , alors il existe un unique  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que

$$df(a) + \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_i(a) = 0.$$

#### 4.3.2 Fonctions d'un espace de Banach à valeurs réelles

**Définition 4.3.2.** Si  $f$  et  $g_1, \dots, g_p$  sont des fonctions définies sur un ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , un point  $a \in U$  tel que  $g_1(a) = 0, \dots, g_p(a) = 0$  est un minimum local de  $f$  sous les contraintes  $g_1, \dots, g_p$  s'il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  tel que

$$f(x) \geq f(a)$$

pour tout  $x \in V_a$  tel que  $g_1(x) = 0, \dots, g_p(x) = 0$ .

**Théorème 4.3.3.** Soient  $f$  et  $g_1, \dots, g_p$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur un ouvert  $U$  d'un espace de Banach  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $a \in U$  tel que  $g_1(a) = 0, \dots, g_p(a) = 0$  et les contraintes  $g_1, \dots, g_p$  sont indépendantes au point  $a$ . Si  $a$  est un minimum local de  $f$  sous les contraintes  $g_1, \dots, g_p$ , alors il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que

$$df(a) = \sum_{i=1}^p \lambda_i dg_i(a).$$

*N.B. : Les réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.*

**Remarque 4.3.2.** Les conditions nécessaires d'extremum local sont fausses lorsque  $U$  n'est pas un ouvert.

### 4.4 Convexité et minima

**Définition 4.4.1.** Un sous-ensemble  $C$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  est dit convexe si pour tout  $x, y \in C$  pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\theta x + (1 - \theta)y \in C$ . Une fonction  $f$  est définie sur un convexe  $C$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est dite convexe, si pour tout  $x, y \in C$ , pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

Elle est dite strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque  $x \neq y$  et  $\theta \in ]0, 1[$ .

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $f$  une fonction différentiable sur un ouvert  $U$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace de Banach  $E$  et soit  $C$  un sous-ensemble convexe de  $U$ . Alors  $f|_C$  est convexe si et seulement si, pour tous  $x, y \in C$ ,*

$$f(y) \geq f(x) + df(x)(y - x).$$

*Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour  $x \neq y$ .*

*De plus si  $f$  est deux fois différentiable,  $f|_C$  est convexe si et seulement si, pour tous  $x, y \in C$ ,*

$$d^2 f(x)(y - x, y - x) \geq 0.$$

*Elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte pour  $x \neq y$ .*

**Théorème 4.4.2.** *Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace de Banach  $E$  et soit  $C$  un sous-ensemble convexe de  $U$ .*

1. *Si  $f|_C$  est convexe et admet un minimum local dans  $C$ , c'est un minimum global.*
2. *Si  $f|_C$  est strictement convexe alors elle admet au plus un minimum, et c'est un minimum strict.*
3. *Si  $f$  est différentiable, une condition nécessaire pour qu'un point  $a \in C$  soit un minimum de  $f|_C$  est*

$$df(a)(y - a) \geq 0,$$

*pour tout  $y \in C$ . Si de plus  $f|_C$  est convexe, cette condition est également suffisante.*

## Résumé

La première partie de la recherche d'un extremum consiste donc à trouver les points d'annulation des dérivées partielles premières. Une fois ces points trouvés, il faut en déterminer la nature. Un point où les dérivées partielles première s'annule n'est pas nécessairement un extremum. Un tel point est appelé point stationnaire. Soit  $(x_0, y_0)$  un point stationnaire de la fonction  $f$ . Trois cas peuvent se produire :

- $(x_0, y_0)$  est un maximum, c'est-à-dire qu'il existe un domaine  $D$  autour de  $(x_0, y_0)$  tel que pour tout  $(x, y) \in D$ ,  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ;
- $(x_0, y_0)$  est un minimum, c'est-à-dire qu'il existe un domaine  $D$  autour de  $(x_0, y_0)$  tel que pour tout  $(x, y) \in D$ ,  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  ;
- $(x_0, y_0)$  n'est ni un maximum, ni un minimum, c'est-à-dire que pour tout domaine  $D$  contenant  $(x_0, y_0)$ , contient aussi des points  $(x, y)$  et  $(x_0, y_0)$  tels que  $f(x, y) < f(x_0, y_0)$  et  $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ . Un tel point est appelé point selle.

Pour distinguer de tels extrema, il est nécessaire de considérer la dérivée seconde.



## Chapitre 5

# Intégrales généralisées

### Objectifs :

En première année, on a étudié l'intégrale d'une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ . Dans ce chapitre, on va étudier le cas d'une fonction continue sur un intervalle  $(a, b)$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) sans être continue sur  $[a, b]$ . Ainsi on rencontrera du calcul d'intégrale :

**Exemple 5.0.1.** *intégrales de type :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^1 \ln x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx.$$

**Définition 5.0.2.** Une fonction  $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite localement intégrable sur  $I$ , si elle est intégrable sur tout intervalle compact de  $I$ .

**Exemple 5.0.2.** La fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1, & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

est un exemple d'une fonction n'étant pas localement intégrable.

**Définition 5.0.3.** On dit que  $c$  est un point singulier pour la fonction  $f$  si elle n'est pas bornée en ce point i.e.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty.$$

### 5.1 Intégrales impropres de 1<sup>re</sup> espèce

On dit que  $\int_a^b f(x) dx$  est une intégrale impropre (ou généralisée) de 1<sup>re</sup> espèce si au moins l'une des bornes de l'intervalle  $(a, b)$  est infinie. Si  $f$  est localement intégrable sur  $(a, b)$  alors :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

Si les limites ci-dessus existent et sont finies, on dit que les intégrales impropres qu'elles définissent convergent, si non on dit qu'elles divergent.