

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

---

**Nguyễn Thanh Hải**

**TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT VÀ ĐA THỨC DUY  
NHẤT CHO CÁC ĐƯỜNG CONG ĐẠI SỐ TRÊN  
TRƯỜNG KHÔNG ACSIMET**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thành phố Hồ Chí Minh - 2014**

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH**

---

**Nguyễn Thanh Hải**

**TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT VÀ ĐA THỨC DUY  
NHẤT CHO CÁC ĐƯỜNG CONG ĐẠI SỐ TRÊN  
TRƯỜNG KHÔNG ACSIMET**

Chuyên ngành: Hình học và tô pô

Mã số : 60 46 01 05

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. NGUYỄN TRỌNG HÒA

**Thành phố Hồ Chí Minh - 2014**

## **LỜI CAM ĐOAN**

Tôi xin cam đoan đây là luận văn do chính bản thân tôi làm dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Trọng Hòa, không sao chép của ai khác.

## LỜI CẢM ƠN

*Trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn này, tôi đã nhận được sự hướng dẫn, giúp đỡ quý báu của các thầy cô, các đồng nghiệp và các anh chị, em và các bạn bè thân thiết. Với lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc, tôi xin được bày tỏ lời cảm ơn chân thành nhất tới:*

***Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học và Khoa Toán trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*** đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

***TS. Nguyễn Trọng Hòa***, người thầy kính mến đã hết lòng giúp đỡ, chỉ bảo, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

***TS. Nguyễn Hà Thanh***- Tổ trưởng bộ môn Hình học khoa Toán trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh- một người đáng kính trong công việc cũng như trong cuộc sống. Thầy đã động viên giúp đỡ và hướng dẫn cho tôi rất nhiều để tôi có thể hoàn thành được luận văn này.

Xin gửi lời cảm ơn tới ***Ban giám hiệu, các thầy cô trong tổ Toán trường PTTH chuyên Bình Long*** đã tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong thời gian làm luận văn.

Xin cảm ơn tới bạn bè, các anh chị em trong lớp Hình học Tôpô khóa 23 đã động viên và giúp đỡ tôi trong những lúc tôi gặp khó khăn.

# MỤC LỤC

**Trang phụ bìa**

**Lời cam đoan**

**Mục lục**

**Danh mục các kí hiệu**

**Lời mở đầu..... .1**

**CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ ..... 9**

1.1. Trường định chuẩn không Acsimet, trường số phức  $p$ -adic ..... 9

1.2. Hàm chỉnh hình và hàm phân hình trên trường các số phức  $p$ -adic .... 17

1.3. Các trường hàm đại số và số chiều của đa tạp xạ ảnh ..... 23

1.4. Đường cong đại số. Giống của đường cong đại số ..... 25

**CHƯƠNG 2. ĐA THỨC DUY NHẤT VÀ TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT**

**CHO HÀM PHÂN HÌNH TRÊN TRƯỜNG KHÔNG ACSIMET..32**

2.1. Đa thức duy nhất mạnh ..... 32

2.2. Tập xác định duy nhất ..... 60

**KẾT LUẬN..... 81**

**TÀI LIỆU THAM KHẢO ..... 82**

## DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

$C$	: Đường cong xạ ảnh
$\mathbf{k}$	: Trường đóng đại số có đặc số 0
$\mathbf{K}$	: Trường các hàm
$\mathcal{U}$	: Cứng affine
$\mathfrak{g}$	: Giống của đường cong
$\text{ord}_p a$	: Bậc của số nguyên không âm $a$
$h(f)$	: Độ cao của hàm $f$ .
$\nu_{\mathbf{p}}(f)$	: Bậc của hàm $f$ tại điểm $\mathbf{p}$
$\nu_{\mathbf{p}}^0(\eta)$	: Bậc của không điểm tại $\mathbf{p}$
$\bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(\eta)$	: Các giá trị bị chặn của bậc của không điểm tại $\mathbf{p}$
$\nu_{\mathbf{p}}^\infty(\eta)$	: Bậc của cực điểm tại $\mathbf{p}$
$\bar{\nu}_{\mathbf{p}}^\infty(\eta)$	: Các giá trị bị chặn của bậc của cực điểm tại $\mathbf{p}$
IM	: Không tính bội
CM	: Tính cả bội

## LỜI MỞ ĐẦU

Vấn đề xác định một hàm phân hình, hàm đa thức, hàm nguyên trên một trường đóng đại số, có đặc số 0 thông qua ảnh ngược của các tập hữu hạn đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học trên thế giới. Cụ thể, năm 1921, G. Polya đã chỉ ra rằng hàm nguyên khác hằng trên  $\mathbb{C}$  được xác định bởi ảnh ngược, tính cả bội, của ba giá trị phân biệt. Năm 1926, Nevanlinna đã chứng minh rằng hai hàm phân hình khác hằng bất kỳ  $f, g$  chung nhau 5 giá trị phân biệt, (tức là  $f^{-1}(a) = g^{-1}(a)$ , với  $i = 1, \dots, 5$ ) thì chúng trùng nhau. Sau đó, Sauer chứng minh hai hàm phân hình khác nhau trên một mặt Riemann compact có giống  $g > 0$  không thể chung nhau nhiều hơn  $2 + 2\sqrt{g}$  giá trị [6]. Con số này gần đây đã được làm sâu sắc hơn đến giá trị  $2 + \sqrt{2g+2}$ , và giới hạn về gonality, là bậc thấp nhất của một ánh xạ hữu tỷ từ  $C$  đến một đường thẳng xạ ảnh, cũng được đưa ra bởi Schweizer [7].

Một vấn đề tự nhiên được đặt ra năm 1977 bởi F. Gross, đó là không xét ảnh ngược của các điểm rời rạc mà xét ảnh ngược của các tập hợp điểm trong một trường đóng đại số nào đó. Gross đưa ra khái niệm tập xác định duy nhất cho các hàm mà khi hai hàm khác nhau chung nhau giá trị trên một tập hợp thay vì trên một vài giá trị [8]. Vấn đề này thu hút sự chú ý không chỉ trong giải tích phức, mà còn trong giải tích không Acsimet và lý thuyết số. Trong quá trình nghiên cứu tập xác định duy nhất đã dẫn đến việc xác định đa thức duy nhất mạnh tương ứng với tập xác định duy nhất đó.

Một đa thức  $P$  trong  $\mathbf{k}[X]$  được gọi là *đa thức duy nhất mạnh* đối với họ các hàm  $\mathcal{F}$  nếu tồn tại hai hàm khác hằng  $f, g \in \mathcal{F}$  và hằng số  $c$  sao cho  $P(f) = cP(g)$  thì ta phải có  $c = 1$  và  $f = g$ . Các vấn đề này cũng được nghiên

cứu trong lý thuyết số và được trình bày theo nhiều cách khác nhau. Việc nghiên cứu đa thức duy nhất mạnh cho các hàm phân hình, hàm nguyên, hàm hữu tỷ, các đa thức; các hàm phân hình, hàm nguyên không Acsimet được trình bày sau đây.

Gọi  $F(X, Y, Z)$  là sự thuần nhất hóa của  $\frac{P(X) - P(Y)}{X - Y}$  và  $F_c(X, Y, Z)$ ,  $c \neq 0, 1 \in \mathbf{k}$  là sự thuần nhất hóa của  $P(X) - cP(Y)$ . Gọi  $f, g$  là các hàm phân hình sao cho  $P(f) = bP(g)$  với  $b \in \mathbb{C}^*$  nào đó. Khi đó ta chứng minh được  $\Phi := (f, g, 1) : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  là một đồng cấu, và hơn nữa, ảnh của nó thuộc  $[F(X, Y, Z) = 0]$  nếu  $b = 1$  hoặc thuộc  $[F_c(X, Y, Z) = 0]$  nếu  $b = c \neq 1$ . Từ định lý Picard, chúng ta biết rằng điều này không thể xảy ra nếu không có đường cong nào trong  $[F(X, Y, Z) = 0]$  và  $[F_c(X, Y, Z) = 0]$ , với mọi  $c \neq 0, 1$ , chứa bất kỳ thành phần có giống 0 hoặc 1. Trong [3], điều này được thực hiện bằng cách xây dựng hai 1-dạng chính quy độc lập tuyến tính trên các đường cong này. Đối với trường hợp hàm hữu tỷ hoặc hàm hoặc hàm phân hình không Acsimet, ta chỉ cần xây dựng một 1-dạng chính quy trên các đường cong này là đủ. Nếu  $f$  và  $g$  là các hàm đại số trong  $\mathbf{K}$ , thì  $\Phi$  trở thành một đồng cấu từ  $C$  vào một trong các đường cong trên. Nhờ định lý Hurwitz, chúng ta biết rằng điều này không thể xảy ra nếu các đường cong này không có thành phần có giống  $\leq g$ . Không thể giải quyết trường hợp này bằng cách xây dựng  $(g + 1)$  1-dạng độc lập tuyến tính khi  $g$  lớn. Khi  $g \geq 2$  và tất cả các đường cong  $[F(X, Y, Z) = 0]$  và  $[F_c(X, Y, Z) = 0]$ , với mọi  $c \neq 0, 1$  chỉ chứa các thành phần có giống  $g \geq 2$ . Chúng ta không cho rằng không tồn tại đẳng cấu giữa chúng, ngoài ra, theo định lý của De Franchis, chúng ta hy vọng tồn tại hữu hạn các đẳng cấu như thế. Trong trường hợp này, chúng ta có một chặn trên hữu hạn của độ cao của  $f$  và



$g$ . Chú ý rằng nếu các hệ số của  $P(X)$  là các số trong trường  $\mathbf{k}$ , thì theo phỏng đoán của Mordell (nay là định lý Faltings), với mỗi  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$ , chỉ tồn tại các cặp điểm  $(x, y) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}$  với  $x \neq y$  sao cho  $P(x) = cP(y)$  nếu

(i)  $[F(X, Y, Z) = 0]$  khi  $c = 1$  hoặc

(ii)  $[F_c(X, Y, Z) = 0]$  khi  $c \neq 0, 1$

không chứa các thành phần có giống 0 hoặc 1.

Trong suốt luận văn, ta kí hiệu  $P(X)$  là đa thức bậc  $n$  trong  $\mathbf{k}[X]$ ,  $l$  là số các nghiệm phân biệt của đa thức  $P'(X)$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  là các nghiệm này, và  $m_1, m_2, \dots, m_l$  là số bội tương ứng với chúng. Do đó:

$$P'(X) = a(X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_l)^{m_l}, \text{ với } a \text{ là hằng số khác } 0. \quad (1)$$

Giả sử rằng:  $P(\alpha_i) \neq P(\alpha_j)$ , khi  $i \neq j$  (ta gọi đây là giả thiết I).

Nói cách khác,  $P$  là đơn ánh trên tập các nghiệm của  $P'$ . Để ý rằng giả thiết I là điều kiện chung, và sau này, ta thấy điều này giúp ta tính toán dễ dàng hơn. Để đơn giản, ta kí hiệu các trường hợp đặc biệt của  $P(X)$  như sau:

$$(1A) \quad l = 2 \quad \text{và} \quad \min\{m_1, m_2\} = 1;$$

$$(1B) \quad l = 2 \quad \text{và} \quad m_1 = m_2 = 1;$$

$$(1C) \quad l = 2 \quad \text{và} \quad m_1 = m_2 = 2;$$

$$(1D) \quad l = 3 \quad \text{và} \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1;$$

(1E)  $l = 3$  và  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , và tồn tại một hoán vị  $\phi$  của  $\{1, 2, 3\}$  sao

cho  $\phi(i) \neq i$  với  $i = 1, 2, 3$  và  $\omega$  thỏa mãn  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  sao cho

$$\omega = \frac{P(\alpha_i)}{P(\alpha_{\phi(i)})} \text{ với } i = 1, 2, 3.$$

Một tập hợp con  $\mathcal{U}$  của  $\mathbf{k}$  được gọi là *cứng affine* nếu không tồn tại một phép biến đổi tuyến tính  $T$  sao cho  $T(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ .

Điều kiện cần và đủ để một đa thức là duy nhất mạnh là:

#### **Định lý 2.1.4.1**

Gọi  $P(X)$  là một đa thức xác định như trên thỏa mãn giả thiết I.

- (I) (a) Khi  $g = 0$ .  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathbf{K}$  khi và chỉ khi tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của  $P$  là cứng affine và  $P$  không thỏa mãn (1A) hoặc (1E).
- (b) Khi  $g = 1$ .  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathbf{K}$  khi và chỉ khi tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của  $P$  là cứng affine và  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1E).
- (c) Khi  $g \geq 2$ . Giả sử  $\mathcal{U}$  là cứng affine.  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathbf{K}$  khi và chỉ khi  $l \geq 2g + 4$
- (II) Nếu  $|S| = 1$  thì  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathcal{O}_S$  khi và chỉ khi  $\mathcal{U}$  là cứng affine.

### Định lý 2.1.4.2

Gọi  $P(X)$  là một đa thức xác định như trên thỏa mãn giả thiết I và tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của nó là cứng affine. Giả sử rằng  $f, g$  là hai hàm phân biệt khác hằng trên  $\mathbf{K}$  sao cho  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  nào đó. Khi đó:

(a)  $h(f) = h(g) \leq 8g - 8$  nếu  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1D).

(b)  $h(f) = h(g) \leq 6g - 6 + 3|S|$  nếu  $f$  và  $g$  là  $S$ -nguyên và  $P$  không thỏa mãn (1B) hoặc (1D).

Như đã nói đến ở phần trước, sự xây dựng các 1-dạng chính quy không thực hiện được cho các trường hàm nói chung. Chúng ta giải quyết vấn đề này bằng cách so sánh độ cao của các hàm. Một thuận lợi khác của phương pháp trình bày trong luận văn này là có thể giải quyết cùng lúc trường hợp  $S$ -nguyên, tức là vành  $\mathcal{O}_S$ , với các hàm nguyên.

Phần tiếp theo của luận văn là đưa ra một điều kiện cần và đủ để một tập là tập xác định duy nhất.

Để đơn giản các định nghĩa, với  $\eta \in \mathbf{K}^*$ , ta đặt:

$$\nu_p^0(\eta) := \max\{0, \nu_p(\eta)\}, \quad \bar{\nu}_p^0(\eta) := \min\{1, \nu_p^0(\eta)\},$$

theo thứ tự là bậc của không điểm tại  $\mathbf{p}$  và các giá trị bị chặn của nó;

$$\text{và} \quad \nu_p^\infty(\eta) := -\min\{0, \nu_p(\eta)\}, \quad \bar{\nu}_p^\infty(\eta) := \min\{1, \nu_p^\infty(\eta)\}$$

theo thứ tự là bậc của cực điểm tại  $\mathbf{p}$  và các giá trị bị chặn của nó;

Cho  $\mathcal{U}$  là một tập con của  $\mathbf{k}$ . Ta định nghĩa:

$$E_{\bar{S}}^m(f, \mathcal{U}) = \bigcup_{a \in \mathcal{U}} \{(\mathbf{p}, \min\{m, v_{\mathbf{p}}^0(f - a)\}) \mid \mathbf{p} \notin S\},$$

trong đó,  $m$  là số nguyên dương hoặc  $\infty$ .

Gọi  $f, g$  là hai hàm khác hằng của  $\mathbf{K}$ . Chúng ta nói rằng  $f, g$  chung nhau  $\mathcal{U}$  trên  $\bar{S}$ , tính cả bội (gọi là CM) nếu  $E_{\bar{S}}^\infty(f, \mathcal{U}) = E_{\bar{S}}^\infty(g, \mathcal{U})$ ; và  $f, g$  chung nhau  $\mathcal{U}$  trên  $\bar{S}$ , không tính bội (gọi là IM) nếu  $E_{\bar{S}}^1(f, \mathcal{U}) = E_{\bar{S}}^1(g, \mathcal{U})$ .

Chúng ta hãy để ý rằng định nghĩa của chúng ta nói chung nhẹ hơn của Gross vì  $S$  có thể được chọn là một tập hữu hạn bất kỳ của  $C$ . Một tập  $\mathcal{U}$  được gọi là tập xác định duy nhất trên  $\bar{S}$  CM (tương ứng IM) đối với một họ con  $\mathcal{F}$  của  $\mathbf{K}$  (chẳng hạn, chọn  $\mathcal{F}$  là  $\mathbf{K}$  hoặc  $\mathcal{O}_S$ ) nếu  $f$  và  $g$  chung nhau  $\mathcal{U}$  trên  $\bar{S}$  CM (tương ứng IM) thì ta phải có  $f \equiv g$ .

Kết quả chính là:

### Định lý 2.2.2.3

Cho  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  là cứng affine và cũng là một tập con của  $\mathbf{k}$ . Đặt  $P(X) = (X - u_1) \dots (X - u_n)$  thỏa mãn giả thiết I và  $P'(X)$  như trên. Giả sử  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1D). Giả sử thêm rằng  $l \geq 2g + 4$  nếu  $g \geq 2$ . Khi đó  $\mathcal{U}$  là tập xác định duy nhất trên  $\bar{S}$ :

- (a) IM trên  $\mathbf{K}$  nếu  $n > \max\{2l + 13, 2l + 2 + 13g + 2|S|\}$ ;
- (b) CM trên  $\mathbf{K}$  nếu  $n > \max\{2l + 7, 2l + 2 + 7g + 2|S|\}$ ;
- (c) IM trên  $\mathcal{O}_S$  nếu  $n > \max\{2l + 6, 2l - 5 + 13g + 6|S|\}$ ;

(d) CM trên  $\mathcal{O}_S$  nếu  $n > \max\{2l+3, 2l-2+7g+3|S|\}$ .

#### Định lý 2.2.2.4

Cho  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  là cứng affine và cũng là một tập con của  $\mathbf{k}$ . Đặt  $P(X) = (X - u_1) \dots (X - u_n)$  thỏa mãn giả thiết I và  $P'(X)$  như trên. Giả sử  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1D).

(I) Giả sử rằng  $f$  và  $g$  chung nhau  $\mathcal{U}$  trên  $\bar{S}$

(a) IM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 4|S|$  nếu  $n \geq 2l + 13$ ;

(b) CM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 22g - 8 + 4|S|$  nếu  $n \geq 2l + 7$ .

(II) Giả sử rằng  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên chung nhau  $\mathcal{U}$  trên  $\bar{S}$

(a) IM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 12|S|$  nếu  $n \geq 2l + 6$ ;

(b) CM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 22g - 8 + 10|S|$  nếu  $n \geq 2l + 3$ .

Nội dung chính của luận văn là chứng minh 4 định lý trên, được dựa vào tài liệu [1]. Cụ thể gồm 2 chương như sau:

#### Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Chương này sẽ trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản, chứng minh một số định lý và bổ đề được dùng trong luận văn, gồm:

1. Trường định chuẩn không Acsimet, trường số phức p-adic.
2. Hàm chỉnh hình và hàm phân hình trên trường các số phức p-adic.
3. Các trường hàm đại số và số chiều của đa tạp xạ ảnh.

4. Đường cong đại số. Giống của đường cong đại số.

**Chương 2. Đa thức duy nhất và tập xác định duy nhất cho hàm phân hình trên trường không Acsimet.**

Nội dung của chương này là đưa ra các điều kiện cần và đủ để một đa thức là duy nhất mạnh và một tập là xác định duy nhất.

Dù đã cố gắng hết sức nhưng do kiến thức và thời gian có hạn, luận văn khó tránh khỏi những sai sót. Kính mong quý thầy cô và bạn đọc đóng góp để luận văn được hoàn thiện hơn.

## CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

### 1.1. Trường định chuẩn không Acsimet, trường số phức p-adic.

#### 1.1.1. Các định nghĩa

##### 1.1.1.1. Định nghĩa

Cho  $X$  là một tập khác rỗng. Một *khoảng cách*, hay *metric*, trên  $X$  là một hàm  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  thỏa mãn:

- (1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , với mọi  $z \in X$ .

##### 1.1.1.2. Định nghĩa

Cho  $\mathbf{k}$  là một trường. Một *chuẩn* trên trường  $\mathbf{k}$  là một ánh xạ  $\|\cdot\| : \mathbf{k} \rightarrow \mathbb{R}^+$  thỏa mãn:

- (1)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2)  $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|, \forall x, y \in \mathbf{k}$
- (3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbf{k}$

##### 1.1.1.3. Ví dụ

- (1) Trên  $\mathbb{Q}$  và  $\mathbb{R}$ , giá trị tuyệt đối thông thường là chuẩn.
- (2) Cho  $\mathbf{k}$  là một trường. Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} &|\cdot| : \mathbf{k} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ &x \mapsto |x| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó  $|\cdot|$  là một chuẩn trên  $\mathbf{k}$ , gọi là chuẩn tầm thường.

### 1.1.2. Metric trên trường số hữu tỷ

#### 1.1.2.1. Định nghĩa

Cho  $p$  là một số nguyên tố. Với số nguyên không âm  $a$ , đặt  $\text{ord}_p a$  là lũy thừa cao nhất của  $p$  chia hết  $a$ , tức là số  $m$  lớn nhất sao cho  $a \equiv 0 \pmod{p^m}$ .

Qui ước:  $\text{ord}_p 0 = \infty$ .

Với số hữu tỷ  $x = \frac{a}{b}$ , ta định nghĩa  $\text{ord}_p x = \text{ord}_p a - \text{ord}_p b$ .

#### 1.1.2.2. Mệnh đề

Cho  $p$  là một số nguyên tố. Với mọi  $x, y \in \mathbb{Q}$ , ta có :

$$(1) \text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p x + \text{ord}_p y$$

$$(2) \text{ord}_p(x + y) \geq \min\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}$$

#### 1.1.2.3. Mệnh đề

Ánh xạ  $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$  xác định như sau:  $|x|_p = \begin{cases} p^{-\text{ord}_p x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

Khi đó  $|\cdot|_p$  là chuẩn trên  $\mathbb{Q}$ .



#### 1.1.2.4. Định nghĩa

Một chuẩn  $\| \cdot \|$  trên trường  $\mathbf{k}$  được gọi là *chuẩn không Acsimet* nếu nó thỏa mãn thêm điều kiện:  $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ , với mọi  $x, y \in \mathbf{k}$ .

#### 1.1.2.5. Ví dụ

Chuẩn tầm thường trên  $\mathbf{k}$  là chuẩn không Acsimet trên  $\mathbf{k}$ .

#### 1.1.2.6. Mệnh đề

$| \cdot |_p$  là chuẩn không Acsimet trên  $\mathbb{Q}$ .

### 1.1.3. Xây dựng trường số phức p-adic

#### 1.1.3.1. Định lý (Định lý Ostrowski)

Mọi chuẩn không tầm thường trên  $\mathbb{Q}$  tương đương với  $| \cdot |_p$  với  $p$  là số nguyên tố hoặc  $p = \infty$ .

#### *Chứng minh*

Giả sử  $\| \cdot \|$  là một chuẩn không tầm thường trên  $\mathbb{Q}$ . Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1 :  $\exists n \in \mathbb{N} : |n| > 1$ .

Gọi  $n_0$  là số tự nhiên bé nhất sao cho  $\|n_0\| > 1$ . Ta đặt

$$n_0^\alpha = \|n_0\|, (\alpha = \log_{n_0} \|n_0\|)$$

Ta sẽ chứng minh  $\|n\| = n^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Giả sử  $n = a_0 + a_1 n_0 + \dots + a_s n_0^s$ , với  $0 \leq a_i < n_0; a_s \neq 0; n_0^s \leq n < n_0^{s+1}$ . Ta có :

$$\|n\| \leq \|a_0\| + \|a_1\| \cdot \|n_0\| + \dots + \|a_s\| \|n_0^s\|$$

Mặt khác do  $a_i < n_0$  nên  $\|a_i\| \leq 1, \forall i = 1..s$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|n\| &\leq 1 + \|n_0\| + \dots + \|n_0^s\| \\ &\leq 1 + n_0^\alpha + \dots + n_0^{s\alpha} \\ \Rightarrow \|n\| &\leq n_0^{s\alpha} \left( 1 + \frac{1}{n_0^s} + \dots + \frac{1}{n_0^{s\alpha}} \right). \end{aligned}$$

Đặt  $C = 1 + \frac{1}{n_0^s} + \dots + \frac{1}{n_0^{s\alpha}}$  là hằng số chỉ phụ thuộc vào  $n_0$ , không phụ

thuộc vào  $n$ , ta được  $\|n\| \leq C.n_0^{s\alpha}$ .

Mà  $n_0^s \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$  nên  $\|n\| \leq C.n^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Khi đó, với mọi số tự nhiên  $k$ , ta có  $\|n^k\| \leq C.(n^k)^\alpha \Leftrightarrow \|n\| \leq \sqrt[k]{C}.n^\alpha$

Cho  $k \rightarrow +\infty$  ta được  $\|n\| \leq n^\alpha$  (1)

Mặt khác,  $\|n_0^{s+1}\| = \|n_0^{s+1} - n + n\| \leq \|n_0^{s+1} - n\| + \|n\| \Rightarrow \|n\| \geq \|n_0^{s+1}\| - \|n_0^{s+1} - n\|$

Mà  $\|n_0\| = n_0^\alpha$  nên  $\|n_0^{s+1}\| = n_0^{\alpha(s+1)}$

Suy ra  $\|n\| \geq n_0^{\alpha(s+1)} - \|n_0^{s+1} - n\|$

Theo chứng minh trên, ta có  $\|n_0^{s+1} - n\| \leq (n_0^{s+1} - n)^\alpha$  và  $n \geq n_0^s$ .

Từ các kết quả trên ta được

$$\|n\| \geq n_0^{\alpha(s+1)} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^\alpha \Leftrightarrow \|n\| \geq n_0^{\alpha(s+1)} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^\alpha\right)$$

Đặt  $C' = 1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^\alpha$ , ta được  $\|n\| \geq C' \cdot n_0^{\alpha(s+1)}$

Mà  $n < n_0^{s+1}$  nên  $\|n\| \geq C' \cdot n^\alpha$

Do đó, với mọi số tự nhiên  $k$ , ta có:

$$\|n^k\| \geq C' \cdot n^{k\alpha} \Leftrightarrow \|n\| \geq \sqrt[k]{C'} \cdot n^\alpha.$$

Cho  $k \rightarrow +\infty$  ta được  $\|n\| \geq n^\alpha$  (2)

Từ (1) và (2) ta được  $\|n\| = n^\alpha$

Vậy ta đã chứng minh được  $\|n\| = n^\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Do đó, với  $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  thì

$$\|x\| = \left\| \frac{m}{n} \right\| = \frac{\|m\|}{\|n\|} = \frac{m^\alpha}{n^\alpha} = \left( \frac{m}{n} \right)^\alpha = x^\alpha$$

Vậy  $\| \cdot \| \sim | \cdot |$ .

Trường hợp 2 :  $\forall n \in \mathbb{N}, |n| \leq 1$ .

Khi đó  $\exists n \in \mathbb{N}, \|n\| < 1$ .

Gọi  $n_0$  là số tự nhiên bé nhất sao cho  $\|n_0\| < 1$ . Khi đó  $n_0 = p$  với  $p$  là số nguyên tố vì ngược lại, ta có :

$$n_0 = n_1.n_2, (0 < n_1 < n_2 < n_0) \Rightarrow \|n_0\| = \|n_1\|.\|n_2\| < 1$$

Suy ra  $\|n_1\| < 1$  và  $\|n_2\| < 1$  ( mâu thuẫn với sự lựa chọn  $n_0$  )

Tiếp theo, ta chứng minh với mỗi số nguyên  $m$  mà  $(m, p) = 1$  thì ta có  $\|m\| = 1$ .

Thật vậy, giả sử  $\|m\| < 1$  thì tồn tại  $k \in \mathbb{N}^* : \|m\|^k < \frac{1}{2}, \|p\|^k < \frac{1}{2}$ .

Mặt khác, do  $(m, p) = 1$  nên  $(m^k, p^k) = 1$ . Suy ra  $\exists u, v \in \mathbb{Z} : u.m^k + v.p^k = 1$

Do đó:  $1 = \|u.m^k + v.p^k\| \leq \|m^k\| + \|p^k\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  ( vô lý)

Vậy nếu  $(m, p) = 1$  thì ta có  $\|m\| = 1$ .

Khi đó với mọi  $x \in \mathbb{Q}, x = p^\alpha \frac{m}{n}$ , với ,ta được

$$\|x\| = \|p^\alpha\| \frac{\|m\|}{\|n\|} = \|p^\alpha\|$$

Nên  $\| \cdot \| \sim | \cdot |_p$

Từ đó, với mỗi  $x \in \mathbb{Q}^+$ , ta có

$$\prod_p |x|_p = 1$$

trong đó  $\prod_p |x|_p$  lấy với mọi số nguyên tố trong  $\mathbb{Q}$ , kể cả  $p = +\infty$ .

Đầy đủ hóa  $\mathbb{Q}$  bởi tôpô cảm sinh từ  $|\cdot|_p$ , ta thu được một trường, được kí hiệu là  $\mathbb{Q}_p$ , và chuẩn  $|\cdot|_p$  trên  $\mathbb{Q}$  được mở rộng thành chuẩn không Acsimet trên  $\mathbb{Q}_p$ , vẫn kí hiệu là  $|\cdot|_p$  và thỏa mãn các tính chất sau :

- (i) Tồn tại phép nhúng  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_p$  và chuẩn cảm sinh bởi  $|\cdot|_p$  trên  $\mathbb{Q}$  qua phép nhúng là chuẩn p-adic. Do vậy ta đồng nhất  $\mathbb{Q}$  với ảnh của nó qua phép nhúng  $\mathbb{Q}_p$ .
- (ii)  $\mathbb{Q}$  trù mật trong  $\mathbb{Q}_p$ .
- (iii)  $\mathbb{Q}_p$  đầy đủ.

Trường  $\mathbb{Q}_p$  thỏa mãn (i), (ii), và (iii) là duy nhất, sai khác một đẳng cấu, bảo toàn giá trị của chuẩn p-adic, gọi là *trường các số p-adic*.

Hơn nữa,  $\mathbb{Q}_p$  còn có tính chất sau :

- (iv) Với mỗi  $x \in \mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ , tồn tại một số nguyên  $\nu_p(x)$  sao cho  $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$ , tức là  $\nu_p$  trong  $\mathbb{Q}$  được mở rộng lên  $\mathbb{Q}_p$ . Nói cách khác, tập tất cả các giá trị của  $\mathbb{Q}$  và  $\mathbb{Q}_p$  qua  $|\cdot|_p$  là trùng nhau và đó là  $\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .

Từ tính chất (iv) ta thấy

$$\mathbb{Q}_p(x; r) = \mathbb{Q}_p \left[ x; \frac{r}{p} \right], \quad x \in \mathbb{Q}_p, r \in \mathbb{R}^+.$$

Do đó vành định giá  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Q}_p[0;1] = \mathbb{Q}_p(0;p)$  vừa mở, vừa đóng và được gọi là vành số nguyên  $p$ -**adic**, kí hiệu  $\mathbb{Z}_p$ . Với mọi  $n \in \mathbb{Z}^+$ , vành  $\mathbb{Z}^+$  được phủ bởi

$$\mathbb{Q}_p[k; p^{-n}] = k + p^n \mathbb{R}_p, \quad (k = 0, 1, \dots, p^n - 1)$$

suy ra  $\mathbb{Z}_p$  compact và do đó  $\mathbb{Q}_p$  compact địa phương. Như vậy ta có

$$\mathbb{Z}_p / p^n \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z},$$

và các lớp  $p^n \mathbb{Z}_p$  trong  $\mathbb{Z}_p$  là các quả cầu trong tôpô p-adic.

Các tập  $\mathbb{Q}_p[k; p^{-n}] = p^n \mathbb{Z}_p, (n \in \mathbb{Z})$  tạo thành một hệ cơ bản các lân cận của  $0 \in \mathbb{Q}_p$ .

Không gian  $\mathbb{Q}_p$  không liên thông nhưng là không gian tôpô Hausdorff.

Kí hiệu  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  là bao đóng đại số của  $\mathbb{Q}_p$ .

Ta mở rộng giá trị tuyệt đối  $p$ -**adic** trên  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  như sau.

Lấy  $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ , khi đó  $x$  thuộc trường mở rộng hữu hạn  $\mathbb{Q}_p(x)$  và do đó ta có thể định nghĩa  $||_p$  bằng cách sử dụng sự mở rộng duy nhất của chuẩn

$p$ -**adic** trên  $\mathbb{Q}_p(x)$ . Do đó ta được hàm

$$|| \cdot || : \overline{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

là sự mở rộng của chuẩn p-adic trên  $\mathbb{Q}_p$ . Ta chứng minh được hàm này cũng là một chuẩn. Chuẩn  $|| \cdot ||$  trên  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  cũng gọi là chuẩn p-adic. Tuy nhiên,  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  không đầy đủ với chuẩn này.

Đầy đủ hóa của  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  ứng với tôpô sinh bởi  $|\cdot|_p$  là một trường, được kí hiệu là  $\mathbb{C}_p$ , chuẩn này vẫn được kí hiệu là  $|\cdot|_p$ , thỏa mãn các điều kiện sau :

- (i) Tồn tại phép nhúng  $\overline{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbb{C}_p$  và chuẩn sinh bởi  $|\cdot|_p$  trên  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  qua phép nhúng là chuẩn  $p$ -**adic**. Do vậy, ta đồng nhất  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  với ảnh của nó qua phép nhúng trong  $\mathbb{C}_p$ .
- (ii)  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  trù mật trong  $\mathbb{C}_p$ .
- (iii)  $\mathbb{C}_p$  đầy đủ.

Trường  $\mathbb{C}_p$  thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), và (iii) là suy nhất, sai khác một đẳng cấu, bảo toàn chuẩn  $|\cdot|_p$ , được gọi là *trường các số phức p-adic*.

Ngoài ra,  $\mathbb{C}_p$  còn có các tính chất sau:

- (iv) Với mỗi  $x \in \mathbb{C}_p^* = \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$ , tồn tại số hữu tỷ  $\nu_p(x)$  sao cho  $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$ , tức là  $\nu_p$  trong  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  được mở rộng đến  $\mathbb{C}_p$  là ảnh của  $\mathbb{C}_p^*$  qua  $\nu_p$  là  $\mathbb{Q}$ .
- (v)  $\mathbb{C}_p$  đóng đại số nhưng không compact địa phương.

## 1.2. Hàm chỉnh hình và hàm phân hình trên trường các số phức p-adic

### 1.2.1. Hàm chỉnh hình trên trường các số phức p-adic

Ta kí hiệu  $\mathbf{k}$  là trường đóng đại số, đầy đủ với chuẩn không Archimét và có đặc số 0.

Các khái niệm về dãy, chuỗi và sự hội tụ của dãy, chuỗi trong trường không Acsimet tương tự như trong trường Acsimet. Tuy nhiên, với trường có chuẩn không Acsimet, ta có một số tính chất đặc biệt như sau:

### 1.2.1.1. Định lý

Giả sử  $\{x_n\}$  là một dãy trong  $\mathbf{k}$ . Dãy  $\{x_n\}$  là một dãy Cauchy nếu và chỉ nếu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$$

### Chứng minh

Điều kiện đủ là hiển nhiên theo định nghĩa.

Ta chứng minh điều kiện cần.

Với mọi  $p, n \in \mathbb{N}$ , ta có:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \dots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \max\{|x_{n+p} - x_{n+p-1}|, |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}|, \dots, |x_{n+1} - x_n|\} \end{aligned}$$

Vì  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$  nên ta có ngay điều cần chứng minh.

### 1.2.1.2. Định lý 1.12

Chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \in \mathbf{k}$  hội tụ khi và chỉ khi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Khi đó ta có

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \max_n |a_n|$$

Chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbf{k}$  hội tụ tại  $z$  khi và chỉ khi  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z^n| = 0$



### 1.2.1.3. Mệnh đề

Chuỗi lũy thừa  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbf{k}$ . Đặt  $\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Khi đó:

- i) Nếu  $\rho = 0$  thì  $f(z)$  chỉ hội tụ tại  $z = 0$ .
- ii) Nếu  $\rho = +\infty$  thì  $f(z)$  hội tụ với mọi  $z \in \mathbf{k}$ .
- iii) Nếu  $0 < \rho < +\infty$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rho^n = 0$  thì  $f(z)$  hội tụ khi và chỉ khi

$$|z| \leq \rho$$

- iv) Nếu  $0 < \rho < +\infty$  và  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rho^n \neq 0$  thì  $f(z)$  hội tụ khi và chỉ khi

$$|z| < \rho$$

Khi đó,  $\rho$  được gọi là bán kính hội tụ của  $f(z)$ .

Tập hợp tất cả các chuỗi lũy thừa với  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbf{k}$  với hai phép

toán cộng và nhân tạo thành một vành.

Đặt  $A_r(\mathbf{k}) = \{f(z) \mid \text{bán kính hội tụ } \rho \leq r\}$ .

$A(\mathbf{k}) = A_{\infty}(\mathbf{k})$  - tập hợp các hàm nguyên trên  $\mathbf{k}$ .

Ta có  $A_r(\mathbf{k}) = \bigcap_{s \leq r} A_s(\mathbf{k})$ .

### 1.2.1.4. Định nghĩa

Với  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_{\rho}(\mathbf{k})$  và  $0 < r \leq \rho$ , ta định nghĩa

$$+ \text{ Số hạng lớn nhất } \mu(r, f) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n$$

+ Chỉ số ứng với số hạng lớn nhất là  $\nu(r, f) = \{n \mid \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \mu(r, f)\}$ .

Với  $r = 0$ , ta định nghĩa  $\mu(0, f) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \mu(r, f)$ ;  $\nu(0, f) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \nu(r, f)$

Ta có các kết quả sau :

### 1.2.1.5. Mệnh đề

Với  $r > 0$ , hàm  $\mu(r, \cdot) : A_r(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  thỏa mãn:

- i)  $\mu(r, f) \geq 0$ ;  $\mu(r, f) = 0$  khi và chỉ khi  $f = 0$ .
- ii)  $\mu(r, fg) = \mu(r, f)\mu(r, g)$ ;  $\mu(r, \lambda f) = |\lambda|\mu(r, f)$
- iii)  $\mu(r, f + g) \leq \max\{\mu(r, f); \mu(r, g)\}$

Khi đó  $\mu(r, \cdot)$  là một chuẩn không Acsimet trên  $A_r(\mathbf{k})$  và

- iv)  $A_r(\mathbf{k})$  đầy đủ với chuẩn  $\mu(r, \cdot)$
- v) Vành đa thức  $\mathbf{k}[z]$  trù mật trong  $A_r(\mathbf{k})$  theo chuẩn  $\mu(r, \cdot)$ .

### 1.2.1.6. Định lý

Với  $f \in A_r(\mathbf{k}) \setminus \{0\}$ ,  $r > 0$ , tồn tại đa thức  $g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_\nu z^\nu \in \mathbf{k}[z]$

với  $\nu = \nu(r, f)$  và chuỗi lũy thừa  $h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ ,  $c_n \in \mathbf{k}$  thỏa mãn:

- i)  $f(z) = h(z)g(z)$
- ii)  $\mu(r, f) = |b_\nu| r^\nu$
- iii)  $h \in A_r(K)$
- iv)  $\mu(r, h - 1) < 1$  và  $\mu(f - g) < \mu(r, f)$

### 1.2.1.7. Định nghĩa

Với  $U \subset \mathbf{k}$  là tập mở, hàm  $f : U \rightarrow \mathbf{k}$  được gọi là khả vi tại  $z_0 \in \mathbf{k}$  nếu tồn tại

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} := f'(z_0)$$

Hàm  $f$  được gọi là khả vi trên  $U$  nếu  $f$  khả vi tại mọi  $z \in U$ .

### 1.2.1.8. Định nghĩa

Giả sử  $D$  là tập vô hạn trong  $\mathbf{k}$ ,  $R(D)$  là tập các hàm hữu tỷ không có cực điểm trong  $D$ . Khi đó với mọi  $h \in R(D)$ , đặt  $\|h\|_D = \sup_{z \in D} |h(z)|$

Ta kí hiệu  $H(D)$  là đầy đủ hóa của  $R(D)$  theo tôpô sinh bởi chuẩn hội tụ đều trên  $D$ .

Mỗi phần tử của  $H(D)$  được gọi là một hàm chỉnh hình trên  $D$ .

### 1.2.1.9. Định nghĩa

Giả sử  $D \subset \mathbf{k}$  không có điểm cô lập. Hàm  $f : D \rightarrow \mathbf{k}$  được gọi là chỉnh hình địa phương nếu với mọi  $a \in D$ , tồn tại  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $\{a_n\} \subset \mathbf{k}$  sao cho

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \text{ với mọi } z \in D \cap \mathbf{k}[a; r]$$

### 1.2.1.10. Mệnh đề

Nếu hàm  $f$  chỉnh hình địa phương trên tập mở  $D$  thì nó có đạo hàm mọi cấp trên  $D$ . Điểm  $z_0 \in D$  là nghiệm bội  $q$  của  $f$  nếu và chỉ nếu  $f^{(n)}(z_0) = 0$ ,  $\forall n < q$  và  $f^{(q)}(z_0) \neq 0$ .

### 1.2.2. Hàm phân hình trên trường các số phức p-adic

#### 1.2.2.1. Định nghĩa

Giả sử  $D \subset \mathbf{k}$  không có điểm cô lập. Hàm  $f : D \rightarrow \mathbf{k} \cup \{\infty\}$  được gọi là hàm phân hình trên  $D$  nếu tồn tại một tập đếm được  $S \subset D$ ,  $S$  không có điểm giới hạn trong  $D$  sao cho hàm  $f$  chỉnh hình trên  $D \setminus S$ .

Kí hiệu  $M(D)$  là tập các hàm phân hình trên  $D$ .

#### 1.2.2.2. Định nghĩa

Giả sử  $D \subset \mathbf{k}$  không có điểm cô lập. Hàm  $f : D \rightarrow \mathbf{k} \cup \{\infty\}$  được gọi là hàm phân hình địa phương trên  $D$  nếu  $\forall a \in D, r \in \mathbb{R}^+, q \in \mathbb{Z}^+$  và  $a_n \in \mathbf{K}$  sao cho

$$f(z) = \sum_{n=-q}^{\infty} a_n (z-a)^n, \text{ với mọi } z \in D \cap \mathbf{k}[a; r]$$

Đặt  $M_\rho(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}(0; \rho))$ . Ta có các kết quả sau:

#### 1.2.2.3. Mệnh đề

Giả sử  $f \in M_\rho(\mathbf{k})$ . Khi đó tồn tại  $g, h \in A_r(\mathbf{k})$  sao cho  $f = \frac{g}{h}$  và

$$\mu(r, f) = \frac{\mu(r, g)}{\mu(r, h)} \text{ với } 0 \leq r < \rho$$

$$\text{Đặc biệt, } \mu(r, \frac{1}{f}) = \frac{1}{\mu(r, f)}$$

#### 1.2.2.4. Mệnh đề

Với  $0 < r < \rho$ , hàm  $\mu(r, \cdot): M_\rho(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  thỏa mãn:

- i)  $\mu(r, f) = 0$  khi và chỉ khi  $f = 0$ ,
- ii)  $\mu(r, f_1 + f_2) \leq \max\{\mu(r, f_1); \mu(r, f_2)\}$ ,
- iii)  $\mu(r, f_1 \cdot f_2) = \mu(r, f_1)\mu(r, f_2)$ .

### 1.3. Trường các hàm đại số và số chiều của đa tạp xạ ảnh

#### 1.3.1. Các định nghĩa

##### 1.3.1.1. Định nghĩa

Cho  $\mathbf{k}$  là một trường,  $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$  là không gian affine  $n$  chiều trên  $\mathbf{k}$ .

Đặt  $V(F)$  là tập hợp các không điểm của  $F$ , với  $F \in \mathbf{k}[X_1, X_2, \dots, X_n]$

Một cách tổng quát, gọi  $S$  là tập hợp các đa thức bất kỳ trong  $\mathbf{k}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , ta đặt  $V(S) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid F(P) = 0, \forall F \in S\}$ .

Một tập  $X \subset \mathbb{A}^n$  được gọi là một tập đại số affine nếu tồn tại  $S$  sao cho  $X = V(S)$ .

##### 1.3.1.2. Định nghĩa

Một tập đại số affine  $V \subset \mathbb{A}^n$  gọi là khả quy nếu  $V = V_1 \cup V_2$ , với  $V_1, V_2$  là các tập đại số trong  $\mathbb{A}^n, V \neq V_1, V \neq V_2$ . Ngược lại ta gọi  $V$  là bất khả quy.

##### 1.3.1.3. Định nghĩa

Một tập đại số affine được gọi là một đa tạp affine.

##### 1.3.1.4. Định nghĩa

Cho  $v \subset \mathbb{A}^n$  là một đa tạp khác rỗng. Khi đó  $I(V)$  là một ideal nguyên tố trong  $\mathbf{k}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ , vì vậy  $\mathbf{k}[X_1, X_2, \dots, X_n]/I(V)$  là một miền nguyên. Đặt  $\Gamma(V) = \mathbf{k}[X_1, X_2, \dots, X_n]/I(V)$  và gọi là vành tọa độ. Do đó ta có thể tạo ra một trường các thương của  $\Gamma(V)$ . Trường này được gọi là trường các hàm hữu tỷ trên  $V$ , kí hiệu  $\mathbf{k}(V)$ . Mỗi phần tử của  $\mathbf{k}(V)$  gọi là một hàm hữu tỷ trên  $V$ .

### 1.3.1.5. Định nghĩa

Cho  $f$  là một hàm hữu tỷ trên  $V$ . Ta nói rằng  $f$  xác định tại  $P$  nếu với  $a, b \in \Gamma(V), f = \frac{a}{b}$  thì  $b(P) \neq 0$ .

Đặt  $\mathcal{O}_P(V) = \{f \in \mathbf{k}(V) \mid f \text{ xác định tại } P\}$  và gọi  $\mathcal{O}_P(V)$  là vành địa phương của  $V$  tại  $P$ .

### 1.3.2. Số chiều của đa tạp xạ ảnh

#### 1.3.2.1. Định nghĩa

Cho đa tạp  $X$ ,  $\mathbf{k}(X)$  là một mở rộng hữu hạn của  $\mathbf{k}$ . Số chiều của  $X$ , kí hiệu  $\dim X$ , là bậc mở rộng siêu việt của  $\mathbf{k}(X)$  trên  $\mathbf{k}$ .

#### 1.3.2.1. Mệnh đề

- (i) Nếu  $U$  là một tập con mở của  $X$  thì  $\dim U = \dim X$ .
- (ii) Gọi  $V^*$  là bao đóng xạ ảnh của đa tạp affine  $V$  thì  $\dim V^* = \dim V$ .
- (iii) Một đa tạp có số chiều bằng 0 khi và chỉ khi nó là một điểm.
- (iv) Mọi đa tạp con đóng thật sự của một đường cong là một điểm.
- (v) Một đa tạp con đóng có số chiều bằng 1 khi và chỉ khi nó là một đường cong.

## 1.4. Đường cong đại số và giống của đường cong đại số

### 1.4.1. Đường cong đại số

#### 1.4.1.2. Định nghĩa

Một điểm trong mặt phẳng xạ ảnh biểu diễn dưới dạng bộ ba  $(x_0, x_1, x_2)$  với  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 > 0$ , hay một cách tương đương là  $(\rho x_0, \rho x_1, \rho x_2)$  với  $\rho \neq 0$ .

Giả sử  $F(X_0, X_1, X_2) \in \mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$  là một đa thức thuần nhất khác hằng. Tập hợp các điểm  $(x_0, x_1, x_2)$  sao cho  $F(x_0, x_1, x_2) = 0$  được gọi là một đường cong đại số.

#### 1.4.1.3. Định lý

Mỗi đường cong  $\Gamma$  xác định bởi phương trình  $F = 0$  có bậc  $n$  cắt đường thẳng  $L$  tại ít nhất một điểm và tại tối đa  $n$  điểm, trừ trường hợp  $L$  nằm trong  $\Gamma$ .

#### 1.4.1.4. Hệ quả

Nếu mọi điểm của  $L$  nằm trên  $\Gamma$  thì  $F$  chia hết cho  $a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ .

#### 1.4.1.5. Định lý

Cho  $F(X_0, X_1, X_2)$  là đa thức thuần nhất bất khả quy. Nếu  $G$  là một đa thức thuần nhất triệt tiêu tại mọi điểm của  $F = 0$  thì  $G$  chia hết  $F$  trong  $\mathbf{k}[X_0, X_1, X_2]$ .

#### 1.4.1.6. Định lý

Nếu đường cong  $\Gamma$  được cho bởi phương trình  $F=0$ , với  $F=cF_1^{r_1}F_2^{r_2}\dots F_m^{r_m}$ ,  $c$  là một đơn vị của vành,  $F_i$  là các đa thức bất khả quy khác đơn vị,  $F_i \neq F_j$  không liên kết với  $i \neq j$  và  $r_i > 0$ . Khi đó, một phương trình khác của  $\Gamma$  có dạng  $G=0$  với  $G=dF_1^{s_1}F_2^{s_2}\dots F_m^{s_m}$  với  $d$  là đơn vị và  $s_i > 0$ .

Đặc biệt, lấy các số  $r_i = 1$ , ta có:

#### 1.4.1.7. Hệ quả

Phương trình của  $\Gamma$  có bậc nhỏ nhất có dạng  $cF_1F_2\dots F_m=0$ . Vì vậy, nếu không kể đến các nhân tử  $c$ , ta có thể nói rằng phương trình của  $\Gamma$  với bậc nhỏ nhất là duy nhất.

#### 1.4.1.8. Định nghĩa

Một đường cong  $\Gamma$  được gọi là khả quy nếu nó là hợp thật sự của hai đường cong khác, tức là  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  với  $\Gamma \neq \Gamma_1, \Gamma \neq \Gamma_2$ .  $\Gamma$  được gọi là bất khả quy nếu nó không khả quy.

#### 1.4.1.9. Định lý

Một đường cong  $\Gamma$  là bất khả quy khi và chỉ khi phương trình với bậc nhỏ nhất của nó  $F=0$  là đa thức bất khả quy.

#### 1.4.1.10. Định lý

Cho  $\Gamma_1, \Gamma_2$  là đường cong bất khả quy có phương trình lần lượt là  $F_1=0; F_2=0$  với  $F_1, F_2$  là các đa thức bất khả quy. Khi đó  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  khi và chỉ khi  $F_1, F_2$  là các đa thức liên kết.

#### 1.4.1.11. Định lý



Cho  $\Gamma$  là đường cong có phương trình  $F = 0$  (không nhất thiết là có bậc nhỏ nhất) và  $\Delta$  là đường cong bất khả quy có bậc nhỏ nhất với phương trình  $G = 0$ . Khi đó  $\Delta$  chứa trong  $\Gamma$  khi và chỉ khi  $F$  chia hết cho  $G$ , tức là  $G$  là một trong các nhân tử bất khả quy của  $F$ . Đường cong bất khả quy  $\Delta$  chứa trong  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_s$  khi và chỉ khi nó chứa trong một đường cong  $\Gamma_i$ .

#### 1.4.1.12. Hệ quả

Nếu  $\Gamma, \Delta$  là các đường cong bất khả quy và  $\Delta \subset \Gamma$  thì  $\Delta = \Gamma$ .

#### 1.4.1.13. Định lý

Đường cong  $\Gamma$  có thể được viết dưới dạng hợp của các đường cong bất khả quy theo một cách duy nhất.

#### 1.4.1.14. Định lý

Cho  $F(X_0, X_1, X_2) = 0$  là một đa thức bất khả quy thuần nhất với  $F \neq C$ . Nếu  $G(X_0, X_1, X_2) = 0$  là một đa thức thuần nhất không chia hết  $F$  thì  $G$  chỉ triệt tiêu tại một số điểm hữu hạn của  $F = 0$ .

#### 1.4.1.15. Định lý

Cho  $G, F \in \mathbf{k}[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$  với  $F$  bất khả quy. Nếu  $G$  triệt tiêu tại các điểm mà  $F$  triệt tiêu thì  $G \equiv 0(F)$  (trong  $\mathbf{k}[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ ).

### 1.4.2. Giống của đường cong

#### 1.4.2.1. Định nghĩa

Một ước trên  $X$  là một tổng hình thức  $D = \sum_{P \in X} n_P P$ ,  $n_P \in \mathbb{Z}$  và  $n_P = 0$  với hầu hết các điểm trừ một số hữu hạn các điểm  $P$ .

#### 1.4.2.2. Định nghĩa

Cho  $D = \sum_{P \in X} n_P P$  là một ước trên  $X$ . Ta định nghĩa:

$$L(D) = \{f \in \mathbf{K} \mid \text{ord}_P(f) \geq -n_P, \forall P \in X\}.$$

Do đó  $f \in L(D)$  nếu  $\text{div}(f) + D \geq 0$  hoặc  $f = 0$ . Khi đó  $L(D)$  tạo thành một không gian vector hữu hạn chiều, kí hiệu  $\dim L(D) = l(D)$ .

#### 1.4.2.3. Định lý (Định lý Riemann)

Tồn tại một số nguyên  $g$  sao cho  $l(D) \geq \deg(D) + 1 - g$  với mọi ước  $D$  của  $X$ . Số  $g$  nhỏ nhất trong các số đó được gọi là giống của  $X$ . Giống là một số nguyên không âm.

#### 1.4.2.4. Hệ quả

Nếu  $l(D_0) = \deg(D_0) + 1 - g$  và  $D \geq D_0$  thì  $l(D) = \deg(D) + 1 - g$ .

#### 1.4.2.5. Hệ quả

Nếu  $x \in \mathbf{K}, x \notin \mathbf{k}$  thì  $g = \deg(r(x)_0) - l(r(x)_0) + 1$  với mọi số  $r$  đủ lớn.

#### 1.4.2.6. Hệ quả

Tồn tại số nguyên dương  $N$  sao cho tất cả các ước của  $D$  có bậc lớn hơn  $N$  và  $l(D) = \deg(D) + 1 - g$ .

#### 1.4.2.8. Mệnh đề

Cho  $C$  là đường cong chỉ có điểm bội thông thường. Đặt  $n = \deg(C)$ ,  $r_p = m_p(C)$ . Khi đó giống của  $C$  được cho bởi công thức

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{r_p(r_p-1)}{2}$$

#### 1.4.2.9. Hệ quả

Cho  $C$  là đường cong có bậc là  $n$  và đặt  $r_p = m_p(C)$ . Khi đó

$$g \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{r_p(r_p-1)}{2}$$

#### 1.4.2.10. Hệ quả

Nếu  $\sum_{P \in C} \frac{r_p(r_p-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  thì  $C$  là đường cong hữu tỷ.

#### 1.4.2.11. Định nghĩa

Cho  $C$  là một đường cong xạ ảnh,  $X$  là mô hình không kì dị của nó,  $\mathbf{K}$  là trường các hàm trên  $C$ . Đặt  $\Omega = \Omega_k(\mathbf{K})$  là không gian các vi phân của  $\mathbf{K}$  trên  $\mathbf{k}$ , các phần tử  $\omega \in \Omega$  được gọi là vi phân trên  $X$ , hoặc trên  $C$ .

Lấy  $\omega \in \Omega$ ,  $\omega \neq 0$ , và gọi  $P \in X$  là một vị trí. Ta định nghĩa bậc của  $\omega$  tại  $P$ , kí hiệu là  $\text{ord}_P(\omega)$  như sau : Chọn một tham số đơn trị hóa  $t$  trong  $\mathcal{O}_P(X)$ ,  $\omega = fdt$ ,  $f \in \mathbf{K}$ , và đặt  $\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_P(f)$ .

Lấy  $\omega \in \Omega$ ,  $\omega \neq 0$ . Ước của  $\omega$ , kí hiệu  $\text{div}(\omega)$ , được định nghĩa là  $\text{div}(\omega) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(\omega) P$ . Khi đó  $W = \text{div}(\omega)$  gọi là một ước chuẩn tắc.

#### 1.4.2.12. Mệnh đề

Giả sử  $C$  là đường cong có bậc lớn hơn hoặc bằng 3 chỉ có các điểm bội thông thường. Đặt  $E = \sum_{Q \in X} (r_Q - 1) Q$  và gọi  $G$  là một đường cong phẳng bậc  $n - 3$ . Khi đó  $\text{div}(G) - E$  là một ước chuẩn tắc (Nếu  $n = 3$  thì  $\text{div}(G) = 0$ )

#### 1.4.2.13. Hệ quả

Nếu  $W$  là một ước chuẩn tắc thì  $\deg(W) = 2g - 2$  và  $l(W) \geq g$ .

#### 1.4.2.14. Định lý (Định lý Riemann-Roch)

Cho  $W$  là một ước chuẩn tắc trên  $X$ . Khi đó với ước  $D$  tùy ý, ta có

$$l(D) = \deg(D) + 1 - g + l(W - D)$$

#### 1.4.2.15. Hệ quả

$l(W) = g$  nếu  $W$  là một ước chuẩn tắc.

#### 1.4.2.16. Hệ quả

Nếu  $\deg(D) \geq 2g - 1$  thì  $l(D) = \deg(D) + 1 - g$ .

#### 1.4.2.17. Hệ quả

Nếu  $\deg(D) \geq 2g$  thì  $l(D - P) = l(D) - 1$  với mọi  $P \in X$ .

Cho  $D$  là một ước. Ta định nghĩa  $\Omega(D) = \{\omega \in \Omega \mid \text{div}(\omega) \geq D\}$ . Khi đó  $\Omega(D)$  là một không gian vector trên  $\mathbf{k}$ . Gọi  $\delta(D) = \dim_k \Omega(D)$ , gọi là chỉ số của  $D$ . Các vi phân trong  $\Omega(0)$  được gọi là vi phân cấp 1.

#### 1.4.2.18. Mệnh đề

(i)  $\delta(D) = l(W - D)$ .

(ii) Tồn tại  $g$  vi phân cấp 2 độc lập tuyến tính trên  $X$ .

**(iii)**  $l(D) = \deg(D) + 1 - g + \delta(D)$ .

## CHƯƠNG 2. ĐA THỨC DUY NHẤT VÀ TẬP XÁC ĐỊNH DUY NHẤT CHO HÀM PHÂN HÌNH TRÊN TRƯỜNG KHÔNG ACSIMET

### 2.1. Đa thức duy nhất mạnh

Trong phần này, gọi  $P(X)$  là đa thức monic bậc  $n$  trong  $\mathbf{k}[X]$ , và  $\mathcal{U}$  là tập các không điểm của đa thức  $P$ . Gọi  $l$  là số các nghiệm phân biệt của  $P'(X)$ , và kí hiệu các nghiệm này là  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  có số bội tương ứng là  $m_1, m_2, \dots, m_l$  trong  $P'(X)$ . Do đó:

$$P'(X) = n(X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_l)^{m_l}.$$

Ta gọi  $P(\alpha_i) \neq P(\alpha_j)$ , khi  $i \neq j$  là giả thiết I.

Khai triển của  $P$  tại  $\alpha_i$  là:

$$P(X) - P(\alpha_i) = b_{i, m_i+1} (X - \alpha_i)^{m_i+1} + \dots + b_{i, n} (X - \alpha_i)^n \quad (2.1)$$

Ta sẽ đưa ra một số điều kiện đủ để  $P$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathcal{O}_S$ , tức là trên  $S$ -nguyên trong  $\mathbf{K}$ . Khi  $g \geq 1$ , ta cũng đưa ra điều kiện về độ cao của  $f$  và  $g$  nếu chúng thỏa mãn phương trình  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  nào đó.

#### 2.1.1. Các mệnh đề

##### 2.1.1.1. Mệnh đề

Giả sử  $\mathcal{U}$  là cứng affine.

(i) Nếu  $f$  và  $g$  là hai hàm khác hằng phân biệt trong  $\mathbf{K}$  sao cho  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  nào đó thì  $f$  và  $g$  không có quan hệ tuyến tính, tức là  $g \neq \lambda f + \beta$  với mọi  $\lambda, \beta \in \mathbf{k}$ .

(ii)  $l \geq 2$ .

### **Chứng minh**

Giả sử tồn tại  $\lambda, \beta \in \mathbf{k}$  sao cho  $g = \lambda f + \beta$ . Khi đó  $P(f) = cP(\lambda f + \beta)$ . Hiển nhiên là  $(\lambda, \beta) \neq (1, 0)$  vì  $f \neq g$ . Đặt  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Khi đó:

$$(f - u_1) \dots (f - u_n) = c(\lambda f + \beta - u_1) \dots (\lambda f + \beta - u_n).$$

Vì  $f$  là hàm khác hằng trong  $\mathbf{K}$  nên  $\lambda^{-n} = c$  và  $\lambda \mathcal{U} + \beta = \mathcal{U}$ . Vì vậy  $\mathcal{U}$  không phải là cứng affine. Do đó ta có (i).

Đối với (ii), ta nhận thấy rằng nếu  $l = 1$  thì  $P(X) = (X - \alpha_1)^n + b$  với  $b \in \mathbf{k}$ . Gọi  $\varepsilon \neq 1$  là một căn bậc  $n$  của đơn vị, và  $f$  là một hàm khác hằng trên  $\mathbf{K}$ , và đặt  $g = \varepsilon f - \varepsilon \alpha_1 + \alpha_1$ . Khi đó  $P(f) = P(g)$  nên  $\mathcal{U}$  không là cứng affine do (i).  $\square$

Cho  $[f, g] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{K})$ . Độ cao của  $[f, g]$  được định nghĩa là:

$$h(f, g) := \sum_{\mathbf{p} \in C} -\min\{\nu_{\mathbf{p}}(f), \nu_{\mathbf{p}}(g)\}$$

Hiển nhiên,  $h(f) = h(f, 1)$ .

Để đơn giản, với  $i \geq 1, t \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{k}$  và  $\eta \in \mathbf{K}$ , ta kí hiệu:

$$d_t^i \eta := \frac{d^i \eta}{dt^i}, \quad d_{\mathbf{p}}^i \eta := \frac{d^i \eta}{dt_{\mathbf{p}}^i}$$

Từ định lý Riemann-Roch và công thức tính tổng, ta có:

### 2.1.1.2. Mệnh đề

Cho  $\eta \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$  và  $[f, g] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{K})$ . Ta có:

$$(i) \quad \sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}\eta) = 2g - 2 \text{ nếu } \eta \text{ không phải là hàm hằng.}$$

$$(ii) \quad \sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}(\eta) = 0.$$

$$(iii) \quad h(\eta f, \eta g) = h(f, g).$$

### 2.1.1.3. Bổ đề

Giả sử  $f$  và  $g$  là các hàm khác hằng phân biệt trên  $\mathbf{K}$  và  $P(f) = cP(g)$  với  $c$  là hằng số khác 0. Khi đó  $h(f) = h(g)$  và:

$$(i) \quad h(P'(f), P'(g)) + \sum_{\mathbf{p} \in C} \min\{\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}f), \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}g)\} \leq 2h(f) + 2g - 2.$$

$$(ii) \quad h(P'(f), P'(g)) \leq h(f) + |S| + 2g - 2, \text{ nếu } f \text{ và } g \text{ là các } S\text{-nguyên.}$$

$$(iii) \quad h(f) \geq 2, \text{ nếu } \mathcal{U} \text{ là cứng affine.}$$

$$(iv) \quad |S| \geq 2, \text{ nếu } \mathcal{U} \text{ là cứng affine và } f \text{ và } g \text{ là các } S\text{-nguyên.}$$

**Chú ý:** Từ (i) suy ra  $h(P'(f), P'(g)) \leq 2h(f) + 2g - 2$  vì  $\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}f) \geq 0$  và

$$\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}g) \geq 0.$$

**Chứng minh**



Vì  $P(f) = cP(g)$  với  $\mathbf{p}$  mà  $\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0$ , nên  $n\nu_{\mathbf{p}}(f) = \nu_{\mathbf{p}}(P(f)) = n\nu_{\mathbf{p}}(g)$ .

Do đó  $h(f) = h(g)$ .

Mặt khác, ta có  $d_t f P'(f) = c d_t g P'(g)$  với  $t \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{k}$ . Và vì vậy

$$h(P'(f), P'(g)) = h(P'(f) / P'(g)) = h(c d_t g / d_t f) = h(d_t f, d_t g). \quad (2.2)$$

$$\text{Ta có } d_{\mathbf{p}} f = d_t f d_{\mathbf{p}} t, \quad \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) = \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f) - \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t)$$

Nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0$  thì  $\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f) = \nu_{\mathbf{p}}(f) - 1$ . Nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0$  thì  $\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f) \geq 0$ .

Do đó:

$$\begin{aligned} h(P'(f), P'(g)) &= h(d_t f, d_t g) \\ &= \sum_{\mathbf{p} \in C} -\min\{\nu_{\mathbf{p}}(d_t f), \nu_{\mathbf{p}}(d_t g)\} \\ &= \sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t) + \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0} -\min\{\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f), \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} g)\} \\ &\quad - \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0} -\min\{\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f), \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} g)\} \\ &= 2\mathbf{g} - 2 + \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0} (-\nu_{\mathbf{p}}(f) + 1) - \sum_{\mathbf{p} \in C} \min\{\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}(f)), \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}(g))\} \\ &\leq h(f) + \#\{\mathbf{p} \in C \mid \nu_{\mathbf{p}}(f) < 0\} + 2\mathbf{g} - 2 \\ &\quad - \sum_{\mathbf{p} \in C} \min\{\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}(f)), \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}(g))\} \end{aligned}$$

Hiển nhiên,  $\#\{\mathbf{p} \in C \mid \nu_{\mathbf{p}}(f) < 0\} \leq h(f)$  và  $\#\{\mathbf{p} \in C \mid \nu_{\mathbf{p}}(f) < 0\} \leq |S|$  nếu  $f$  là một  $S$ -nguyên. Vì vậy ta có (i) và (ii).

Vì  $f$  và  $g$  khác hằng, chúng ta luôn có  $h(f) \geq 1$ . Nếu  $h(f) = 1$  thì  $f$  có đúng một cực điểm đơn. Hơn nữa,  $g$  cũng có đúng một cực điểm đơn vì  $P(f) = cP(g)$ . Từ khai triển Laurent của  $f$  và  $g$  tại cực điểm đơn này, ta có

thể tìm được hằng số  $\lambda$  sao cho  $f - \lambda g$  không có cực điểm và do đó  $f - \lambda g$  là hằng số. Do mệnh đề 2.1.1.1, điều này không thể xảy ra vì  $\mathcal{U}$  là cứng affine. Vì vậy  $h(f) \geq 2$ .

Bây giờ ta chứng minh (iv). Giả sử rằng  $S$  chỉ chứa một điểm, gọi điểm đó là  $\mathbf{q} \in C$ , và  $f, g$  là hai  $S$ -nguyên sao cho  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  nào đó. Gọi  $\Phi$  là đồng cấu được định nghĩa bởi  $[f, g, 1]: C \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Khi đó ảnh  $\Phi(C)$  là một trong các thành phần của  $[F(X, Y, Z) = 0]$  nếu  $c = 1$  hoặc  $[F_c(X, Y, Z) = 0]$  nếu  $c \neq 1$ , vì một đồng cấu giữa hai đường cong bất khả quy là một toàn ánh. Hơn nữa,  $\Phi(C) \cap [Z = 0] = \Phi(\mathbf{q})$  vì  $\mathbf{q}$  là cực điểm duy nhất của  $f$  và  $g$ . Mặt khác, ta có thấy rằng  $F(X, Y, 0) = (X^n - Y^n) / (X - Y)$  và  $F_c(X, Y, 0) = X^n - cY^n$  được phân tích thành  $n-1$  và  $n$  nhân tử tuyến tính tương ứng. Nếu  $\Phi(C)$  không phải là đường thẳng thì tồn tại ít nhất hai điểm trong  $\Phi(C) \cap [Z = 0]$  (vô lý).  $\square$

Giả sử rằng hai hàm phân biệt khác hằng  $f$  và  $g$  trong  $\mathbf{K}$  thỏa mãn  $P(f) = cP(g)$ ,  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  nào đó. Từ bổ đề 2.1.1.3, ta có một chặn trên của  $h((P'f), P'(g))$ . Mặt khác, để tìm một chặn dưới của  $h((P'f), P'(g))$ , ta tìm một phần tử  $G$  thuộc  $\mathbf{K}$  sao cho độ cao của  $G$  không quá lớn và bậc không điểm của  $G$  tại mỗi điểm trên đường cong ít nhất bằng giá trị nhỏ nhất của bậc các không điểm của  $P'(f)$  và  $P'(g)$ . Để xây dựng các hàm này, ta cần đến mệnh đề sau.

#### 2.1.1.4. Mệnh đề

Giả sử rằng hai hàm phân biệt khác hằng  $f$  và  $g$  trong  $\mathbf{K}$  thỏa mãn  $P(f) = cP(g)$ ,  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  nào đó. Nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_j) > 0$  với  $\mathbf{p} \in C$  thì ta có :

$$(i) \quad (m_i + 1)\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) = (m_j + 1)\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_j) ;$$

$$(ii) \quad \nu_{\mathbf{p}}\left(b_{i,m_i+1}(f - \alpha_i)^{m_i+1} - cb_{j,m_j+1}(g - \alpha_j)^{m_j+1}\right) \geq (m_i + 2)\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i), \text{ khi}$$

$$m_i = m_j.$$

Đặc biệt, nếu  $c = 1$  và  $j = i$  thì  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_i) = \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i)$  và

$$(iii) \quad \nu_{\mathbf{p}}(f - g) \geq \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i)$$

$$(iv) \quad \nu_{\mathbf{p}}\left((f - \alpha_i)^{m_i+1} - (g - \alpha_i)^{m_i+1}\right) \geq (m_i + 2)\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i).$$

#### Chứng minh

Nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_j) > 0$  thì  $P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)$  vì  $P(f) = cP(g)$ . Khi đó khai triển của  $P(X)$  tại  $\alpha_i$  và  $\alpha_j$ , ta được

$$\begin{aligned} 0 &= P(f) - cP(g) \\ &= b_{i,m_i+1}(f - \alpha_i)^{m_i+1} + \{\text{các số bậc cao hơn trong } f - \alpha_i\} \\ &\quad - c\left[b_{j,m_j+1}(f - \alpha_j)^{m_j+1} + \{\text{các số bậc cao hơn trong } f - \alpha_j\}\right] \end{aligned}$$

Các khẳng định (i), (ii) và (iv) được suy ra từ đẳng thức này. Khẳng định (iii) suy ra từ sự biểu diễn  $f - g = (f - \alpha_i) - (g - \alpha_i)$  □

### 2.1.2. Phương trình $P(f) = P(g)$

Ta nhắc lại các trường hợp đặc biệt sau đây của  $P(X)$ :

$$(1A) \quad l = 2 \quad \text{và} \quad \min\{m_1, m_2\} = 1;$$

$$(1B) \quad l = 2 \quad \text{và} \quad m_1 = m_2 = 1 ;$$

$$(1C) \quad l = 2 \quad \text{và} \quad m_1 = m_2 = 2 ;$$

$$(1D) \quad l = 3 \quad \text{và} \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1.$$

#### Bổ đề

Giả sử rằng  $P(X)$  là đa thức như trên thỏa mãn giả thiết I, và gọi  $\mathcal{U}$  là tập các không điểm của nó. Giả sử rằng hai hàm phân biệt khác hằng  $f$  và  $g$  trong  $\mathbf{K}$  thỏa mãn  $P(f) = P(g)$ .

(I) Khi  $g = 0$  thì hoặc là  $l = 1$  hoặc là  $P$  thỏa mãn (1A).

(II) Khi  $g \geq 1$  và  $\mathcal{U}$  là cứng affine thì

$$(a) \quad l \leq g + 2 ;$$

$$(b) \quad h(f) = h(g) \leq 8g - 8 \quad \text{nếu } P \text{ không thỏa mãn (1A), (1C), và (1D);}$$

$$(c) \quad h(f) = h(g) \leq 6g - 6 + 3|S| \quad \text{nếu } f \text{ và } g \text{ là các } S\text{-nguyên và } P \text{ không thỏa mãn (1B).}$$

### Chứng minh

Từ bổ đề 2.1.1.3, ta có

$$h(f) = h(g), h(P'(f), P'(g)) \leq 2h(f) + 2g - 2 \quad (2.3)$$

và

$$h(P'(f), P'(g)) \leq h(f) + |S| + 2g - 2, \text{ nếu } f \text{ và } g \text{ là các } S\text{-nguyên.} \quad (2.4)$$

Vì  $P$  thỏa mãn giả thiết I, chỉ các không điểm chung của  $P'(f)$  và  $P'(g)$  là các điểm  $\mathbf{p} \in C$  mà  $(f(\mathbf{p}), g(\mathbf{p})) = (\alpha_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq l$ . Vì vậy,

$$\min\{\nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g))\} > 0$$

nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_i) > 0$  với  $i = 1, \dots, l$  nào đó.

Để có một chặn dưới của  $h(P'(f), P'(g))$ , ta cần xây dựng một phần tử  $G \neq 0$  trong  $\mathbf{K}$  với cấp của không điểm tại  $\mathbf{p}$  thỏa mãn điều kiện  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_i) > 0$ , với  $i = 1, \dots, l$ . Bằng cách sắp xếp lại các số  $\alpha_i$ , ta có thể giả sử  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_l$ . Đầu tiên, ta chọn  $G := (f - g)^{m_1}$  với  $G \neq 0$  vì  $f \neq g$ . Giả sử  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_i) > 0$ . Hiển nhiên,  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_j) = \nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_j) = 0$  nếu  $j \neq i$ .

Từ mệnh đề 2.1.1.4,  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) = \nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_i)$  và từ

$$\nu_{\mathbf{p}}(G) = m_1 \nu_{\mathbf{p}}(f - g) \geq m_i \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) = \nu_{\mathbf{p}}(P'(f)) = \nu_{\mathbf{p}}(P'(g)).$$

Ta có  $\min\{\nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g))\} - \nu_{\mathbf{p}}(G) \leq 0$  nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0$ .

Mặt khác, nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0$  thì  $\nu_{\mathbf{p}}(f) = \nu_{\mathbf{p}}(g)$ ,  $\nu_{\mathbf{p}}(f - g) \geq \nu_{\mathbf{p}}(f)$  và

$$\nu_p(P'(f)) = \nu_p(P'(g)) = (n-1)\nu_p(f).$$

Mà: 
$$\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) \leq \sum_{i=2}^l m_i \nu_p(f).$$

Do đó:

$$\begin{aligned} h(P'(f), P'(g)) &= h(P'(f)/G, P'(g)/G) \\ &= - \sum_{\nu_p(f) < 0} (\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G)) \\ &\quad - \sum_{\nu_p(f) \geq 0} (\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G)) \\ &\geq - \sum_{\nu_p(f) < 0} \sum_{i=2}^l m_i \nu_p(f) = \sum_{i=2}^l m_i h(f) \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.3), ta có:

$$\left( \sum_{i=2}^l m_i - 2 \right) h(f) \leq 2g - 2 \quad (2.5)$$

và (2.4) cho ta

$$\left( \sum_{i=2}^l m_i - 1 \right) h(f) \leq |S| + 2g - 2 \text{ nếu } f \text{ và } g \text{ là các } S\text{-nguyên} \quad (2.6)$$

Nếu  $g = 0$  thì (2.5) suy ra  $l = 1$  hoặc  $l = 2$  và  $m_2 = 1$ .

Vậy (I) được chứng minh.

Từ đây, giả sử  $g \geq 1$ . Vì  $f$  được giả sử là khác hằng và  $\mathcal{U}$  là cứng affine,

ta có  $h(f) \geq 2$ . Khi đó (2.5) suy ra  $\sum_{i=2}^l m_i \leq g + 1$ , và vì vậy  $l \leq g + 2$ . Vậy ta

chứng minh được (II)(a).

Từ phương trình (2.5) cũng suy ra rằng  $h(f) \leq 2g - 2$  nếu  $\sum_{i=2}^l m_i \geq 3$  và cũng đúng trong các trường hợp sau: (i)  $l \geq 4$ , (ii)  $l = 3$  ngoại trừ  $m_2 = m_3 = 1$ , hoặc (iii)  $l = 2$  ngoại trừ  $m_2 \leq 2$ .

Với (II)(b), cần xét thêm các trường hợp (1)  $l = 3, m_2 = m_3 = 1$  và  $m_1 \geq 2$ , và (2)  $l = 2, m_2 = 2$  và  $m_1 \geq 3$ .

Trường hợp 1:  $l = 3, m_2 = m_3 = 1$  và  $m_1 \geq 2$

$$\text{Đặt } G := (f - g)^2 \left( (f - \alpha_1)^{m_1+1} - (g - \alpha_1)^{m_1+1} \right)^{m_1-1}.$$

Ta sẽ chứng minh:

$$(m_1 + 1) \min \{ \nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g)) \} - \nu_p(G) \leq 0, \text{ nếu } \nu_p(f) \geq 0.$$

Từ phân lập luận trước, ta thấy rằng chỉ cần xét đối với những điểm  $\mathbf{p}$  mà  $\nu_p(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_p(g - \alpha_i) > 0$  với  $i = 1, 2, 3$  là đủ.

Nếu  $\nu_p(f - \alpha_1) > 0$  và  $\nu_p(g - \alpha_1) > 0$  thì khi đó từ mệnh đề 2.1.1.4, ta có

$$\nu_p(f - \alpha_1) = \nu_p(g - \alpha_1) \leq \nu_p(f - g), \text{ và}$$

$$\nu_p \left( (f - \alpha_1)^{m_1+1} - (g - \alpha_1)^{m_1+1} \right) \geq (m_1 + 2) \nu_p(f - \alpha_1).$$

Vì vậy,  $\nu_p(G) \geq m_1(m_1 + 1) \nu_p(f - \alpha_1) = (m_1 + 1) \min \{ \nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g)) \}$ .

Nếu  $\nu_p(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_p(g - \alpha_i) > 0$ ,  $i = 2, 3$  thì do  $f - g$  là một nhân tử của  $(f - \alpha_1)^{m_1+1} - (g - \alpha_1)^{m_1+1}$  và  $\nu_p(f - g) \geq \nu_p(f - \alpha_i)$ , nên ta có:

$$\nu_p(G) \geq (m_1 + 1) \nu_p(f - \alpha_i) = (m_1 + 1) \min \{ \nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g)) \}.$$

Vậy khẳng định trên là đúng.

Mặt khác, dễ thấy rằng nếu  $\nu_p(f) < 0$  thì

$$\min\{\nu_p(P'(f))^{m_1+1}, \nu_p(P'(g))^{m_1+1}\} - \nu_p(G) \leq (3m_1 + 1)\nu_p(f)$$

Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned} (m_1 + 1)h(P'(f), P'(g)) &= h(P'(f)^{m_1+1}, P'(g)^{m_1+1}) \\ &= h(P'(f)^{m_1+1} / G, P'(g)^{m_1+1} / G) \geq (3m_1 + 1)h(f) \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.3), ta có:  $\frac{m_1 - 1}{m_1 + 1}h(f) \leq 2g - 2$ .

Vì  $m_1 \geq 2$  nên  $h(f) \leq 3(2g - 2)$ .

Trường hợp 2:  $l = 2, m_2 = 2$  và  $m_1 \geq 3$ .

Đặt  $G := (f - g)^{m_1+4} \left( (f - \alpha_1)^{m_1+1} - (g - \alpha_1)^{m_1+1} \right)^{m_1-2}$ .

Lý luận như trường hợp 1, ta có:  $\frac{m_1 - 2}{m_1 + 1}h(f) \leq 2g - 2$ .

Nếu  $m_1 \geq 3$  thì  $h(f) \leq 4(2g - 2)$ . Vậy (II)(b) được chứng minh.

Giả sử thêm rằng  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên. Khi đó, từ lập luận trước suy ra

$$h(f) = h(g) \leq 3(2g - 2),$$

ngoại trừ các trường hợp (1)  $l = 3$  và  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , và (2)  $l = 2, m_2 = 1$  và (3)  $l = 2, m_2 = 2$ .



Với trường hợp (1), lấy  $G = f - g$ .

Khi đó do (2.4), ta có  $h(f) \leq 2g - 2 + |S|$ .

Với trường hợp (2), ta chỉ cần xét khi  $l = 2, m_2 = 1$ , và  $m_1 \geq 2$ .

Đặt  $G := (f - g)^2 \left( (f - \alpha_1)^{m_1+1} - (g - \alpha_1)^{m_1+1} \right)^{m_1-1}$ .

Lý luận tương tự (2.4), ta có  $\frac{m_1-1}{m_1+1} h(f) \leq 2g - 2 + |S|$ .

Vì  $m_1 \geq 2$ , ta có  $h(f) \leq 3(2g - 2 + |S|)$ .

Với trường hợp (3), ta đặt  $G := (f - g)^2 \left( (f - \alpha_1)^{m_1+1} - (g - \alpha_1)^{m_1+1} \right)^{m_1}$

Tính toán tương tự như trên, ta có  $\frac{m_1-1}{m_1+1} h(f) \leq 2g - 2 + |S|$ .

Vì  $m_1 \geq 2$ , ta có  $h(f) \leq 3(2g - 2 + |S|)$ . □

### 2.1.3. Phương trình $P(f) = cP(g), c \neq 0, 1$

Nhắc lại các trường hợp đặc biệt sau đây của  $P(X)$ :

(1A)  $l = 2$  và  $\min\{m_1, m_2\} = 1$ ;

(1B)  $l = 2$  và  $m_1 = m_2 = 1$  ;

(1C)  $l = 2$  và  $m_1 = m_2 = 2$  ;

(1D)  $l = 3$  và  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  ;

(1E)  $l = 3$  và  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , và tồn tại một hoán vị  $\phi$  của  $\{1, 2, 3\}$  sao cho  $\phi(i) \neq i$  với  $i = 1, 2, 3$  và  $\omega$  thỏa mãn  $\omega^2 + \omega + 1 = 0$  sao cho  $\omega = \frac{P(\alpha_i)}{P(\alpha_{\phi(i)})}$  với  $i = 1, 2, 3$ .

### 2.1.3.1. Bổ đề

Giả sử rằng  $P(X)$  là đa thức như trên thỏa mãn giả thiết I và tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của  $P$  là cứng affine. Giả sử rằng  $f, g$  là hai hàm phân biệt khác hằng trên  $\mathbf{K}$  sao cho  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$  nào đó. Khi đó:

(I) Khi  $g = 0$  thì  $P$  thỏa mãn (1A) hoặc (1E).

(II) Khi  $g \geq 1$  thì  $l \leq 2g + 3$ .

### Chứng minh

Đặt  $l_0 := \#\{(i, j) \mid P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)\}$ .

Vì  $P(X)$  thỏa mãn giả thiết I, nên dễ thấy rằng  $0 \leq l_0 \leq l$  và  $l_0 = l$  nếu tồn tại một hoán vị  $\phi$  của  $\{1, 2, \dots, l\}$  sao cho  $(\alpha_i, \alpha_{\phi(i)}, 1) \in C_c$  với bất kỳ  $i = 1, 2, \dots, l$ , có nghĩa là

$$\frac{P(\alpha_1)}{P(\alpha_{\phi(1)})} = \frac{P(\alpha_2)}{P(\alpha_{\phi(2)})} = \dots = \frac{P(\alpha_l)}{P(\alpha_{\phi(l)})} = c.$$

Để đơn giản ký hiệu, sau đây  $\phi$  luôn là một hoán vị của  $\{1, 2, \dots, l\}$  sao cho  $\phi(i) = j$  nếu  $P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)$ . Với một hoán vị cố định  $\phi$  và  $1 \leq i \neq j \leq l$ , ta định nghĩa  $L_{i,j}^\phi(f, g) = L_{i,j}$  như sau:

$$L_{i,j} := (g - \alpha_{\phi(i)}) - \frac{\alpha_{\phi(i)} - \alpha_{\phi(j)}}{\alpha_i - \alpha_j} (f - \alpha_i) \quad (2.6)$$

Hoặc cũng có thể trình bày dưới dạng:

$$L_{i,j} := (g - \alpha_{\phi(j)}) - \frac{\alpha_{\phi(i)} - \alpha_{\phi(j)}}{\alpha_i - \alpha_j} (f - \alpha_j) \quad (2.7)$$

Tại mỗi điểm  $\mathbf{p} \in C$ , ta có

$$\nu_{\mathbf{p}}(L_{i,j}) \geq \min\{\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i), \nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(i)})\}$$

$$\text{và} \quad \nu_{\mathbf{p}}(L_{i,j}) \geq \min\{\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_j), \nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(j)})\} \quad (2.8)$$

Vì  $P(f) = cP(g)$  nên từ bổ đề 2.1.1.3, suy ra

$$h(f) = h(g), \quad h(P'(f), P'(g)) \leq 2h(f) + 2\mathfrak{g} - 2, \quad (2.9)$$

và

$$h(P'(f), P'(g)) \leq h(f) + |S| + 2\mathfrak{g} - 2, \text{ nếu } f, g \text{ là các } S\text{-nguyên} \quad (2.10)$$

$$\text{Đặt } A_0 := \{i, 1 \leq i \leq l \mid P(\alpha_i) = cP(\alpha_{\phi(i)})\}, \quad l_0 = \#A_0,$$

$$A_1 := \{i \in A_0 \mid m_i = m_{\phi(i)}\}, \quad l_1 = \#A_1,$$

$$A_2 := \{i \in A_0 \mid m_i > m_{\phi(i)}\}, \quad l_2 = \#A_2,$$

$$A_3 := \{i \in A_0 \mid m_i < m_{\phi(i)}\}, \quad l_3 = \#A_3.$$

Không mất tính tổng quát, ta đặt  $A_1 = \{1, 2, \dots, l_1\}$ , và  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{l_1}$ .

$$\text{Đặt } G := (f - \alpha_{l_1})^{m_{l_1} \left( l_1 - 2 \left\lfloor \frac{l_1}{2} \right\rfloor \right)} \prod_{i=1}^{\left\lfloor \frac{l_1}{2} \right\rfloor} (L_{2i-1, 2i})^{m_{2i-1}} \prod_{i \in A_2} (g - \alpha_{\phi(i)})^{m_{\phi(i)}} \prod_{i \in A_3} (f - \alpha_i)^{m_i}$$

thì khi đó ta có  $G \neq 0$  vì ta đã giả sử  $\mathcal{U}$  là cứng affine.

Tương tự phần chứng minh bổ đề 2.1.2, ta sẽ chứng minh

$$\min \{ \nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g)) \} - \nu_{\mathbf{p}}(G) \leq 0, \text{ nếu } \nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0.$$

Đối với bất đẳng thức này, ta cũng chỉ cần chứng minh đối với các điểm  $\mathbf{p}$  mà  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(i)}) > 0$  với  $i \in A_0$  là đủ.

Nếu  $i \in A_1$  thì  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) = \nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(i)})$  thì khẳng định trên suy ra từ (2.8). Khẳng định trên cũng đúng khi  $i \in A_2$  hoặc  $i \in A_3$  vì

$$\min \{ \nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g)) \} = \min \{ m_i \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i), m_{\phi(i)} \nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(i)}) \}.$$

$$\text{Nếu } \nu_{\mathbf{p}}(f) < 0 \text{ thì } \nu_{\mathbf{p}}(f) = \nu_{\mathbf{p}}(g) = \nu_{\mathbf{p}}(L_{2i-1, 2i}) = \nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_i) = \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_{l_1}).$$

Do đó

$$\begin{aligned} & \min \{ \nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g)) \} - \nu_{\mathbf{p}}(G) \\ & \leq \left[ \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{l_1}{2} \right\rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_2} (m_i - m_{\phi(i)}) + \sum_{i \notin A_0} m_i \right] \nu_{\mathbf{p}}(f) \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta có

$$\begin{aligned} h(P'(f), P'(g)) &= h(P'(f)/G, P'(g)/G) \\ &\geq \left[ \sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{l_1}{2} \right\rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_2} (m_i - m_{\phi(i)}) \right] h(f). \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.9), ta có

$$\left[ -2 + \sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_2} (m_i - m_{\phi(i)}) \right] h(f) \leq 2g - 2 \quad (2.11)$$

Tương tự, ta có

$$\left[ -2 + \sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_3} (m_{\phi(i)} - m_i) \right] h(f) \leq 2g - 2 \quad (2.12)$$

Nếu  $f, g$  là các  $S$ -nguyên thì từ (2.10) suy ra

$$\left[ -1 + \sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_2} (m_i - m_{\phi(i)}) \right] h(f) \leq 2g - 2 + |S| \quad (2.13)$$

và

$$\left[ -1 + \sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_3} (m_{\phi(i)} - m_i) \right] h(f) \leq 2g - 2 + |S| \quad (2.14)$$

Xét trường hợp  $g = 0$ . Vế phải của (2.11) và (2.12) là các số âm nên

$$\sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_2} (m_i - m_{\phi(i)}) \leq 1,$$

$$\sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_3} (m_{\phi(i)} - m_i) \leq 1.$$

Từ hai bất đẳng thức này, ta suy ra  $l_0 \geq l - 1$ . Hơn nữa, nếu  $l_0 = l - 1$  thì  $l_2 = l_3 = 0, l_1 = 1$  và  $m_2 = 1$ . Do đó  $l = 2$  và  $\min\{m_1, m_2\} = 1$ . Bây giờ giả sử

$l_0 = l$ . Khi đó  $l_1 \leq 3$ . Nếu  $l_1 = 3$  thì  $m_2 = m_3 = 1$  và  $l_2 = l_3 = 0$ . Suy ra  $l = 3$  và  $m_1 = 1$ . Nếu  $l_1 = 2$  thì  $m_1 = m_2 = 1$  và  $l_2 = l_3 = 0$ . Suy ra  $l = 2$ . Ta cũng có thể dễ dàng kiểm tra được không thể xảy ra trường hợp  $l_1 = 0$ . Cuối cùng, nếu  $l_1 = 1$  thì chỉ có thể là  $l_2 = l_3 = 1$  và  $m_2 - m_{\phi(2)} = 1, m_3 - m_{\phi(3)} = -1$  nếu ta giả sử  $A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}$  mà không mất tính tổng quát. Trong trường hợp này, ta thay  $G$  bởi  $L_{1,3}^{m_1}(g - \alpha_{\phi(2)})^{m_{\phi(2)}}$  và lặp lại các bước trên để có được  $m_2 = 1$ , mà điều này mâu thuẫn với  $m_2 - m_{\phi(2)} = 1$ . Vì vậy trường hợp này không xảy ra, và (I) được chứng minh.

Xét trường hợp tổng quát khi  $g \geq 1$ . Vì  $l_0 = l_1 + l_2 + l_3$  nên

$$\begin{aligned} & \sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l_1}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_2} (m_i - m_{\phi(i)}) + \sum_{i \notin A_0} m_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{l_1}{2} \rfloor} m_{2i} + \sum_{i \in A_3} (m_{\phi(i)} - m_i) \\ & \geq 2(l - l_0) + (l_1 - 1) + l_2 + l_3 = (l - l_0) + l - 1 \geq l - 1 \end{aligned}$$

Do đó, từ (2.11) và (2.12) ta có

$$(-5 + l)h(f) \leq 4g - 4. \quad (2.15)$$

Vì  $f, g$  được giả sử là khác hằng,  $h(f) \geq 2$  nếu  $\mathcal{U}$  là cứng affine. Từ (2.15) suy ra  $l \leq 2g + 3$ .

Như là hệ quả của (2.11), (2.12), (2.13) và (2.14), ta có các điều sau

### 2.1.3.2. Mệnh đề

Gọi  $P(X)$  là đa thức thỏa mãn giả thiết I. Giả sử tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của  $P$  là cứng affine. Gọi  $\phi$  là một hoán vị của  $\{1, 2, \dots, l\}$  sao cho  $\phi(i) = j$

nếu  $P(\alpha_i) = cP(\alpha_j)$ . Giả sử tồn tại hai hàm phân biệt khác hằng  $f, g$  trên  $\mathbf{K}$  sao cho  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0,1\}$  nào đó. Khi đó

$$(i) \quad h(f) = h(g) \leq 2g - 2 \text{ nếu tồn tại } i \text{ sao cho } |m_i - m_{\phi(i)}| \geq 3.$$

$$(ii) \quad h(f) = h(g) \leq 2g - 2 + |S| \text{ nếu } f, g \text{ là các } S\text{-nguyên nếu tồn tại } i \text{ sao cho } |m_i - m_{\phi(i)}| \geq 2.$$

### 2.1.3.3. Bổ đề

Giả sử rằng  $P(X)$  là đa thức như trên thỏa mãn giả thiết I và tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của  $P$  là cứng affine. Giả sử rằng  $f, g$  là hai hàm phân biệt khác hằng trên  $\mathbf{K}$  sao cho  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0,1\}$  nào đó. Khi đó:

$$(I) \quad \text{Khi } g \geq 1 \text{ thì } h(f) = h(g) \leq 4g - 4 \text{ nếu } P \text{ không thỏa mãn (1A) hoặc (1D).}$$

$$(II) \quad h(f) = h(g) \leq 4g - 4 + 2|S| \text{ nếu } f \text{ và } g \text{ là các } S\text{-nguyên và không thỏa mãn (1B).}$$

### Chứng minh

Nếu  $\nu_p(f) \geq 0$  thì

$$\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} = \min\{m_i \nu_p(f - \alpha_i), m_{\phi(i)} \nu_p(g - \alpha_{\phi(i)})\}$$

nếu  $\nu_p(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_p(g - \alpha_{\phi(i)}) > 0$  với  $1 \leq i \leq l$  nào đó.

$$\text{Ngược lại, } \min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} = 0$$

Giả sử  $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_l$ . Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1:  $m_2 \geq 3$ .

$$\text{Đặt } G := L_{1,2}^{m_1} \prod_{i=3}^l (f - \alpha_i)^{m_i}.$$

Khi đó

$$\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) = m_2 \nu_p(f), \text{ nếu } \nu_p(f) < 0.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) \leq 0 \text{ nếu } \nu_p(f) \geq 0.$$

Từ sự lựa chọn  $G$ , ta thấy rằng chỉ cần chứng minh khi  $\nu_p(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_p(g - \alpha_{\phi(i)}) > 0$  với  $i = 1, 2$ . Trong các trường hợp này, khẳng định này là một sự suy ra của (2.8). Vì vậy, ta có

$$h(P'(f), P'(g)) = h(P'(f)/G, P'(g)/G) \geq m_2 h(f)$$

$$\text{Kết hợp với bổ đề 2.1.1.3, ta suy ra } h(f) \leq (m_2 - 2)h(f) \leq 2g - 2.$$

Trường hợp 2:  $m_2 = 2, m_1 \geq 3$ .

Nếu  $m_1 \geq 5$  thì  $m_1 - m_{\phi(1)} \geq 3$ . Vì vậy, trong trường hợp này thì khẳng định trên là đúng.

$$\text{Đặt } G := L_{1,2}^{m_1-1} \prod_{i=3}^l (f - \alpha_i)^{m_i}$$

$$\text{Nếu } \nu_p(f) < 0 \text{ thì } \min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) = 3\nu_p(f).$$



Tương tự, nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0$  thì  $\min\{\nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g))\} - \nu_{\mathbf{p}}(G) \leq 0$ , ngoại trừ điểm  $\mathbf{p}$  mà  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(i)}) > 0$  với  $i = 1$  hoặc  $i = 2$ . Đối với các trường hợp ngoại lệ này, ta sẽ chứng minh rằng:

$$\min\{\nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g))\} - \nu_{\mathbf{p}}(G) \leq \min\{\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}f), \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}g)\}. \quad (2.16)$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} h(P'(f), P'(g)) &= h(P'(f)/G, P'(g)/G) \\ &\geq 3h(f) - \sum_{\mathbf{p} \in C} \min\{\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}f), \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}g)\}. \end{aligned}$$

Kết hợp với bổ đề 2.1.1.3, ta thu được  $h(f) \leq 2g - 2$ .

Bây giờ ta chứng minh (2.16) với các điểm  $\mathbf{p} \in C$  thỏa mãn  $\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_i) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(i)}) > 0$  với  $i = 1, 2$ .

Với  $i = 1$ , từ mệnh đề 2.1.1.4, ta có

$$(m_1 + 1)\nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_1) = (m_{\phi(1)} + 1)\nu_{\mathbf{p}}(g - \alpha_{\phi(1)}). \quad (2.17)$$

Từ đó suy ra

$$\min\{\nu_{\mathbf{p}}(P'(f)), \nu_{\mathbf{p}}(P'(g))\} - \nu_{\mathbf{p}}(G) \leq \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_1) - \frac{m_1 - m_{\phi(1)}}{m_{\phi(1)} + 1} \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_1).$$

Vì  $\nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}f) = \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_1) - 1$  nên phần còn lại là chứng minh

$$\frac{m_1 - m_{\phi(1)}}{m_{\phi(1)} + 1} \nu_{\mathbf{p}}(f - \alpha_1) \geq 1.$$

Điều này được thực hiện như sau.

Nếu  $(m_1, m_{\phi(1)}) = (3, 2)$  hoặc  $(m_1, m_{\phi(1)}) = (4, 2)$  thì từ (2.17) suy ra  $\nu_p(f - \alpha_i) \geq 3$ . Nếu  $(m_1, m_{\phi(1)}) = (3, 1)$  thì  $\frac{m_1 - m_{\phi(1)}}{m_{\phi(1)} + 1} = 1$ . Chú ý rằng trường hợp  $(m_1, m_{\phi(1)}) = (4, 1)$  được suy ra từ mệnh đề 2.1.3.2.

Tương tự, với  $i = 2$  ta có

$$3\nu_p(f - \alpha_2) = (m_{\phi(2)} + 1)\nu_p(g - \alpha_{\phi(2)}) \quad (2.18)$$

Nếu  $m_{\phi(2)} \leq 2$  thì do (2.8) và  $m_1 \geq 3$  ta có :

$$\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} \leq 2\nu_p(f - \alpha_2) \leq (m_1 - 1)\nu_p(f - \alpha_2) = \nu_p(G)$$

Nếu  $m_{\phi(2)} > 2$  thì  $m_{\phi(2)} = m_1$  và  $\nu_p(L_{1,2}) = \nu_p(g - \alpha_{\phi(2)}) < \nu_p(f - \alpha_2)$ .

Vì vậy

$$\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) = \nu_p(g - \alpha_{\phi(2)}) - \frac{m_1 - 2}{3}\nu_p(g - \alpha_{\phi(2)})$$

Vì  $\nu_p(d_p^0 g) = \nu_p(g - \alpha_{\phi(2)}) - 1$  nên phần còn lại là chứng minh

$$\frac{m_1 - 2}{3}\nu_p(g - \alpha_{\phi(2)}) \geq 1.$$

Mà điều này dễ dàng suy ra từ (2.18) là  $\nu_p(g - \alpha_{\phi(2)}) \geq 3$  nếu  $m_1 = 3$  hoặc  $m_1 = 4$ .

Trường hợp 3:  $m_2 = 2, m_1 = 2$  và  $l \geq 3$ .

Nếu  $m_3 = 2$  thì ta lấy  $G := L_{1,2}L_{1,3}L_{2,3}\prod_{i=4}^l (f - \alpha_i)^{m_i}$ .

Khi đó ta chỉ cần xét trường hợp  $m_3 = 1$ . Nếu  $m_{\phi(1)} = m_{\phi(2)} = 2$  thì hoặc là (i)  $l = 3$  và  $P(\alpha_3) \neq cP(\alpha_i)$  với  $i$  tùy ý, (tức là  $l_0 \leq 2$ ), hoặc là (ii)  $l \geq 4$  và  $m_{\phi(3)} = m_{\phi(4)} = 1$ .

Đối với trường hợp (i), ta đặt  $G := L_{1,2}^2 \prod_{i=4}^l (f - \alpha_i)^{m_i}$

Đối với trường hợp (ii), ta đặt  $G := L_{1,2}^2 L_{3,4} \prod_{i=5}^l (f - \alpha_i)^{m_i}$ .

Các trường hợp còn lại, không mất tính tổng quát, giả sử  $m_{\phi(2)} = 1$ . Ta lấy

$$G := L_{1,2} L_{1,3} \prod_{i=4}^l (f - \alpha_i)^{m_i}$$

Ta bỏ qua phần chứng minh cho các trường hợp này, vì chúng tương tự trường hợp 2.

Trường hợp 4:  $m_2 = 2, m_1 = 2$  và  $l = 2$ .

Nếu  $l_0 = 2$  thì dễ thấy rằng  $c = -1$  và  $X + Y - \alpha_1 - \alpha_2$  là một nhân tử tuyến tính của  $P(X) + P(Y)$ . Từ đó suy ra  $\mathcal{U}$  không là cứng affine. Do đó ta chỉ cần xét  $l_0 < 2$ . Nếu  $l_0 = 0$ , ta lấy  $G = 1$ . Nếu  $l_0 = 1$ , ta có thể giả sử rằng  $P(\alpha_2) \neq cP(\alpha_1)$  và  $P(\alpha_1) = cP(\alpha_2)$ . Ta đặt  $G := b_{1,3} (f - \alpha_1)^3 - cb_{2,3} (g - \alpha_2)^3$ .

Từ mệnh đề 2.1.1.4(ii), ta có

$$\nu_p(G) \geq 4 \min \{ \nu_p(f - \alpha_1), \nu_p(g - \alpha_2) \}, \text{ nếu } \nu_p(f) \geq 0.$$

Khi đó dễ dàng kiểm tra rằng

$$\begin{aligned} h(P'(f), P'(g)) &= \frac{1}{2} h\left((f - \alpha_1)^4 (f - \alpha_2)^4 / G, (g - \alpha_1)^4 (g - \alpha_2)^4 / G\right) \\ &\geq \frac{5}{2} h(f) \end{aligned}$$

và  $h(f) \leq 4g - 4$ .

Trường hợp 5:  $m_2 = 1$ .

Trong trường hợp này,  $m_i = 1$  với mọi  $i \geq 2$ , và  $l \geq 3$  do giả thiết của bổ đề.

Theo mệnh đề 2.1.3.2 ta chỉ cần xét trường hợp  $m_1 \leq 3$ . Không mất tính tổng quát, giả sử  $m_{\phi(2)} = m_1$ . Khi đó  $m_{\phi(i)} = 1$  nếu  $i \neq 2$ . Nếu  $m_1 = 3$ , ta đặt

$$G := (g - \alpha_{\phi(1)})(f - \alpha_2) L_{1,2} L_{2,3} L_{3,1} \prod_{i=4}^l (f - \alpha_i)^2.$$

Vì vậy nếu  $\nu_p(f) < 0$  thì

$$2 \min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) = 5\nu_p(f)$$

Ta cũng dễ dàng kiểm tra được

$$2 \min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) \leq 0, \text{ nếu } \nu_p(f) \geq 0.$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} h(P'(f), P'(g)) &= \frac{1}{2} h\left((P'(f))^2 / G, (P'(g))^2 / G\right) \\ &\geq \frac{5}{2} h(f) \end{aligned}$$

và khi đó  $h(f) \leq 4g - 4$ .

Nếu  $m_1 = 2$ , ta lấy  $G := L_{1,2}L_{2,3}L_{3,1}\prod_{i=4}^l(f - \alpha_i)^2$

Một cách tương tự, nếu  $\nu_p(f) < 0$  thì

$$2\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) = 5\nu_p(f)$$

Nếu  $\nu_p(f) \geq 0$ , kiểm tra tương tự như trường hợp 2 thì ta có

$$\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \frac{1}{2}\nu_p(G) \leq \min\{\nu_p^0(d_p f), \nu_p^0(d_p g)\}.$$

Khi đó ta cũng có  $h(f) \leq 4g - 4$ .

Nếu  $m_1 = 1$  và  $l \geq 5$ , thì ta lấy  $G := L_{1,2}L_{2,3}L_{3,4}L_{4,5}L_{5,1}\prod_{i=6}^l(f - \alpha_i)^2$  và cũng thu được

$$h(f) \leq 4g - 4.$$

Nếu  $m_1 = 1$  và  $l = 4$  và  $l_0 \leq l - 1$ , ta giả sử  $P(\alpha_4) \neq cP(\alpha_j)$  với mọi  $j$ . Ta lấy  $G := L_{1,2}L_{2,3}L_{3,1}$  và khi đó  $h(f) \leq 4g - 4$ .

Nếu  $m_1 = 1, l = 4$  và  $l_0 = l$  thì  $P(X) - cP(Y)$  có một nhân tử tuyến tính, do đó  $\mathcal{U}$  không phải là cứng affine, điều này trái với giả thiết.

(II) có thể có được từ lập luận phần (I) bằng cách thay việc dùng (2.9) bởi (2.10). Vì vậy, phần còn lại là xét trường hợp (1)  $l = 2, m_2 = 1$  và  $m_1 \geq 2$  hoặc (2)  $l = 3$  và  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ .

Trường hợp 1:  $l = 2, m_2 = 1$  và  $m_1 \geq 2$

Trong trường hợp này, ta lấy  $G := L_{1,2}$ .

Nếu  $\nu_p(f - \alpha_1) > 0, \nu_p(g - \alpha_2) > 0$  thì

$$2\nu_p(g - \alpha_2) = 3\nu_p(f - \alpha_1) = 3\nu_p(L_{1,2}).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) &= \frac{1}{2}\nu_p(f - \alpha_1) \\ &\leq \nu_p(f - \alpha_1) - 1 = \nu_p^0(d_p f). \end{aligned}$$

Tương tự, nếu  $\nu_p(f - \alpha_2) > 0, \nu_p(g - \alpha_{\phi(2)}) > 0$ , ta có

$$\min\{\nu_p(P'(f)), \nu_p(P'(g))\} - \nu_p(G) \leq \nu_p^0(d_p g)$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} h(P'(f), P'(g)) &= h(P'(f)/G, P'(g)/G) \\ &\geq 2h(f) - \sum_{p \in C} \min\{\nu_p^0(d_p f), \nu_p^0(d_p g)\}. \end{aligned}$$

Khi đó  $h(f) \leq 2g - 2 + |S|$ , theo bổ đề 2.1.1.3.

Trường hợp 2:  $l = 3$  và  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ .

Lấy  $G := L_{1,2}L_{2,3}L_{3,1}$ . Khi đó

$$h(P'(f), P'(g)) = \frac{1}{2}h((P'(f))^2/G, (P'(g))^2/G) \geq \frac{3}{2}h(f).$$

Từ đó suy ra  $h(f) \leq 4g - 4 + |S|$ . Vậy (II) được chứng minh.  $\square$

### 2.1.3.4. Mệnh đề

Gọi  $P(X)$  là đa thức như trên thỏa mãn giả thiết I. Giả sử  $l = 4$ ,  $m_i = 1$  và tồn tại một hoán vị của  $\{1, 2, 3, 4\}$  sao cho  $P(\alpha_i) = cP(\alpha_{\phi(i)})$  với mỗi  $1 \leq i \leq 4$ . Khi đó  $\mathcal{U}$  không là cứng affine.

#### *Chứng minh*

Giả sử  $\mathcal{U}$  là cứng affine. Xét đường cong  $C_c = [F_c(X, Y, Z) = 0]$  trong  $\mathbb{P}^2$  được xác định bởi sự thuần nhất hóa của  $P(X) - cP(Y)$ . Khi đó, ta có (i)  $F_c$  không có nhân tử tuyến tính nếu  $\mathcal{U}$  là cứng affine; (ii) đường cong  $C_c$  chỉ có bốn điểm kỳ dị thường bội 2, và do đó số khuyết của nó là  $\delta_{F_c} = 2$ . Khi đó  $C_c$  hoặc là đường cong bất khả quy có giống bằng 2, hoặc là  $F_c = AB$ , trong đó  $A$  và  $B$  là các thành phần bất khả quy có bậc tương ứng là 2 và 3.

Mặt khác, ta có thể xây dựng ba 1-dạng chính quy trên  $C_c$  như sau:

$$\omega_1 := \eta H_{1,2} H_{3,4}, \quad \omega_2 := \eta H_{1,3} H_{2,4}, \quad \omega_3 := \eta H_{1,4} H_{2,3},$$

trong đó,  $\eta := \frac{YdZ - ZdY}{\prod_{i=1}^4 (X - \alpha_i Y)}$  và  $H_{i,j} := (Y - \alpha_{\phi(i)} Z) - \frac{\alpha_{\phi(i)} - \alpha_{\phi(j)}}{\alpha_i - \alpha_j} (X - \alpha_i Z)$ .

Hơn nữa, các 1-dạng này là không tầm thường trên mỗi thành phần của  $C_c$  vì  $C_c$  không có các thành phần tuyến tính. Sự tồn tại các 1-dạng suy ra  $C_c$  không có thành phần nào có giống bằng 0. Kết hợp với lý luận ở phần trước, ta thấy rằng  $C_c$  là đường cong bất khả quy có giống bằng 2. Do đó các 1-dạng phụ thuộc tuyến tính trên  $\mathbf{k}$ . Vì vậy, ta có một quan hệ tuyến tính trên  $C_c$ :

$$\alpha H_{1,2}H_{3,4} + \beta H_{1,3}H_{2,4} + \gamma H_{1,4}H_{2,3} = 0, \text{ với } \alpha, \beta, \gamma \in k.$$

Phương trình này xác định một đường cong bậc 4, và nó cũng thỏa mãn với mọi điểm trong  $C_c$ . Điều này trái với giả thiết  $C_c$  là đường cong bất khả quy bậc 4. Vì vậy  $\mathcal{U}$  không là cứng affine.

### 2.1.3.5. Mệnh đề

Nếu tồn tại  $(\lambda, \beta) \in \mathbf{k} \times \mathbf{k} \setminus \{(1, 0)\}$  sao cho  $\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U} + \beta$ , tức là  $\mathcal{U}$  không là cứng affine thì  $P(f) = \lambda^n P(\lambda^{-1}(f - \beta))$  với  $f \in \mathbf{K}$  tùy ý.

### Chứng minh

Đặt  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Khi đó từ  $\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U} + \beta$  suy ra

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - u_1) \dots (X - u_n) = (X - \lambda u_1 - \beta) \dots (X - \lambda u_n - \beta) \\ &= \lambda^n P(\lambda^{-1}(X - \beta)) \end{aligned}$$

Do đó  $P(f) = \lambda^n P(\lambda^{-1}(f - \beta))$  với  $f \in \mathbf{K}$  tùy ý. □

### 2.1.4. Đa thức duy nhất mạnh

Sau đây ta sẽ đưa ra điều kiện cần và đủ để một đa thức là duy nhất mạnh.

#### 2.1.4.1. Định lý

Gọi  $P(X)$  là một đa thức thỏa mãn giả thiết I.

- (I) (a) Khi  $g = 0$ .  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathbf{K}$  khi và chỉ khi tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của  $P$  là cứng affine và  $P$  không thỏa mãn (1A) hoặc (1E).



- (b) Khi  $g=1$ .  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathbf{K}$  khi và chỉ khi tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của  $P$  là cứng affine và  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1E).
- (c) Khi  $g \geq 2$ . Giả sử  $\mathcal{U}$  là cứng affine.  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathbf{K}$  khi và chỉ khi  $l \geq 2g + 4$
- (II) Nếu  $|S|=1$  thì  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh trên  $\mathcal{O}_S$  khi và chỉ khi  $\mathcal{U}$  là cứng affine.

### ***Chứng minh***

Khi  $g=0$ , ta đã chứng minh trong bổ đề 2.1.1.2 và 2.1.3.1 là  $P(X)$  là đa thức duy nhất mạnh nếu  $\mathcal{U}$  là cứng affine và  $P$  không thỏa mãn (1A) hoặc (1E). Mặt khác, nếu  $\mathcal{U}$  không là cứng affine thì  $P(X)$  không là đa thức duy nhất mạnh. Hơn nữa, cũng dễ dàng kiểm tra được nếu  $P$  thỏa mãn (1A) thì  $[F(X,Y,Z)=0]$  là đường cong bất khả quy có giống bằng 0, và nếu  $P$  thỏa mãn (1E) thì  $[F_\omega(X,Y,Z)=0]$  cũng là đường cong bất khả quy có giống bằng 0. Vì vậy, tồn tại hai hàm đại số phân biệt  $f$  và  $g$  trong  $\mathbf{K}$  dẫn đến một đồng cấu từ  $C$  vào  $[F(X,Y,Z)=0]$  hoặc  $[F_\omega(X,Y,Z)=0]$  theo thứ tự đó. Điều này chứng minh rằng  $P$  không là đa thức duy nhất mạnh nếu  $P$  thỏa mãn (1A) hay (1E). Vậy ta chứng minh được 2.1.4.1(I)(a).

Định lý 2.1.4.1(I)(b) suy ra từ định lý 2.1.4.2(a).

Định lý 2.1.4.1(I)(c) suy ra từ bổ đề 2.1.1.2 và 2.1.3.1.

Định lý 2.1.4.1(II) suy ra từ bổ đề 2.1.1.3 và mệnh đề 2.1.3.5.

### 2.1.4.2. Định lý

Gọi  $P(X)$  là một đa thức thỏa mãn giả thiết I và tập các không điểm  $\mathcal{U}$  của nó là cứng affine. Giả sử rằng  $f, g$  là hai hàm phân biệt khác hằng trên  $\mathbf{K}$  sao cho  $P(f) = cP(g)$  với  $c \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  nào đó. Khi đó:

- (a)  $h(f) = h(g) \leq 8g - 8$  nếu  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1D).
- (b)  $h(f) = h(g) \leq 6g - 6 + 3|S|$  nếu  $f$  và  $g$  là  $S$ -nguyên và  $P$  không thỏa mãn (1B) hoặc (1D).

### Chứng minh

Định lý 2.1.4.2 được suy ra từ bổ đề 2.1.1.2 và 2.1.3.2.

## 2.2. Tập xác định duy nhất

Đặt  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  là một tập con của  $\mathbf{k}$ , và  $f, g$  là hai hàm phân biệt khác hằng trên  $\mathbf{K}$ . Ta nói rằng  $f$  và  $g$  thỏa mãn  $(C_{m_0, \bar{S}})$  nếu

$$\sum_{i=1}^n \min \{m_0, v_{\mathbf{p}}^0(f - u_i)\} = \sum_{i=1}^n \min \{m_0, v_{\mathbf{p}}^0(g - u_i)\}, \text{ với mọi } \mathbf{p} \notin S,$$

trong đó,  $m_0$  là số nguyên dương hoặc  $m_0 = \infty$ . Khi  $m_0 = 1$ , điều này tương đương với  $f$  và  $g$  chung nhau  $\mathcal{U}$  ngoài  $S$  không tính bội. Khi  $m_0 = \infty$  điều này tương đương với  $f$  và  $g$  chung nhau  $\mathcal{U}$  ngoài  $S$  kể cả bội. Đặt

$$P(X) = (X - u_1) \dots (X - u_n) \quad (3.1)$$

là đa thức liên kết với  $\mathcal{U}$ , và đặt

$$P'(X) = n(X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_l)^{m_l} \quad (3.2)$$

với các hệ số  $\alpha_i$  phân biệt.

### 2.2.1. Một số kết quả về trường các hàm

Trong phần này, ta giả sử rằng  $t \in \mathbf{K}$  được chọn như sau. Chọn một điểm  $\mathbf{q} \in S$ , và xét  $\mathbf{k}$  – không gian vector

$$L((g+1)\mathbf{q}) := \{\eta \in \mathbf{K} \mid (\eta)_0 - (\eta)_\infty \geq -(g+1)\mathbf{q}\}$$

Từ định lý Riemann- Roch, suy ra số chiều của không gian vector này ít nhất bằng 2. Vì vậy, tồn tại một hàm khác hằng  $t$  trong không gian vector này. Hơn nữa, từ việc xây dựng này hàm  $t$  chỉ có một cực điểm tại  $\mathbf{q}$  có bậc cao nhất là  $g+1$ . Do đó ta có

#### 2.2.1.1. Mệnh đề

$$(i) \quad h(t) \leq g+1,$$

$$(ii) \quad \sum_{\mathbf{p} \notin S} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}t) \leq 3g.$$

#### *Chứng minh*

(i) rõ ràng được suy ra từ việc chọn  $t$ .

Với (ii), Từ định lý Riemann- Roch ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p} \notin S} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}t) &= 2g - 2 - \sum_{\mathbf{p} \in S} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}t) \\ &\leq 2g - 2 - (\nu_{\mathbf{q}}(t) - 1) \leq 2g - 1 + h(t) \leq 3g \end{aligned}$$

#### 2.2.1.2. Mệnh đề

Cho  $\eta$  là một hàm khác hằng trên  $\mathbf{K}$ . Khi đó

$$\sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}\eta) \leq 2h(\eta) + 2\mathfrak{g} - 2.$$

Hơn nữa, nếu  $\eta$  là  $S$ -nguyên thì  $\sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}\eta) \leq h(\eta) + 2\mathfrak{g} - 2 + |S|$ .

### ***Chứng minh***

Khẳng định đầu tiên được suy ra từ các phép tính sau

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}\eta) &= \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(\eta) \geq 0} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}\eta) = \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(\eta) \geq 0} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}\eta) + \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(\eta) \geq 0} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}t) \\ &= - \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(\eta) < 0} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}\eta) + \sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}t) \leq - \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(\eta) < 0} (\nu_{\mathbf{p}}(\eta) - 1) + 2\mathfrak{g} - 2 \\ &\leq 2h(\eta) + 2\mathfrak{g} - 2 \end{aligned}$$

Nếu  $\eta$  là  $S$ -nguyên thì số các điểm  $\mathbf{p}$  mà  $\nu_{\mathbf{p}}(\eta) < 0$  nhiều nhất là  $|S|$ .

Do đó

$$- \sum_{\nu_{\mathbf{p}}(\eta) < 0} (\nu_{\mathbf{p}}(\eta) - 1) \leq h(\eta) + |S|$$

Từ đó suy ra khẳng định thứ hai. □

Cho  $\eta \neq 0$ . Hàm đếm bị chặn trên  $\bar{S}$  được định nghĩa như sau

$$N_{\bar{S}}(\eta) := \sum_{\mathbf{p} \notin S} \min\{1, \nu_{\mathbf{p}}^0(\eta)\}, \quad \bar{N}_{\bar{S}}(\eta) := \sum_{\mathbf{p} \notin S} \min\{1, \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(\eta)\}$$

#### **2.2.1.3. Bổ đề** (Định lý cơ bản thứ hai bị chặn)

Cho  $f$  là hàm khác hằng trên  $\mathbf{K}$  và gọi  $u_1, u_2, \dots, u_n$  là  $n$  phần tử phân biệt trong  $\mathbf{k}$ . Khi đó

$$(n-1)h(f) \leq \sum_{i=1}^n \bar{N}_{\bar{S}}(f - u_i) + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) - \sum_{\mathbf{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + 2\mathfrak{g} - 2 + |S|.$$

trong đó,  $C\mathcal{U}_{\bar{S}} = \{\mathbf{p} \notin S \mid \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) = 0 \text{ với mọi } 1 \leq i \leq n\}$

### ***Chứng minh***

$$\text{Vì } u_i \in \mathbf{k} \text{ nên } d_t f = d_t(f - u_i) \quad (2.2.1)$$

$$\text{Và } d_t f = -f^2 d_t f^{-1}. \quad (2.2.2)$$

Đầu tiên, xét  $\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0$ .

Trong trường hợp này ta có,  $\nu_{\mathbf{p}}(f^{-1}) = -\nu_{\mathbf{p}}(f) > 0$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) = \nu_{\mathbf{p}}(f)$ .

Từ (3.4) ta có

$$\begin{aligned} \frac{(f - u_1) \dots (f - u_n)}{d_t f} &= \frac{f^{-1}(f - u_1) \dots (f - u_n)}{-f d_t f^{-1}} \\ &= \frac{f^{-1}(f - u_1) \dots (f - u_n)}{-f d_{\mathbf{p}} f^{-1}} d_{\mathbf{p}} t \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\text{Do } \nu_{\mathbf{p}}(f d_{\mathbf{p}} f^{-1}) = \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f^{-1} / f^{-1}) \geq -\min\{1, \nu_{\mathbf{p}}(f^{-1})\}.$$

Nên từ (2.2.3) ta có

$$\sum_{i=1}^n \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) - \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) \leq (n-1)\nu_{\mathbf{p}}(f) + \min\{1, \nu_{\mathbf{p}}(f^{-1})\} + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t).$$

Do đó

$$\begin{aligned} &-(n-1)\min\{0, \nu_{\mathbf{p}}(f)\} \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) + \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) + \min\{1, \nu_{\mathbf{p}}(f^{-1})\} + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Bây giờ ta xét trường hợp  $\nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0$ .

Chọn  $\{\pi(1), \dots, \pi(n)\} = \{1, \dots, n\}$  và

$$\nu_{\mathbf{p}}(f - u_{\pi(1)}) \geq \nu_{\mathbf{p}}(f - u_{\pi(2)}) \geq \dots \geq \nu_{\mathbf{p}}(f - u_{\pi(n)}) \geq 0.$$

Để dàng kiểm tra được  $\nu_{\mathbf{p}}(f - u_{\pi(2)}) = \dots = \nu_{\mathbf{p}}(f - u_{\pi(n)}) = 0$ .

Từ (2.2.1) ta có

$$\frac{(f - u_1) \dots (f - u_n)}{d_t f} = \frac{(f - u_1) \dots (f - u_n)}{d_t (f - u_{\pi(1)})} = \frac{(f - u_{\pi(2)}) \dots (f - u_{\pi(n)})}{(f - u_{\pi(1)})^{-1} d_{\mathbf{p}} (f - u_{\pi(1)})} d_{\mathbf{p}} t.$$

Tương tự, ta có  $\sum_{i=1}^n \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) - \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) \leq \min\{1, \nu_{\mathbf{p}}(f - u_{\pi(1)})\} + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t)$ .

Vì vậy, ta có hai bất đẳng thức sau

$$0 \leq -\sum_{i=1}^n \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) + \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) + \sum_{i=1}^n \min\{1, \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i)\} + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t) \quad (2.2.5)$$

$$0 \leq -\sum_{i=1}^n \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) + \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) + 1 + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t) \quad (2.2.6)$$

Cộng (2.2.4) với mọi  $\mathbf{p}$  mà  $\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0$ , (2.2.5) với mọi  $\mathbf{p}$  mà  $\mathbf{p} \notin S$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) > 0$  với  $1 \leq i \leq n$ , và (2.2.6) với mọi  $\mathbf{p}$  mà  $\mathbf{p} \in S$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 0$ , ta được

$$\begin{aligned} (n-1)h(f) \leq & -\sum_{i=1}^n \sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) + \sum_{\mathbf{p} \in C \cup \bar{S}} \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) \\ & + \sum_{i=1}^n \bar{N}_{\bar{S}}(f - u_i) + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) + |S| + \sum_{\mathbf{p} \in C \cup \bar{S}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t) \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Vì bất kỳ phần tử nào trong trường hàm có cùng số các không điểm và cực điểm, kể cả bội,  $\sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) = 0$  và

$$\sum_{\mathbf{p} \notin C\mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) = - \sum_{\mathbf{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_t f) = - \sum_{\mathbf{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f) + \sum_{\mathbf{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t).$$

Hơn nữa, vì  $\sum_{\mathbf{p} \in C} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} t) = 2g - 2$  và (2.2.7) nên ta được

$$(n-1)h(f) \leq \sum_{i=1}^n \bar{N}_{\bar{S}}(f - u_i) + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) - \sum_{\mathbf{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}} f) + |S| + 2g - 2 \quad \square$$

Kể từ nay, giả sử rằng  $f$  và  $g$  là các hàm khác hằng phân biệt trên  $\mathbf{K}$  thỏa mãn  $(C_{m_0, \bar{S}})$ . Gọi  $P(X)$  là đa thức được định nghĩa như trên, ta đặt

$$F := \frac{1}{P(f)}, \quad G := \frac{1}{P(g)}, \quad \text{và} \quad H := \frac{d_t^2 F}{d_t F} - \frac{d_t^2 G}{d_t G}.$$

#### 2.2.1.4. Bổ đề

Giả sử  $P(X)$  thỏa mãn giả thiết I. Giả sử rằng  $f$  và  $g$  là các hàm khác hằng phân biệt trên  $\mathbf{K}$  thỏa mãn  $(C_{m_0, \bar{S}})$ , và  $H$  xác định như trên. Nếu  $H \equiv 0$  thì

$$\frac{1}{P(f)} = \frac{c_0}{P(g)} + c_1$$

với  $c_0 \neq 0$  và  $c_1 \in \mathbf{k}$ ,  $h(f) = h(g)$ . Hơn nữa, giả sử rằng (i)  $l \geq 4$ , (ii)  $l = 3$  và  $\max\{m_1, m_2, m_3\} \geq 2$  hoặc (iii)  $l = 2$  và  $\min\{m_1, m_2\} \geq 2$ . Khi đó hoặc là  $c_1 = 0$  hoặc là các mệnh đề sau đúng:

$$(i) \quad h(f) \leq 10(2g - 2 + |S|) ;$$

$$(ii) \quad n \leq \max \{5, 4g + 2|S|\}.$$

### **Chứng minh**

$$\text{Đặt } F := \frac{1}{P(f)}, G := \frac{1}{P(g)}, H := \frac{d_t^2 F}{d_t F} - \frac{d_t^2 G}{d_t G} \text{ và } H_p := \frac{d_p^2 F}{d_p F} - \frac{d_p^2 G}{d_p G}$$

$$\text{Do quy luật hàm hợp, ta có } H_p = H \cdot d_p t \quad (2.2.8)$$

Tính toán trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned} H_p = & \left\{ \frac{P''(f)}{P'(f)} d_p f - \frac{P''(g)}{P'(g)} d_p g \right\} \\ & - 2 \left\{ \frac{P'(f)}{P(f)} d_p f - \frac{P'(g)}{P(g)} d_p g \right\} + \left\{ \frac{d_p^2 f}{d_p f} - \frac{d_p^2 g}{d_p g} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Nếu  $H \equiv 0$  thì  $d_t^2 F d_t G = d_t^2 G d_t F$ , suy ra  $d_t(d_t F / d_t G) = 0$ .

Do đó  $d_t F = c_0 d_t G$  với  $c_0 \in \mathbf{k}$ .

Vậy  $F = c_0 G + c_1$  với  $c_1 \in \mathbf{k}$  nên khẳng định đầu tiên là rõ ràng. Lưu ý rằng  $c_0 \neq 0$  vì  $f$  và  $g$  khác hằng.

Khẳng định  $h(f) = h(g)$  được suy ra từ việc tính toán như sau

$$\begin{aligned} nh(f) &= h(P(f)) = h\left(\frac{1}{P(f)}\right) = h\left(\frac{c_0}{P(g)} + c_1\right) \\ &= h\left(\frac{c_0}{P(g)}\right) = h(P(g)) = nh(g) \end{aligned}$$

Giả sử rằng  $c_1 \neq 0$ .



Xét đa thức  $Q(X) := P(X) + \frac{c_0}{c_1}$ , và đặt

$$Q(X) = (X - e_1)^{n_1} (X - e_2)^{n_2} \dots (X - e_r)^{n_r}$$

là sự phân tích nguyên tố của nó.

Khi đó

$$P'(X) = Q'(X) \text{ và } \frac{P(g)}{c_1 P(f)} = (g - e_1)^{n_1} (g - e_2)^{n_2} \dots (g - e_r)^{n_r} \quad (2.2.10)$$

Do đó  $r \neq 1$  vì nếu ngược lại, ta có  $l = 1$ .

Vì  $P(e_i) = \frac{c_0}{c_1}$  và từ giả thiết I suy ra tồn tại nhiều nhất một  $e_i$  như trên là

không điểm của  $P'(X) = Q'(X)$ . Rõ ràng, nếu  $e_i$  không là không điểm của  $Q'(X)$  thì  $n_i = 1$ . Sau khi sắp xếp lại các chỉ số, ta có thể giả sử rằng  $n_2 = n_3 = \dots = n_r = 1$ .

Ta chứng minh  $r \neq 2$ .

Nếu  $r = 2$  thì  $Q(X) = (X - e_1)^{n_1} (X - e_2)$ . Điều này suy ra

$$P'(X) = Q'(X) = (X - e_1)^{n-2} (nX - e_1 - (n-1)e_2)$$

và do đó  $l = 2$ ,  $\min\{m_1, m_2\} = 1$ , trái với giả thiết.

Vậy ta chỉ cần xét khi  $r \geq 3$ . Từ (2.2.10) và  $P(e_i) \neq 0$  ta suy ra được nếu  $v_p(g - e_i) > 0$  thì  $v_p(P(f)) = -n_i v_p(g - e_i) < 0$ . Từ đó ta thu được  $v_p(f) < 0$  và  $v_p(P(f)) = n v_p(f)$ . Do đó

$$\nu_{\mathbf{p}}(g - e_i) = -\frac{n}{n_i} \nu_{\mathbf{p}}(f).$$

Vậy  $\nu_{\mathbf{p}}^0(g - e_i) \geq n \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(g - e_i)$ , với  $2 \leq i \leq r$  vì  $n_2 = n_3 = \dots = n_r = 1$ .

Mà  $n_1 + (r-1) = n$  và  $r \geq 3$  nên  $\frac{n}{n_1} \geq \frac{n}{n-2} > 1$ .

Do đó  $\nu_{\mathbf{p}}(g - e_1) = -\frac{n}{n_1} \nu_{\mathbf{p}}(f) \geq 2$ .

Khi đó  $\nu_{\mathbf{p}}^0(g - e_1) \geq 2 \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(g - e_1)$ .

Bây giờ ta áp dụng định lý chính thứ hai bị chặt, ta được

$$\begin{aligned} (r-2)h(g) &\leq \sum_{i=1}^r \bar{N}_{\bar{s}}(g - e_i) + 2\mathfrak{g} - 2 + |S| \\ &\leq \frac{1}{2} N_{\bar{s}}(g - e_1) + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^r N_{\bar{s}}(g - e_i) + 2\mathfrak{g} - 2 + |S| \\ &\leq \left( \frac{1}{2} + \frac{r-1}{n} \right) h(g) + 2\mathfrak{g} - 2 + |S| \end{aligned}$$

Khi đó  $\left( \frac{n-1}{n} r - \frac{5}{2} + \frac{1}{n} \right) h(g) \leq 2\mathfrak{g} - 2 + |S|$ .

$$\text{Vì } r \geq 3 \text{ nên } \frac{n-4}{2n} h(g) \leq 2\mathfrak{g} - 2 + |S| \quad (2.2.11)$$

Từ giả thiết suy ra  $n \geq 5$ . Do đó  $h(g) \leq 10(2\mathfrak{g} - 2 + |S|)$ .

Vì  $g - e_2$  không là hàm hằng nên  $\nu_{\mathbf{p}}(g - e_2) > 0$  với  $\mathbf{p}$  nào đó. Theo phần trước, ta có  $\nu_{\mathbf{p}}(g - e_2) \geq n$ . Khi đó  $h(g - e_2) \geq n$ , vì nó bằng số các không điểm, kể cả bội.

Vậy  $h(g) = h(g - e_2) \geq n$ .

Từ (2.2.11) và  $n \geq 5$  suy ra  $n \leq 4\mathfrak{g} + 2|S|$ .

### 2.2.1.5. Mệnh đề

Nếu  $\nu_{\mathfrak{p}}(F) = \nu_{\mathfrak{p}}(G) = -1$  thì  $\nu_{\mathfrak{p}}(H_{\mathfrak{p}}) > 0$ .

#### *Chứng minh*

Ta đặt  $F = t_{\mathfrak{p}}^{-1} \tilde{F}, G = t_{\mathfrak{p}}^{-1} \tilde{G}$  với  $\nu_{\mathfrak{p}}(\tilde{F}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\tilde{G}) = 0$ . Khi đó

$$H_{\mathfrak{p}} = \frac{t_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}}^2 \tilde{F}}{t_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}} \tilde{F} - \tilde{F}} - \frac{t_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}}^2 \tilde{G}}{t_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}} \tilde{G} - \tilde{G}} \text{ có bậc dương tại } \mathfrak{p}.$$

### 2.2.1.6. Mệnh đề

$$\nu_{\mathfrak{p}}^{\infty}(H_{\mathfrak{p}}) \leq 1, \text{ với mọi } \mathfrak{p} \in C.$$

#### *Chứng minh*

Điều này được suy ra từ  $\nu_{\mathfrak{p}}\left(\frac{d_{\mathfrak{p}}\eta}{\eta}\right) \geq -1$ , với  $\eta \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$  tùy ý. □

Nhắc lại rằng  $C\mathcal{U}_{\bar{S}} = \{\mathfrak{p} \notin S \mid \nu_{\mathfrak{p}}(f - u_i) = 0 \text{ với mọi } 1 \leq i \leq n\}$ .

Đặt  $\mathcal{U}_{\bar{S}} = \{\mathfrak{p} \notin S \mid \nu_{\mathfrak{p}}(f - u_i) > 0, 1 \leq i \leq n\}$

$$\varepsilon_{\mathfrak{p}}^{C\mathcal{U}_{\bar{S}}} := \begin{cases} 1, & \mathfrak{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}} \\ 0, & \text{ngược lại} \end{cases} \text{ và } \varepsilon_{\mathfrak{p}}^{\mathcal{U}_{\bar{S}}} := \begin{cases} 1, & \mathfrak{p} \in \mathcal{U}_{\bar{S}} \\ 0, & \text{ngược lại} \end{cases}$$

### 2.2.1.7. Mệnh đề

Giả sử  $f$  và  $g$  là hai hàm phân biệt khác hằng thỏa mãn  $(C_{m_0, \bar{S}})$ . Lấy  $\mathbf{p} \notin S$ .

(i) Nếu  $m_0 = \infty$  thì

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{p}}^{\infty}(H_{\mathbf{p}}) \leq & \sum_{j=1}^l \left( \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(f - \alpha_j) + \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(g - \alpha_j) \right) + \left\{ \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^{\infty}(f) + \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^{\infty}(g) \right\} \\ & + \varepsilon_{\mathbf{p}}^{c\mathcal{U}_{\bar{S}}} \left\{ \bar{\nu}_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + \bar{\nu}_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}g) \right\} \end{aligned}$$

(ii) Nếu  $0 \leq m_0 < \infty$  thì

$$\begin{aligned} \nu_{\mathbf{p}}^{\infty}(H_{\mathbf{p}}) \leq & \sum_{j=1}^l \left( \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(f - \alpha_j) + \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(g - \alpha_j) \right) + \left\{ \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^{\infty}(f) + \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^{\infty}(g) \right\} \\ & + \varepsilon_{\mathbf{p}}^{c\mathcal{U}_{\bar{S}}} \left\{ \bar{\nu}_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + \bar{\nu}_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}g) \right\} + \frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}^{\mathcal{U}_{\bar{S}}}}{m'_0} \left\{ \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}g) \right\} \end{aligned}$$

với  $m'_0 := \max\{1, m_0 - 1\}$ .

### Chứng minh

Từ mệnh đề 2.2.1.6,  $\nu_{\mathbf{p}}^{\infty}(H_{\mathbf{p}}) = 1$  nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(H_{\mathbf{p}}) < 0$ . Từ (2.2.9) ta thấy nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(H_{\mathbf{p}}) < 0$  chỉ nếu (a)  $\nu_{\mathbf{p}}(f) < 0, \nu_{\mathbf{p}}(g) < 0$ , (b)  $\nu_{\mathbf{p}}(P'(f)) > 0, \nu_{\mathbf{p}}(P'(g)) > 0$ , (c)  $\nu_{\mathbf{p}}(P(f)) > 0, \nu_{\mathbf{p}}(P(g)) > 0$ , hoặc (d)  $\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) > 0$ , hoặc  $\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}g) > 0$ . Do đó, hai số hạng đầu tiên trong các bất đẳng thức (i) hoặc (ii) không kể đến từ (a) và (b). Chú ý rằng

$$\frac{P'(f)}{P(f)} d_p f - \frac{P'(g)}{P(g)} d_p g = d_p \left( \frac{P(f)}{P(g)} \right) / \frac{P(f)}{P(g)} \quad \text{và}$$

$$\frac{d_p^2 f}{d_p f} - \frac{d_p^2 g}{d_p g} = d_p \left( \frac{d_p f}{d_p g} \right) / \frac{d_p f}{d_p g}.$$

Nếu  $m_0 = \infty$  thì  $(C_{m_0, \bar{S}})$  suy ra  $\nu_p \left( \frac{P(f)}{P(g)} \right) = 0$  và do đó

$$\nu_p \left( \frac{P'(f)}{P(f)} d_p f - \frac{P'(g)}{P(g)} d_p g \right) \geq 0$$

Hơn nữa, nếu  $\nu_p(f - u_i) > 0$  thì  $\nu_p(g - u_j) = \nu_p(f - u_i) > 0$  với  $j$  nào đó.

Vì vậy,  $\nu_p(d_p f) = \nu_p(d_p g)$ . Suy ra  $\nu_p \left( \frac{d_p^2 f}{d_p f} - \frac{d_p^2 g}{d_p g} \right) \geq 0$

Do đó, số hạng cuối cùng trong (i) chỉ được tính đến khi  $\mathbf{p} \in \mathcal{CU}_{\bar{S}}$ .

Bây giờ, xét trường hợp  $m_0$  là một số nguyên dương. Nếu  $\nu_p(P(f)) > 0$  thì  $\nu_p(f - u_i) > 0$  với  $i$  nào đó và  $\nu_p(g - u_j) > 0$  với  $j$  nào đó do  $(C_{m_0, \bar{S}})$ . Nếu  $\nu_p(d_p f) = \nu_p(d_p g) = 0$  thì  $\nu_p(f - u_i) = 1$  và  $\nu_p(g - u_j) = 1$ . Từ đó suy ra  $\nu_p(H_p) > 0$  theo bổ đề 2.2.1.5. Do đó ta chỉ cần xét khi  $\nu_p(d_p f) > 1$  hoặc  $\nu_p(d_p g) = 0$ . Không mất tính tổng quát, ta chỉ xét  $\nu_p(f - u_i) \geq 2$ . Trong trường hợp này,  $\nu_p(d_p f) \geq 1$ , vì vậy (ii) đúng khi  $m_0 = 1, 2$ . Giả sử  $m_0 \geq 3$ . Nếu  $2 \leq \nu_p(f - u_i) \leq m_0$  và  $0 < \nu_p(g - u_j) \leq m_0$  thì trường hợp này tương tự như  $m_0 = \infty$ . Ngược lại, hoặc là  $\nu_p(d_p f) \geq m_0 - 1$  hoặc là  $\nu_p(d_p g) \geq m_0 - 1$ . Điều này chứng minh được (ii).

### 2.2.2. Tập xác định duy nhất

#### 2.2.2.1. Bổ đề

Cho  $P(X), f, g$  và  $H$  như bổ đề trên. Giả sử rằng  $H \not\equiv 0$ .

(I) (a) Nếu  $m_0 = 1$  thì

$$(i) \quad n \leq \max \{2l + 13, 2l + 2 + 13g + 2|S|\} ;$$

$$(ii) \quad h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 4|S|, \text{ nếu } n \geq 2l + 13.$$

(b) Nếu  $m_0 \geq 2$  thì

$$(i) \quad n \leq \max \left\{ 2l + 7 + \frac{4}{m_0 - 1}, 2l + 2 + \left( 7 + \frac{4}{m_0 - 1} \right) g + 2|S| \right\}.$$

$$(ii) \quad h(f) + h(g) \leq \left( 14 + \frac{8}{m_0 - 1} \right) g - \left( 8 + \frac{8}{m_0 - 1} \right) + 4|S|, \text{ nếu}$$

$$n \geq 2l + 7 + \frac{4}{m_0 - 1}$$

(II) Nếu ta giả sử thêm rằng  $f$  và  $g$  là các  $S$  – nguyên thì

(a) Nếu  $m_0 = 1$  thì

$$(i) \quad n \leq \max \{2l + 6, 2l - 5 + 13g + 6|S|\} ;$$

$$(ii) \quad h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 12|S|, \text{ nếu } n \geq 2l + 6.$$

(b) Nếu  $m_0 \geq 2$  thì

(i)

$$n \leq \max \left\{ 2l + 3 + \frac{2}{m_0 - 1}, 2l - 2 + \left( 7 + \frac{4}{m_0 - 1} \right) \mathfrak{g} + \left( 3 + \frac{2}{m_0 - 1} \right) |S| \right\}$$

$$(ii) \quad h(f) + h(g) \leq \left( 14 + \frac{8}{m_0 - 1} \right) \mathfrak{g} - \left( 8 + \frac{8}{m_0 - 1} \right) + \left( 6 + \frac{4}{m_0 - 1} \right) |S|,$$

$$\text{nếu } n \geq 2l + 3 + \frac{2}{m_0 - 1}.$$

### Chứng minh

Theo định lý chính thứ hai, ta có

$$(n-1)h(f) \leq \sum_{i=1}^n \bar{N}_{\bar{S}}(f - u_i) + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) - \sum_{\mathbf{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + 2\mathfrak{g} - 2 + |S|. \quad (3.14)$$

Đầu tiên, ta khẳng định rằng

$$\sum_{i=1}^n \bar{N}_{\bar{S}}(f - u_i) \leq \sum_{\mathbf{p} \notin S} \bar{\nu}_{\mathbf{p}}^0(H_{\mathbf{p}}) + \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + \delta \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}g) \quad (3.15)$$

trong đó  $\delta = 1$  nếu  $m_0 = 1$  và  $\delta = 0$  nếu  $m_0 \geq 2$ .

Xét trường hợp  $m_0 \geq 2$ .

Giả sử rằng  $\mathbf{p} \notin S$  và  $\nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) > 0$  với  $1 \leq i \leq n$  nào đó. Từ đó suy ra  $\nu_{\mathbf{p}}(f - u_m) = 0$  với mọi  $m \neq i$ . Nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) = 1$  thì  $\nu_{\mathbf{p}}(g - u_j) = 1$  với  $j$  nào đó vì  $f, g$  thỏa mãn  $(C_{m_0, \bar{S}})$  và  $m_0 \geq 2$ . Do đó  $\nu_{\mathbf{p}}(P(f)) = \nu_{\mathbf{p}}(P(g)) = 1$ . Từ mệnh đề 2.2.1.5 suy ra  $\nu_{\mathbf{p}}(H_{\mathbf{p}}) > 0$ . Nếu  $\nu_{\mathbf{p}}(f - u_i) \geq 2$  thì  $\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) \geq 1$ . Vì vậy (3.15) đúng.

Với trường hợp  $m_0 = 1$ . Nếu  $\nu_p(f - u_i) > 0$  thì ta chỉ kết luận rằng (a)  $\nu_p(d_p f) > 0$  hoặc  $\nu_p(d_p g) > 0$ , hoặc (b)  $\nu_p(d_p f) = \nu_p(d_p g) = 0$ . Một cách tương tự, trường hợp sau được suy ra từ  $\nu_p(H_p) > 0$ . Vậy ta có (3.15)

Thứ hai, ta khẳng định rằng

$$\begin{aligned} \sum_{p \notin S} \bar{\nu}_p^0(H_p) &\leq l(h(f) + h(g)) + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) + \bar{N}_{\bar{S}}(g^{-1}) \\ &+ \sum_{p \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) + \frac{1}{m'_0} \sum_{p \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) + |S| + 3g \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{p \notin S} \bar{\nu}_p^0(H_p) &\leq \sum_{p \notin S} (\nu_p^0(H) + \nu_p(d_p t)) \\ &\leq \sum_{p \in C} \nu_p^\infty(H) + \sum_{p \notin S} \nu_p(d_p t) \leq \sum_{p \notin S} \nu_p^\infty(H) + |S| + 3g \\ &\leq \sum_{j=1}^l (\bar{N}_{\bar{S}}(f - \alpha_j) + \bar{N}_{\bar{S}}(g - \alpha_j)) + \sum_{p \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) \\ &\quad + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) + \bar{N}_{\bar{S}}(g^{-1}) + \frac{1}{m'_0} \sum_{p \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) + |S| + 3g \\ &\leq l(h(f) + h(g)) + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) + \bar{N}_{\bar{S}}(g^{-1}) + \sum_{p \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) \\ &\quad + \frac{1}{m'_0} \sum_{p \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) + |S| + 3g \end{aligned}$$

Theo (3.14), (3.15) và (3.16), ta có

$$\begin{aligned} (n-1)h(f) &\leq l(h(f) + h(g)) + 2\bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) + \bar{N}_{\bar{S}}(g^{-1}) + \sum_{p \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) \\ &\quad + \delta \sum_{p \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_p(d_p g) + \frac{1}{m'_0} \sum_{p \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_p(d_p f) + \nu_p(d_p g)) + 5g - 2 + 2|S| \end{aligned}$$



Một cách tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
& (n-1)h(g) \\
& \leq l(h(f) + h(g)) + \bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) + 2\bar{N}_{\bar{S}}(g^{-1}) + \sum_{\mathbf{p} \in C\mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}g)) \\
& \quad + \delta \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + \frac{1}{m'_0} \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{U}_{\bar{S}}} (\nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}f) + \nu_{\mathbf{p}}(d_{\mathbf{p}}g)) + 5\mathfrak{g} - 2 + 2|S|
\end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức này, ta được

$$\begin{aligned}
& (n-1)(h(f) + h(g)) \\
& \leq 2l(h(f) + h(g)) + 3(\bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) + \bar{N}_{\bar{S}}(g^{-1})) \\
& \quad + \left(\frac{2}{m'_0} + 1 + \delta\right) \left(\sum_{\mathbf{p} \notin S} \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}f) + \sum_{\mathbf{p} \notin S} \nu_{\mathbf{p}}^0(d_{\mathbf{p}}g)\right) + 10\mathfrak{g} - 4 + 4|S| \quad (3.17) \\
& \leq \left(2l + 5 + \frac{4}{m'_0} + 2\delta\right)(h(f) + h(g)) + \left(14 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right)\mathfrak{g} \\
& \quad - \left(8 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right) + 4|S|
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
& \left(n - 2l - 6 - \frac{4}{m'_0} - 2\delta\right)(h(f) + h(g)) \\
& \leq \left(14 + \frac{8}{m'_0} + 4\right)\delta\mathfrak{g} - \left(8 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right) + 4|S|
\end{aligned}$$

Nếu  $n \geq 2l + 7 + \frac{4}{m'_0} + 2\delta$  thì

$$h(f) + h(g) \leq \left(14 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right)\mathfrak{g} - \left(8 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right) + 4|S|.$$

Vì  $f, g$  là các hàm khác hằng nên  $h(f) + h(g) \geq 2$ . Suy ra

$$n \leq 2l + 2 + \left(7 + \frac{4}{m'_0} + 2\delta\right)\mathfrak{g} + 2|S|.$$

Đối với trường hợp  $f, g$  là các  $S$ -nguyên,  $\bar{N}_{\bar{S}}(f^{-1}) = \bar{N}_{\bar{S}}(g^{-1}) \leq |S|$ , ta có

$$\sum_{\mathfrak{p} \notin S} \{\nu_{\mathfrak{p}}^0(d_{\mathfrak{p}}f) + \sum_{\mathfrak{p} \notin S} \nu_{\mathfrak{p}}^0(d_{\mathfrak{p}}g)\} \leq h(f) + h(g) + 4\mathfrak{g} - 4 + 2|S|.$$

Khi đó (3.17) cho ta

$$\begin{aligned} & \left(n - 2l - 2 - \frac{2}{m'_0} - \delta\right)(h(f) + h(g)) \\ & \leq \left(14 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right)\mathfrak{g} - \left(8 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right) + \left(6 + \frac{4}{m'_0} + 2\delta\right)|S| \end{aligned}$$

Nếu  $n \geq 2l + 3 + \frac{2}{m'_0} + \delta$  thì

$$\begin{aligned} & h(f) + h(g) \\ & \leq \left(14 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right)\mathfrak{g} - \left(8 + \frac{8}{m'_0} + 4\delta\right) + \left(6 + \frac{4}{m'_0} + 2\delta\right)|S|. \end{aligned}$$

Vì  $f, g$  là các hàm khác hằng nên  $h(f) + h(g) \geq 2$ . Bất đẳng thức này cũng cho ta

$$n \leq 2l - 2 - \frac{2}{m'_0} - \delta + \left(7 + \frac{4}{m'_0} + 2\delta\right)\mathfrak{g} + \left(3 + \frac{2}{m'_0} + 2\delta\right)|S|.$$

### 2.2.2.2. Định lý

Gọi  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  là một cứng affine, tập con của  $\mathbf{k}$ , đặt  $P(X) = (X - u_1) \dots (X - u_n)$  thỏa mãn giả thiết I,  $P'(X)$  như trong (1) và (i)

$l \geq 4$ , (ii)  $l = 3$  và  $\max\{m_1, m_2, m_3\} \geq 2$  hoặc (iii)  $l = 2$  và  $\min\{m_1, m_2\} \geq 2$ .

Giả sử  $f$  và  $g$  là hai hàm phân biệt khác hằng trên  $K$  thỏa mãn  $(C_{m_0, \bar{S}})$ .

(I) (a) Nếu  $m_0 = 1$  và  $n \geq 2l + 13$  thì  $h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 4|S|$ .

(b) Nếu  $m_0 \geq 2$  và  $n \geq 2l + 7 + \frac{4}{m_0 - 1}$  thì

$$h(f) + h(g) \leq 22g - 8 + 4|S|.$$

(c) Nếu  $m_0 = 1$ ,  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên, và nếu  $n \geq 2l + 6$  thì

$$h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 12|S|.$$

(d) Nếu  $m_0 \geq 2$ ,  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên, và nếu

$$n \geq 2l + 3 + \frac{2}{m_0 - 1} \text{ thì } h(f) + h(g) \leq 22g - 8 + 10|S|.$$

(II) Giả sử thêm  $l \geq 2g + 4$  nếu  $g \geq 2$ .

(a) Nếu  $m_0 = 1$  thì  $n \leq \max\{2l + 13, 2l + 2 + 13g + 2|S|\}$ .

(b) Nếu  $m_0 \geq 2$  thì

$$n \leq \max\left\{2l + 7 + \frac{4}{m_0 - 1}, 2l + 2 + \left(7 + \frac{4}{m_0 - 1}\right)g + 2|S|\right\}.$$

(c) Nếu  $m_0 = 1$ ,  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên thì

$$n \leq \max\{2l + 6, 2l - 5 + 13g + 2|S|\}$$

(d) Nếu  $m_0 \geq 2$ ,  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên thì

$$n \leq \max \left\{ 2l + 3 + \frac{2}{m_0 - 1}, 2l - 2 - \frac{2}{m_0 - 1} + \left( 7 + \frac{4}{m_0 - 1} \right) g + \left( 3 + \frac{2}{m_0 - 1} \right) |S| \right\}$$

### **Chứng minh**

Nếu  $H \equiv 0$  thì từ bổ đề 2.2.9 suy ra  $\frac{1}{P(f)} = \frac{c_0}{P(g)} + c_1$  với  $c_0 \neq 0$  và  $c_1 \in \mathbf{k}$ ,  $h(f) = h(g)$ .

Nếu  $c_1 \neq 0$  thì (i)  $h(f) \leq 10(2g - 2 + |S|)$ , và (ii)  $n \leq \max\{5, 4g + 2|S|\}$ .

Nếu  $c_1 = 0$  thì  $P(g) = c_0 P(f)$ . Từ định lý 2, ta có  $h(f) \leq 8g - 8$ , và  $h(f) \leq 6g - 6 + 3|S|$  nếu  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên. Ngoài ra, nếu ta giả sử thêm  $l \geq 2g + 4$  khi  $g \geq 2$  thì mâu thuẫn với định lý 2.11. Vậy chỉ cần xét khi  $H \not\equiv 0$ . Trong trường hợp này, định lý được suy ra trực tiếp từ bổ đề 2.2.8.

Sau đây, ta sẽ đưa ra điều kiện cần và đủ để một đa thức là duy nhất.

#### **2.2.2.3. Định lý**

Cho  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  là cứng affine và là tập con của  $\mathbf{k}$ . Đặt  $P(X) = (X - u_1) \dots (X - u_n)$  thỏa mãn giả thiết I và  $P'(X)$  như trong (1). Giả sử  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1D). Giả sử thêm rằng  $l \geq 2g + 4$  nếu  $g \geq 2$ . Khi đó  $\mathcal{U}$  là tập xác định duy nhất trên  $\bar{S}$ :

- (a) IM trên  $\mathbf{K}$  nếu  $n > \max\{2l + 13, 2l + 2 + 13g + 2|S|\}$ ;
- (b) CM trên  $\mathbf{K}$  nếu  $n > \max\{2l + 7, 2l + 2 + 7g + 2|S|\}$ ;
- (c) IM trên  $\mathcal{O}_S$  nếu  $n > \max\{2l + 6, 2l - 5 + 13g + 6|S|\}$ ;

(d) CM trên  $\mathcal{O}_S$  nếu  $n > \max\{2l+3, 2l-2+7g+3|S|\}$ .

### **Chứng minh**

Từ 2.2.2.2(II)(a) và do  $\mathcal{U}$  là tập xác định duy nhất trên  $\bar{S}$  nên ta có 2.2.10(a).

Với 2.2.2.3(b), do  $m_0 \geq 2$  nên  $\frac{4}{m_0-1} > 0$ , kết hợp với 2.2.2.2(II)(b) ta có được 2.2.2.3(b).

Lập luận tương tự, từ 2.2.2.2(II)(c) và 2.2.2.2(II)(d) ta có 2.2.2.3(c) và 2.2.2.3(d).

### **2.2.2.4. Định lý**

Cho  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$  là cứng affine và là tập con của  $k$ . Đặt  $P(X) = (X - u_1) \dots (X - u_n)$  thỏa mãn giả thiết I và  $P'(X)$  như trong (1). Giả sử  $P$  không thỏa mãn (1A), (1C) hoặc (1D).

(I) Giả sử rằng  $f$  và  $g$  chung nhau  $\mathcal{U}$  trên  $\bar{S}$

(a) IM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 4|S|$  nếu  $n \geq 2l + 13$ ;

(b) CM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 22g - 8 + 4|S|$  nếu  $n \geq 2l + 7$ .

(II) Giả sử rằng  $f$  và  $g$  là các  $S$ -nguyên chung nhau  $\mathcal{U}$  trên  $\bar{S}$

(a) IM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 26g - 20 + 12|S|$  nếu  $n \geq 2l + 6$ ;

(b) CM, khi đó  $h(f) + h(g) \leq 22g - 8 + 10|S|$  nếu  $n \geq 2l + 3$ .

### **Chứng minh**

Từ 2.2.2.2(I)(a) ta có 2.2.2.4.(I)(a).

Với 2.2.2.4(I)(b), do  $m_0 \geq 2$  nên  $\frac{4}{m_0-1} > 0$ , kết hợp với 2.2.2.2(I)(b) ta có 2.2.2.4(I)(b).

Lập luận tương tự, từ 2.2.2.2(I)(c) và 2.2.2.2(I)(d) ta suy ra được 2.2.2.4(II)(a) và 2.2.2.4(II)(b)

## KẾT LUẬN

Luận văn trình bày một số vấn đề về tập xác định duy nhất và đa thức duy nhất cho các hàm phân hình trên trường không Acsimet. Các kết quả chính của luận văn như sau:

1. Trình bày các khái niệm, và các tính chất cơ bản, cần thiết cho việc nghiên cứu tập xác định duy nhất và đa thức duy nhất cho các hàm phân hình trên trường không Acsimet. Cụ thể gồm: Trường định chuẩn không Acsimet, trường số  $p$ -adic. Hàm chỉnh hình và hàm phân hình trên trường các số phức  $p$ -adic. Các trường hàm đại số và số chiều của đa tạp xạ ảnh. Đường cong đại số. Giống của đường cong đại số.
2. Đưa ra các điều kiện cần và đủ để một đa thức là duy nhất mạnh: Các định lý 2.1.4.1 và 2.1.4.2, và các điều kiện cần và đủ để một tập là xác định duy nhất: Các định lý 2.2.2.3 và 2.2.2.4.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ta Thi Hoai An and Julie Tzu-yueh Wang, *Unique range sets and uniqueness polynomials for algebraic curves*, Transactions of the American mathematical society, Volume 539, Number 3, March 2007, Page 937-964.
2. Neal Koblicz, *p-adic numbers, p-adic analysis, and Zeta-functions*, 1948.
3. William Fulton, *Algebraic curves*, January 28, 2008
4. W.A.Cherry, *Hyperbolic p-adic analytic spaces*, 1993.
5. William Cherry, *A non-Archimedean analogue of the Kobayashi semi-distance and its non-degeneracy on Abelian varieties*, Illinois Journal of Mathematics, Volume 40, Number 1, Spring 1996.
6. A. Sauer, *Uniqueness theorems for holomorphic functions on compact Riemann surfaces*, New Zealand J. Math. 30 (2001), 177-181. MR1877545 (2002k:30078)
7. A. Schweizer, *Shared values of meromorphic functions on compact Riemann surfaces*, Arch. Math. (Basel) 84 (2005), 71–78. MR2106406 (2005k:30063)
8. F. Gross, *Factorization of meromorphic functions and some open problems in complex analysis*, Proc. Conf. Univ. Kentucky, Lexington, KY, 1976, Lecture Notes in Math. 599, Springer-Verlag, 1977. MR0450529 (56:8823)